Espacios vectoriales

Definición y ejemplos

El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$:

$$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, .)$$

El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$:

$$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, .)$$

$$(+) \quad \boxed{X + Y := (X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n)}$$

El espacio vectorial $\mathbb{K}^n$:

$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, .)$

$$(+) \quad \boxed{X + Y := (X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n)}$$

$$(.) \quad \boxed{\alpha . X := (\alpha X_1, \ldots, \alpha X_n)}$$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $X + O = X \qquad \forall X \in \mathbb{K}^n$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $X + O = X \qquad \forall X \in \mathbb{K}^n$

[S4] TODO X TIENE OPUESTO:

$$\forall X \in \mathbb{K}^n \quad \exists (-X) \in \mathbb{K}^n :$$

$$X + (-X) = O$$

Propiedades $(\,.\,)$

[P1] Asociativa: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{K}^n$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{K}^n$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{K}^n$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

[P4] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}^n$:

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$$

$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, .)$ es un ejemplo

de espacio vectorial

Espacio vectorial - definición

Se dice que $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si

Espacio vectorial - definición

Se dice que $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si

- $\mathbb{K}$ es un cuerpo

Espacio vectorial - definición

Se dice que $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si

- $\mathbb{K}$ es un cuerpo

y las operaciones

$$\begin{aligned} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (X, Y) &\mapsto X + Y \end{aligned}$$

Espacio vectorial - definición

Se dice que $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si

- $\mathbb{K}$ es un cuerpo

y las operaciones

$$\begin{aligned} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (X, Y) &\mapsto X + Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (\alpha, X) &\mapsto \alpha . X \end{aligned}$$

Espacio vectorial - definición

Se dice que $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ es un espacio vectorial si

- $\mathbb{K}$ es un cuerpo

y las operaciones

$$\begin{aligned} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (X, Y) &\mapsto X + Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (\alpha, X) &\mapsto \alpha . X \end{aligned}$$

cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $X + O = X \qquad \forall X \in \mathbb{V}$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $X + O = X \qquad \forall X \in \mathbb{V}$

[S4] TODO X TIENE OPUESTO: $\forall X \in \mathbb{V} \quad \exists(-X) \in \mathbb{V}:$

$$X + (-X) = O$$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{V}$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{V}$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{V}$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

[P4] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{V}$:

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$$

Otros ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo 1 - las funciones

Sea

$$\mathcal{F} = \{ f : X \to \mathbb{K} : f \text{ función } \}$$

donde X conjunto cualquiera, $\mathbb{K}$ cuerpo.

Ejemplo 1 - las funciones

Sea

$$\mathcal{F} = \{ f : X \to \mathbb{K} : f \text{ función } \}$$

donde X conjunto cualquiera, $\mathbb{K}$ cuerpo.

- $+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X$$

Ejemplo 1 - las funciones

Sea

$$\mathcal{F} = \{ f : X \to \mathbb{K} : f \text{ función } \}$$

donde X conjunto cualquiera, $\mathbb{K}$ cuerpo.

- $+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X$$

- $. : \mathbb{K} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$(\alpha . f)(x) := \alpha . f(x) \qquad x \in X$$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f + g = g + f$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f + g = g + f$

[S2] ASOCIATIVA: $(f + g) + h = f + (g + h)$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f + g = g + f$

[S2] ASOCIATIVA: $(f + g) + h = f + (g + h)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $f + O = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}$: ?

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f + g = g + f$

[S2] ASOCIATIVA: $(f + g) + h = f + (g + h)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $f + O = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}$:

$$O(x) := 0 \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X$$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f + g = g + f$

[S2] ASOCIATIVA: $(f + g) + h = f + (g + h)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $f + O = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}$:

$$O(x) := 0 \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X$$

[S4] TODO X TIENE OPUESTO: $\forall f \in \mathcal{F} \quad \exists (-f) \in \mathcal{F}:$

$$f + (-f) = O$$

Propiedades $(+)$

[S1] CONMUTATIVA: $f+g=g+f$

[S2] ASOCIATIVA: $(f+g)+h=f+(g+h)$

[S3] $\exists$ NEUTRO $+$: $f+O=f \qquad \forall f\in\mathcal{F}$:

$$O(x):=0\in\mathbb{K}\quad \forall x\in X$$

[S4] TODO X TIENE OPUESTO: $\forall f\in\mathcal{F}\quad \exists(-f)\in\mathcal{F}:$

$$f+(-f)=O$$

$$-f(x):=-f(x)\quad \forall x\in X$$

Propiedades $(\,.\,)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

Propiedades $(\,.\,)$

[P1] Asociativa: $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

[P2] $\exists$ Neutro $(\,.\,)$ $1f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}$

Propiedades $(.)$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:
$(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

Propiedades $(.)$

[P1] Asociativa: $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

[P2] $\exists$ Neutro $(.)$ $1f = f \quad \forall f \in \mathcal{F}$

[P3] Distributiva respecto $+$ en $\mathbb{K}$:
$(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

[P4] Distributiva respecto $+$ en $\mathcal{F}$:
$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

Ejemplo 2 - Las sucesiones

$$\mathcal{S} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K} \quad \forall n\}$$

Ejemplo 2 - Las sucesiones

$$\mathcal{S} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K} \quad \forall n\}$$

- $+ : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$\{a_n\}_n + \{b_n\}_n := \{a_n + b_n\}_n$$

Ejemplo 2 - Las sucesiones

$$\mathcal{S} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K} \quad \forall n\}$$

- $+ : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$\{a_n\}_n + \{b_n\}_n := \{a_n + b_n\}_n$$

- $. : \mathbb{K} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$\alpha.\{a_n\}_n := \{\alpha.a_n\}$$

Más ejemplos

- Las matrices

Más ejemplos

- Las matrices
- Los polinomios

Más ejemplos

- Las matrices
- Los polinomios
- El espacio vectorial trivial

Propiedades generales de los e.v.

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

El elemento neutro O es único

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

Para cada $X \in \mathbb{V}$, el opuesto $-X$ es único

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$0.X = O \qquad \forall X \in \mathbb{V}$$

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\alpha.O = O \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\alpha.X = O \qquad \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{o} \quad X = O$$

Proposición

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$(-1).X = -X \qquad \forall X \in \mathbb{V}$$

FIN

Definición - cuerpo

$(\mathbb{K}, +, .)$ es un cuerpo si las operaciones

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha . \beta \end{aligned}$$

cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades $+$

S1 CONMUTATIVA: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

S2 ASOCIATIVA: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

S3 $\exists$ NEUTRO $+$: $\exists 0 \in \mathbb{K} /$

$$\alpha + 0 = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

S4 TODO α TIENE OPUESTO: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \exists (-\alpha) \in \mathbb{K}:$

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

Propiedades .

P1 CONMUTATIVA: $\alpha.\beta = \beta.\alpha$

P2 ASOCIATIVA $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$

P3 $\exists$ NEUTRO $(.)$ $\exists 1 \in \mathbb{K}/$

$$1.\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Distributiva

$$(\alpha + \beta).\gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma$$

*