El álgebra de las matrices

Suma y producto por un escalar
Producto de matrices
Propiedades y ejemplos

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño,

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño, se define la suma de A y B como

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño, se define la suma de A y B como

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño, se define la suma de A y B como

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño, se define la suma de A y B como

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots m}^{j=1,\dots,n}$$

Suma de matrices - definición

Si dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tienen el mismo tamaño, se define la suma de A y B como

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots m}^{j=1,\dots,n} \qquad B = (b_{ij})_{i=1,\dots m}^{j=1,\dots,n}$$

Suma de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 \\ 3+\sqrt{2} & 9 \end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un número $\alpha \in \mathbb{K}$,

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un número $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos el producto de α por A como

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un número $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos el producto de α por A como

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un número $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos el producto de α por A como

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y un número $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos el producto de α por A como

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde

$$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$$

Producto por un escalar - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz con un vector

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, se define

producto de A por X al vector:

$$\boxed{AX := x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n}$$

Producto de una matriz con un vector

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, se define

producto de A por X al vector:

$$\boxed{AX := x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n}$$

donde

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K}) \quad \text{columnas de } A$$

Producto de una matriz con un vector

De este modo el sistema

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mj}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$$

Producto de una matriz con un vector

que se puede escribir como la ecuación vectorial:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz con un vector

que se puede escribir como la ecuación vectorial:

$$x_1 A_1 + \cdots + x_j A_j + \cdots + x_n A_n = B$$

Producto de una matriz con un vector

se resume como:

$$\boxed{AX=B}$$

Producto de matrices - definición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$

Producto de matrices - definición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$

Producto de matrices - definición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times \boxed{k}}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{\boxed{k}\times n}(\mathbb{K})$

(A y B conformables)

Producto de matrices - definición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, se define el producto de A por B como

$$AB := (AB_1\ AB_2\ \ldots\ AB_n) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & AB_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A & AB_1 & AB_2 & AB_3 \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & AB_3 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 = b_{11}A_1 + b_{21}A_2$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline A_1 & A_2 & AB_1 & & \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & AB_3 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 = b_{11}A_1 + b_{21}A_2$$

$$AB_2 = b_{12}A_1 + b_{22}A_2$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline A_1 & A_2 & AB_1 & AB_1 & \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$AB = (AB_1 \;\; AB_2 \;\; AB_3)$$

$$AB_1 = b_{11}A_1 + b_{21}A_2$$

$$AB_2 = b_{12}A_1 + b_{22}A_2$$

$$AB_3 = b_{13}A_1 + b_{23}A_2$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline A_1 & A_2 & AB_1 & AB_1 & AB_3 \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 0 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ -1 & 2 & & \\ 3 & 1 & & \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 2 \\
 & & 1 & -1 \\
\hline
\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 0 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 2 & \\ 3 & 1 & 1 & \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 2 \\
 & & 1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \\
-1 & 2 & 2 & 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
3 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 0 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Producto de matrices - ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} & & 0 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \quad = AB$$

Proposición

$A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, entonces

Proposición

$A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, entonces para todo vector $X \in \mathbb{K}^n$:

Proposición

$A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, entonces para todo vector $X \in \mathbb{K}^n$:

$$(AB)X = A(BX)$$

Proposición

$A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, entonces para todo vector $X \in \mathbb{K}^n$:

$$(AB)X = A(BX)$$

anotamos de ahora en más:

$$ABX$$

Propiedades del producto

Si A, B y C son matrices conformables

- ASOCIATIVA:

$$(AB)C = A(BC)$$

Propiedades del producto

Si A, B y C son matrices conformables

- ASOCIATIVA:

$$(AB)C = A(BC)$$

- DISTRIBUTIVA A DERECHA:

$$C(A+B) = CA + CB$$

Propiedades del producto

Si A, B y C son matrices conformables

- Asociativa:

$$(AB)C = A(BC)$$

- Distributiva a derecha:

$$C(A+B) = CA + CB$$

- Distributiva a izquierda:

$$(A+B)C = AC + BC$$

Propiedades del producto

Sin embargo, en general

$$\boxed{AB \neq BA}$$

NO CONMUTATIVA

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \quad 0 \;\Big|$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 2 & \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$