Subespacios vectoriales

Definición. Ejemplos. Operaciones con s.e.v.

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.,

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

llamamos a $\mathbb{S}$ $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si :

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

llamamos a $\mathbb{S}$ $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si :

- $\mathbb{S} \neq \emptyset$

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

llamamos a $\mathbb{S}$ $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si :

- $\mathbb{S} \neq \emptyset$
- $\mathbb{S} + \mathbb{S} \subset \mathbb{S}$

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

llamamos a $\mathbb{S}$ $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si :

- $\mathbb{S} \neq \emptyset$
- $\mathbb{S} + \mathbb{S} \subset \mathbb{S}$
- $\mathbb{K}\mathbb{S} \subset \mathbb{K}$

s.e.v. - definición

Dados $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

llamamos a $\mathbb{S}$ $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ si :

- $\mathbb{S} \neq \emptyset$
- $\mathbb{S} + \mathbb{S} \subset \mathbb{S}$
- $\mathbb{K}\mathbb{S} \subset \mathbb{K}$

Lo anotamos

$$\mathbb{S} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$$

Ejemplo 1 - $\ker(A)$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, el conjunto

$$\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = \overrightarrow{0}\}$$

es un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$

Ejemplo 1 - $\ker(A)$

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, el conjunto

$$\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = \overrightarrow{0}\}$$

es un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$

Ejemplo 2

El conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2

El conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Pregunta: ¿Podemos escribir $\mathbb{S}$ como $\ker(A)$ para algún A?

Ejemplo 3

El conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

no es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Dado $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$\mathbb{S}$ s.e.v. de $\mathbb{V}$ $\quad \Leftrightarrow \quad$ $(\mathbb{S}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tal que $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$

Demostración $\Rightarrow$

[S1] CONMUTATIVA: $X + Y = Y + X$

[S2] ASOCIATIVA: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

[S3] $\exists O \in \mathbb{S}$ TAL QUE: $X + O = X \qquad \forall X \in \mathbb{S}$

[S4] TODO X TIENE OPUESTO: $\forall X \in \mathbb{S} \quad \exists (-X) \in \mathbb{S}:$

$$X + (-X) = O$$

Demostración $\Rightarrow$

[P1] ASOCIATIVA: $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$

[P2] $\exists$ NEUTRO $(.)$ $1X = X \quad \forall X \in \mathbb{S}$

[P3] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{K}$:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

[P4] DISTRIBUTIVA RESPECTO $+$ EN $\mathbb{S}$:

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$$

Demostración $\Leftarrow$

ejercicio

Corolario

$\mathbb{S}$ s.e.v. de $\mathbb{V} \quad \Rightarrow \quad O \in \mathbb{S}$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ función$\}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ función}\}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ continua }\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ función}\}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ continua }\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{F}(\mathbb{R})$
- $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ diferenciable}\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ función$\}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$

- $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F} : f$ continua $\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{F}(\mathbb{R})$

- $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f$ diferenciable$\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{C}(\mathbb{R})$

- $\mathbb{R}[x] = \{$polinomios de variable real$\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} C^1(\mathbb{R})$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathbb{R}_n^*[x] = \{$polinomios reales de grado $n\}$ no es un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathbb{R}_n^*[x] = \{$polinomios reales de grado $n\}$ no es un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$

- $$\mathbb{R}_n[x] = \{\text{polinomios reales de grado } \leq n\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{R}[x]$$

Ejemplo 4 - espacios de funciones

- $\mathbb{R}_n^*[x] = \{$polinomios reales de grado $n\}$
  no es un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$

- $$\mathbb{R}_n[x] = \{\text{polinomios reales de grado } \leq n\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{R}[x]$$

- $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ acotada}\} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$\cap$ de s.e.v.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}} \\ \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{T} \subset \mathbb{V}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \subset \mathbb{V}}$$

$\cup$ de s.e.v.

sin embargo

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}} \\ \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{T} \subset \mathbb{V}} \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \subset \mathbb{V}}$$

$+$ de s.e.v.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}} \\ \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{T} \subset \mathbb{V}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{S} + \mathbb{T} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$$

$+$ de s.e.v.

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}} \\ \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{T} \subset \mathbb{V}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{V}}$$

donde

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} := \{X + Y : X \in \mathbb{S} \quad Y \in \mathbb{T}\}$$