Núcleo e imagen

Transformaciones inyectivas y sobreyectivas
Teorema de las dimensiones

clase pasada

Si $T : (\mathbb{V}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{W}, \mathcal{A})$

clase pasada

Si $T : (\mathbb{V}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{W}, \mathcal{A})$

la matriz asociada es:

$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \mathrm{coord}_{\mathcal{A}} \circ T \circ \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Ejemplos

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

Encontrar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

- $\mathcal{B} = \mathcal{C}^3_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$

Ejemplos

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

Encontrar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

- $\mathcal{B} = \mathcal{C}^3_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$

Ejemplos

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

Encontrar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

- $\mathcal{B} = \mathcal{C}^3_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{A} = \{(1, 3); (2, 5)\}$

Imagen & núcleo - definición

Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

se define

Imagen & núcleo - definición

Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

se define

- el núcleo de T como

$$\mathrm{N}(T) = T^{-1}(O_{\mathbb{W}})$$

Imagen & núcleo - definición

Dados $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ e.v. sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

se define

- el núcleo de T como

$$\mathrm{N}(T) = T^{-1}(O_{\mathbb{W}})$$

- la imagen de T como

$$\mathrm{Im}(T) = T(\mathbb{V})$$

Ejemplo

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

- determinar $\mathrm{N}(T)$

Ejemplo

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

- determinar $\mathrm{N}(T)$
- determinar $\mathrm{Im}(T)$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

- $\mathrm{N}(T) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

- $\mathrm{N}(T) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$
- $\mathrm{Im}(T) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

- $\forall\, \mathbb{U} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W} \qquad T^{-1}(\mathbb{U}) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

- $\forall\, \mathbb{U} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W} \qquad T^{-1}(\mathbb{U}) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$
- $\forall\, \mathbb{S} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V} \qquad T(\mathbb{S}) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

- $\forall\, \mathbb{U} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W} \qquad T^{-1}(\mathbb{U}) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V}$
- $\forall\, \mathbb{S} \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{V} \qquad T(\mathbb{S}) \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{W}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es inyectiva

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es inyectiva
- $\mathrm{N}(T) = O_{\mathbb{V}}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es inyectiva
- $\mathrm{N}(T) = O_{\mathbb{V}}$
- T lleva conjuntos l.i. en conjuntos l.i.

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es sobreyectiva

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es sobreyectiva
- $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es sobreyectiva
- $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$
- T lleva generadores en generadores.

isomorfismo - definición

dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

si T es biyectiva, entonces:

- T se llama isomorfismo

isomorfismo - definición

dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

si T es biyectiva, entonces:

- T se llama isomorfismo
- $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ se llaman isomorfos

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es un isomorfismo

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es un isomorfismo
- $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ y $\mathrm{N}(T) = O_{\mathbb{V}}$

Proposición

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$ y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

son equivalentes:

- T es un isomorfismo
- $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ y $\mathrm{N}(T) = O_{\mathbb{V}}$
- T lleva bases en bases.

Teorema de las dimensiones

Dados los e.v. $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sobre $\mathbb{K}$, de dimensión finita y la transformación lineal

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

entonces

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{N}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Proposición

Sea

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal donde $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$. Entonces:

- si $n > m$, entonces T no es inyectiva

Proposición

Sea

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal donde $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$. Entonces:

- si $n > m$, entonces T no es inyectiva
- si $n < m$, entonces T no es sobreyectiva

Proposición

Sea

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

transformación lineal donde $\dim \mathbb{V} = n$ y $\dim \mathbb{W} = m$. Entonces:

- si $n > m$, entonces T no es inyectiva
- si $n < m$, entonces T no es sobreyectiva
- si $n = m$, entonces T biyectiva $\Leftrightarrow$ T inyectiva $\Leftrightarrow$ T sobreyectiva