# Repaso

*Sistemas lineales*
*Álgebra de matrices*
*Rango & Determinante*
*Geometría*

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 8 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{cases}$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y & +2z & = 8 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}\right.$$

PASO 1: eliminar las $x$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 8 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}\right. \quad \leftarrow \text{Fija}$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 8 \quad \leftarrow F_1 \\ x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array} \right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 8 \quad \leftarrow F_1 \\ x & +2y & +z & = 0 \quad \leftarrow F_2 \\ 2x & +y & +z & = 4 \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 - F_1 \\ 2x & +y & +z & = 4 & \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ 2x & +y & +z & = 4 & \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ 2x & +y & +z & = 4 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & -y & -3z & = -12 & \leftarrow F_3 - 2F_1 \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & -y & -3z & = -12 & \end{cases}$$

PASO 2: eliminar $y$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 + F_2 \end{array}\right.$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

Sistema escalerizado

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow z = 5$$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5$

$\Rightarrow y = -3$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5$

$\Rightarrow y = -3$

$\Rightarrow x = 1$

# Ejemplo

Método de escalerización de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & = 8 & \leftarrow F_1 \\ & +y & -z & = -8 & \leftarrow F_2 \\ & & -4z & = -20 & \leftarrow F_3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow z = 5 \\ \Rightarrow y = -3 \quad \Rightarrow \quad S_{ESC} = \{(1, -3, 5)\} \\ \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

# Método de escalerización de Gauss

- consiste en aplicar transformaciones elementales

# Método de escalerización de Gauss

- consiste en aplicar transformaciones elementales
- hasta que el sistema quede escalerizado

# Método de escalerización de Gauss

- consiste en aplicar transformaciones elementales
- hasta que el sistema quede escalerizado
- las soluciones del sistema escalerizado coinciden con las del original

# Transformaciones elementales

- $F_i \mapsto \alpha F_i$ con $\alpha \neq 0$

# Transformaciones elementales

- $F_i \mapsto \alpha F_i$ con $\alpha \neq 0$
- $F_i \leftrightarrow F_j$

# Transformaciones elementales

- $F_i \mapsto \alpha F_i$ con $\alpha \neq 0$
- $F_i \leftrightarrow F_j$
- $F_i \mapsto F_i + \alpha F_j$

# Método de escalerización de Gauss

- Cualquier sistema se escaleriza en una cantidad finita de transformaciones elementales

# Método de escalerización de Gauss

- Cualquier sistema se escaleriza en una cantidad finita de transformaciones elementales
- Las transformaciones elementales no alteran el conjunto solución

# Método de escalerización de Gauss

- Cualquier sistema se escaleriza en una cantidad finita de transformaciones elementales
- Las transformaciones elementales no alteran el conjunto solución
  - $\therefore$ el M.E.G. resuelve cualquier sistema en una cantidad finita de pasos

# Teorema de Rouché -Frobenius

$AX = b$ sistema de ecuaciones, con
$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

# Teorema de Rouché -Frobenius

$AX = b$ sistema de ecuaciones, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $A_E$ forma escalerizada de $A$

# Teorema de Rouché -Frobenius

$AX = b$ sistema de ecuaciones, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $A_E$ forma escalerizada de $A$
- $(A|b)_E$ forma escalerizada de $(A|b)$

# Teorema de Rouché -Frobenius

$AX = b$ sistema de ecuaciones, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $A_E$ forma escalerizada de $A$
- $(A|b)_E$ forma escalerizada de $(A|b)$
  - $AX = b$ compatible $\Leftrightarrow$ escalones $A_E$= escalones $(A|b)_E$

# Teorema de Rouché -Frobenius

$AX = b$ sistema de ecuaciones, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $A_E$ forma escalerizada de $A$
- $(A|b)_E$ forma escalerizada de $(A|b)$
  - $AX = b$ compatible $\Leftrightarrow$ escalones $A_E$= escalones $(A|b)_E$
  - $AX = b$ determinado $\Leftrightarrow$ escalones $A_E = n$

    (suponiendo que sea compatible)

# Álgebra de las matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

# Álgebra de las matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

# Álgebra de las matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\alpha A = (a_{ij})_{i,j}$$

# Álgebra de las matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\alpha A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$C \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K}), \qquad D \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

# Álgebra de las matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\alpha A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$C \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K}), \qquad D \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

$$C.D = \left(\sum_{k=1}^{r} c_{ik} d_{kj}\right)_{i,j}$$

# Álgebra de las matrices

$$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\alpha A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$C \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K}), \qquad D \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

$$C.D = \left(\sum_{k=1}^{r} c_{ik} d_{kj}\right)_{i,j}$$

el producto no es conmutativo

# Álgebra de las matrices

$$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$$

$$\alpha A = (a_{ij})_{i,j}$$

$$C \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K}), \qquad D \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

$$C.D = \left(\sum_{k=1}^{r} c_{ik} d_{kj}\right)_{i,j}$$

$$A^t = (a^t_{ji})_{j,i} \qquad \text{con } a^t_{ji} = a_i j$$

# Espacio de $n$-uplas

- $X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

# Espacio de $n$-uplas

- $X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha X = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

# Combinación lineal

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \alpha_m X_m$$

# Independencia lineal

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \alpha_m X_m = \mathbb{O}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

# Independencia lineal

Un conjunto de vectores es L.D.

$$\Updownarrow$$

Alguno es C.L. de los restantes

# Rango

Rango de un conjunto de vectores:

máxima cantidad de vectores L.I.

# Rango de una matriz

Rango de una matriz=

rango del conjunto de filas de la matriz

$$\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(A^t) = \mathrm{escalones}(A_E)$$

# Teorema de Rouché-Frobenius

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $AX = b$ compatible $\Leftrightarrow$ rango$(A)$=rango $(A|b)$

# Teorema de Rouché-Frobenius

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

- $AX = b$ compatible $\Leftrightarrow$ rango$(A)$=rango $(A|b)$
- $AX = b$ compatible determinado $\Leftrightarrow$ rango$(A) = n$ (siendo compatible)

# Teorema

$$\mathrm{rango}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ invertible}$$

# Teorema

$A$ invertible $\Leftrightarrow$ $A$ invertible a derecha

# Determinante

La única función

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

que es

- multilineal

# Determinante

La única función

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

que es

- multilineal
- alternada

# Determinante

La única función

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

que es

- multilineal
- alternada
- 1 en la matriz identidad

# Teorema

$A$ invertible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

# Teorema Cauchy

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

# Teorema

$$\det(A) = \det(A^t)$$

# Teorema

Si $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{cof}(A)^t}{\det(A)}$$

# Geometría

- punto $\leftrightarrow P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

# Geometría

- punto $\leftrightarrow P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- vector $\leftrightarrow V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

# Recta - paramétricas

$$r) \begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 \end{cases}$$

# Recta - paramétricas

$$r)\left\{\begin{array}{rll} x = & x_0 & +\lambda u_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 \end{array}\right.$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$ punto de paso

# Recta - paramétricas

$$r) \begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 \end{cases}$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$ punto de paso

$U = (u_1, u_2, u_3)$ vector director

# Recta - reducida

$$r)\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{array}\right.$$

# Plano - paramétricas

$$\pi) \begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

# Plano - paramétricas

$$\pi)\begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$ punto de paso

# Plano - paramétricas

$$\pi) \begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

$P = (x_0, y_0, z_0)$ punto de paso

$U = (u_1, u_2, u_3)$ y $V = (v_1, v_2, v_3)$ vectores directores

# Plano - reducida

$$\pi) ax + by + cz + d = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ vector normal al plano

# Producto escalar

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

# Producto vectorial

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

# Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|X \cdot Y| \leq |X||Y|$$

# Ángulos

$$\cos \angle(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|}$$

$$|X \wedge Y| = |X||Y| \operatorname{sen} \angle(X, Y)$$