Superficies cuádricas

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

9 de noviembre de 2010

superficie cuádrica

definición (forma cuadrática)

- una superficie cuádrica está dada por la ecuación:

superficie cuádrica

definición (forma cuadrática)

- una superficie cuádrica está dada por la ecuación:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

superficie cuádrica

definición (forma cuadrática)

- una superficie cuádrica está dada por la ecuación:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

- o, equivalentemente,

$$X^tAX+2B^tX+c=0$$

superficie cuádrica

definición (forma cuadrática)

- una superficie cuádrica está dada por la ecuación:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

- o, equivalentemente,

$$X^tAX + 2B^tX + c = 0$$

- con A matriz simétrica, B vector de $\mathbb{R}^3$, c constante.

ejemplo 1

ejemplo 1

- la esfera unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

es una cuádrica

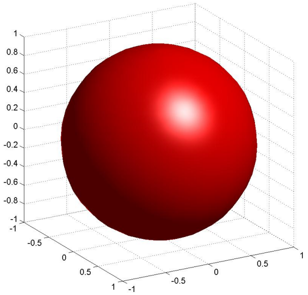
ejemplo 1

ejemplo 1

- la esfera unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

es una cuádrica



-

ejemplo 2

ejemplo 2

- la cuádrica $xy = 0$

ejemplo 2

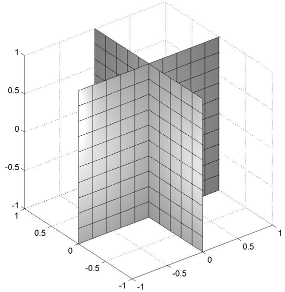
ejemplo 2

- la cuádrica $xy = 0$
- es la unión del plano $x = 0$ con el plano $y = 0$

ejemplo 2

ejemplo 2

- la cuádrica $xy = 0$
- es la unión del plano $x = 0$ con el plano $y = 0$



-

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

definición

ecuación reducida de una cuádrica:

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

definición

ecuación reducida de una cuádrica:

- se obtiene por un cambio de variables ortogonal

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

definición

ecuación reducida de una cuádrica:

- se obtiene por un cambio de variables ortogonal
- y tiene uno de los siguientes tipos:

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

definición

ecuación reducida de una cuádrica:

- se obtiene por un cambio de variables ortogonal
- y tiene uno de los siguientes tipos:
  1. tipo I: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$

ecuación reducida

Nuestro objetivo es hacer un cambio de variables para que la cuádrica quede en una forma reducida:

definición

ecuación reducida de una cuádrica:

- se obtiene por un cambio de variables ortogonal
- y tiene uno de los siguientes tipos:
  1. tipo I: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$
  2. tipo II: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z = 0$

ejemplos

ejemplo

- el ejemplo 1 (esfera) es de tipo I con $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y $\delta = -1$

ejemplos

ejemplo

- el ejemplo 1 (esfera) es de tipo I con $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y $\delta = -1$
- el ejemplo 2 ($xy = 0$) no está en su forma reducida, ya veremos cuál es

objetivos

1. ver cómo se llega a una ecuación reducida

objetivos

1. ver cómo se llega a una ecuación reducida
2. ver cuál es el dibujo de la superficie en su forma reducida

centro de una cuádrica

definición

- $X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica

centro de una cuádrica

definición

- $X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica
- $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ centro de la cuádrica si

centro de una cuádrica

definición

- $X^tAX + 2B^tX + c = 0$ cuádrica
- $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ centro de la cuádrica si
- $$A \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} + B = \vec{0}$$

observación

- puede haber un único centro (sistema compatible determinado)

observación

- puede haber un único centro (sistema compatible determinado)
- puede haber infinitos centros (sistema compatible indeterminado)

observación

- puede haber un único centro (sistema compatible determinado)
- puede haber infinitos centros (sistema compatible indeterminado)
- puede no haber centros (sistema incompatible)

centro y clasificación de cuádricas

teorema 1

- $F(x, y, z) = X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica

centro y clasificación de cuádricas

teorema 1

- $F(x, y, z) = X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica
- $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ con P ortogonal

centro y clasificación de cuádricas

teorema 1

- $F(x, y, z) = X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ con P ortogonal
- Si existe un centro $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)^t$, entonces

centro y clasificación de cuádricas

teorema 1

- $F(x,y,z) = X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ con P ortogonal
- Si existe un centro $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)^t$, entonces
- haciendo el cambio de variables $X = PX' + Q$

centro y clasificación de cuádricas

teorema 1

- $F(x, y, z) = X^t AX + 2B^t X + c = 0$ cuádrica
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ con P ortogonal
- Si existe un centro $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)^t$, entonces
- haciendo el cambio de variables $X = PX' + Q$
- la cuádrica queda tipo I:

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + F(Q) = 0$$

cuando no hay centro

teorema 2

- Si la cuádrica $X^t AX + 2B^t X + c = 0$ no tiene centro

cuando no hay centro

teorema 2

- Si la cuádrica $X^tAX + 2B^tX + c = 0$ no tiene centro
- $\Rightarrow P^tAP = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, 0)$ y

cuando no hay centro

teorema 2

- Si la cuádrica $X^t A X + 2B^t X + c = 0$ no tiene centro
- $\Rightarrow P^t A P = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, 0)$ y
- la ecuación reducida es de tipo II:

$$\alpha x'^2 + \beta y'^z + \rho z' = 0 \qquad \text{con } \rho \neq 0$$

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I
- hay dos casos importantes:

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I
- hay dos casos importantes:
  1. $\delta \neq 0$

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I
- hay dos casos importantes:
  1. $\delta \neq 0$
  2. $\delta = 0$

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I
- hay dos casos importantes:
  1. $\delta \neq 0 \rightarrow \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 = 1$
  2. $\delta = 0$

cuádricas de tipo I

tipo I

- $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ cuádrica de tipo I
- hay dos casos importantes:
  1. $\delta \neq 0 \rightarrow \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 = 1$
  2. $\delta = 0 \rightarrow \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$

clasificación de cuádricas de tipo I

clasificación

- cómo se clasifican?

clasificación de cuádricas de tipo I

clasificación

- cómo se clasifican?
- 1ero por $\delta \neq 0$ o $\delta \neq 0$

clasificación de cuádricas de tipo I

clasificación

- cómo se clasifican?
- 1ero por $\delta \neq 0$ o $\delta \neq 0$
- luego por signo de α, β y γ

elipsoide

elipsoide

elipsoide

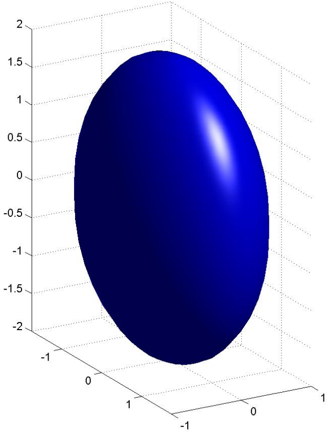
$+$	$+$	$+$	1
$3x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$			

elipsoide

elipsoide

elipsoide

$+$	$+$	$+$	1
$3x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$			

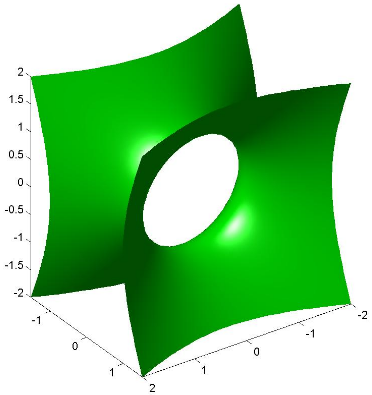


hiperboloide de una hoja

hiperboloide de una hoja

hiperboloide de 1 hoja

$+$	$+$	$-$	1
$x^2 - 3y^2 + z^2 = 1$			

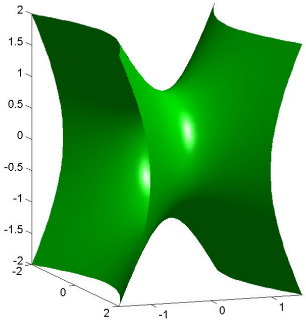


hiperboloide de una hoja

hiperboloide de una hoja

hiperboloide de 1 hoja

$+$	$+$	$-$	1
$x^2 - 3y^2 + z^2 = 1$			

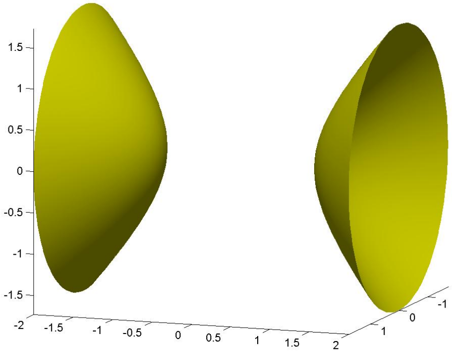


hiperboloide de dos hojas

hiperboloide de dos hojas

hiperboloide de 2 hojas

$+$	$-$	$-$	1
$-x^2+y^2-z^2=1$			

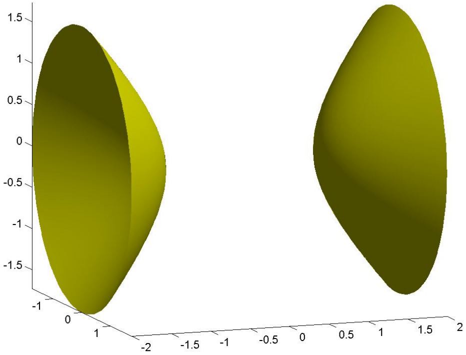


hiperboloide de dos hojas

hiperboloide de dos hojas

hiperboloide de 2 hojas

$+$	$-$	$-$	1
$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$			

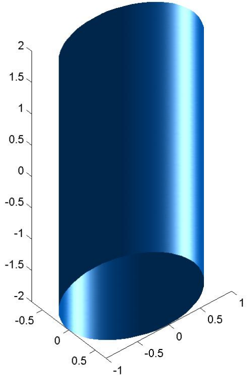


cilindro elíptico

cilindro elíptico

cilindro elíptico

$+$	$+$	0	1
$x^2 + 2y^2 = 1$			

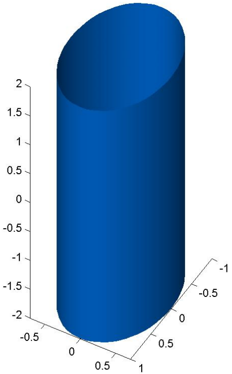


cilindro elíptico

cilindro elíptico

cilindro elíptico

$+$	$+$	0	1
$x^2 + 2y^2 = 1$			

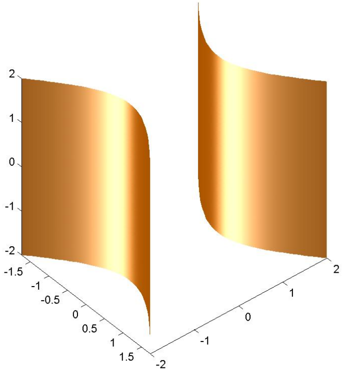


cilindro hiperbólico

cilindro hiperbólico

cilindro elíptico

$+$	$-$	0	1
$x^2 - y^2 = 1$			

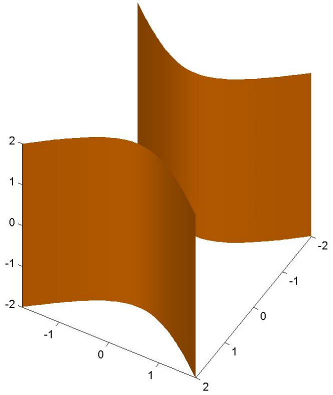


cilindro hiperbólico

cilindro hiperbólico

cilindro elíptico

$+$	$-$	0	1
$x^2 - y^2 = 1$			

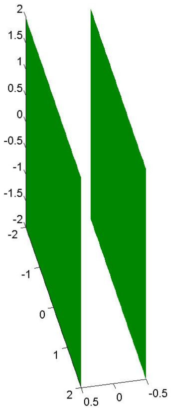


dos planos paralelos

dos planos paralelos

dos planos paralelos

$+$	0	0	1
$4x^2 = 1$			

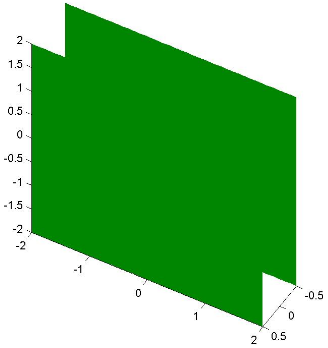


dos planos paralelos

dos planos paralelos

dos planos paralelos

$+$	0	0	1
$4x^2 = 1$			



otros casos

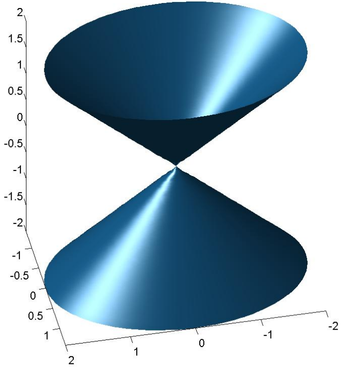
$-$	$-$	$-$	1	$\longrightarrow \emptyset$
$-$	$-$	0	1	$\longrightarrow \emptyset$
$-$	0	0	1	$\longrightarrow \emptyset$

cono

cono

cono

$+$	$+$	$-$	0
$-$	$-$	$+$	0
$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$			

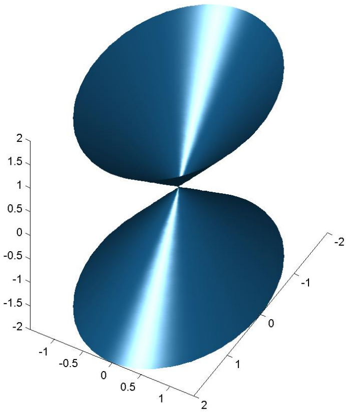


cono

cono

cono

$+$	$+$	$-$	0
$-$	$-$	$+$	0
$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$			

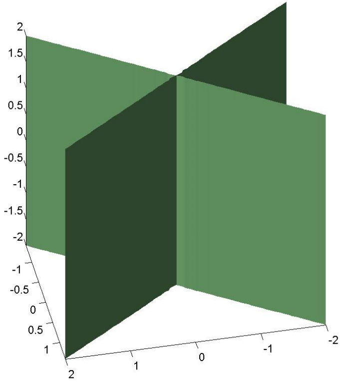


planos que se cortan

planos que se cortan

planos que se cortan

$+$	$+$	$-$	0
$-$	$-$	$+$	0
$x^2 - y^2 = 0$			

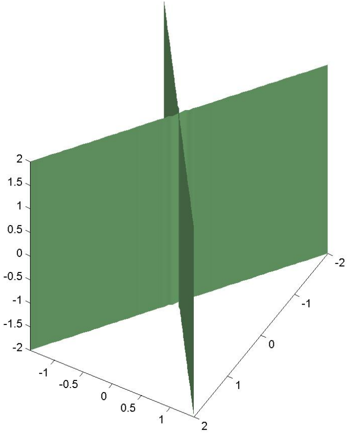


planos que se cortan

planos que se cortan

planos que se cortan

$+$	$+$	$-$	0
$-$	$-$	$+$	0
$x^2 - y^2 = 0$			



otros casos

$\pm$	$\pm$	$\pm$	0	un punto
$\pm$	$\pm$	0	0	una recta
$\pm$	0	0	0	un plano

tipo II

tipo II

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \rho z = 0 \qquad \text{con } \rho \neq 0$$

tipo II

tipo II

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \rho z = 0 \qquad \text{con } \rho \neq 0$$

cómo se clasifican:

tipo II

tipo II

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \rho z = 0 \qquad \text{con } \rho \neq 0$$

cómo se clasifican:

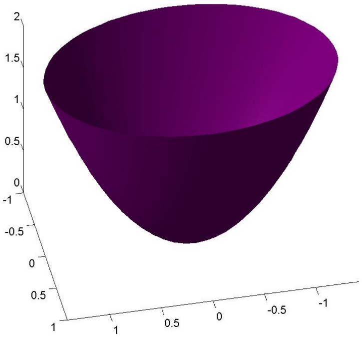
- por el signo de $\alpha.\beta$ (el signo de ρ no incide)

paraboloide elíptico

paraboloide elíptico

paraboloide
elíptico

$\alpha.\beta > 0$
$x^2 + 2y^2 = z$

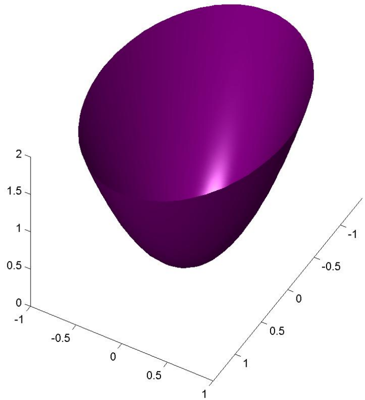


paraboloide elíptico

paraboloide elíptico

paraboloide elíptico

$\alpha.\beta > 0$
$x^2 + 2y^2 = z$

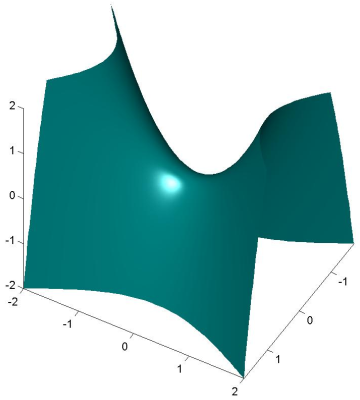


paraboloide hiperbólico

paraboloide hiperbólico

paraboloide hiperbólico

$\alpha.\beta < 0$
$4x^2 - 2y^2 = -z$

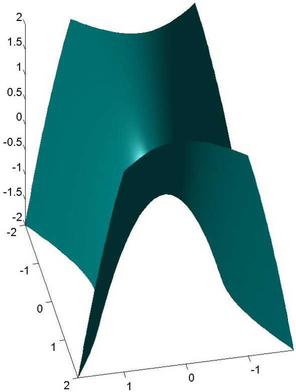


paraboloide hiperbólico

paraboloide hiperbólico

paraboloide hiperbólico

$\alpha.\beta < 0$
$4x^2 - 2y^2 = -z$

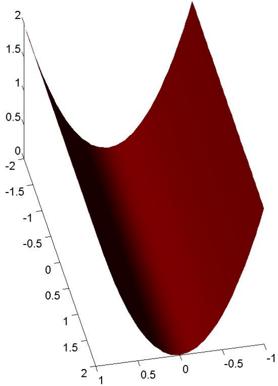


cilindro parabólico

cilindro parabólico

cilindro parabólico

$\alpha.\beta = 0$
$2x^2 = z$



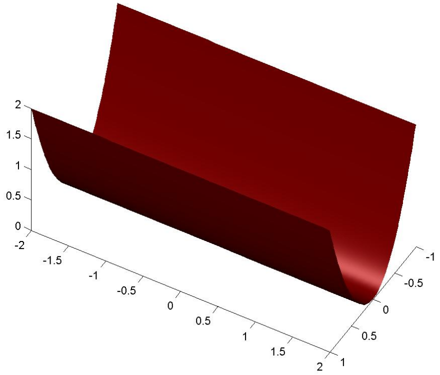
cilindro parabólico

cilindro parabólico

cilindro parabólico

$$\boxed{\alpha.\beta = 0}$$

$$\boxed{2x^2 = z}$$



ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Ecuación de centro: $AQ+B=\vec{0}$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Ecuación de centro: $AQ+B=\vec{0}$ $Q=(3y-1,y,6y+1)$ (∞ centros)

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Ecuación de centro: $AQ+B=\vec{0}$ $Q=(3y-1,y,6y+1)$ (∞ centros)
- $\rightarrow$ TIPO I

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Ecuación de centro: $AQ+B=\vec{0}$ $Q=(3y-1,y,6y+1)$ (∞ centros)
- $\rightarrow$ TIPO I
- vap de A: $\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+21\lambda^2-92\lambda=0$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Ecuación de centro: $AQ + B = \vec{0}$ $Q = (3y - 1, y, 6y + 1)$ (∞ centros)
- $\rightarrow$ TIPO I
- vap de A: $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda = 0$
- $\Rightarrow$ (x regla Descartes) dos raíces $+$, una 0

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

$$Q=(3y-1,y,6y+1)$$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 = 0$$

$$Q = (3y - 1, y, 6y + 1)$$

- ecuación reducida: $\alpha x^2 + \beta y^2 + 0z^2 + F(Q) = 0$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 = 0$$

$$Q = (3y - 1, y, 6y + 1)$$

- ecuación reducida: $\alpha x^2 + \beta y^2 + 0z^2 + F(Q) = 0$
- $F(Q) = F(-1, 0, 1) = -7 < 0$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 = 0$$

$$Q = (3y - 1, y, 6y + 1)$$

- ecuación reducida: $\alpha x^2 + \beta y^2 + 0z^2 + F(Q) = 0$
- $F(Q) = F(-1, 0, 1) = -7 < 0$
- ecuación reducida: $\frac{\alpha}{7} x^2 + \frac{\beta}{7} y^2 = 1$

ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz + 28x + 12y - 16z + 15 = 0$$

$$Q = (3y - 1, y, 6y + 1)$$

- ecuación reducida: $\alpha x^2 + \beta y^2 + 0z^2 + F(Q) = 0$
- $F(Q) = F(-1, 0, 1) = -7 < 0$
- ecuación reducida: $\frac{\alpha}{7}x^2 + \frac{\beta}{7}y^2 = 1$
- cilindro elíptico

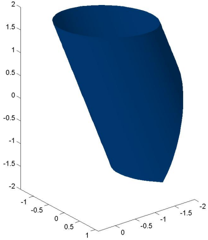
ejemplo 1

ejemplo 1

Clasificar

$$9x^2+9y^2+3z^2+6xy-10xz-6yz+28x+12y-16z+15=0$$

ecuación reducida: $\frac{\alpha}{7}x^2+\frac{\beta}{7}y^2=1$



cilindro elíptico

ejemplo 2

ejemplo 2

Clasificar

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

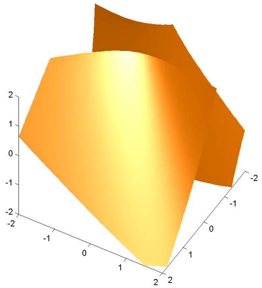
(cálculo en pizarrón)

ejemplo 2

ejemplo 2

Clasificar

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$



(cálculo en pizarrón)

ejemplo3

ejemplo 3

Clasificar

$$-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$$

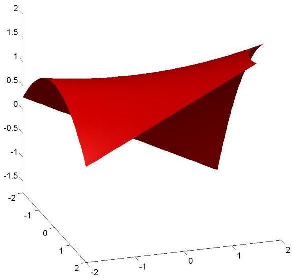
(cálculo en pizarrón)

ejemplo3

ejemplo 3

Clasificar

$$-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$$



(cálculo en pizarrón)