Geometría

Rectas y planos en el espacio

Introducción

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).

Introducción

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

Introducción

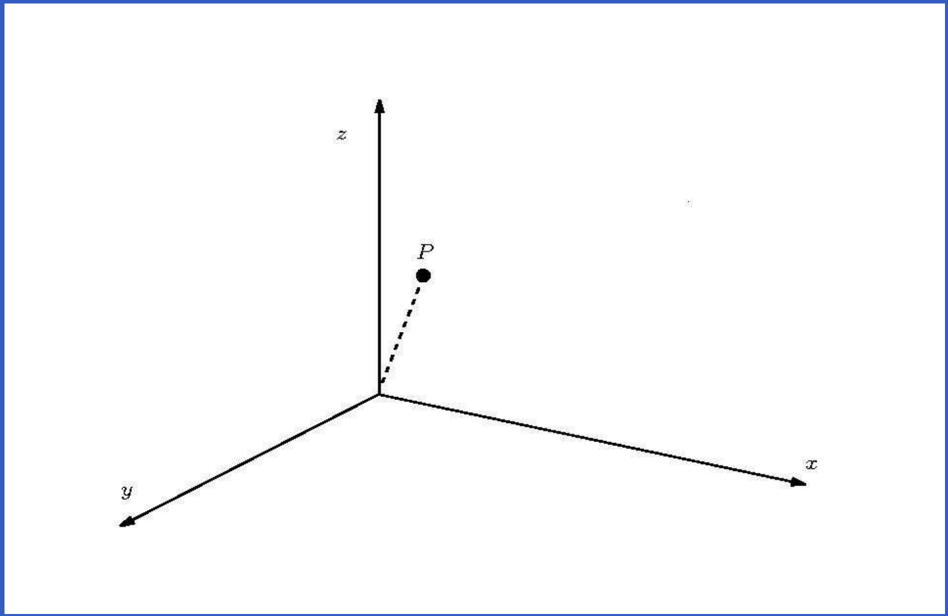
Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

- un punto $P = (x, y, z)$

Introducción

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

- un punto $P = (x, y, z)$



Introducción

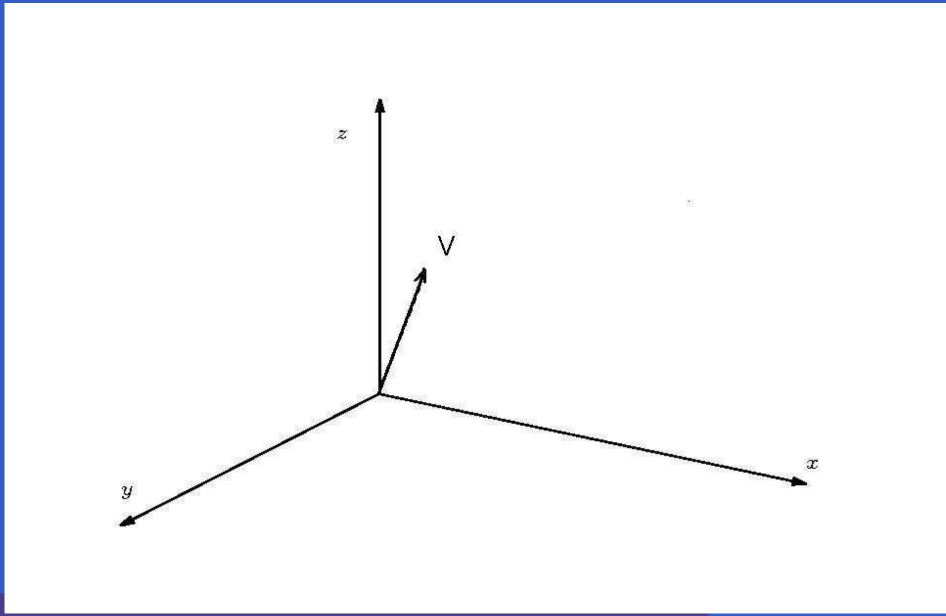
Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

- un punto $P = (x, y, z)$
- un vector $V = (x, y, z)$

Introducción

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

- un punto $P = (x, y, z)$
- un vector $V = (x, y, z)$



Introducción

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x, y, z).
La misma terna (x, y, z) define:

- un punto $P = (x, y, z)$
- un vector $V = (x, y, z)$

Suma de vectores

Recordemos que si

$$V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

Suma de vectores

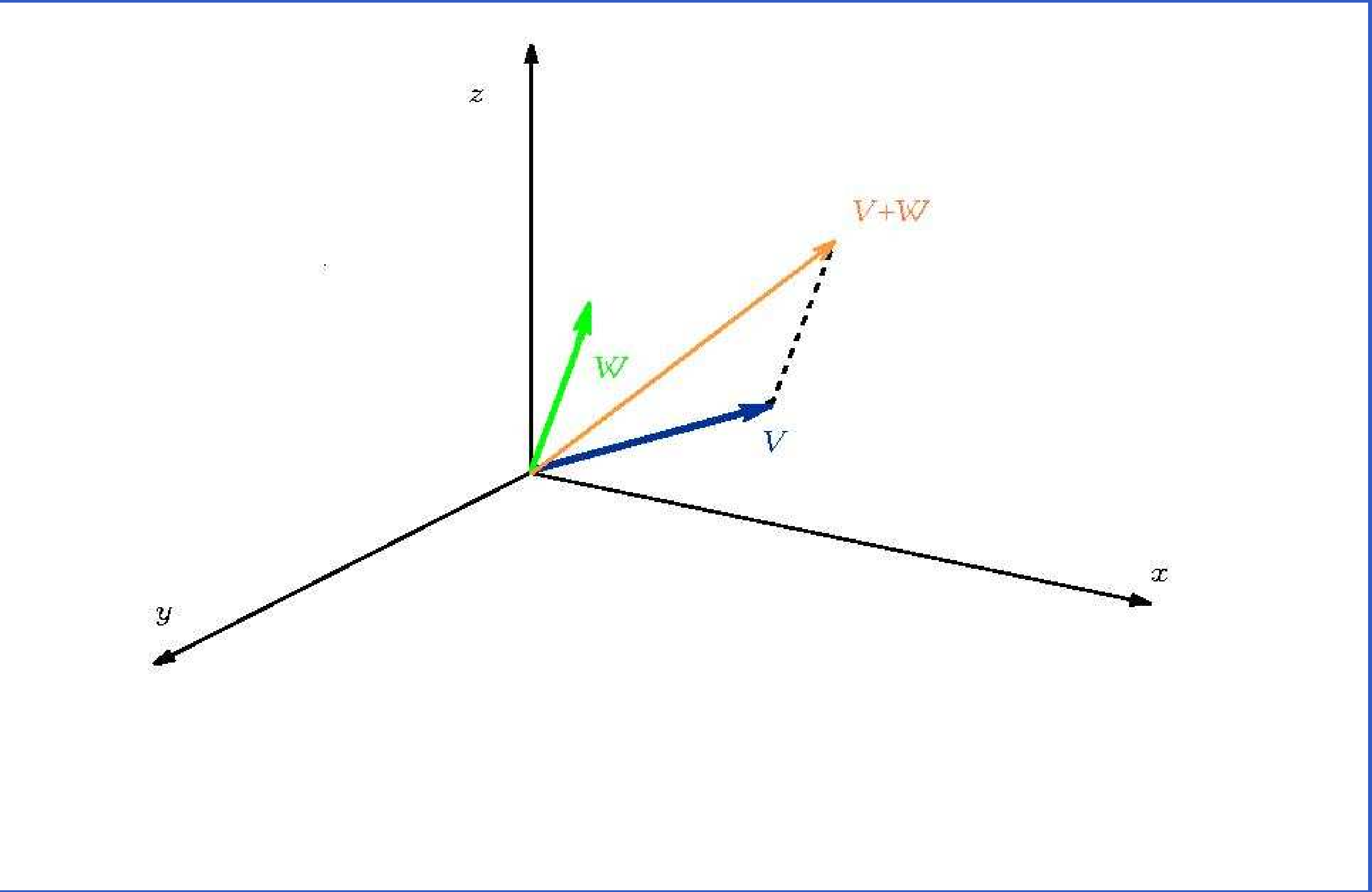
Recordemos que si

$$V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces

$$V + W := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

Interpretación geométrica



Producto de un vector por un escalar

Recordemos que si

$$V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Producto de un vector por un escalar

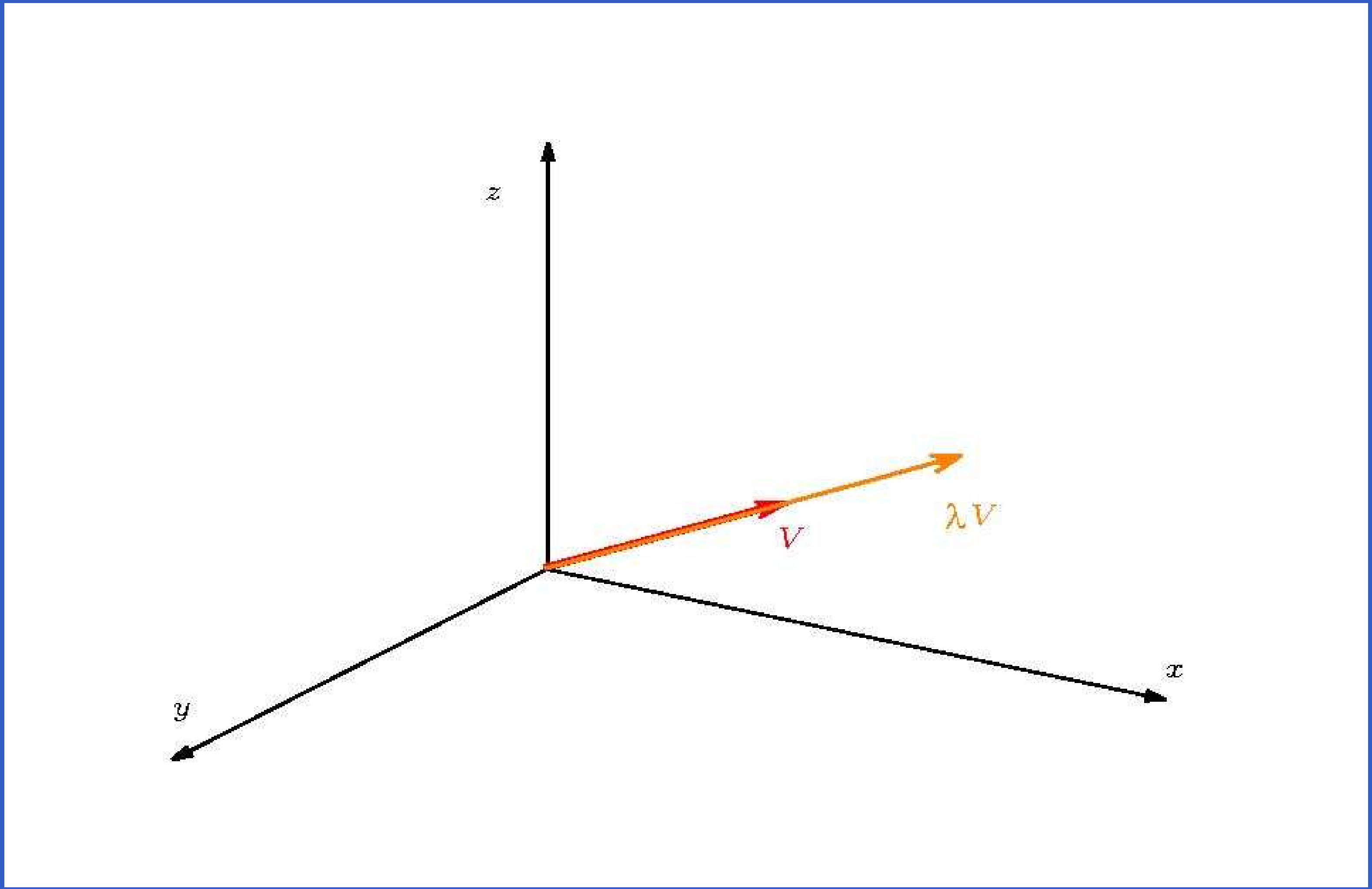
Recordemos que si

$$V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\lambda V = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

Interpretación geométrica



Vectores paralelos

Decimos que los vectores V y W

Vectores paralelos

Decimos que los vectores V y W

son paralelos

Vectores paralelos

Decimos que los vectores V y W

son paralelos si

$$V = \lambda W$$

Vectores paralelos

Decimos que los vectores V y W

son paralelos si

$$V = \lambda W$$

para algún $\lambda \neq 0$

Vectores paralelos

Decimos que los vectores V y W

son paralelos si

$$V = \lambda W$$

para algún $\lambda \neq 0$

Notación:

$$V \| W$$

Recta

Dados P punto y $V \neq \overrightarrow{0}$, se define

Recta

Dados P punto y $V \neq \overrightarrow{0}$, se define

la recta que pasa por P con dirección V como el conjunto

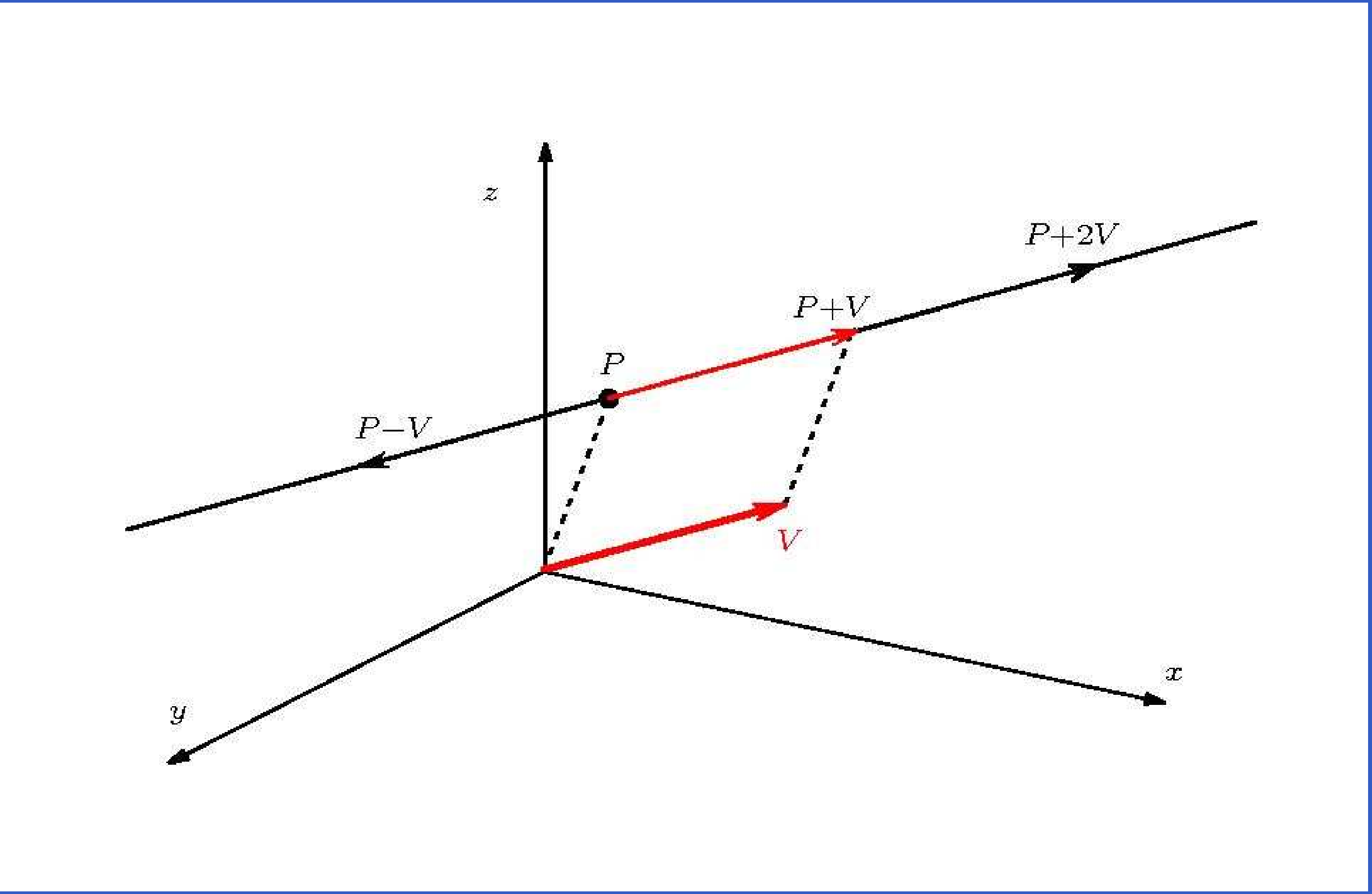
Recta

Dados P punto y $V \neq \overrightarrow{0}$, se define

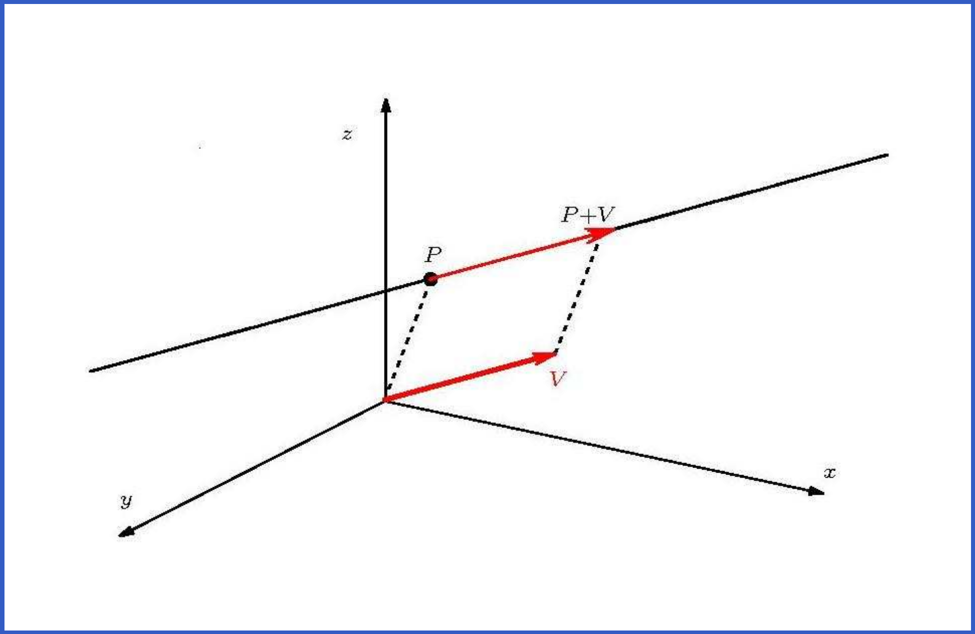
la recta que pasa por P con dirección V como el conjunto

$$r = \{P + \lambda V : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Recta - interpretación gráfica

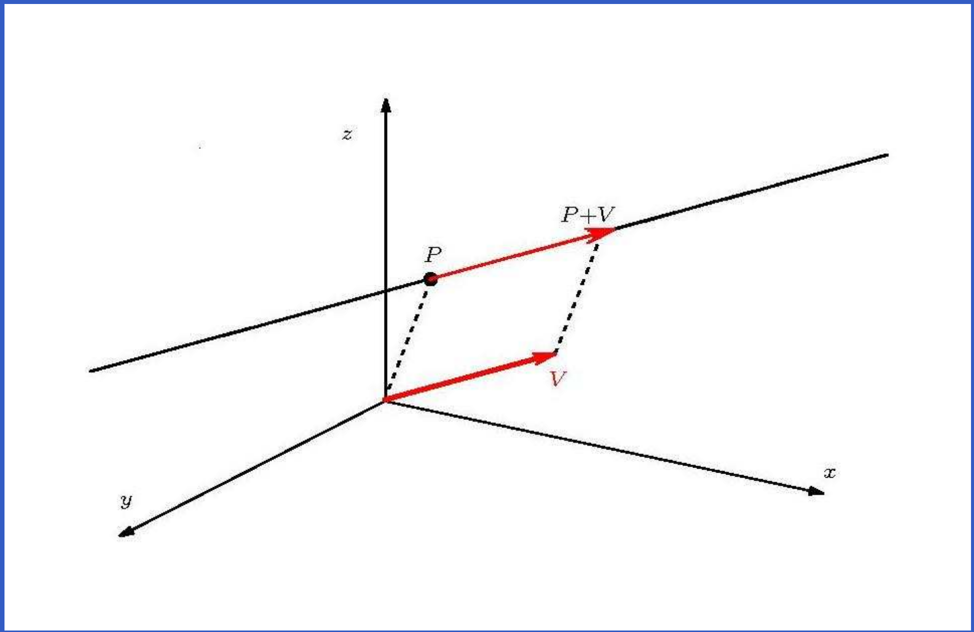


Recta - notaciones



- $P \rightarrow$ punto de paso de r

Recta - notaciones



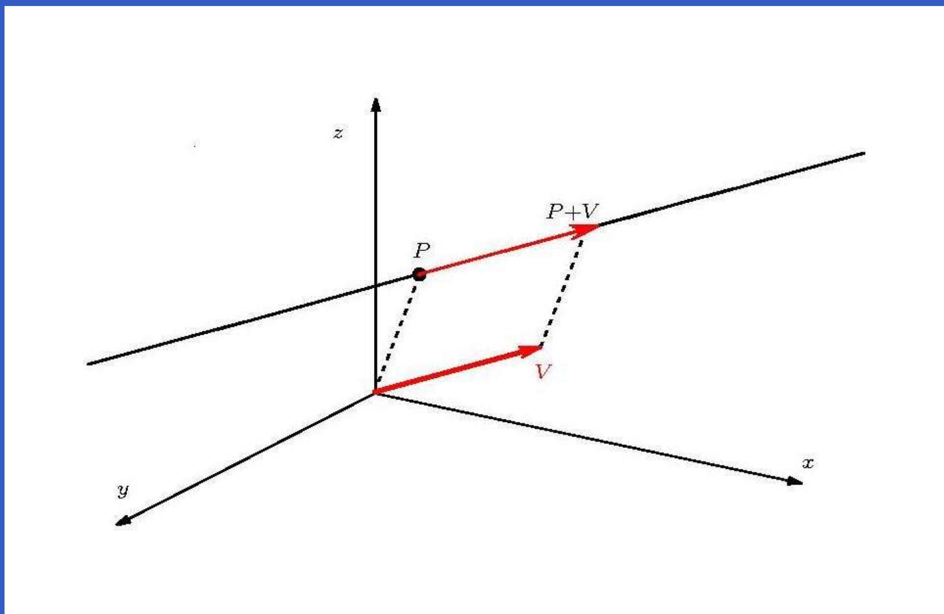
- $P \longrightarrow$ punto de paso de r
- $V \longrightarrow$ vector director de r

Observación

r recta que pasa por el punto P con dirección V,

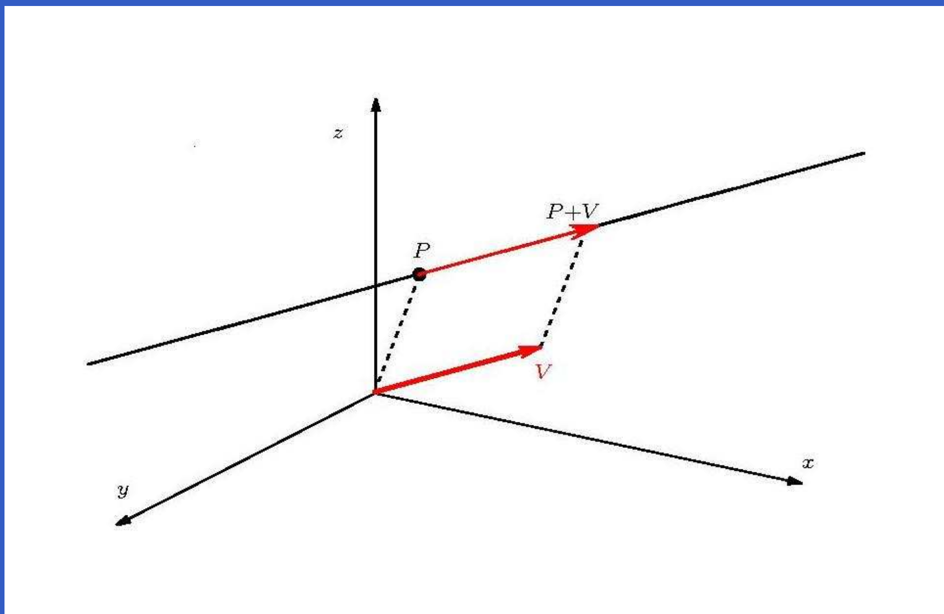
Observación

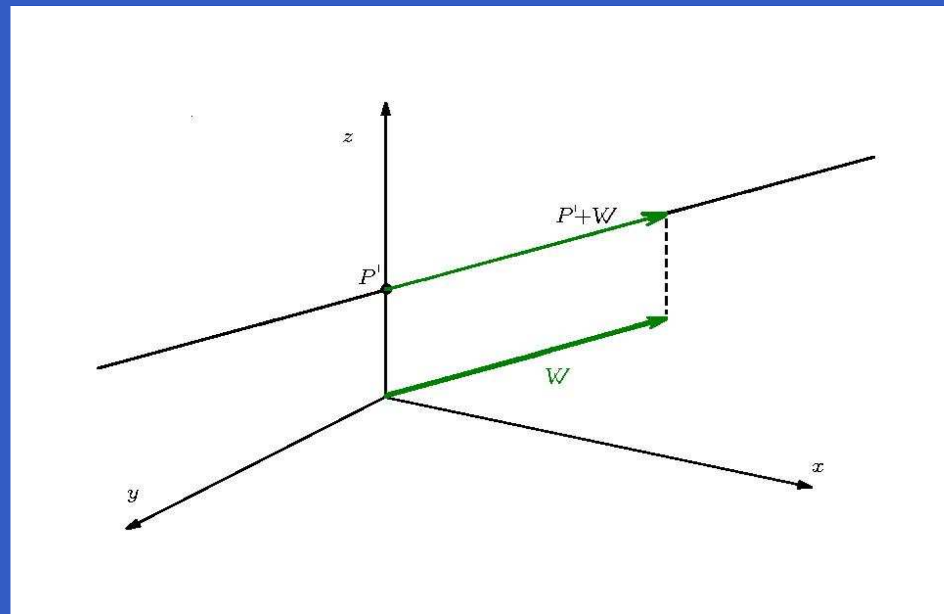
r recta que pasa por el punto P con dirección V,



Observación

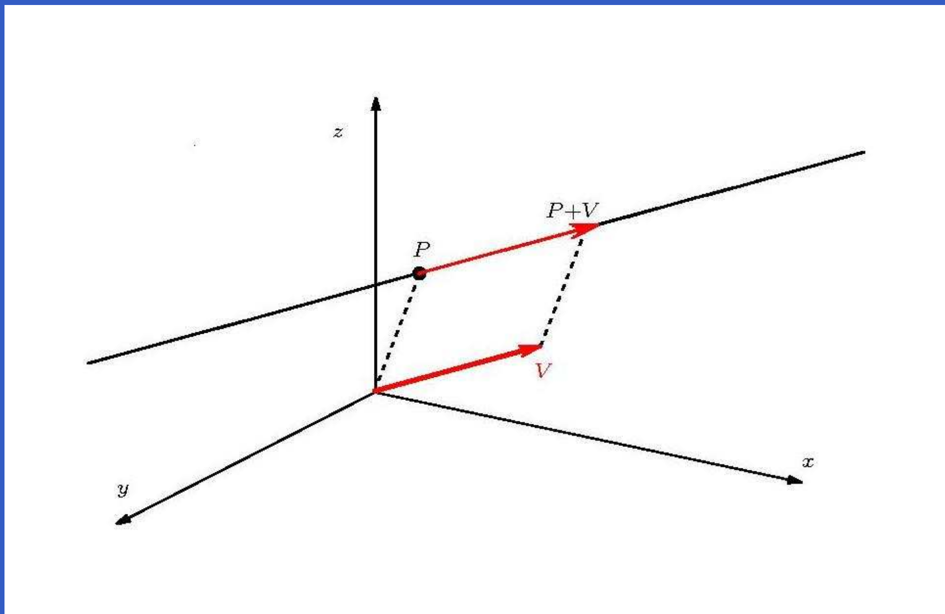
r recta que pasa por el punto P con dirección V,

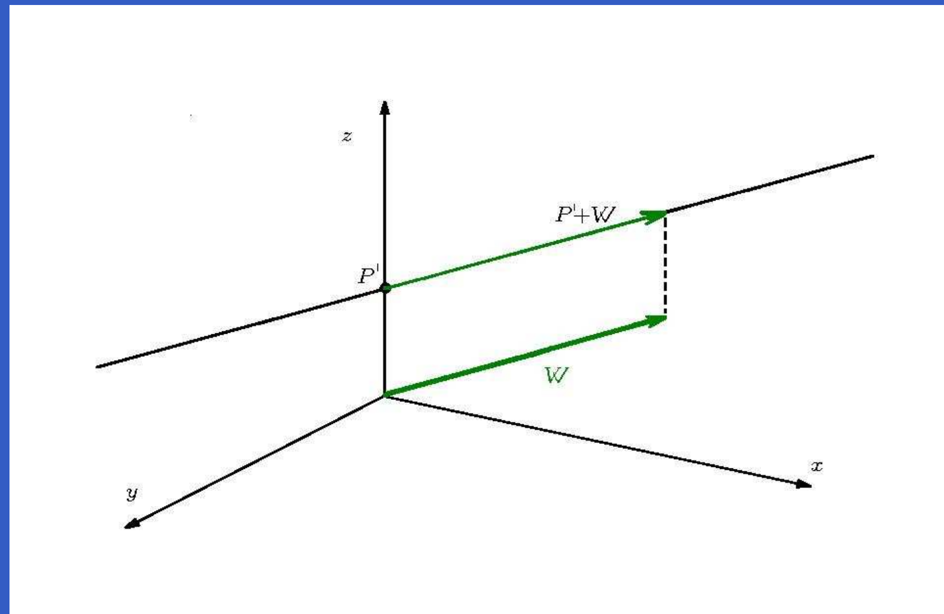




Observación

r recta que pasa por el punto P con dirección V,





r también es la recta que pasa por $P' \in r$ con dirección $W \| V$

Recta - ecuaciones paramétricas

r recta pasando por P con dirección V:

Recta - ecuaciones paramétricas

r recta pasando por P con dirección V:

$$Q \in r \iff Q = P + \lambda V$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$

Recta - ecuaciones paramétricas

r recta pasando por P con dirección V:

$$Q \in r \quad \Longleftrightarrow \quad Q = P + \lambda V$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Si

$$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Recta - ecuaciones paramétricas

r recta pasando por P con dirección V:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, con

$$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

se llaman ecuaciones paramétricas de r

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} x &= & -1 + 2\lambda \\ y &= & -2\lambda \\ z &= & 2 + \lambda \end{cases}$$

$\lambda = 0 \to (x, y, z) = (-1, 0, 2) = P$

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} x &= & -1 + 2\lambda \\ y &= & -2\lambda \\ z &= & 2 + \lambda \end{cases}$$

$$\lambda = -1 \rightarrow (x, y, z) = (-3, 2, 1) = P'$$

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

¿$(10, 1, 0) \in r$?

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

¿$(10, 1, 0) \in r$? veamos

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\begin{cases} 10 &= -1 + 2\lambda \\ 1 &= -2\lambda \\ 0 &= 2 + \lambda \end{cases}$$

¿$(10, 1, 0) \in r$? veamos

(sistema lineal de 3 ecuaciones con 1 incógnita)

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\left\{ \begin{array}{rcc} 10 & = & -1 + 2\lambda \\ 1 & = & -2\lambda \\ 0 & = & 2 + \lambda \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda = \frac{11}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{array}$$

¿$(10, 1, 0) \in r$? veamos

(sistema lineal de 3 ecuaciones con 1 incógnita)

Ejemplo 1

$P = (-1, 0, 2)$ y $V = (2, -2, 1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10 & = & -1 + 2\lambda \\ 1 & = & -2\lambda \\ 0 & = & 2 + \lambda \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda = \frac{11}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{array}$$

¿$(10, 1, 0) \in r$?

$\therefore \quad \nexists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(10, 1, 0) = P + \lambda V$

Ejemplo 1

$P=(-1,0,2)$ y $V=(2,-2,1)$, ecuaciones paramétricas de r pasando por P con dirección V

$$\left\{\begin{array}{rcc} 10 & = & -1+2\lambda \\ 1 & = & -2\lambda \\ 0 & = & 2+\lambda \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda=\frac{11}{2} \\ \lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=-2 \end{array}$$

¿$(10,1,0)\in r$?

$\therefore \quad \nexists\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $(10,1,0)=P+\lambda V$

$\Rightarrow (10,1,0)\notin r$

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= -2\lambda \\ z &= 2 + \lambda \end{cases}$$

si escalerizamos

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} -2\lambda + x & = & -1 \\ 2\lambda + y & = & 0 \\ -\lambda + z & = & 2 \end{cases}$$

si escalerizamos

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} -2\lambda + x & = & -1 \\ x + y & = & -1 \\ -\lambda + z & = & 2 \end{cases}$$

si escalerizamos

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} -2\lambda + x & = & -1 \\ x + y & = & -1 \\ 2z - x & = & 5 \end{cases}$$

si escalerizamos

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} -2\lambda + x & = & -1 \\ x + y & = & -1 \\ 2z - x & = & 5 \end{cases}$$

si escalerizamoses fácil ver que

$(x, y, z) \in r \iff (x, y, z)$ verifica

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\begin{cases} -2\lambda + x & = & -1 \\ x + y & = & -1 \\ 2z - x & = & 5 \end{cases}$$

si escalerizamoses fácil ver que

$$(x, y, z) \in r \iff (x, y, z) \text{ verifica } (2)$$

Ecuaciones reducidas

Otras ecuaciones para la misma recta:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -2\lambda + x & = & -1 & \\ x + y & = & -1 & (2) \\ 2z - x & = & 5 & (3) \end{array} \right.$$

si escalerizamoses fácil ver que

$$(x, y, z) \in r \Longleftrightarrow (x, y, z) \text{ verifica } (2) \text{ y } (3)$$

Ecuaciones reducidas

El sistema

$$\begin{cases} x + y & = -1 \\ -x + 2z & = 5 \end{cases}$$

Ecuaciones reducidas

El sistema

$$\begin{cases} x + y &= -1 \\ -x + 2z &= 5 \end{cases}$$

se llama ecuación reducida de r

Ecuaciones reducidas

El sistema

$$\begin{cases} x + y & = & -1 \\ -x + 2z & = & 5 \end{cases}$$

se llama ecuación reducida de r

o ecuación implícita de r

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ escalerización $\longrightarrow$ ecuaciones reducidas

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ escalerización $\longrightarrow$ ecuaciones reducidas
- ahora queremos ver

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ escalerización $\longrightarrow$ ecuaciones reducidas
- ahora queremos ver
- ecuaciones reducidas $\longrightarrow$? $\longrightarrow$ ecuaciones paramétricas

Ejemplo

Consideremos el sistema:

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - y & = & 3 \\ x + z & = & -1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -3 + x \\ x + z & = & -1 \end{array} \right.$$

se despeja y de la primera ecuación

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \\ y = -3 + x \\ z = -1 - x \end{cases}$$

se despeja y de la primera ecuación

se despeja z de la segunda ecuación

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -3 + x \\ z & = & -1 - x \end{array} \right.$$

se despeja y de la primera ecuación

se despeja z de la segunda ecuación

y se obtiene un sistema en función del parámetro x

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -3+\lambda \\ z &= -1-\lambda \end{cases}$$

se despeja y de la primera ecuación

se despeja z de la segunda ecuación

y se obtiene un sistema en función del parámetro x

Observación 1

- Cualquier punto P y cualquier vector V determinan una ecuación paramétrica de una recta.

Observación 1

- Cualquier punto P y cualquier vector V determinan una ecuación paramétrica de una recta.
- Pero no cualquier par de ecuaciones lineales en x, y, z determinan una recta.

Observación 1 - ejemplo

- por ejemplo, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

es verificado por todos los puntos del plano $x = y$

Observación 1 - ejemplo

- por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{cases}$$

es verificado por todos los puntos del plano $x = y$

- y el sistema

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 2 \end{cases}$$

no es verificado por ningún punto

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida
- paramétrica

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida
- paramétrica

la recta es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida
- paramétrica

la recta es el conjunto solución del sistema de ecuaciones linealesy siempre tiene un grado de libertad

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida
- paramétrica

la recta es el conjunto solución del sistema de ecuaciones linealesy siempre tiene un grado de libertad

- en el caso de la ec. paramétrica son 3 ecuaciones con 4 incógnitas (siempre tiene rango 3)

Observación 2

En cualquiera de las 2 versiones

- reducida
- paramétrica

la recta es el conjunto solución del sistema de ecuaciones linealesy siempre tiene un grado de libertad

- en el caso de la reducida, son 2 ecuaciones con 3 incógnitas (para que represente una recta tiene que ser compatible con rango 2)

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

- donde X_P solución particular

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

- donde X_P solución particular
- $\mathcal{S}ol_H$ conjunto solución de la homogénea

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

- donde X_P solución particular
- $\mathcal{S}ol_H$ conjunto solución de la homogénea
- es decir

$$r = P + r_H$$

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

- donde X_P solución particular
- $\mathcal{S}ol_H$ conjunto solución de la homogénea
- es decir

$$r = P + r_H$$

- donde P punto de paso,

Observación 3

- Como todo conjunto solución, la recta cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

- donde X_P solución particular
- $\mathcal{S}ol_H$ conjunto solución de la homogénea
- es decir

$$r = P + r_H$$

- donde P punto de paso,
- r_H la recta con dirección V que pasa por el origen $(0, 0, 0)$.

intersección de rectas

¿Cómo sabemos si dos ecuaciones determinan la misma recta?
La forma universal es

- plantear el sistema conjunto (de 4,5 o 6 ecuaciones, según el caso)

intersección de rectas

¿Cómo sabemos si dos ecuaciones determinan la misma recta?

La forma universal es

- plantear el sistema conjunto (de 4,5 o 6 ecuaciones, según el caso)
- si el conjunto solución tiene 1 grado de libertad, entonces determinan la misma recta

intersección de rectas

¿Cómo sabemos si dos ecuaciones determinan la misma recta?
La forma universal es

- plantear el sistema conjunto (de 4,5 o 6 ecuaciones, según el caso)
- si el conjunto solución tiene 1 grado de libertad, entonces determinan la misma recta
- si es compatible determinado, entonces las rectas se cortan en un punto

intersección de rectas

¿Cómo sabemos si dos ecuaciones determinan la misma recta?
La forma universal es

- plantear el sistema conjunto (de 4,5 o 6 ecuaciones, según el caso)
- si el conjunto solución tiene 1 grado de libertad, entonces determinan la misma recta
- si es compatible determinado, entonces las rectas se cortan en un punto
- si es incompatible, entonces ni siquiera se cortan

otras formas

Puede haber formas más prácticas, según los tipos de ecuación.

Ejemplo 1

si tenemos 2 ecuaciones paramétricas

$$r) Q = P + \lambda V \qquad r') Q = P' + \lambda W$$

Ejemplo 1

si tenemos 2 ecuaciones paramétricas

$$r) Q = P + \lambda V \qquad r') Q = P' + \lambda W$$

r y r' determinan la misma ecuación si

Ejemplo 1

si tenemos 2 ecuaciones paramétricas

$$r) Q = P + \lambda V \qquad\qquad r') Q = P' + \lambda W$$

r y r' determinan la misma ecuación si

- $V \| W$

Ejemplo 1

si tenemos 2 ecuaciones paramétricas

$$r)Q = P + \lambda V \qquad r')Q = P' + \lambda W$$

r y r' determinan la misma ecuación si

- $V \| W$
- $P' \in r$, o sea $(P' - P) \| V$

Ejemplo 2

Si tenemos dos ecuaciones reducidas,

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{cases} \qquad r') \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Si tenemos dos ecuaciones reducidas,

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{cases} \qquad r') \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{cases}$$

Planteamos el sistema

Ejemplo 2

Si tenemos dos ecuaciones reducidas,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z & = d_4 \end{cases}$$