Operaciones con transformaciones lineales

Suma y Producto por un escalar
Composición e Inversa
Matriz asociada

transformaciones lineales

Dados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ e.v. sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se llama transformación lineal a toda función

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

que verifique

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

Proposición

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal

$$\Downarrow$$

$$T(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$$

T.L. inducida por una matriz

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. tales que $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$.

T.L. inducida por una matriz

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. tales que $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$.

Entonces cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ define una T.L.:

T.L. inducida por una matriz

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. tales que $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$.

Entonces cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ define una T.L.:

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m$$

T.L. inducida por una matriz

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. tales que $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$.

Entonces cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ define una T.L.:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m & \\ \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}^{-1} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}^{-1} \end{array}$$

T.L. inducida por una matriz

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. tales que $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$.

Entonces cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ define una T.L.:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m & \\ \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}^{-1} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}^{-1} \\ & \mathbb{V} & \xrightarrow{T_A} & \mathbb{W} & \end{array}$$

Ejemplo

$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_3[x]$ con las respectivas bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A(ax^2 + bx + c) =$$

Ejemplo

$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_3[x]$ con las respectivas bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A(ax^2 + bx + c) = \ \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}^{-1} A(a, b, c)$$

Ejemplo

$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_3[x]$ con las respectivas bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_A(ax^2 + bx + c) &= \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}^{-1} A(a, b, c) \\ &= \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}^{-1}(a + c, b, a + c, b) \end{aligned}$$

Ejemplo

$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_3[x]$ con las respectivas bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_A(ax^2 + bx + c) &= \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}^{-1} A(a, b, c) \\ &= \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}^{-1}(a + c, b, a + c, b) \\ &= (a + c)x^3 + bx^2 + (a + c)x + b \end{aligned}$$

Matriz asociada - definición

Nos interesa ahora ver si dada una T.L.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{T} \mathbb{W}$$

Matriz asociada - definición

Nos interesa ahora ver si dada una T.L.

$$\mathbb{V} \quad \xrightarrow{T} \quad \mathbb{W}$$

hay una transformación lineal A

Matriz asociada - definición

Nos interesa ahora ver si dada una T.L.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{T} \mathbb{W}$$

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m$$

hay una transformación lineal A

Matriz asociada - definición

Nos interesa ahora ver si dada una T.L.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{T} & \mathbb{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

hay una transformación lineal Aque verifique $\nwarrow$

Matriz asociada - definición

La matriz A que verifica:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{V} & \stackrel{T}{\longrightarrow} & \mathbb{W} & \\ \mathrm{coord}_{\mathcal{A}} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}} \\ & \mathbb{K}^n & \stackrel{A}{\longrightarrow} & \mathbb{K}^m & \end{array}$$

se llama matriz asociada a T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

Matriz asociada - definición

La matriz A que verifica:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{V} & \xrightarrow{T} & \mathbb{W} & \\ \mathrm{coord}_{\mathcal{A}} & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}} \\ & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m & \end{array}$$

se llama matriz asociada a T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y se simboliza:

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$$

Ejemplo 1

Consideremos la función derivada:

$$d : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$$

con las respectivas bases canónicas
¿cuál es la matriz asociada a d en las bases canónicas?

Ejemplo 2

Fijemos un vector $Y \in \mathbb{R}^3$, y consideremos la T.L.

$$\begin{aligned} T_Y : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto X \cdot Y \end{aligned}$$

¿cuál es la matriz asociada a T_Y en las respectivas bases canónicas?

Matriz cambio de base

Un caso especial de matriz asociada es cuando tenemos

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ v &\longmapsto v \\ \text{base} \mathcal{A} & \qquad \text{base} \mathcal{B} \end{aligned}$$

Matriz cambio de base

Un caso especial de matriz asociada es cuando tenemos

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ v &\longmapsto v \\ \text{base}\mathcal{A} & \qquad \text{base}\mathcal{B} \end{aligned}$$

en ese caso, la matriz asociada

$$_{\mathcal{B}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{A}}$$

se llama

Matriz cambio de base

Un caso especial de matriz asociada es cuando tenemos

$$\begin{array}{rcl} I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ v & \longmapsto & v \\ \text{base}\mathcal{A} & & \text{base}\mathcal{B} \end{array}$$

en ese caso, la matriz asociada

$$_{\mathcal{B}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{A}}$$

se llama matriz cambio de base

Ejemplo

Si en $\mathbb{R}^3$ consideramos la base:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)\}$$

la matriz cambio de base es :

$$_{\mathcal{C}}(I_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}$$

Ejemplo

Si en $\mathbb{R}^3$ consideramos la base:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)\}$$

la matriz cambio de base es :

$$_{\mathcal{C}}(I_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con T.L.

Definición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y

$$S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformaciones lineales

Definición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y

$$S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformaciones lineales
se define:

- $$S + T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$
  $$(S + T)(v) = S(v) + T(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Definición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y

$$S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformaciones lineales
se define:

- $$\lambda T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$
  $$(\lambda T)(v) = \lambda . T(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Proposiciones

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y

$$S, T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

transformaciones lineales.
Entonces:

- $S + T$ es una transformación lineal

Proposiciones

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y

$$S, T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformaciones lineales.
Entonces:

- $S + T$ es una transformación lineal
- λT es una transformación lineal $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$

$$\left. S : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V} \quad \text{T.L.} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{ll} S : \mathbb{U} \to \mathbb{V} & \text{T.L.} \\ T : \mathbb{V} \to \mathbb{W} & \text{T.L.} \end{array}\right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{ll} S : \mathbb{U} \to \mathbb{V} & \text{T.L.} \\ T : \mathbb{V} \to \mathbb{W} & \text{T.L.} \end{array}\right\} \Longrightarrow T \circ S : \mathbb{U} \to \mathbb{W} \quad \text{T.L.}$$

Comportamiento de las matrices asoci

Proposición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ (dimensión finita) y

$$S, T : (\mathbb{V}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{W}, \mathcal{B})$$

transformaciones lineales.
Entonces:

- $_{\mathcal{B}}(S+T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}} + {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$

Proposición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ (dimensión finita) y

$$S, T : (\mathbb{V}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{W}, \mathcal{B})$$

transformaciones lineales.
Entonces:

- $_{\mathcal{B}}(S+T)_{\mathcal{A}} = _{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}} + _{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$
- $_{\mathcal{B}}(\lambda T)_{\mathcal{A}} = \lambda _{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$

Proposición

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ (dimensión finita) y

$$S, T : (\mathbb{V}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{W}, \mathcal{B})$$

transformaciones lineales.
Entonces:

- ${}_{\mathcal{B}}(S+T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}} + {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$
- ${}_{\mathcal{B}}(\lambda T)_{\mathcal{A}} = \lambda {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente

$$\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}}\right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente

$$\left. S : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V} \quad \text{T.L.} \phantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}} \right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{ll} S : \mathbb{U} \to \mathbb{V} & \text{T.L.} \\ T : \mathbb{V} \to \mathbb{W} & \text{T.L.} \end{array}\right\}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{ll} S : \mathbb{U} \to \mathbb{V} & \text{T.L.} \\ T : \mathbb{V} \to \mathbb{W} & \text{T.L.} \end{array}\right\} \Longrightarrow {}_{\mathcal{C}}(T \circ S)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{B}}\, {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$$

Proposición

Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ con bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{ll} S:\mathbb{U}\to\mathbb{V} & \text{T.L.} \\ T:\mathbb{V}\to\mathbb{W} & \text{T.L.} \end{array}\right\} \Longrightarrow {}_{\mathcal{C}}(T\circ S)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$$

Proposición

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases finitas de $\mathbb{V}$ e.v., entonces

Proposición

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases finitas de $\mathbb{V}$ e.v., entonces

$$_{\mathcal{A}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{A}} = I$$

Proposición

$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases finitas de $\mathbb{V}$ e.v., entonces

$$_{\mathcal{A}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{A}} = I$$

Es decir

$$_{\mathcal{A}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{B}} = \left[{}_{\mathcal{A}}(I_{\mathbb{V}})_{\mathcal{B}}\right]^{-1}$$