Determinantes (I)

Determinantes de matrices 2×2

Definición general.

Propiedades.

Clase pasada

Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son equivalentes:

- A es invertible

Clase pasada

Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son equivalentes:

- A es invertible
- rango$(A) = n$

Clase pasada

Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son equivalentes:

- A es invertible
- rango$(A) = n$
- A es perfectamente escalerizable

Clase pasada

Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son equivalentes:

- A es invertible
- rango$(A) = n$
- A es perfectamente escalerizable
- $AX = B$ es compatible para todo $B \in \mathbb{K}^n$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} \neq 0$, se puede escalerizar haciendo:

$$a_{11}F_2 - a_{21}F_1 \to F_2'$$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} \neq 0$, se puede escalerizar haciendo:

$$a_{11}F_2 - a_{21}F_1 \rightarrow F_2'$$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} \neq 0$, se puede escalerizar haciendo:

$$a_{11}F_2 - a_{21}F_1 \longrightarrow F_2'$$

- es perfectamente escalerizable

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} = 0$,

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & a_{12} & b_1 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} = 0$, entonces se intercambian $F_1 \leftrightarrow F_2$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & a_{12} & b_1 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} = 0$, entonces se intercambian $F_1 \leftrightarrow F_2$
- es perfectamente escalerizable

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} & b_2 \end{array} \right)$$

- Si $a_{11} = a_{21} = 0$,

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Consideremos el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

- Si $a_{11} = a_{21} = 0$, entonces no es escalerizable

Ejemplo en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

En cualquier caso:

$$A \text{ es invertible}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A al número

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A al número

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A al número

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A al número

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

llamamos determinante de A al número

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $$\left| \begin{array}{c} \alpha A_1 + \alpha' A_1' \\ A_2 \end{array} \right| = \alpha \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right| + \alpha' \left| \begin{array}{c} A_1' \\ A_2 \end{array} \right|$$

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1.
$$\begin{vmatrix} \alpha A_1 + \alpha' A_1' \\ A_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} + \alpha' \begin{vmatrix} A_1' \\ A_2 \end{vmatrix}$$

es multilineal respecto de las filas

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. es multilineal respecto de las filas
2. $$\left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} A_2 \\ A_1 \end{array} \right|$$

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. es multilineal respecto de las filas
2. $$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_2 \\ A_1 \end{vmatrix}$$

   es alternada respecto de las filas

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. es multilineal respecto de las filas
2. es alternada respecto de las filas
3. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. es multilineal respecto de las filas
2. es alternada respecto de las filas
3. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

   el determinante de la identidad es uno

Propiedades del determinante

La función $A \mapsto \det(A)$ tiene las siguientes propiedades:

1. es multilineal respecto de las filas
2. es alternada respecto de las filas
3. el determinante de la identidad es uno

Propiedades del determinante

La única función de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que es:

Propiedades del determinante

La única función de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas

Propiedades del determinante

La única función de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas

Propiedades del determinante

La única función de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas
3. uno en la matriz identidad

Propiedades del determinante

La única función de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas
3. uno en la matriz identidad

es la función $A \mapsto \det(A)$

Función determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En general, hay una única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es:

Función determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En general, hay una única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas

Función determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En general, hay una única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas

Función determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En general, hay una única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas
3. uno en la matriz identidad

Función determinante en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En general, hay una única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es:

1. multilineal respecto de las filas
2. alternada respecto de las filas
3. uno en la matriz identidad

llamaremos a esta función determinante de A

Observación

Multilineal respecto de las filas:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i + \alpha' A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \alpha' \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Observación

Alternada respecto de las filas:

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ 0.\mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ 0.\mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = 0. \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ 0.\mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = 0. \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila que es C.L. de otras dos, entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo 3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila que es C.L. de otras dos, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ \alpha A_i + \beta A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila que es C.L. de otras dos, entonces $\det(A) = 0$

$$\left|\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ \alpha A_i + \beta A_j \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right| = \alpha \left|\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right| + \beta \left|\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right|$$

Ejemplo 3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila que es C.L. de otras dos, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ \alpha A_i + \beta A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \alpha.0 + \beta.0$$

Ejemplo 3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una fila que es C.L. de otras dos, entonces $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ \alpha A_i + \beta A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \alpha \det(A)$

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \alpha \det(A)$
$F_i \leftrightarrow F_j$	

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \alpha \det(A)$
$F_i \leftrightarrow F_j$	$\det(A_T) = -\det(A)$

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \alpha \det(A)$
$F_i \leftrightarrow F_j$	$\det(A_T) = -\det(A)$
$F_i + \alpha F_j \longrightarrow F_i'$	

T.E. y determinantes

cómo actúan las T.E. sobre $\det(A)$:

$\alpha F_i \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \alpha \det(A)$
$F_i \leftrightarrow F_j$	$\det(A_T) = -\det(A)$
$F_i + \alpha F_j \longrightarrow F_i'$	$\det(A_T) = \det(A)$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$F_2 - 2F_1 \to F_2'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$F_3 + F_1 \longrightarrow F_3'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - 3F_1 \longrightarrow F_4'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - 2F_3 \rightarrow F_4'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-6F_4 \longrightarrow F_4'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_3 - F_4 \longrightarrow F_3'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_2 + 3F_4 \to F_2'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_1 - 2F_4 \rightarrow F_1'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_2 - 2F_3 \to F_2'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_1 + F_3 \longrightarrow F_1'$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

Proposición

Si

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ 0 & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposición

Si

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ 0 & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces el determinante de E es

Proposición

Si

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ 0 & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces el determinante de E es

$$\det(E) = e_{11}e_{22}\dots e_{nn}$$

Corolario

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{rango}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Teorema

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \text{ es invertible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Teorema

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$
- Si A es invertible, entonces $A = E_1 E_2 \ldots E_k$, con E_i matrices elementales

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$
- Si A es invertible, entonces $A = E_1 E_2 \ldots E_k$, con E_i matrices elementales $\surd$

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$
- Si A es invertible, entonces $A = E_1 E_2 \dots E_k$, con E_i matrices elementales$\surd$
- Si A no es invertible, entonces $\det(AB) = 0$ (si no, $B(AB)^{-1}$ sería inversa de A)

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$
- Si A es invertible, entonces $A = E_1 E_2 \ldots E_k$, con E_i matrices elementales $\surd$
- Si A no es invertible, entonces $\det(AB) = 0$ (si no, $B(AB)^{-1}$ sería inversa de A) $\surd$

Teorema - Demostración

- Vale para A matriz elemental $\surd$
- Si A es invertible, entonces $A = E_1 E_2 \dots E_k$, con E_i matrices elementales$\surd$
- Si A no es invertible, entonces $\det(AB) = 0$ (si no, $B(AB)^{-1}$ sería inversa de A)$\surd$

$\square$

Corolario

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Teorema

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

$$\det(A^t) = \det(A)$$

Corolario

La función $A \mapsto \det(A)$ es:

- multilineal respecto de las columnas

Corolario

La función $A \mapsto \det(A)$ es:

- multilineal respecto de las columnas
- alternada respecto de las columnas