Determinantes (II)

Fórmula recursiva. Matriz adjunta. Menor. Regla de Cramer.

Clase pasada:

Definimos determinante como la única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es

- multilineal respecto de las filas

Clase pasada:

Definimos determinante como la única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es

- multilineal respecto de las filas
- alternada respecto de las filas

Clase pasada:

Definimos determinante como la única función de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ que es

- multilineal respecto de las filas
- alternada respecto de las filas
- uno en la matriz identidad

Formas de calcularlo

- escalerizando

Formas de calcularlo

- escalerizando
- recursivamente

Fórmula recursiva

Consiste en escribir

Fórmula recursiva

Consiste en escribir

$$\det(A), \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Fórmula recursiva

Consiste en escribir

$$\det(A), \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

en función de determinantes

Fórmula recursiva

Consiste en escribir

$$\det(A), \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

en función de determinantes

$$\det(A_{ij}), \quad \text{con} A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Matriz adjunta

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamamos matriz adjunta de a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamamos matriz adjunta de a_{ij} a la matriz $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Menor adjunto

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Menor adjunto

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamamos menor adjunto de a_{ij} al número

Menor adjunto

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamamos menor adjunto de a_{ij} al número

$$\det(A_{ij}) = |A_{ij}|$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A_{11} = \begin{pmatrix} & & \\ & 2 & 7 \\ & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A_{11} = \begin{pmatrix} & & \\ & 2 & 7 \\ & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$

Ejemplo

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ & \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$

Ejemplo

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ & \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$
$$|A_{23}| = 4$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$
$$|A_{23}| = 4$$

Ejemplo

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 7 \\ & \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$
$$|A_{23}| = 4$$

Ejemplo

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 7 \\ & \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = -28$$
$$|A_{23}| = 4$$
$$|A_{23}| = 18$$

Proposición

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}|$$

Proposición

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}|$$

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

Proposición

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}|$$

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

(desarrollo por filas)

Cofactor

El número

Cofactor

El número

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

Cofactor

El número

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

se llama cofactor de a_{ij}

Observación

$$|A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

Matriz de cofactores

Se llama matriz de cofactores de A a la matriz

Matriz de cofactores

Se llama matriz de cofactores de A a la matriz

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposición

$$A.\text{cof}(A)^t = |A|.I$$

Teorema

Si A es invertible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{cof}(A)^t$$

Regla de Cramer

Si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$x_j = \frac{\det(A_1 \ldots A_{j-1}\, B\, A_{j+1}\, \ldots A_n)}{\det(A)}$$