El álgebra de las matrices (II)

Matriz transpuesta
La inversa de una matriz

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas
$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definimos 3 operaciones:

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definimos 3 operaciones:

- $A + B$ (Suma entre matrices)

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definimos 3 operaciones:

- $A + B$ (SUMA ENTRE MATRICES)
- αA (PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ)

Clase pasada

En el espacio de matrices cuadradas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definimos 3 operaciones:

- $A + B$ (SUMA ENTRE MATRICES)
- αA (PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ)
- $A \cdot B$ (PRODUCTO ENTRE MATRICES)

Matriz traspuesta - definición

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de filas:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta - definición

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de filas:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

llamamos matriz traspuesta de A a la matriz de columnas

Matriz traspuesta - definición

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de filas:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

llamamos matriz traspuesta de A a la matriz de columnas

$$A^t = (A^1\ A^2 : \ldots\ A^m) \in \mathcal{M}_{n\times m(\mathbb{K})}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y } A^t = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Elemento neutro

El elemento neutro de:

Elemento neutro

El elemento neutro de:

- la suma de matrices es la matriz nula $\mathbb{O}$

Elemento neutro

El elemento neutro de:

- la suma de matrices es la matriz nula $\mathbb{O}$

$$A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$$

Elemento neutro

El elemento neutro de:

- la suma de matrices es la matriz nula $\mathbb{O}$

$$A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$$

- el producto de matrices es la matriz identidad I

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Elemento neutro

El elemento neutro de:

- la suma de matrices es la matriz nula $\mathbb{O}$

$$A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$$

- el producto de matrices es la matriz identidad I

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Elementos inversos

Se llama elemento opuesto de la matriz A a la matriz B que verifica

$$A + B = B + A = \mathbb{O}$$

Elementos inversos

Se llama elemento opuesto de la matriz A a la matriz B que verifica

$$A + B = B + A = \mathbb{O}$$

Se anota

$$B = -A$$

Elementos inversos

Se verifica fácilmente que el opuesto de A

Elementos inversos

Se verifica fácilmente que el opuesto de

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementos inversos

Se verifica fácilmente que el opuesto de A es $-A$

Elementos inversos

Se verifica fácilmente que el opuesto de A es

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz - definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Inversa de una matriz - definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama matriz inversa de A

Inversa de una matriz - definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama matriz inversa de A a la matriz B que cumple:

Inversa de una matriz - definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama matriz inversa de A a la matriz B que cumple:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Inversa de una matriz - definición

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se llama matriz inversa de A a la matriz B que cumple:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Se anota

$$B = A^{-1}$$

Inversa de una matriz - observaciones

- la inversa de una matriz no siempre existe

Inversa de una matriz - observaciones

- la inversa de una matriz no siempre existe
- incluso aunque $A \neq O$

Inversa de una matriz - observaciones

- la inversa de una matriz no siempre existe
- incluso aunque $A \neq O$
- Ejemplo: ninguna matriz que multiplique a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede dar la matriz I como resultado

Unicidad de la inversa

La matriz inversa, cuando existe, es única

Unicidad de la inversa

La matriz inversa, cuando existe, es única

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = I$$

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que y $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = I$$

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que y $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = I = C \cdot A$$

entonces

Inversa a izquierda y a derecha

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que y $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = I = C \cdot A$$

entonces

$$B = C$$

Cálculo de la inversa

¿Cuándo existe?

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \;\; B_2)$

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \ \ B_2)$

A^{-1}, si existe, verifica:

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \;\; B_2)$

A^{-1}, si existe, verifica:

$$A \cdot A^{-1} = (A \cdot B_1 \;\; A \cdot B_2) = I$$

o sea

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \;\; B_2)$

A^{-1}, si existe, verifica:

$$A \cdot A^{-1} = (A \cdot B_1 \;\; A \cdot B_2) = (E_1 \;\; E_2)$$

o sea

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \ B_2)$

A^{-1}, si existe, verifica:

$$A \cdot B_1 = E_1$$

$$A \cdot B_2 = E_2$$

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

buscamos $A^{-1} = (B_1 \; B_2)$

A^{-1}, si existe, verifica:

$$A \cdot B_1 = E_1$$

$$A \cdot B_2 = E_2$$

dos sistemas de ecuaciones lineales

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A,

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

- si los dos sistemas tienen solución

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

- si los dos sistemas tienen solución entonces A^{-1} existe

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

- si los dos sistemas tienen solución entonces A^{-1} existe
- si no, $\nexists A^{-1}$

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

escalerizando queda

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

los dos sistemas tienen solución

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

los dos sistemas tienen solución

la solución del primer sistema es B_1

(PRIMERA COLUMNA DE A^{-1})

Cálculo de la inversa - ejemplo 1

Como tienen la misma matriz de coeficientes, A, los escalerizamos en simultáneo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

los dos sistemas tienen solución

la solución del primer sistema es B_1

(PRIMERA COLUMNA DE A^{-1})

la solución del segundo sistema es B_2

(SEGUNDA COLUMNA DE A^{-1})

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_1$

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 - F_1$

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 + F_3$

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

hay al menos un sistema incompatible

Cálculo de la inversa - ejemplo 2

Veamos si tiene podemos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

hay al menos un sistema incompatible $\Rightarrow \nexists A^{-1}$

Teorema

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, los siguientes enunciados son equivalentes

- A es invertible

Teorema

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, los siguientes enunciados son equivalentes

- A es invertible
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = I$ (INVERSA A DERECHA)

Teorema

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, los siguientes enunciados son equivalentes

- A es invertible
- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = I$ (INVERSA A DERECHA)
- $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $C \cdot A = I$ (INVERSA A IZQUIERDA)

Propiedades de la inversa

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Propiedades de la inversa

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists A^{-1}$

Propiedades de la inversa

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists A^{-1}$ entonces

$$\left[A^{-1}\right]^{-1} = A$$

Proposición

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles

Proposición

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, entonces AB es invertible

Proposición

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Proposición

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son invertibles, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, entonces A^t es invertible

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, entonces A^t es invertible y

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$