Transformaciones lineales

Definición

Ejemplos

Propiedades

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$,

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$,
llamamos transformación lineal

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$,
llamamos transformación lineal a cualquier función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

que verifique

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$,
llamamos transformación lineal a cualquier función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

que verifique

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$,
llamamos transformación lineal a cualquier función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

que verifique

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo $v \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.
Entonces $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ determina

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.
Entonces $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ determina

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.
Entonces $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ determina

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

- $A.(X+Y) = A.X + A.Y \qquad X, Y \in \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.
Entonces $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ determina

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

- $A.(X+Y) = A.X + A.Y \qquad\qquad X, Y \in \mathbb{K}^n$
- $A.(\lambda X) = \lambda A.X \qquad\qquad X \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

Ejemplo 1 - producto por una matriz

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ y $\mathbb{W} = \mathbb{K}^m$.
Entonces $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ determina

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

- $A.(X+Y) = A.X + A.Y \qquad X, Y \in \mathbb{K}^n$
- $A.(\lambda X) = \lambda A.X \qquad X \in \mathbb{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow A$ es una transformación lineal

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n,

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

para cada $v \in \mathbb{V}$ teníamos

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

para cada $v \in \mathbb{V}$ teníamos

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

para cada $v \in \mathbb{V}$ teníamos

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

si

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

para cada $v \in \mathbb{V}$ teníamos

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

si

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

la transformación

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$$

es lineal

Ejemplo 2 - coordenadas

Dado $\mathbb{V}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y dada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$

para cada $v \in \mathbb{V}$ teníamos

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

si

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

la transformación

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$$

es lineal

Ejemplo 3 - derivada

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,

Ejemplo 3 - derivada

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,
la transformación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

verifica

Ejemplo 3 - derivada

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,
la transformación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

verifica

- $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$

Ejemplo 3 - derivada

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,
la transformación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

verifica

- $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$
- $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$

Ejemplo 3 - derivada

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$,
la transformación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & df \end{array}$$

verifica

- $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$
- $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$

$\Rightarrow$ es lineal

Ejemplo 4 - integral definida

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

Ejemplo 4 - integral definida

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dado $a \in \mathbb{R}$, la transformación

$$\begin{array}{rccc} \int_a^{\cdot} : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

verifica

Ejemplo 4 - integral definida

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dado $a \in \mathbb{R}$, la transformación

$$\begin{array}{rccc} \int_a^{\cdot} : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

verifica

- $\int_a^x (f+g)(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$

Ejemplo 4 - integral definida

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,
dado $a \in \mathbb{R}$, la transformación

$$\begin{array}{rccc} \int_a^{\cdot} : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

verifica

- $\int_a^x (f+g)(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$
- $\int_a^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt$

Ejemplo 4 - integral definida

Sean $\mathbb{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ y $\mathbb{W} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,
dado $a \in \mathbb{R}$, la transformación

$$\begin{array}{rccc} \int_a^{\cdot} : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

verifica

- $\int_a^x (f+g)(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt$
- $\int_a^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt$

$\Rightarrow$ es lineal

Otros ejemplos

- producto escalar (con un vector fijo)

Otros ejemplos

- producto escalar (con un vector fijo)
- producto vectorial (con un vector fijo)

Otros ejemplos

- producto escalar (con un vector fijo)
- producto vectorial (con un vector fijo)
- determinante (respecto de una columna)

Otros ejemplos

- producto escalar (con un vector fijo)
- producto vectorial (con un vector fijo)
- determinante (respecto de una columna)
- vector proyección sobre un versor

Proposición

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$, la función

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

es lineal

$$\Updownarrow$$

Proposición

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$, la función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

es lineal

$$\Updownarrow$$

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

Proposición

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformación lineal

Proposición

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal

$$\Downarrow$$

$$T(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$$

Demostración

$$T(O_{\mathbb{V}})$$

Demostración

$$T(O_{\mathbb{V}}) = T(0.O_{\mathbb{V}})$$

Demostración

$$T(O_{\mathbb{V}}) = T(0.O_{\mathbb{V}}) = 0.T(O_{\mathbb{V}})$$

Demostración

$$T(O_{\mathbb{V}}) = T(0.O_{\mathbb{V}}) = 0.T(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$$

Teorema

Una transformación lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base.

Teorema

Una transformación lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base.

Es decir, si conocemos

$$T(\mathcal{B}) \quad \text{para alguna base } \mathcal{B} \quad \text{de } \mathbb{V}$$

Teorema

Una transformación lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base.

Es decir, si conocemos

$$T(\mathcal{B}) \quad \text{para alguna base } \mathcal{B} \quad \text{de } \mathbb{V}$$

entonces hay una única t.l. $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$
que en $\mathcal{B}$ vale $T(\mathcal{B})$

demostración - hay una

Si

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

demostración - hay una

Si

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

defino

$T(v) =$

demostración - hay una

Si

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

defino

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

demostración - hay una

Si

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

defino

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$$

demostración - hay una

Si

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

defino

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$$

T es lineal (Verificar)

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$T(v)$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$T(v) \quad = T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \end{aligned}$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \lambda_1 S(v_1) + \cdots + \lambda_n S(v_n) \end{aligned}$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \lambda_1 S(v_1) + \cdots + \lambda_n S(v_n) \\ &= S(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \end{aligned}$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \lambda_1 S(v_1) + \cdots + \lambda_n S(v_n) \\ &= S(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \qquad = S(v) \end{aligned}$$

demostración - es única

Si hay otra t.l. S que coincide con T en $\mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= \lambda_1 S(v_1) + \cdots + \lambda_n S(v_n) \\ &= S(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \qquad = S(v) \end{aligned}$$

$\square$

Proposición

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformación lineal biyectiva

$$\Downarrow$$

Proposición

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformación lineal biyectiva

$$\Downarrow$$

T lleva bases de $\mathbb{V}$ en bases de $\mathbb{W}$

Proposición

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal biyectiva

$$\Downarrow$$

T lleva bases de $\mathbb{V}$ en bases de $\mathbb{W}$