Bases & dimensión

Coordenadas

Bases canónicas

Espacios de dimensión infinita

Base

Dado $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., un conjunto

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Base

Dado $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., un conjunto

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

se llama base de $\mathbb{V}$ si

Base

Dado $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., un conjunto

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

se llama base de $\mathbb{V}$ si

- $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V}$

Base

Dado $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v., un conjunto

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

se llama base de $\mathbb{V}$ si

- $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V}$
- $\mathcal{A}$ l.i.

Clase pasada

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

generador l.i. de $\mathbb{V}$

Clase pasada

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

base de $\mathbb{V}$,

Clase pasada

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

base de $\mathbb{V}$, entonces $\forall\, v \in \mathbb{V}$

$$\exists! \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

tal que

Clase pasada

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. y

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$$

base de $\mathbb{V}$, entonces $\forall\ v \in \mathbb{V}$

$$\exists! \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

tal que

$$v = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Coordenadas

Dada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{base de } \mathbb{V}$$

Coordenadas

Dada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{base de } \mathbb{V}$$

se llama coordenadas de $v \in \mathbb{V}$ en base $\mathcal{B}$ al vector de $\mathbb{K}^n$:

Coordenadas

Dada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{base de } \mathbb{V}$$

se llama coordenadas de $v \in \mathbb{V}$ en base $\mathcal{B}$ al vector de $\mathbb{K}^n$:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

que verifica

Coordenadas

Dada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{base de } \mathbb{V}$$

se llama coordenadas de $v \in \mathbb{V}$ en base $\mathcal{B}$ al vector de $\mathbb{K}^n$:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

que verifica

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Bases canónicas

Base canónica de $\mathbb{K}^n$

Llamamos base canónica de $\mathbb{K}^n$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

Base canónica de $\mathbb{K}^n$

Llamamos base canónica de $\mathbb{K}^n$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

donde:

$$e_k = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^{k}, \dots, 0)$$

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

donde E_{ij} vale

- 1 en el elemento e_{ij}
- 0 en los demás elementos

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

en esa base, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

queda

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn}$$

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn}$$

las coordenadas de A en la base canónica quedan:

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Llamamos base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ al conjunto:

$$\mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn}$$

las coordenadas de A en la base canónica quedan:

$$(A)_{\mathcal{C}} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn})$$

Base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$

La base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$ es:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$

La base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$ es:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

las coordenadas del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en la base canónica $\mathcal{C}$ son:

Base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$

La base canónica de $\mathbb{K}_n[x]$ es:

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

las coordenadas del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en la base canónica $\mathcal{C}$ son:

$$(p)_{\mathcal{C}} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

Ejemplo 1

Se pueden considerar también las coordenadas en otras bases.

Ejemplo 1

Se pueden considerar también las coordenadas en otras bases. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$$

es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejemplo 1

Se pueden considerar también las coordenadas en otras bases. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$$

es base de $\mathbb{R}_2[x]$. Las coordenadas de

$$p(x) = 5x^2 + 2x + 1$$

en esta base quedan

Ejemplo 1

Se pueden considerar también las coordenadas en otras bases. El conjunto

$$\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x + 1, 1\}$$

es base de $\mathbb{R}_2[x]$. Las coordenadas de

$$p(x) = 5x^2 + 2x + 1$$

en esta base quedan

$$(p)_{\mathcal{B}} = (5, 2, 4)$$

Ejemplo 2

Las bases canónicas dependen de $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, .)$

Ejemplo 2

Las bases canónicas dependen de $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, .)$
- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, .)$

Ejemplo 2

Las bases canónicas dependen de $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, .)$
- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, .)$

tienen bases canónicas diferentes

Dimensión

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tiene una base de n elementos,

Dimensión

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tiene una base de n elementos, entonces se define dimensión de $\mathbb{V}$ como

Dimensión

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tiene una base de n elementos, entonces se define dimensión de $\mathbb{V}$ como

$$\dim(\mathbb{V}) := n$$

Dimensión

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tiene una base de n elementos, entonces se define dimensión de $\mathbb{V}$ como

$$\dim(\mathbb{V}) := n$$

El espacio trivial $\mathbb{V} = \{O\}$ no tiene base

Dimensión

Si $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, +, .)$ e.v. tiene una base de n elementos, entonces se define dimensión de $\mathbb{V}$ como

$$\dim(\mathbb{V}) := n$$

El espacio trivial $\mathbb{V} = \{O\}$ no tiene base
en este caso se define

$$\dim(\mathbb{V}) := 0$$

Pregunta

¿ por qué todas las bases tienen la misma cantidad de elementos?

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ es l.i.} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ es l.i.} \\ \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V} \end{array}\right\}$$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ es l.i.} \\ \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{A}$$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ es l.i.} \\ \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{A}$$

Corolario:

Todas las bases tienen la misma cantidad de elementos

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ es l.i.} \\ \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{A}$$

Corolario:

Todas las bases tienen la misma cantidad de elementos

Proposición

Si el e.v. $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n \geq 1$, entonces

- $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ es l.i.} \\ \#\mathcal{A} = n \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ es base

Proposición

Si el e.v. $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n \geq 1$, entonces

- $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ es l.i.} \\ \#\mathcal{A} = n \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ es base
- $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ es generador} \\ \#\mathcal{A} = n \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ es base

Proposición

Si el e.v. $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n \geq 1$, entonces

- $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ es l.i.} \\ \#\mathcal{A} = n\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ es base
- $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ es generador} \\ \#\mathcal{A} = n\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{A}$ es base

Corolario 1

Si el e.v. $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n \geq 1$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{s.e.v.}}{\mathbb{S} \subset \mathbb{V}} \\ \dim(\mathbb{S}) = n \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{S} = \mathbb{V}$$

Corolario 2

Si el e.v. $\mathbb{V}$ tiene dimensión $n \geq 1$, entonces

$$\mathbb{S} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V} \Longrightarrow \dim(\mathbb{S}) \leq n$$

Proposición

sea $\mathbb{V}$ e.v. de dimensión n, entonces

- Para todo $\mathcal{C}$ l.i.

Proposición

sea $\mathbb{V}$ e.v. de dimensión n, entonces

- Para todo $\mathcal{C}$ l.i.
  - existe $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ que es base

Proposición

sea $\mathbb{V}$ e.v. de dimensión n, entonces

- Para todo $\mathcal{C}$ l.i.
  - existe $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ que es base
- para todo $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V}$

Proposición

sea $\mathbb{V}$ e.v. de dimensión n, entonces

- Para todo $\mathcal{C}$ l.i.
  - existe $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ que es base
- para todo $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V}$
  - existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ que es base

Proposición

sea $\mathbb{V}$ e.v. de dimensión n, entonces

- Para todo $\mathcal{C}$ l.i.
  - existe $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ que es base
- para todo $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathbb{V}$
  - existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ que es base

Dimensión infinita

Si un e.v. $\mathbb{V}$ contiene un conjunto l.i. con infinitos vectores,

Dimensión infinita

Si un e.v. $\mathbb{V}$ contiene un conjunto l.i. con infinitos vectores,

entonces se dice que $\mathbb{V}$ tiene dimensión infinita

Ejemplo 1

En el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales,

Ejemplo 1

En el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Ejemplo 1

En el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

- es linealmente independiente

Ejemplo 1

En el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

- es linealmente independiente
- es generador

Ejemplo 1

En el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

- es linealmente independiente
- es generador
- $\mathbb{R}[x]$ tiene dimensión ∞

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones,

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\overbrace{0000}^{n}1000\ldots)$$

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\underbrace{0000}_{n}1000\dots)$$

- es linealmente independiente

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\underbrace{0000}_{n}1000\dots)$$

- es linealmente independiente
- no es generador

Ejemplo 2

En el espacio $\mathcal{S}$ de sucesiones, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde

$$e_n = (\overbrace{0000}^{n}1000\ldots)$$

- es linealmente independiente
- no es generador
- $\mathcal{S}$ tiene dimensión ∞

Suma directa

Recordar que dados $\mathbb{S}, \mathbb{T} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$,

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$$

Suma directa

Recordar que dados $\mathbb{S}, \mathbb{T} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$,

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{\overrightarrow{0}\}$$

Proposición

$\mathbb{V}$ e.v.

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

Proposición

$\mathbb{V}$ e.v.

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{V} = [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_n]$

Proposición

$\mathbb{V}$ e.v., $\mathbb{S}, \mathbb{T} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$

$$\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$$

Proposición

$\mathbb{V}$ e.v., $\mathbb{S}, \mathbb{T} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$

$$\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T} \quad \Longrightarrow \quad \dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T})$$