Combinaciones lineales

Subespacios generados

Generador

C.L.

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

C.L.

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

se llama combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ a

C.L.

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

se llama combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

C.L.

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

se llama combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

Ejemplo 1

$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$, tenemos que

$$5x^4 + x^2 + 3x + 4$$

Ejemplo 1

$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$, tenemos que

$$5x^4 + x^2 + 3x + 4$$

es c.l. de las funciones:

$$x^4$$

$$x^2$$

$$x$$

$$1$$

Ejemplo 2

$\mathbb{V} = C(\mathbb{R})$ la función constante

$$f_0(x) \equiv 1$$

Ejemplo 2

$\mathbb{V} = C(\mathbb{R})$ la función constante

$$f_0(x) \equiv 1$$

es c.l. de las funciones

$$f(x) = \sin^2 x$$
$$g(x) = \cos^2 x$$

Ejemplo 2

$\mathbb{V} = C(\mathbb{R})$ la función constante

$$f_0(x) \equiv 1$$

también de

$$p_1(x) = x^2 - 1$$
$$p_2(x) = 2x^2 + 2$$

Ejemplo 2

$\mathbb{V} = C(\mathbb{R})$ la función constante

$$f_0(x) \equiv 1$$

¿es c.l. de

$$\begin{matrix} p_1(x) = x^2 - 1 \\ p_3(x) = x + 1 \end{matrix} \; ?$$

s.e.v. generado

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

s.e.v. generado

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

llamamos subespacio generado por $\mathcal{A}$

s.e.v. generado

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

llamamos subespacio generado por $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las c.l. de $\mathcal{A}$

s.e.v. generado

$(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v.

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

llamamos subespacio generado por $\mathcal{A}$
al conjunto de todas las c.l. de $\mathcal{A}$

Anotamos

$$[\mathcal{A}]$$

Proposición

Sean $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

Proposición

Sean $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

entonces

$$[\mathcal{A}] \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$$

Proposición

Sean $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

entonces

$$[\mathcal{A}] \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$$

el subespacio generado es un subespacio

Proposición

Sean $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$$

entonces

$$[\mathcal{A}] \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$$

el subespacio generado es un subespacio

Proposición

Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$ no vacío,

Proposición

Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$ no vacío,

$[\mathcal{A}]$ es la intersección de todos los s.e.v. de $\mathbb{V}$ que contienen a $\mathcal{A}$

Proposición

Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{V}$ no vacío,

$[\mathcal{A}]$ es la intersección de todos los s.e.v. de $\mathbb{V}$ que contienen a $\mathcal{A}$

Ejemplo 1

en $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 1

en $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathcal{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

Ejemplo 1

en $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathcal{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

¿qué s.e.v. es este?

Ejemplo 1

en $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathcal{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\}$$

s.e.v de las matrices simétricas

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas:

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas: ($A = -A^t$)

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas: ($A = -A^t$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas: ($A = -A^t$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad -A^t = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas: ($A = -A^t$)

$$AS(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{13}, a_{12}, a_{23} \in \mathbb{K} \right\}$$

Ejemplo 2

En $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, encontrar un generador de las matrices antisimétricas: ($A = -A^t$)

$$AS(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{13}, a_{12}, a_{23} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposición

Dado $\mathbb{V}$ e.v. y

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

Proposición

Dado $\mathbb{V}$ e.v. y

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

si algún v_k es c.l. de los restantes vectores, entonces

Proposición

Dado $\mathbb{V}$ e.v. y

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

si algún v_k es c.l. de los restantes vectores, entonces

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n]$$

Proposición

Dado $\mathbb{V}$ e.v. y

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

si algún v_k es c.l. de los restantes vectores, entonces

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n]$$

generador

$\mathbb{V}$ e.v.

generador

$\mathbb{V}$ e.v. $\quad \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}}$

generador

$\mathbb{V}$ e.v. $\quad \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}}$

decimos que $\mathcal{A}$ es generador de $\mathbb{S}$

generador

$\mathbb{V}$ e.v. $\quad \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}}$

decimos que $\mathcal{A}$ es generador de $\mathbb{S}$

si

$$[\mathcal{A}] = \mathbb{S}$$

generador

$\mathbb{V}$ e.v. $\quad \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}}$

decimos que $\mathcal{A}$ es generador de $\mathbb{S}$

si

$$[\mathcal{A}] = \mathbb{S}$$

Anotamos

$$\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{S}$$

Ejemplo 1

En $\mathbb{R}[x]$, sea el conjunto

$$\mathcal{A} = \{1 + x^2, 2 + 2x^2, 1 + x + x^3, 3 + x + 2x^2 + x^3\}$$

Ejemplo 1

En $\mathbb{R}[x]$, sea el conjunto

$$\mathcal{A} = \{1 + x^2, 2 + 2x^2, 1 + x + x^3, 3 + x + 2x^2 + x^3\}$$

¿cuál es el espacio $[\mathcal{A}]$?

Ejemplo 1

En $\mathbb{R}[x]$, sea el conjunto

$\mathcal{A} = \{1 + x^2, 2 + 2x^2, 1 + x + x^3, 3 + x + 2x^2 + x^3\}$

¿cuál es el espacio $[\mathcal{A}]$?

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= 1 + x^2 \\
p_2(x) &= 2 + 2x^2 \\
p_3(x) &= 1 + x + x^3 \\
p_4(x) &= 3 + x + 2x^2 + x^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

En $\mathbb{R}[x]$, sea el conjunto

$\mathcal{A} = \{1 + x^2, 2 + 2x^2, 1 + x + x^3, 3 + x + 2x^2 + x^3\}$

¿cuál es el espacio $[\mathcal{A}]$?

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + x^2 \\ p_2(x) &= 2 + 2x^2 \\ p_3(x) &= 1 + x + x^3 \\ p_4(x) &= 3 + x + 2x^2 + x^3 \end{aligned}$$

encontrar un generador donde no “sobre" ninguno

Ejemplo 1

$\mathbb{R}[x]$ polinomios reales,

Ejemplo 1

$\mathbb{R}[x]$ polinomios reales,

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Ejemplo 1

$\mathbb{R}[x]$ polinomios reales,

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

¿quién es $[\mathcal{A}]$?

Ejemplo 2

$\mathcal{S}$ espacio de sucesiones,

Ejemplo 2

$\mathcal{S}$ espacio de sucesiones,

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Ejemplo 2

$\mathcal{S}$ espacio de sucesiones,

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\overbrace{0000}^{n}1000\dots)$$

Ejemplo 2

$\mathcal{S}$ espacio de sucesiones,

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\overbrace{0000}^{n}1000\dots)$$

- ¿quién es $[\mathcal{A}]$?