Método de eliminación de Gauss

Utilidad del método.
Transformaciones elementales.
Teorema Rouché-Frobenius

Método de eliminación de Gauss

La clase pasada presentamos el método de escalerización de Gauss, ahora:

- ¿Por qué sirve el método?

Método de eliminación de Gauss

La clase pasada presentamos el método de escalerización de Gauss, ahora:

- ¿Por qué sirve el método?
- Es decir:

Método de eliminación de Gauss

La clase pasada presentamos el método de escalerización de Gauss, ahora:

- ¿Por qué sirve el método?
- Es decir:
- ¿resuelve el sistema?

Método de eliminación de Gauss

La clase pasada presentamos el método de escalerización de Gauss, ahora:

- ¿Por qué sirve el método?
- Es decir:
- ¿resuelve el sistema?
- ¿es realizable (finito)?

Método de escalerización de Gauss

Para ver que el método sirve veremos que:

- todo sistema se escaleriza en una cantidad finita de transformaciones elementales

Método de escalerización de Gauss

Para ver que el método sirve veremos que:

- todo sistema se escaleriza en una cantidad finita de transformaciones elementales
- las transformaciones elementales no alteran el conjunto solución

Transformaciones elementales

Llamaremos transformación elemental a cualquiera de las siguientes operaciones:

Transformaciones elementales

Llamaremos transformación elemental a cualquiera de las siguientes operaciones:

- sumar a una ecuación un múltiplo de otra

Transformaciones elementales

Llamaremos transformación elemental a cualquiera de las siguientes operaciones:

- sumar a una ecuación un múltiplo de otra
- intercambiar de lugar dos ecuaciones

Transformaciones elementales

Llamaremos transformación elemental a cualquiera de las siguientes operaciones:

- sumar a una ecuación un múltiplo de otra
- intercambiar de lugar dos ecuaciones
- multiplicar una ecuación por $\alpha \neq 0$

Proposición

Las transformaciones elementales no alteran el conjunto solución.

Proposición

Las transformaciones elementales no alteran el conjunto solución.

Definición

Dos sistemas con el mismo conjunto solución se llaman sistemas equivalentes

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S)\left\{\begin{array}{c} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ A^iX = b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{array}\right.$$

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S)\begin{cases} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ A^iX = b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{cases}$$

$$A^iX = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S) \begin{cases} A^1 X = b_1 \\ \vdots \\ A^i X = b_i \\ \vdots \\ A^m X = b_m \end{cases} \qquad T.E. \quad \rightsquigarrow$$

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S) \left\{ \begin{array}{c} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ A^iX = b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{array} \right. \quad \overset{T.E.}{\rightsquigarrow} \quad (S') \left\{ \begin{array}{c} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ \alpha A^iX = \alpha b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{array} \right.$$

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S) \begin{cases} A^1 X = b_1 \\ \vdots \\ A^i X = b_i \\ \vdots \\ A^m X = b_m \end{cases} \overset{T.E.}{\rightsquigarrow} (S') \begin{cases} A^1 X = b_1 \\ \vdots \\ \alpha A^i X = \alpha b_i \\ \vdots \\ A^m X = b_m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X resuelve (S')

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S) \begin{cases} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ A^iX = b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{cases} \overset{T.E.}{\rightsquigarrow} (S') \begin{cases} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ \alpha A^iX = \alpha b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad X$ resuelve (S')

Proposición - Demostración

Ahora X resuelve $(S) \Rightarrow$

$$(S)\begin{cases} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ A^iX = b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{cases} \quad \overset{T.E.}{\rightsquigarrow} \quad (S')\begin{cases} A^1X = b_1 \\ \vdots \\ \alpha A^iX = \alpha b_i \\ \vdots \\ A^mX = b_m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad X$ resuelve (S')

Se demuestra análogamente para las otras T.E.

Proposición

Todo sistema se puede escalerizar en una cantidad finita de T.E.

Proposición

Toda matriz se puede escalerizar en una cantidad finita de T.E.

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0$

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0 \ldots\ldots$ 1

T.E.

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0 \ldots\ldots$ 1 T.E.
Conseguir matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0 \ldots\ldots$ 1 T.E.
Conseguir matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m-1)$ T.E.

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0 \ldots\ldots$ 1 T.E.
Conseguir matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m-1)$ T.E.

Calcular cuántos pasos se necesitan para terminar de escalerizar

Proposición - Demostración

F_1 con primer coeficiente $\neq 0 \ldots\ldots$ 1 T.E.
Conseguir matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m-1)$ T.E.

Calcular cuántos pasos se necesitan para terminar de escalerizar

Conclusión

Estas dos proposiciones garantizan que el M.E. Gauss es un buen algoritmo para resolver (S)

Recordemos

Sistema $m \times n$

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Notación matricial

Matriz asociada a (S)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notación matricial

Matriz ampliada de (S)

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Observaciones

- Una matriz A puede tener muchas formas escalerizadas A_E

Observaciones

- Una matriz A puede tener muchas formas escalerizadas A_E
- Todas las formas escalerizadas de A tienen la misma cantidad de escalones

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$ $\Leftrightarrow$ incompatible

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$ $\Leftrightarrow$ incompatible

escalones A_E $<$ columnas A_E

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$ $\Leftrightarrow$ incompatible

escalones A_E $<$ columnas A_E $\Leftrightarrow$ compatible indeterminado

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$ $\Leftrightarrow$ incompatible

escalones A_E $<$ columnas A_E $\Leftrightarrow$ compatible indeterminado

escalones A_E $=$ columnas A_E

Teorema de Rouché-Frobenius

escalones A_E $<$ escalones $(A|b)_E$ $\Leftrightarrow$ incompatible

escalones A_E $<$ columnas A_E $\Leftrightarrow$ compatible indeterminado

escalones A_E $=$ columnas A_E $\Leftrightarrow$ compatible determinado

En particular, un sistema con más incógnitas que ecuaciones no puede ser compatible determinado

Matriz escalerizada

- todas las filas, salvo quizás la primera, comienzan con una sucesión de ceros

Matriz escalerizada

- todas las filas, salvo quizás la primera, comienzan con una sucesión de ceros
- cada fila comienza con al menos un cero más que la fila superior

Matrices

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrices

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- También $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$

Matrices

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- También $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$
- Dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas en las mismas posiciones

Ejemplo 1

La matriz

$$A = \left(\frac{1}{2i+j}\right)_{j=1,2,3}^{i=1,2}$$

- ¿cuántas filas tiene?

Ejemplo 1

La matriz

$$A = \left(\frac{1}{2i+j} \right)_{j=1,2,3}^{i=1,2}$$

- ¿cuántas filas tiene?
- ¿cuántas columnas?

Ejemplo 1

La matriz

$$A = \left(\frac{1}{2i+j} \right)_{j=1,2,3}^{i=1,2}$$

- ¿cuántas filas tiene?
- ¿cuántas columnas?
- ¿cuáles son los coeficientes?

Ejemplo 1

$$A = \left(\quad \right)$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

matriz 2×3

Ejemplo 2

Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

son diferentes.