Independencia lineal y rango

Ejemplos.

Rango.

Rango y matriz inversa

Teorema de Rouché-Frobenius revisitado

Independencia lineal

Si el sistema

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = \mathbb{O}$$

tiene una única solución,

Independencia lineal

Si el sistema

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = \mathbb{O}$$

tiene una única solución, entonces decimos que los vectores

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

son linealmente independientes (L.I.)

Independencia lineal

Si el sistema

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = \mathbb{O}$$

tiene una única solución, entonces decimos que los vectores

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

son linealmente independientes (L.I.)
Caso contrario decimos que son linealmente dependientes (L.D.)

Ejemplo 1

El conjunto

$$\{\mathbb{O}\}$$

siempre es L.D.

Ejemplo 1

El conjunto

$$\{\mathbb{O}\}$$

siempre es L.D.

En efecto,

$$\alpha.\mathbb{O} = \mathbb{O} \quad \forall \alpha \neq 0$$

Ejemplo 2

Estudiar la dependencia lineal de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & \\ x_1 & & +x_3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & +2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 0$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_1 = 0$$

Ejemplo 2

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{son L.I.}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Ejemplo 3

Estudiar la dependencia lineal de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & +x_3 \\ x_1 & & +2x_3 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & & +2x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 0.x_2 & +0.x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\left\{\begin{array}{rrl} x_1 & -x_2 & = -x_3 \\ & x_2 & = -x_3 \\ & & \end{array}\right.$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & -x_2 & = -x_3 \\ & x_2 & = -x_3 \\ & & \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \quad x_3$ cualquiera

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = -x_3 \\ & x_2 & = -x_3 \\ & & \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x_3$ cualquiera

$x_2 = -x_3$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = -x_3 \\ & x_2 & = -x_3 \\ & & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 \quad \text{cualquiera}$$

$$x_2 = -x_3$$

$$x_1 = -2x_3$$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = -x_3 \\ & x_2 & = -x_3 \\ & & \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x_3$ cualquiera $\Rightarrow$ hay C.L. $\neq 0$ que dan $\mathbb{O}$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -2x_3$

Ejemplo 3

Veamos:

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \quad = -x_3 \\ \qquad\quad x_2 \quad = -x_3 \\ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x_3 cualquiera $\Rightarrow$ hay C.L. $\neq 0$ que dan $\mathbb{O}$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -2x_3$

$\Rightarrow$ son L.D.

Independencia lineal - observación

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

es L.I.

$$\Updownarrow$$

el sistema

$$AX = O$$

es determinado para la matriz $A = (A_1 A_2 \ldots A_m)$

Proposición

Una familia de vectores de $\mathbb{K}^m$

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_l\} \text{ es L.I.}$$

$$\Updownarrow$$

ninguno de los vectores de la familia puede escribirse como C.L. de los restantes.

Proposición equivalente

Una familia de vectores de $\mathbb{K}^m$

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_l\} \text{ es L.D.}$$

$$\Updownarrow$$

alguno de los vectores de la familia puede escribirse como C.L. de los restantes.

Proposición equivalente

Una familia de vectores de $\mathbb{K}^m$

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_l\} \text{ es L.D.}$$

$$\Updownarrow$$

alguno de los vectores de la familia puede escribirse como C.L. de los restantes.

OJO!!!

que $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ L.D. NO implica que cada uno sea C.L. de los restantes.

vectores L.D.

¿cómo determinamos cuáles vectores se pueden escribir como C.L. de los restantes, y cuáles no?

vectores L.D.

¿cómo determinamos cuáles vectores se pueden escribir como C.L. de los restantes, y cuáles no?

lo vemos en un ratito

Rango

Dado un conjunto de vectores

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^m$$

Rango

Dado un conjunto de vectores

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^m$$

llamamos

$$\text{rango}(\mathcal{A})$$

Rango

Dado un conjunto de vectores

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^m$$

llamamos

$$\text{rango}(\mathcal{A})$$

a la máxima cantidad de vectores L.I. que podemos encontrar dentro de $\mathcal{A}$

Ejemplo

Calcular el rango del conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo

Planteamos la ecuación de dependencia lineal:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\\4\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}1\\0\\5\\1\\9\end{pmatrix}+x_6\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & =0 \\ -x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & & -x_6 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +5x_5 & +3x_6 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & +3x_6 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +9x_5 & +3x_6 & =0 \end{array}\right.$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & = 0 \\ & & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & & = 0 \\ & & & +2x_4 & +4x_5 & +2x_6 & = 0 \\ & & & & & +2x_6 & = 0 \\ & & & +4x_4 & +8x_5 & +2x_6 & = 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & = 0 \\
 & & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & & = 0 \\
 & & & +2x_4 & +4x_5 & +2x_6 & = 0 \\
 & & & & & +2x_6 & = 0 \\
 & & & & & -2x_6 & = 0
\end{array}\right.$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & = 0 \\
 & & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & & = 0 \\
 & & & +2x_4 & +4x_5 & +2x_6 & = 0 \\
 & & & & & +2x_6 & = 0 \\
 & & & & & &
\end{array}\right.$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} \boxed{x_1} & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & =0 \\ & & \boxed{+2x_3} & +x_4 & +x_5 & & =0 \\ & & & \boxed{+2x_4} & +4x_5 & +2x_6 & =0 \\ & & & & & \boxed{+2x_6} & =0 \end{array}\right.$$

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} \boxed{x_1} & +2x_2 & +x_3 & & +x_5 & x_6 & =0 \\ & & \boxed{+2x_3} & +x_4 & +x_5 & & =0 \\ & & & \boxed{+2x_4} & +4x_5 & +2x_6 & =0 \\ & & & & & \boxed{+2x_6} & =0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ rango$(\mathcal{A}) = 4$

Rango de una matriz por columnas

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ llamamos rango por columnas de A

$$\text{rango}_C(A)$$

Rango de una matriz por columnas

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ llamamos rango por columnas de A

$$\text{rango}_C(A)$$

al rango del conjunto de columnas de A

Rango de una matriz por filas

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ llamamos rango por filas de A

$$\text{rango}_F(A)$$

Rango de una matriz por filas

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ llamamos rango por filas de A

$$\text{rango}_F(A)$$

al rango del conjunto de filas de A

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$\text{rango}_C(A) = \text{rango}_F(A)$$

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$\text{rango}_C(A) = \text{rango}_F(A) = e$$

donde e es la cantidad de escalones de

cualquier forma escalerizada de A

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $AX = B$ un sistema $m \times n$. Entonces:

- $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow$ rango(A) $=$rango$(A|B)$

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $AX = B$ un sistema $m \times n$. Entonces:

- $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow$ rango(A) =rango$(A|B)$
- Si $AX = B$ es compatible, entonces:

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $AX = B$ un sistema $m \times n$. Entonces:

- $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow$ rango(A) =rango$(A|B)$
- Si $AX = B$ es compatible, entonces:
  - $AX = B$ es determinado $\Leftrightarrow$ rango$(A) = n$

Rango e inversa (I)

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tenemos

Rango e inversa (I)

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$\text{rango}(A) = n$$

$$\Updownarrow$$

A es invertible a derecha

Rango e inversa (I)

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$\text{rango}(A) = n$$

$$\Updownarrow$$

A es invertible a derecha

Rango e inversa (II)

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$\text{rango}(A) = n$$

$$\Updownarrow$$

A es invertible

Corolario

A invertible a derecha $\Rightarrow$ A invertible