



Universidad de la República

Facultad de Ciencias

Estudio de la Función de Correlación a Tres Puntos en la Teoría Escalar φ^4

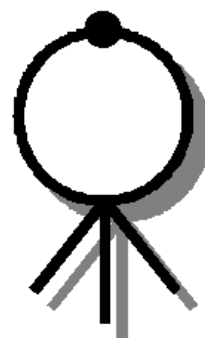
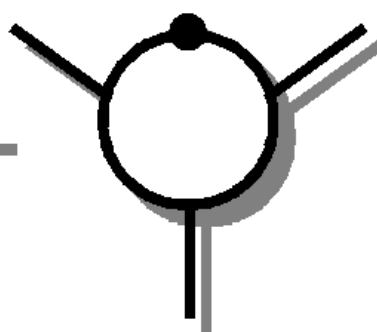
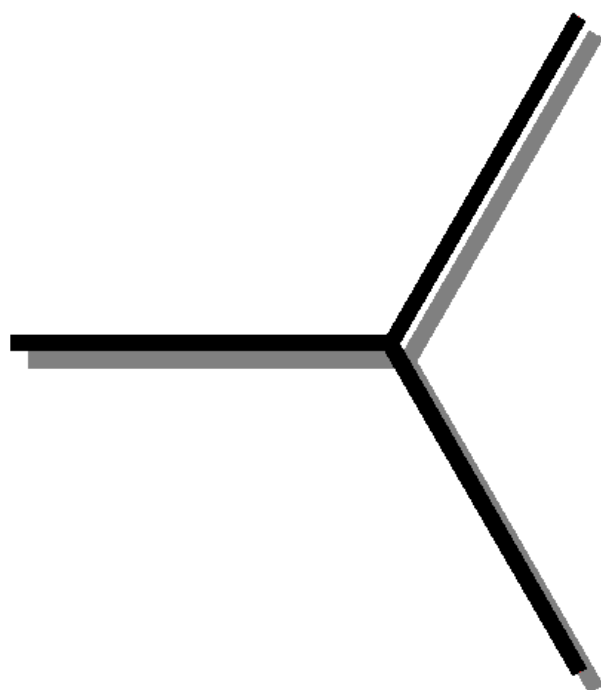
Nicolás Andrés Casaballe Gamou

*Tesis presentada para completar los requerimientos del grado de
Magíster en Física*

Orientadores: Dr. Ramón Méndez Galain
Dr. Nicolás Wschebor

defendida el 5 de octubre de 2009 ante el tribunal integrado por:

Dr. Ramón Méndez Galain
Dr. Nicolás Wschebor
Dr. Alejandro Romanelli
Dr. Pablo Mora
Dr. Gustavo Guerberoﬀ



Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin, y le debe su agradecimiento:

A mis orientadores Ramón y Nicolás, entre muchas cosas por su infinita no-numerable paciencia; los lectores de este documento deberían también agradecerles por haber evitado que yo engendre un texto absolutamente caótico.

Al PEDECIBA, a la ANII y al Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería, que ofrecieron una ayuda vital para esta tesis, y también a mi madre.

A Ricardo Siri “el Pollo”, a Amelia Ferrari, a Gonzalo Abal y a todos los grado uno de la sala ocho por el inmenso apoyo. A todos mis profesores, compañeros y estudiantes, por todo lo aprendido.

A mi familia por soportarme, sobretodo a mi madre (vale por dos!).

Y a Virginia, por acompañarme.

Nicolás

Abstract

This text summarizes the more relevant aspects of the Non Perturbative Renormalization Group, and the new approximation scheme developed by Blaizot, Méndez and Wschebor for studying the impulse dependence on correlation functions in critical regime is explained. This scheme's application to the two-point correlation function in the scalar ϕ^4 model is reviewed. Flow equations for the three-point correlation function in said model are derived and details about its numerical implementation are discussed. The calculations reproduce perturbative results for situations with large momentum with respect to the coupling constant, and power laws and scale invariance for small momentum. The latter allows extracting a critical exponent $\eta = 0,04$.

Resumen

En este texto se resumen los aspectos más relevantes del Grupo de Renormalización No Perturbativo, y se explica el nuevo esquema de aproximación desarrollado por Blaizot, Méndez y Wschebor para el estudio de la dependencia en impulsos de las funciones de correlación en el régimen crítico. Se revisa la aplicación de este esquema a la función de correlación a dos puntos para la teoría escalar ϕ^4 . Se derivan las ecuaciones de flujo para la función de correlación a tres puntos en dicho modelo y se discuten los detalles de su implementación numérica. Los cálculos reproducen los resultados perturbativos para situaciones impulsos muy grandes con respecto a la constante de acoplamiento y leyes de potencia e invariancia de escala para impulsos muy pequeños. Esto último permite extraer el exponente crítico $\eta = 0,04$.

Palabras clave: *correlación, campos, renormalización, no perturbativo*

Índice general

Prólogo	1
1. Planteo del problema	7
1.1. Fenómenos Críticos	7
1.1.1. Una visita breve a la transición líquido-gas	7
1.2. Los exponentes críticos	10
1.2.1. Por qué una teoría de campo medio no se puede aplicar a una transición de segundo orden	12
1.2.2. Transición Ferromagnética	13
1.3. Fluctuaciones y Funciones de Correlación	18
1.3.1. Invariancia de escala y leyes de potencia	20
1.4. Grupo de Renormalización	23
1.4.1. Modelo de Ising y la teoría escalar φ^4	24
1.5. Flujo de renormalización	32
2. Un nuevo método de aproximación	39
2.1. Límites de la aproximación perturbativa	40
2.2. Grupo de Renormalización No Perturbativo	44
2.2.1. Acción eficaz	45
2.2.2. Ecuación Exacta	49
2.2.3. Aproximaciones de Campo Local, LPA y LPA'	55
2.2.4. Ecuación para el potencial	56
2.3. Método BMW	61
2.4. El orden dominante de la función a dos puntos (LO).	64
3. Función de Correlación a Tres Puntos	73
3.1. Ecuaciones del NLO	73
3.1.1. Ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$	74
3.1.2. Función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$	80
3.1.3. Adimensionamiento	83

3.2. Truncación de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$	84
3.3. Regímenes de la función a tres puntos	86
4. Solución Numérica	91
4.1. Resumen del problema	91
4.1.1. Cómo acercarnos al punto fijo	92
4.1.2. Ajuste múltiple	94
4.2. Estrategia de resolución	95
4.2.1. Discretización	96
4.2.2. Derivación Numérica	97
4.2.3. Integración Numérica	98
4.3. Resultados y análisis	98
4.3.1. Truncación de la ecuación de flujo	100
4.3.2. Comparación entre $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y la derivada de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$	102
4.3.3. Régimen UV y resultados perturbativos	105
4.3.4. Dependencia angular	106
4.3.5. Régimen IR y leyes de potencia	108
5. Conclusiones	115
5.1. Síntesis	115
5.2. Puntos para desarrollar	118
5.3. Comentarios finales	121
A. Una interpretación de la función de correlación a dos puntos	125
B. Relación entre Z_{κ} y η	127
C. Reglas de derivación para las funciones de correlación	131
C.1. Derivada de la función de correlación a n puntos	131
C.2. Derivada del propagador	131
D. Ecuaciones de flujo.	133
D.1. derivadas...	133
D.2. Ecuación de flujo para $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$	133
D.3. Ecuación de flujo para $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$	136
E. Demostración de la ecuación 2.65	141
F. Integrales I, J y K	143
F.1. Funciones de Umbral	143
F.2. Regulador y aproximación del propagador	144

F.3. Integrales	145
F.3.1. Cálculo de I	146
F.3.2. Cálculo de $J(p)$	146
F.3.3. Cálculo de $K(p, q)$	149
G. Algunos detalles del cálculo numérico	155
G.1. Derivadas Numéricas	155
G.2. Integrales numéricas	157
G.3. Código fuente	158
Bibliografía	159

Índice de figuras

1.1. Diagrama P-T para el agua.	9
1.2. Diagrama P-V para el agua.	10
1.3. Esquema de sustancia ferromagnética	14
1.4. Comportamiento cualitativo de la magnetización espontánea en una transición de segundo orden.	16
1.5. Comportamiento cualitativo de $G(r)$ para $T \neq T_C$ y $T = T_C$	21
1.6. Red de espines en el Modelo de Ising, en una red cuadrada bidimensional $d = 2$	26
1.7. El método de bloques de espín	27
1.8. Densidad Hamiltoniana en el modelo escalar φ^4	30
1.9. Flujo del grupo de renormalización	33
1.10. Comportamiento del flujo de RG en la proximidad de un punto fijo $\mathbf{K}^*$	36
2.1. Regulador infrarrojo genérico.	47
2.2. Regulador de Litim	47
2.3. Diagrama de la Ecuación de flujo para Γ_{κ}	52
2.4. Diagramas de la ecuación de flujo del NPRG de la función de correlación a dos puntos.	54
2.5. Derivada del regulador, $\partial_{\kappa} R_{\kappa}(q)$ (genérico)	54
2.6. Derivada del regulador de Litim.	54
2.7. Flujo característico de las funciones de correlación o sus derivadas.	60
2.8. Diagramas que aparecen en la ecuación de flujo de la función a n puntos en los que intervienen las funciones a $n + 1$ y $n + 2$ puntos.	62
2.9. Representación de la transformación de los vértices en el esquema BMW	63
3.1. Primer diagrama en la ecuación de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, sin evaluar en un campo uniforme.	76
3.2. Diagramas de la ecuación de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$	78
3.3. Desarrollo perturbativo de la función a cuatro puntos de la teoría φ^4	87

4.1. Ejemplo de búsqueda de la condición inicial de criticalidad.	93
4.2. Comparación de la función a tres puntos en el régimen infrarrojo.	102
4.3. Comparación de la función a tres puntos en el régimen ultravioleta.	103
4.4. Comparación entre $\partial_\rho \Gamma_\kappa^{(2)}(p)$ y $\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q = -p, 0)$	104
4.5. Régimen perturbativo para la función a tres puntos.	105
4.6. Dependencia angular de la función a tres puntos en el régimen IR	107
4.7. Flujo de la función de correlación para configuraciones con diferentes ángulos, en el régimen $p, q \gg u_0$	109
4.8. Dependencia angular de la función a tres puntos en el régimen UV.	110
4.9. Régimen IR.	111
4.10. Ley de potencia en el régimen infrarrojo.	112
4.11. Determinación de η	113
F.1. Comparación entre K_{ap} y K_{int} en varias configuraciones de impulsos.	153
F.2. Proporción entre K_{ap} y K_{int}	153
F.3. Comparación entre K_{an} y K_{int} para $\tilde{\mu}^2$ grande.	154

Índice de cuadros

1.1. Ejemplos de Transiciones de Fase de segundo orden	11
1.2. Exponentes críticos para modelos de la transición ferromagnética. . . .	12
1.3. Exponentes críticos η y ν	22
2.1. Ordenes progresivos en el método BMW para estudiar la jerarquía de las ecuaciones del NPRG	64
2.2. Comparación de valores de η para distintos tipos de aproximación. . . .	71
4.1. Varias configuraciones de impulsos utilizados, con sus proporciones y ángulos	100

Prólogo

Bienvenido.

El texto a continuación constituye mi Tesis de Maestría en Física, **Estudio de la Función de Correlación a Tres Puntos en la Teoría Escalar φ^4** . Es la última etapa de la maestría que inicié en 2006, co-dirigida por Ramón Méndez Galain y Nicolás Wschebor, con el grupo de Física de Partículas. Este prólogo pretende ser una presentación breve sobre qué consistió el trabajo.

El formalismo teórico moderno para el estudio de la física de partículas es la Teoría de Campos, la cual brinda herramientas muy potentes y generales, por lo que no es de extrañar que el mismo formalismo se aplique a otros escenarios. Así, la Mecánica Estadística también admite un tratamiento apropiado mediante la Teoría de Campos, y con frecuencia la terminología de partículas es usada en este contexto (por ejemplo, se habla de la *masa* para referirse a una de las constantes de acoplamiento). Los temas de investigación del grupo son acerca del formalismo de la Teoría de Campos, y no se limitan a la Física de Partículas. Por esa razón, el grupo ha cambiado su título a Sistemas Fuertemente Correlacionados.

Aunque la Teoría de Campos es muy robusta y sus fundamentos están bien establecidos, resulta ser extraordinariamente complicado poder deducir consecuencias observables y medibles. Históricamente se desarrollaron varias técnicas de abordaje de los problemas en física de partículas basados en los desarrollos perturbativos. Esto permite considerar versiones aproximadas de los problemas, en los que se supone que el sistema estudiado se comporta prácticamente como si sus componentes individuales estuvieran aisladas. Esto permite en principio deducir varias cantidades físicas importantes de la teoría.

Pero uno de los inconvenientes del enfoque del método perturbativo es que está limitado al conjunto de las situaciones cuyo comportamiento no se aleja demasiado de la teoría libre, si bien es un conjunto bastante amplio.

Prólogo

Más precisamente, los métodos perturbativos no pueden ser aplicados de forma general a los fenómenos críticos, como son por ejemplo los sistemas termodinámicos en el entorno de una transición de segundo orden (aunque dependiendo de la dimensión del espacio en la que el modelo físico es considerado, sí pueden aplicarse los métodos perturbativos). Fuera de esta situación las funciones de correlación se comportan “intuitivamente”: las partes microscópicas que componen un sistema macroscópico deberían actuar independientes unas de otras siempre que se encuentren suficientemente separadas. Pero cuando el sistema se aproxima a su punto de transición esta propiedad no se cumple. Todas las partes del sistema, aún estando muy separadas espacialmente, dependen de todas las otras estadísticamente, lo que es decir que se encuentran fuertemente correlacionadas. Por ello fallan los métodos perturbativos, que están diseñados para la situación opuesta.

A finales del siglo XX aparece el Grupo de Renormalización No Perturbativo (NPRG), como un formalismo más adecuado a las situaciones donde no son aplicables los esquemas de aproximaciones anteriores. Su ventaja es que posibilita el uso de aproximaciones más generales que en el caso de la teoría de perturbaciones.

El NPRG enfrenta la situación considerando el sistema en cuestión separado en varias escalas de distancia. La escala más pequeña es la distancia media de separación de los constituyentes microscópicos del sistema, y la escala más grande está dada por las dimensiones macroscópicas del sistema estudiado. Luego se considera una sucesión de sistemas físicos auxiliares que se obtienen del sistema original al descartar los efectos de las fluctuaciones estadísticas por encima de una escala de distancia intermedia. Esta sucesión de sistemas, que tendrán diferentes escalas características, se transforman unos en otros mediante una *transformación del Grupo de Renormalización*.

La dinámica del sistema está caracterizada por las correlaciones o fluctuaciones de todas las escalas posibles. En una situación ordinaria, cuando se consideran partes del sistema considerablemente separadas, las correlaciones estadísticas entre ellas resultan despreciables y pueden por lo tanto ignorarse. En cambio, en un sistema fuertemente correlacionado, tomarlas en cuenta es imprescindible.

El Grupo de Renormalización procura calcular cuál es el efecto sobre el modelo estudiado de incorporar paulatinamente las correlaciones entre partes del sistema cada vez más separados. Comenzando a nivel microscópico, el Grupo de Renormalización describe cómo se va reconstruyendo el sistema que observamos a escala macroscópica. En el caso de la Física de Partículas, esto corresponde a reconstruir el camino entre la escala de las interacciones fundamentales de gran energía (escala de Plank),

a las que no podemos acceder por “limitaciones tecnológicas” (es posible que nunca se logre acceder a tales energías experimentalmente), y la escala de bajas energías a las que son observadas las reacciones en los aceleradores (o sea, las grandes energías se corresponden con el nivel microscópico y las bajas energías con el macroscópico).

Otra de las ventajas del NPRG es que brinda un marco mucho más adaptado para hacer aproximaciones, encontrando por lo tanto resultados de calidad similar o superior a la de los métodos perturbativos con un esfuerzo menor.

El resultado central del NPRG es una ecuación integro-diferencial que da cuenta del efecto que tiene sobre el comportamiento del sistema la incorporación de las sucesivas escalas de distancia de las fluctuaciones. Esta es la **Ecuación de Flujo**, y es muy importante porque su solución contiene toda la información física que se puede extraer del modelo.

Pero aunque poderosa como herramienta teórica, la ecuación de flujo tiene un inconveniente muy serio. De la ecuación de flujo se pueden deducir las correspondientes ecuaciones de flujo para las funciones de correlación, es decir, cómo varían tales funciones al considerarse escalas de distancia cada vez mayores. Las funciones de correlación cuantifican la interdependencia entre las partes del sistema, y tienen distintos órdenes. Así, la función de correlación de orden dos mide la correlación entre dos puntos del sistema, la de orden tres la que hay entre tres puntos del sistema, y así sucesivamente (debido a los diagramas de Feynman utilizados en física de partículas, se les llama también vértices, de dos puntos, tres puntos, etc.).

Al plantear la ecuación de flujo para la función de correlación de dos puntos, resulta que depende explícitamente de las funciones de correlación de tres y cuatro puntos. Esto significa que la interdependencia estadística entre dos partes del sistema depende del comportamiento conjunto entre tres y cuatro puntos del sistema. Y aquí es donde se manifiesta la **gran** dificultad para resolver esta situación física. Las funciones de correlación de tres y cuatro puntos se deben obtener como la solución de sus respectivas ecuaciones de flujo, que dependen de las funciones de correlación de cinco y seis puntos. Estas últimas también deben obtenerse como solución de sus ecuaciones de flujo, en las que intervienen las funciones de siete y ocho puntos, y así sucesivamente. La ecuación de flujo de una función de correlación de orden dado, depende siempre de las funciones de correlación de los órdenes siguientes. Se genera entonces una *torre infinita* de ecuaciones integro-diferenciales, un sistema recursivo en el que, idealmente, habría que resolver las infinitas ecuaciones simultáneamente. Por supuesto, no es posible hacerlo. Al igual que el Grupo de Renormalización No Perturbativo, todas

Prólogo

las formulaciones exactas del problema de los sistemas fuertemente correlacionados tienen esta dificultad.

Lo que sí es posible es utilizar alguna forma de aproximación con la cual se logre truncar la torre de ecuaciones, para reducir el problema a una cantidad finita de ecuaciones para resolver. En la literatura se ha estudiado extensamente, por ejemplo, el método del desarrollo en gradientes, que es una de las aproximaciones posibles más simples que permite la obtención de resultados de buena calidad. En este método se asume que la solución de la ecuación de flujo tiene una forma conocida bien definida, que incluye cierta cantidad de parámetros que deben determinarse al resolver la ecuación (de hecho, los parámetros pueden ser funciones). Sin embargo este método tiene una validez limitada. Funciona bien sólo para resolver problemas en los que sólo intervienen las escalas de larga distancia. De forma que existe una serie de cantidades físicas importantes que no pueden calcularse correctamente con este tipo de desarrollo.

Recientemente el grupo de investigación formado por Ramón Méndez y Nicolás Wschebor, en colaboración con Jean-Paul Blaizot, propusieron un nuevo esquema de aproximación que logra truncar la torre de ecuaciones y no se restringe a las distancias grandes. Además es eficiente, en el sentido que una computadora de escritorio usual tiene suficiente poder de cálculo para poder resolver el problema en pocas horas.

La clave de este nuevo esquema consiste en considerar un campo externo uniforme sobre el sistema. Luego se pueden sustituir las funciones de correlación de orden alto, mediante una aproximación, por derivadas de funciones de correlación de orden más bajo con respecto a este campo. Esta aproximación es posible gracias a la forma en que el NPRG hace intervenir las escalas de longitud pequeñas en la ecuación de flujo de las funciones de correlación. En el capítulo 2 estudiaremos este proceso en detalle. Por el momento, lo importante es que el esquema de aproximación hace posible la resolución de las ecuaciones de flujo.

Más aún, el grado de precisión del método puede ser ajustado de acuerdo a las necesidades. La aproximación se efectúa en una sola de las ecuaciones de las funciones de correlación; las ecuaciones de flujo para las funciones de correlación de orden menor quedan inalteradas. Por ejemplo, el primer caso posible es el orden dominante de la función de correlación a dos puntos, cuya ecuación involucra a las funciones de tres y cuatro puntos. La aproximación consiste en este caso en reemplazar éstas por derivadas de la función a dos puntos respecto al campo externo. El siguiente nivel consiste sustituir las funciones a cinco y seis puntos por derivadas de las funciones de tres y

cuatro puntos en sus respectivas ecuaciones de flujo, manteniendo la ecuación original para la función a dos puntos. Este mecanismo se puede proseguir hasta donde sea necesario.

Como resultado de mi trabajo, se analizó el esquema antes mencionado para la ecuación de flujo de la función de correlación a tres puntos en la teoría escalar φ^4 , en el régimen crítico. Se lograron comprobar las propiedades esperadas de la función en distintos casos de interés predecibles teóricamente, y explorar situaciones que quedan fuera del alcance del estudio teórico por los métodos típicos de análisis.

Organización del texto

Este trabajo, que intenta ser autocontenido, está dividido en cinco capítulos y varios apéndices. Para una mejor apreciación de la exposición, es recomendable que el lector posea conocimientos previos de Mecánica Estadística y Teoría de Campos para la lectura de las partes teóricas, y experiencia en el área del cálculo numérico para los análisis numéricos.

En el capítulo 1 se plantea el problema físico estudiado. Se describe el problema de las transiciones de fase de segundo orden y se introduce la teoría escalar φ^4 . Se explican las dificultades de los métodos perturbativos, y se plantea el Grupo de Renormalización como posible solución.

En el capítulo 2 se estudia la razón para de las dificultades para aplicar los métodos perturbativos a los fenómenos críticos y se introduce el Grupo de Renormalización No Perturbativo. Este último conduce a una jerarquía infinita de ecuaciones. La aproximación de campo local aparece como una tentativa para poder lograr un sistema cerrado de ecuaciones. Luego se explica cómo el nuevo esquema de aproximación, el método BMW, logra cerrar el sistema de ecuaciones, con la ventaja de que es mucho más general. Como ejemplo de este esquema y como parte del desarrollo necesario para el cálculo de la función a tres puntos, se examina la aplicación a la función de correlación a dos puntos.

Estos dos primeros capítulos plantean el marco en el que desarrollé mi trabajo de tesis. Luego de estos, se analiza la función de correlación a tres puntos. Su estudio está dividido en dos partes. Primero se presenta todo el planteo teórico necesario. En el capítulo 3 se establecen las ecuaciones analíticas que derivan del NPRG y la aplicación del esquema de aproximación, al caso concreto de la función a tres puntos. Luego, en

Prólogo

el capítulo 4, se explica cómo se resuelven numéricamente las ecuaciones obtenidas, y se analizan los resultados que se encuentran al hacerlo.

Finalmente, en el capítulo de conclusiones se sintetizan los resultados y se hace una crítica del resultado del trabajo.

Por la naturaleza del tema, gran parte de la argumentación está basada en las ecuaciones y cálculos que surgen en el desarrollo del texto. Para que la lectura no quedase “tan” sobrecargada de ecuaciones¹, muchos de los cálculos más largos a los apéndices en la medida de lo posible. En particular, en el apéndice F se explican los detalles acerca de las aproximaciones empleadas para resolver numéricamente varias de las integrales necesarias para la resolución del problema.

¹Ver por ejemplo la página 84.

1. Planteo del problema

En este capítulo se presenta la descripción del problema físico estudiado: los sistemas fuertemente correlacionados en teoría de campos, entre los cuales el caso de los fenómenos críticos es uno de los más importantes y a la vez familiares. El énfasis está puesto en definir las magnitudes más relevantes para el estudio del problema y en mostrar los resultados clave para poder abordar el capítulo siguiente. A los efectos de reducir la extensión del texto la mayoría de los desarrollos y razonamientos se han sacrificado, pero con la esperanza de que el resultado logrado sea comprensible, auxiliando las afirmaciones con justificaciones al menos cualitativas.

El desarrollo del capítulo sigue de cerca los textos de Landau, Callen, Le Bellac y Delamotte [13, 16, 26, 27].

Comenzaremos con una pequeña descripción de las transiciones de fase de segundo orden. *Consideraremos siempre que el sistema se encuentra en **equilibrio termodinámico**.* Luego pasamos a definir la fenomenología más relevante y se definen los exponentes críticos. Se introducen las ideas principales del grupo de renormalización para dar una explicación de estos resultados y se describen muy esquemáticamente el modelo de Ising y la teoría escalar “ φ^4 ”. Finalmente se discuten algunas de las propiedades del flujo de renormalización.

1.1. Fenómenos Críticos

1.1.1. Una visita breve a la transición líquido-gas

Examinemos un sistema conformado por una cierta cantidad de agua en equilibrio termodinámico. Su estado está especificado por una pareja de cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión y la temperatura. La experiencia nos enseña que usualmente, al hallarse en el estado de equilibrio, el sistema es homogéneo; encontramos

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

por ejemplo el agua en estado sólido, líquido o gaseoso. Sin embargo no hay una razón fundamental para esperar que esto se cumpla para todas las parejas de valores de P y T . Puede ocurrir que para un valor dado de presión y temperatura el estado de equilibrio del sistema no sea uniforme, sino que se escinda en dos partes en contacto mutuo que se encuentran en estados diferentes. Los estados de una sustancia que pueden coexistir en el equilibrio son diferentes **fases** de la sustancia. Por ejemplo cuando $P = 1\text{atm}$ y $T = 100^\circ\text{C}$ en el agua encontramos la coexistencia de las fases líquida y gaseosa.

En esta situación, el equilibrio del sistema es posible sólo si se igualan las temperaturas, las presiones y los potenciales químicos entre cada fase. Al representar el sistema en un diagrama $P - T$, los puntos en los cuales el equilibrio de fases es posible yacen en una **curva de equilibrio de fases**; los puntos fuera de la(s) curva(s) representan estados homogéneos del cuerpo ¹. En un diagrama $P - V$ los puntos de coexistencia de fases cubren un área, ya que el volumen de cada fase puede ser diferente. Fuera de esa región, los puntos del diagrama representan estados uniformes del sistema².

Cuando el sistema pasa de una fase a otra cruzando por un punto típico de la curva de coexistencia (en el diagrama $P - T$) experimenta una **transición de fase de primer orden**. El proceso es acompañado por una emisión o absorción de calor asociada con la energía requerida para la reorganización interna que distingue las fases. La curva de coexistencia habitualmente separa el plano $P - T$ en regiones que corresponden a fases diferentes. Pero puede ocurrir que la curva termine en algún punto (P_C, T_C) . A tal punto se lo denomina **punto crítico**, y la temperatura y presión correspondientes son llamadas **temperatura crítica** y **presión crítica** respectivamente. Cuando el sistema cambia de estado pasando por el punto crítico se dice que experimenta una **transición de fase de segundo orden**. A diferencia de la de primer orden, esta transición no tiene un calor latente asociado.

Consideremos una transición de primer orden. Si nos movemos a lo largo de una *isoterma* en un diagrama $P - V$, partiendo del estado líquido y aumentando el volumen, la presión decrece hasta llegar al punto de transición y el sistema entra en la región de coexistencia (isotermas T_1 y T_2 en la figura 1.1.1). Entonces, una fracción del sistema

¹Para mostrar que en efecto es una curva, observemos que el potencial químico es función de la presión y la temperatura. El equilibrio se satisface si se cumple $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$, lo cual da implícitamente P en función T .

²En general sólo pueden coexistir hasta tres fases en equilibrio. La condición de igualar las temperaturas, presiones y potencial químico de cada una admite como mucho una única solución, a la que corresponde un punto en el diagrama $P - T$. Se le llama el **punto triple**, y se presenta en la intersección de las curvas de coexistencia de fase.

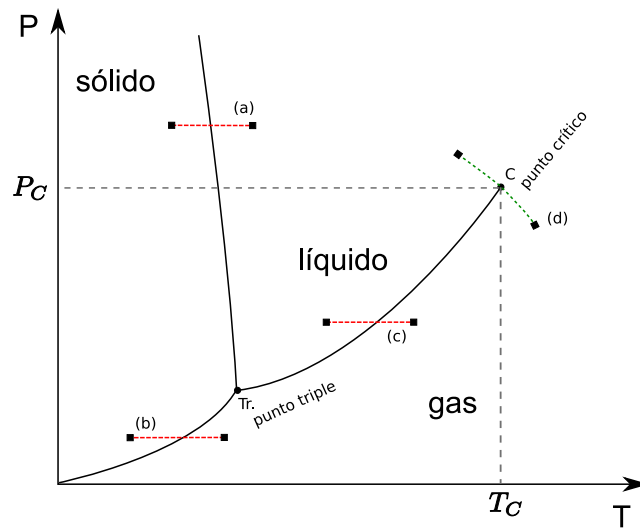


Fig. 1.1.-Diagrama P-T para el agua.

Se encuentra separado en las fases sólida, líquida y gaseosa. Los puntos que separan las regiones son las curvas de coexistencia. Al punto de intersección T_r , se le llama el punto triple. Al punto C donde termina la curva de coexistencia líquido-gas se le llama punto crítico, con las correspondientes presión y temperatura críticas. Las transiciones (a) sólido-líquido, (b) sólido-gaseoso y (c) líquido-gas son de primer orden, mientras que la transición (d) líquido-gas, que pasa por el punto crítico, es de segundo orden.

pasa a la fase gaseosa mientras que la presión queda fija. Mientras el volumen total continúa en aumento, la fracción en estado gaseoso aumenta su volumen, mientras que la fracción en estado líquido lo disminuye. Finalmente, cuando el sistema se encuentra completamente en estado gaseoso, abandona la región de coexistencia y la presión decrece si el volumen aumenta.

Existen también las **transiciones de segundo orden**, que tienen la peculiaridad de que el pasaje por la región de coexistencia se limita a un único punto (punto C de la figura 1.1.1). La isoterma intersecta la región de coexistencia únicamente en ese lugar, en el que los volúmenes específicos de ambas fases son iguales. Para que esta transición pueda ser observada, hay que ajustar entonces los parámetros del sistema a los valores críticos con mucha precisión. Un pequeño apartamiento saca el sistema fuera de este comportamiento.

La existencia del punto crítico posibilita una transición *continua* entre dos estados de la materia sin que ocurra la separación en fases de la sustancia. El sistema es siempre homogéneo y la distinción entre los estados líquido y gaseoso es en ese caso puramente cuantitativa. Lo que los diferencia es la intensidad de la interacción entre sus moléculas. La fase sólida, en cambio, es estructuralmente diferente a la fase líquida

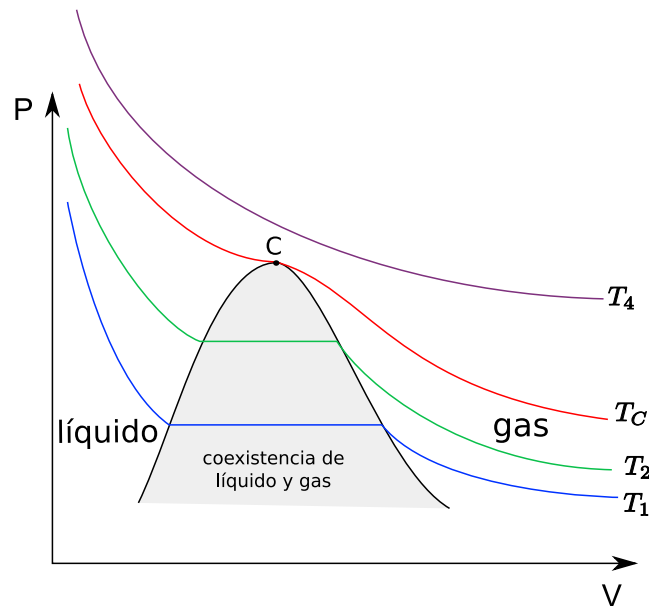


Fig. 1.2.-Diagrama P-V para el agua.

Se muestran varias isothermas ($T_1 < T_2 < T_3 = T_C < T_4$). La curva de coexistencia líquido-gas del diagrama $P - T$ se corresponde a la región sombreada en este diagrama. Cuando las isothermas T_1 y T_2 entran en esta región la presión del sistema se mantiene constante y los volúmenes de cada fase varían de acuerdo a la regla de la palanca[26]. El punto crítico C aparece cuando la isoterma crítica T_3 intersecta la región de coexistencia en un único punto.

o gaseosa, y por lo tanto el cambio de estado entre sólido y líquido (o entre sólido y gaseoso) no puede efectuarse de manera continua. Entonces, en una transición de primer orden el sistema necesariamente se separa en fases bien diferenciadas en algún momento. En una transición de segundo orden, el sistema es siempre homogéneo (es preciso mantener el equilibrio termodinámico, desde luego).

1.2. Los exponentes críticos

El caso de la transición líquido-gas no es el único que puede presentar una transición de segundo orden. La tabla 1.1 muestra varios ejemplos de diversos sistemas que poseen un punto crítico. Pese a la diversidad en la naturaleza de los sistemas, exhiben un comportamiento que es en muchos aspectos idéntico en ese punto. Esto señala la existencia de un principio físico subyacente común en este fenómeno.

Utilizando la mecánica estadística se intentó explicar las propiedades de las transiciones de segundo orden desde comienzos del siglo XX, pero con resultados poco satis-

1.2. LOS EXPONENTES CRÍTICOS

Transición	Temperatura Crítica	Párametro de orden
Líquido/Gas	Agua a 218 atm y 374C	Diferencia de densidades
Ferromagnética/Paramagnético	$\sim 1000\text{K}$ (Fe, Ni, etc.)	Magnetización espontánea
Superfluido/Fluido	2,17K (punto λ del He)	Viscosidad
Superconductor Tipo II/Material normal	$\sim 50\text{K} - 135\text{K}$ (cerámicas s.c.)	Densidad de pares de Cooper

Tabla 1.1.-Ejemplos de Transiciones de Fase de segundo orden

(una lista más extensa se puede consultar en Kadanoff, GÖtze, Hamblen, Hecht, Lewis, Palciauskas, Rayl, Swift, Aspnes y Kane [24])

factorios al principio [26]. Históricamente se reconocen los trabajos de Wilson y Kadanoff [24, 38, 39] como los que posibilitaron adquirir una comprensión profunda del problema, gracias a la introducción del **Grupo de Renormalización**.

Tal vez la mayor dificultad es que un conjunto de variables termodinámicas *diverge* en la temperatura de transición, tomando valores arbitrariamente grandes cuando el sistema se aproxima al punto crítico. Tal comportamiento no-analítico (discontinuidades, divergencias) pudo ser predicho empleando las técnicas de campo medio [26] y sucesáneas perturbativas. Sin embargo las predicciones del campo medio de la forma de las divergencias no concuerdan con los resultados experimentales ni con los obtenidos posteriormente por simulaciones de MonteCarlo (por ejemplo, véase la tabla 1.2).

Además es sabido que las no-analiticidades aparecen como una propiedad emergente del colectivo³. Esto se puede observar en modelos simples, como por ejemplo en un modelo de red periódica de átomos para representar un sólido ferromagnético (ver sección 1.4.1). Las interacciones entre los constituyentes del modelo pueden ser simples o complicadas. Hay casos en los que aunque las interacciones son perfectamente analíticas y no presentan ninguna irregularidad (como en el modelo de Heisenberg o en el modelo de Ising), el sistema posee un punto crítico y por lo tanto no-analiticidades que se manifiestan a nivel macroscópico.

³ El comportamiento no-analítico se manifiesta sólo habiéndose tomado el límite termodinámico en el modelo (i.e. el número de partículas N y el volumen V tienden juntos a infinito manteniendo la densidad fija).

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Exponente	Campo medio[27]	Cálculo numérico en $d = 3$ (*) [22]	Resultados exactos en $d = 2$ [27]
α	discont.	0,1118	n/a, $\sim \log T - T_C $
β	0,5	0,3265	0,125
γ	1	1,2353	1,75
δ	3	4,7837	15(**)

Tabla 1.2.-Exponentes críticos para modelos de la transición ferromagnética.

Los exponentes se definen de acuerdo a las ecuaciones (1.4), y caracterizan la transición de segundo orden.

(*) Calculados mediante las relaciones (1.17) a partir de los valores de η y ν de la tabla 1.3.

(**) El resultado $\delta = 15$ es muy plausible pero no se ha establecido analíticamente. Los cálculos numéricos dan $\delta = 15,04 \pm 0,07$

1.2.1. Por qué una teoría de campo medio no se puede aplicar a una transición de segundo orden

Cualquier cantidad que desea ser medida (observada) en el sistema, en estado de equilibrio, estará dada por el promedio de esa cantidad, tomado cuando el sistema transita por todos los estados compatibles (accesibles) con las condiciones de la observación. Especialmente, todas las magnitudes macroscópicas se definen de esta manera. La probabilidad de que en un instante dado, el valor de una magnitud macroscópica esté sustancialmente separado de su valor de equilibrio es totalmente despreciable en la mayoría de los casos. Es en el caso de las transiciones de segundo orden cuando las fluctuaciones no son despreciables.

De manera *muy* resumida se puede decir que lo que hace una teoría de campo medio es simplificar la forma de las interacciones del modelo. Esto se logra a través de la sustitución de las interacciones entre los grados de libertad microscópicos que describen la teoría, por una interacción mucho más sencilla de cada grado de libertad con el valor promediado de los otros (de ahí el nombre de campo medio).

Las dificultades del método del campo medio para entender una transición de segundo orden provienen de que ignora las fluctuaciones con respecto al valor medio. Lejos del punto crítico, las fluctuaciones con números de onda típico pequeños son irrelevantes para determinar las cantidades *autopromediantes* (en particular las magnitudes macroscópicas extensivas del sistema). Precisamente esta condición es la que se viola en el punto crítico y por ello las fluctuaciones con números de onda arbitrario juegan un

papel importante. Más adelante veremos que mediante el Grupo de Renormalización se puede dar cuenta de este fenómeno apropiadamente.

1.2.2. Transición Ferromagnética

Otro ejemplo de una transición de segundo orden, un poco menos familiar que la de líquido-gas, son las transiciones ferromagnéticas. En algunos sentidos esta última es más simple, por lo que nos concentraremos en ella a continuación.

Consideremos el caso de una sustancia ferromagnética. Sus constituyentes atómicos (o moleculares) poseen un momento magnético permanente $\mathbf{m}$, proporcional a su espín (momento angular cuántico), que origina un pequeño campo magnético y que tiene tendencia a alinearse al campo magnético en que se encuentra inmerso. Además existe una interacción de corto alcance, de origen cuántico, conocida como **interacción de intercambio** que favorece el alineamiento de los espines de los átomos próximos⁴.

La **magnetización macroscópica** es el momento magnético por unidad de volumen, definida mediante

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \overline{\sum_{\mathbf{m}_i \in \Delta V} \mathbf{m}_i} \equiv \overline{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

donde ΔV es un volumen pequeño en torno al punto $\mathbf{x}$, que se vuelve infinitesimal al tomar el límite $\Delta V \rightarrow 0$ desde un punto de vista macroscópico, pero se mantiene suficientemente extenso como para que siempre exista un gran número de átomos en su interior. La barra superior representa el proceso de promediación termodinámico.

El vector de magnetización determina el campo magnético que la sustancia produce, posiblemente en respuesta a un campo magnético aplicado sobre ella (pero no necesariamente). Cuando en la sustancia ferromagnética el colectivo de los momentos magnéticos $\{\mathbf{m}_i\}$ posee una dirección predominante común, el material posee una magnetización macroscópica no nula. Si en cambio los momentos están orientados aleatoriamente, el momento magnético total en un volumen ΔV se cancela, y por ello la magnetización vale cero.

⁴ El mecanismo básico es que, tomando en cuenta el principio de exclusión, la configuración energéticamente más favorable corresponde a espines alineados entre sí, ya que ello disminuye la repulsión electrostática.

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Supongamos que la sustancia ferromagnética se encuentra en *equilibrio termodinámico* y que, *por el momento, no hay ningún campo externo*. Las fluctuaciones térmicas de los átomos favorecen el desorden. Cuanto mayor es la temperatura se hace más difícil lograr el alineamiento colectivo en ausencia de un campo externo aplicado. A temperaturas superiores a cierta T_C la magnetización espontánea siempre es nula. Esta temperatura es típicamente del orden de $T_C \sim 10^3 K$ (véase [25] y la tabla 1.1)

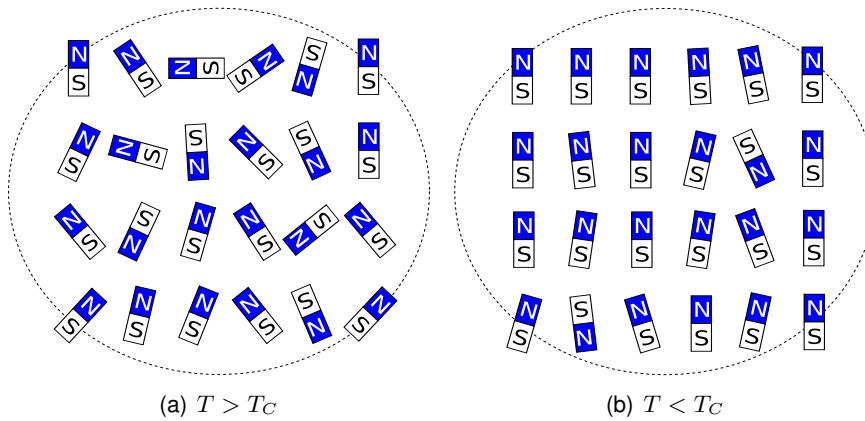


Fig. 1.3.-Esquema de sustancia ferromagnética

Se simboliza el espín atómico, que da lugar a un momento magnético, en un instante particular. La agitación térmica conduce a que los espines se orienten aleatoriamente. En (a) la sustancia no presenta magnetización neta por estar por encima de la temperatura crítica. En (b) el alineamiento colectivo de los espines da lugar a una magnetización neta. En este caso, cuando un momento magnético no se orienta de manera semejante a sus vecinos, la configuración es energéticamente desfavorable y tiende a alinearse a ellos rápidamente.

La sustancia ferromagnética sufre una transición de segundo orden (en ausencia de un campo aplicado) cuando se encuentran a la temperatura crítica T_C , también llamada **temperatura de Curie**. Por encima de ésta, el sistema está en la fase desordenada o **simétrica**: el sistema es isotrópico y por lo tanto invariante por rotaciones alrededor de cualquier dirección⁵.

Consideremos ahora el caso en que la sustancia posee una magnetización homogénea M_0 en ausencia de un campo externo. Entonces la única simetría de rotación del sistema es alrededor de un eje paralelo a la magnetización. En este caso el sistema está en una fase diferente, **ordenada**, que no posee todas las simetrías que posee la

⁵ Hay una sutileza en esta afirmación. A nivel microscópico, la interacción espín-órbita y la estructura de la red cristalina destruyen la isotropía, así que la afirmación solo será válida cuando examinemos el sistema en una escala de distancia tal que los detalles microscópicos del sistema pasen desapercibidos.

de alta temperatura. La existencia de una fase ordenada es un ejemplo de una **ruptura espontánea de simetría**. A pesar de que las interacciones del sistema no tienen una dirección preferencial, el sistema *elige sólo una* de entre todas las posibilidades para la dirección de la magnetización⁶; la fase ordenada también recibe el nombre de **fase rota**.

La magnetización espontánea, que pasa de tener un valor no nulo por debajo de la temperatura crítica a ser cero por encima de ella, es, para la transición ferromagnética, el **parámetro de orden**. Es la propiedad del sistema que se anula en la fase desordenada y distingue las fases. La tabla 1.1 indica el parámetro de orden para los otros casos. Las susceptibilidades generalizadas del sistema son divergentes en la transición de segundo orden. Para el caso ferromagnético, la susceptibilidad magnética está dada por

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} \quad (1.2)$$

(en un sistema homogéneo) y cuantifica cómo responde la magnetización espontánea M del material ante un campo externo B aplicado; a un sistema con mayor susceptibilidad le corresponde una mayor facilidad para magnetizarse.

En la transición líquido-gas, la diferencia entre los volúmenes específicos de cada fase es la cantidad que juega el papel del “parámetro de orden” (no es realmente un parámetro de orden puesto que no hay diferencia de simetría entre el líquido y el gas). La susceptibilidad correspondiente es la compresibilidad a temperatura constante

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P}. \quad (1.3)$$

La divergencia de las varias susceptibilidades generalizadas en la proximidad de la temperatura crítica motiva la definición de los **exponentes críticos** que describen el comportamiento (no analítico) de esas cantidades en la región crítica. La magnetización espontánea M_0 , la susceptibilidad χ , la magnetización M debida a un campo externo B en la isoterma crítica y el calor específico C siguen leyes de potencia para temperaturas

⁶Una muestra de la sustancia puede tener magnetización nula aún por debajo de la temperatura de Curie. La magnetización no nula aparece en regiones denominadas **dominios magnéticos**. Estos son macroscópicos desde el punto de vista atómico, pero continúan siendo microscópicos para los tamaños “cotidianos” (ver [25]). Para obtener una muestra magnetizada es preciso estar por debajo de la temperatura crítica y procurar un alineamiento de los dominios magnéticos (posiblemente sometiendo la muestra a un campo homogéneo durante cierto tiempo). El análisis aquí presentado se aplica, en realidad, a un dominio magnético.

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

$T \sim T_C$ gobernadas por los exponentes α, β, γ y δ definidos a través de las relaciones

$$\begin{aligned} C &\sim |T - T_C|^{-\alpha} \quad (B = 0) \\ M_0 &\sim (T_C - T)^\beta \quad (\text{sólo si } T < T_C) \\ \chi &\sim |T - T_C|^{-\gamma} \quad (B = 0) \\ M &\sim B^{1/\delta} \quad \text{para la isoterma crítica, } T = T_C \end{aligned} \tag{1.4}$$

La segunda relación se aplica para $T < T_C$ ya que el parámetro de orden (en este caso la magnetización espontánea) se anula por encima de T_C . En el caso de la isoterma crítica la última relación da la respuesta del parámetro de orden del sistema ante la aplicación de una fuente externa (la magnetización M adquirida por aplicación de un campo B estando en la temperatura de transición). En las relaciones exactas para estas cantidades aparecerá un coeficiente que puede ser función de la temperatura, por ejemplo $C = f(T) |T - T_C|^{-\alpha}$, pero regular para $T \sim T_C$ de manera que cerca del punto crítico se puede reemplazar $f(T) \simeq f(T_C)$. En principio se deberían distinguir los coeficientes α y γ para temperaturas mayores o menores que T_C . Experimentalmente se encuentra que el valor es el mismo en ambos casos y el grupo de renormalización lo confirma teóricamente.

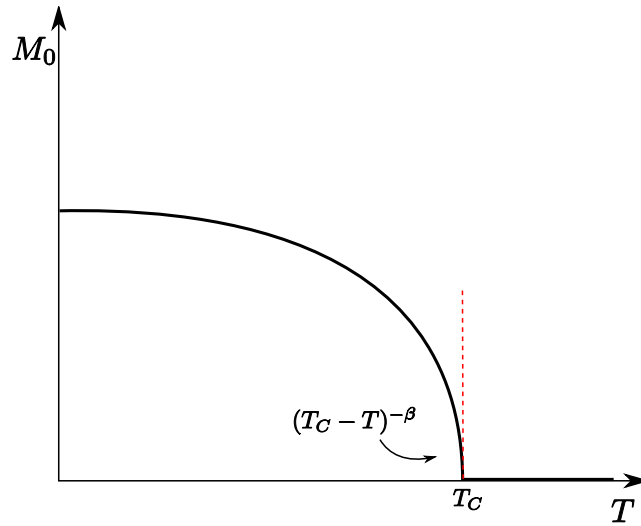


Fig. 1.4.-Comportamiento cualitativo de la magnetización espontánea en una transición de segundo orden.

En la tabla 1.2 se comparan los valores de los exponentes obtenidos al aplicar la **teoría del campo medio** con los que provienen de simulaciones numéricas que usan técnicas de Monte-Carlo muy elaboradas, en el caso de un modelo simple del ferromagnetismo

(ver modelo de Ising, sección 1.4.1). Las simulaciones permiten usar un número de dimensiones espaciales d arbitrario. Se muestran los valores para $d = 3$ y además, para este modelo en el caso $d = 2$, se conoce una solución analítica del problema gracias al trabajo de Onsager[35].

La teoría del campo medio en este caso consiste en sustituir la interacción entre los espines por una interacción individual de cada espín con un campo promedio. En muchos casos los resultados derivados de esta aproximación son cualitativamente correctos (e incluso cuantitativamente, si las interacciones son suficientemente pequeñas), pero esta aproximación no es aplicable a la transición de segundo orden⁷.

Lo grave de esta aproximación es que *borra por completo todas las fluctuaciones* (si no estuviéramos cerca del punto crítico esto no representaría un gran obstáculo ya que las fluctuaciones juegan un papel secundario en determinar varias de las propiedades importantes del sistema). Cuando intentamos cuantificar las fluctuaciones nos topamos con una cantidad adicional que diverge en el punto crítico y es clave en la comprensión de las propiedades de la transición de fase: la **longitud de correlación** ξ , que indica la distancia característica del decaimiento de la correlación de los espines entre sí. Como veremos, su comportamiento en las proximidades del punto crítico está gobernado por un nuevo exponentes crítico, ν .

Las relaciones dadas en (1.4) son generales en las transiciones de fase de segundo orden, haciendo las identificaciones correspondientes del parámetro de orden, susceptibilidad, etc. Considerando diversos sistemas y modelos físicos se encuentra un resultado notable: *los valores de los exponentes críticos son independientes de los detalles particulares del sistema, y dependen solamente de propiedades muy generales como la dimensión del espacio d o la dimensionalidad del parámetro de orden*. En otras palabras, existen conjuntos de sistemas físicos, de naturaleza totalmente dispar, que presentan **exactamente** el mismo tipo de comportamiento crítico. Por ejemplo, en la transición líquido-gas y en aquella transición ferromagnética que tiene una anisotropía que privilegia una dirección en el espacio, los exponentes críticos coinciden.

Esta propiedad de las transiciones de segundo orden se denomina **universalidad**. Los sistemas que pertenecen a una misma *clase de universalidad* poseen los mismos valores de los exponentes críticos. Cada clase de universalidad está caracterizada por el

⁷ No obstante, los modelos físicos se pueden generalizar a dimensiones espaciales d arbitrarias, y se puede probar que el campo medio sí es una buena aproximación para el régimen crítico cuando $d \geq 4$ (ver [27]).

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

grupo de simetrías de los sistemas en esa clase, o, en otras palabras, si dos sistemas comparten el mismo grupo de simetría entonces tienen el mismo tipo de comportamiento crítico.

Más aún, los exponentes críticos resultan no ser independientes entre sí, sino que satisfacen ciertas relaciones, las **leyes de escala**, más allá de la clase de universalidad a la que pertenecen (por ejemplo, la ley de escala de Rushbrooke $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$). Por otra parte, hay que tener presente que muchos aspectos de los fenómenos críticos sí dependen de los detalles del sistema, como es el caso del valor de la temperatura crítica T_C .

1.3. Fluctuaciones y Funciones de Correlación

Para cuantificar las fluctuaciones primeramente introduciremos el concepto de **función de correlación**. Para ello consideremos primero el valor del momento magnético microscópico $m(x)$ en un punto x del material⁸. En el equilibrio termodinámico la magnetización $M(x)$ en ese punto viene dada por el valor esperado de esta cantidad:

$$M(x) \equiv \langle m(x) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\text{conf.}\}} m(x) e^{-\beta H[\text{conf.}]} \quad (1.5)$$

La suma se efectúa sobre las configuraciones accesibles del sistema. $Z \equiv \sum_{\{\text{conf.}\}} e^{-\beta H}$ es la función del partición, $\beta = 1/k_B T$ y H el hamiltoniano de la configuración correspondiente, de manera que $e^{-H/kT}$ da el factor de Boltzman apropiado.

En vista de las interacciones, el valor de $m(x)$ en un punto dado depende de los valores del momento magnético en los demás puntos. La **función de correlación conexa** $G(x_1, x_2)$ mide la dependencia estadística entre los valores del momento magnético en los puntos x_1 y x_2 ,

$$G(x_1, x_2) \equiv \langle (m_1 - \langle m_1 \rangle)(m_2 - \langle m_2 \rangle) \rangle = \langle m_1 m_2 \rangle - \langle m_1 \rangle \langle m_2 \rangle \quad (1.6)$$

con $m_i \equiv m(x_i)$.

⁸ Consideremos por simplicidad a $m(x)$ como únicamente una de las componentes cartesianas del momento (por ejemplo la componente z).

1.3. FLUCTUACIONES Y FUNCIONES DE CORRELACIÓN

El hamiltoniano del sistema H consta de un término H_0 de interacción entre los momentos magnéticos y un término de interacción de los momentos $m(x)$ con un campo magnético externo $B(x)$:

$$H = H_0 - \mu_0 \sum_x m(x) B(x) \quad (1.7)$$

La suma del segundo término se efectúa sobre las posiciones x donde se encuentran los momentos $m(x)$. Gracias a esta separación, la magnetización $M(x) = \langle m(x) \rangle$ y la función $G(x, y)$ pueden calcularse derivando la función de partición

$$Z = \sum_{\{\text{conf.}\}} e^{-\beta(H_0 - \mu_0 \sum_y m(y) B(y))} \quad (1.8)$$

Se encuentra, a partir de la definición (1.5),

$$\langle m(x) \rangle = \frac{1}{\beta \mu_0 Z} \frac{\partial Z}{\partial B(x)} = \frac{1}{\beta \mu_0} \frac{\partial \log Z}{\partial B(x)}, \quad (1.9)$$

y⁹ de la definición (1.6),

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{(\beta \mu_0)^2} \frac{\partial^2 \log Z}{\partial B(x_1) \partial B(x_2)}. \quad (1.10)$$

De manera análoga, para determinar el valor medio de un producto arbitrario de n campos $\langle m(x_1) \dots m(x_n) \rangle$, se toma la derivada de $Z[B]$ respecto a $B(x_1), \dots, B(x_n)$. Por esto se dice que la función de partición $Z[B]$ es la **funcional generatriz** de las funciones de correlación. Para diferenciar las diversas funciones de correlación, se habla de las **funciones de correlación a n puntos**. Por otro lado, $\log Z[B]$ es la funcional generatriz de las funciones de correlación **conexas**; observemos que $\log Z[B]$ corresponde (a menos de factores) a la energía libre de Gibbs.

Esta técnica puede utilizarse aún cuando no haya un campo externo aplicado. Se puede hacer el artificio de añadir un campo ficticio B en los cálculos para hallar las funciones de correlación y tomar $B = 0$ al final.

⁹ En el apéndice A se bosqueja cómo se puede medir en la práctica la función de correlación.

1.3.1. Invariancia de escala y leyes de potencia

En la sustancia ferromagnética las interacciones entre espines son de corto alcance. Si llamamos a a la distancia media entre los átomos¹⁰, la intensidad de la interacción decae muy rápidamente para distancias por encima de a . Se esperaría, por ende, que $G(x_1, x_2)$ tuviera un fuerte decaimiento para puntos muy separados tales que la distancia $r = |x_2 - x_1| \gg a$. Como fue mencionado anteriormente, la distancia ξ hasta la cual la función de correlación tiene un valor apreciable se denomina **longitud de correlación**. Específicamente,

$$G(r) = F(r)e^{-r/\xi}, \quad (1.11)$$

donde $F(r)$ decrece a lo sumo como una ley de potencia en r . En situaciones normales, a y ξ son comparables en tamaño ($1 \lesssim \xi/a \lesssim 10$), pero los fenómenos críticos están caracterizados por tener una longitud de correlación divergente ($\xi/a \rightarrow \infty$). Esto significa que la función de correlación decae mucho más lentamente con la distancia; dado que $e^{-r/\xi} \sim 1$, $G(r) \sim F(r)$ (ver figura 1.5).

Para temperaturas T próximas a la temperatura crítica T_C , el comportamiento de la longitud de correlación viene dado por

$$\xi \sim |T - T_C|^{-\nu}, \quad (1.12)$$

relación que introduce un nuevo exponente crítico ν .

La longitud de correlación representa para el sistema la existencia de una escala adicional de distancia, además de la escala de longitud a dada por el rango de las interacciones (que es del orden de la distancia media entre los espines). El comportamiento macroscópico de un sistema termodinámico está caracterizado predominantemente por las fluctuaciones que corresponden a longitudes de onda entre a y ξ . Las fluctuaciones con distancias típicas inferiores a la escala a están suprimidas por tratarse ésta precisamente de la escala fundamental (consideremos a modo de ejemplo una red periódica de paso a). Para longitudes mayores a ξ los espines están esencialmente descorrelacionados, de manera de que no hay lugar para efectos acumulativos.

Cuando estamos por encima de la temperatura crítica, se observan grupos de espines alineados entre sí (clústers), con tamaños típicamente entre a y ξ . Al aproximarnos a T_C , la longitud de correlación crece cada vez más y el tamaño medio de los clústers se

¹⁰O, si se prefiere, se puede pensar en una red atómica regular donde a da el tamaño de las celdas.

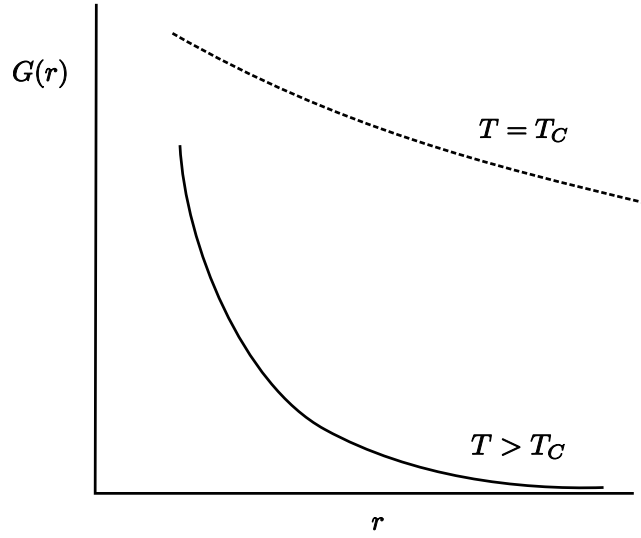


Fig. 1.5.-Comportamiento cualitativo de $G(r)$ para $T \neq T_C$ y $T = T_C$.

Para temperaturas distintas de la crítica, la función de correlación decae exponencialmente con la distancia. La constante de decaimiento es la longitud de correlación. En la temperatura crítica el decaimiento va como una potencia de la distancia, lo que corresponde a una longitud de correlación que diverge a $+\infty$.

incrementa. En la temperatura de transición las fluctuaciones se extienden a regiones de todas las dimensiones posibles, y esperamos que la escala microscópica a no juegue ningún papel en el comportamiento a largas distancias (fuera del régimen crítico eso sería bastante cuestionable). Como consecuencia, desaparece la noción de escala de longitud. El sistema adquiere la propiedad de **invariancia de escala** en $T = T_C$: no hay una noción natural de “próximo” o “lejano”. De hecho, poder despreciar la escala microscópica significa que los detalles particulares del modelo no tienen mayores consecuencias en la determinación de ciertas propiedades físicas y por consiguiente se hace plausible la **universalidad**.

Se puede partir de la invariancia de escala para probar que la función de correlación debe seguir una ley de potencia. Lo que se obtiene es que en el punto crítico se cumple

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (1.13)$$

Aquí η es un nuevo exponente crítico que recibe el nombre de **dimensión anómala**¹¹.

¹¹ Algunos autores definen la dimensión anómala del campo como la cantidad $d_\varphi \equiv \frac{d}{2} - 1 + \frac{\eta}{2}$, mientras que $d_\varphi^0 \equiv \frac{d}{2} - 1$ es la dimensión canónica. Corresponde a la dimensión física del campo cuando las magnitudes son medidas en unidades de longitud.

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Exponente	Valor
η	$0,0374 \pm 0,0014$
ν	$0,6294 \pm 0,0009$

Tabla 1.3.-Exponentes críticos η y ν .

Se muestran valores representativos de varios trabajos de cálculo numérico [22]. Obsérvese que un sistema ferromagnético por lo general pertenece a la clase de universalidad $O(3)$. Existen materiales ferromagnéticos anisotrópicos con el grupo de simetría $\mathbb{Z}_2$ (sistemas uniaxiales [32]), y por lo tanto en la misma clase de universalidad que la transición líquido gas.

Por razones dimensionales cabría esperar simplemente

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2}} \quad (\eta = 0) \quad (1.14)$$

analizando los términos que aparecen en el Hamiltoniano, pero esto sólo se cumple en un modelo gaussiano. La dinámica de las interacciones da lugar a un valor $\eta \neq 0$ (ver también B). Esto puede verse a nivel perturbativo [27]

Más generalmente, en las proximidades del punto crítico se encuentra que la forma de la función de correlación para $r \gg a$ sigue

$$G(r) = \frac{g(r/\xi)}{r^{d-2+\eta}} \quad (1.15)$$

donde la función $g(x)$ es regular si $x \rightarrow 0$ (i.e. cuando ξ diverge). Cuando $r \rightarrow \infty$ la función $g(r/\xi)$ tiene el decaimiento exponencial mencionado anteriormente. La versión de esta relación en el espacio de momentos es

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^{2-\eta}} f(q\xi) \quad (1.16)$$

para momentos $q \ll 1/a$ y en T cercana a T_C , donde ahora $f(x)$ es una función que verifica que tiende a un límite finito cuando $x \rightarrow \infty$.

La cantidad correspondiente a la longitud de correlación en teoría cuántica de campos es la longitud de onda Compton $(mc/\hbar)^{-1}$, esto es, esencialmente el inverso de la masa de las partículas del problema.

1.4. Grupo de Renormalización

Como ya se ha dicho, la invariancia de escala en la criticalidad hace plausible la universalidad de los exponentes críticos, brindando así la explicación de cómo sistemas tan diferentes pueden presentar un comportamiento idéntico en la transición de fase. La invariancia de escala se manifiesta matemáticamente en la aparición de leyes de potencia[27].

La dimensión del espacio d y las simetrías del sistema determinan la clase de universalidad a la que pertenece, y por ello también determinan sus exponentes críticos. Más aún, ocurre que los exponentes críticos no son independientes unos de otros. Ciertas dependencias pueden deducirse directamente de las leyes de potencia discutidas anteriormente. En adición, en todos los casos, se verifica que los exponentes críticos que han sido definidos satisfacen las relaciones siguientes, llamadas a veces leyes de escala [27]:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - \nu d \\ \beta &= \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) \\ \delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \\ \gamma &= \nu(2 - \eta)\end{aligned}\tag{1.17}$$

De los seis exponentes hay sólo dos independientes; basta dar los valores de η y ν para deducir los demás.

La transición de fase de segundo orden tiene características muy llamativas: aún cuando las interacciones microscópicas en el sistema sean de muy corto rango, en la temperatura crítica el sistema exhibe una fuerte correlación a grandes distancias; aún para interacciones completamente analíticas entre los constituyentes del sistema (por ejemplo polinomiales) el sistema desarrolla no analitidades al acercarse al régimen crítico.

En las décadas de 1960 y 1970 Kadanoff y posteriormente Wilson, publicaron varios trabajos que sentaron las bases del **Grupo de Renormalización** (RG), diseñado para trabajar en este tipo de situaciones [24, 38, 39, 40, 41, 42]. Debido al rol central que juegan las correlaciones en este caso, la idea central del RG es conectar la teoría microscópica subyacente con una teoría macroscópica mediante la incorporación gradual de las fluctuaciones de distancias cada vez mayores. En contraste, cuando se hace un

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

desarrollo perturbativo alrededor de una teoría de campo medio, se integran efectivamente todas las fluctuaciones simultáneamente, de manera que no es posible mantener bajo control el efecto de una longitud de correlación divergente.

Para este propósito, el grupo de renormalización actúa aplicando sucesivas transformaciones que hacen corresponder un sistema con una escala de longitud natural a con otro sistema cuya escala natural es sa , donde $s > 1$ es el factor de **dilatación** (figura 1.7). Esto se logra gracias a la *integración de las fluctuaciones* en una capa de longitudes de onda $a \lesssim \lambda \lesssim sa$. Las fluctuaciones de longitud de onda mayores que sa no son afectadas, y por lo tanto el sistema transformado y el original poseen el mismo comportamiento a largas distancias.

Debido a esta integración, la escala natural deja de ser a para convertirse en sa . En la transformación del RG, la integración se acompaña de una redefinición de la escala de longitud $x \rightarrow x/s$, de manera que el sistema transformado posee la misma escala natural que el original, lo que permite entonces comparar los sistemas en las mismas condiciones. La integración en capas se puede pensar sobre una mejora con respecto al método del campo medio, en donde las fluctuaciones de todas las longitudes se integran en un sólo paso. Aunque en teoría los dos caminos deberían ser equivalentes, esto deja de ser cierto en la medida en que no sabemos *exactamente* cómo resolver el sistema y por lo tanto empleamos alguna aproximación. En este respecto, el RG brinda la posibilidad de estudiar el sistema en forma aproximada pero sin descartar la información esencial.

La cantidad de grados de libertad que interactúan entre sí efectivamente en el sistema físico es del orden $\sim (\xi/a)^d$. Luego de la transformación del RG, la longitud de correlación **medida en unidades del paso de la red** es menor, $\xi \rightarrow \xi' = \xi/s$, reduciendo entonces los grados de libertad que interactúan efectivamente entre sí.

Veremos que hay situaciones en que la longitud de correlación se mantiene. Esto sucede si $\xi = \xi' = 0$ o si $\xi = \xi' = \infty$. Esta última relación corresponde a un punto crítico, de forma que el número de grados de libertad interactuantes diverge. Los métodos perturbativos tradicionales están diseñados para casos donde sólo interactúan unos pocos, y por lo tanto no son aplicables al régimen crítico.

1.4.1. Modelo de Ising y la teoría escalar φ^4

Vamos a considerar un modelo concreto de la sustancia ferromagnética para poner en práctica las ideas del grupo de renormalización. Supondremos, para simplificar, que

una sustancia ferromagnética consiste en una red de átomos en posiciones fijas, concretamente en una red cúbica en el espacio, con condiciones de borde periódicas. Esto puede generalizarse con facilidad a dimensiones d arbitrarias.

El **modelo de Heisenberg** del ferromagnetismo está caracterizado por un hamiltoneano de interacción de corto alcance entre los espines

$$H_H = -J_H \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (1.18)$$

donde $J_H > 0$ es la **constante de acoplamiento** y σ_i son las matrices de Pauli asociadas al espín de la partícula en el sitio i -ésimo. La notación $\sum_{\langle i,j \rangle}$ indica una suma sólo sobre los vecinos más cercanos. Este hamiltoneano sencillo favorece el alineamiento de los espines vecinos. Si se cumple que la temperatura de transición T_C es no nula, entonces los efectos cuánticos en la vecindad de T_C son de importancia secundaria ya que las fluctuaciones térmicas son dominantes, y el operador de espín σ_i se puede reemplazar por un vector clásico S_i de longitud unidad. El modelo correspondiente se llama **modelo de Heisenberg clásico**.

El **modelo de Ising** es una simplificación del modelo de Heisenberg en la cual los espines son sustituidos por variables aleatorias S_i que pueden poseer únicamente los valores $+1$ y -1 (en analogía con los valores cuantizados de la componente 'z' del espín de un electrón). En la figura 1.6 se muestra la representación usual de la red en $d = 2$. Las flechas hacia arriba simbolizan el valor $+1$ y las flechas hacia abajo el valor -1 . El Hamiltoniano de interacción correspondiente es

$$H_I = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \quad S_i = \pm 1 \quad (1.19)$$

Este Hamiltoniano posee la simetría $\{S_i\} \rightarrow \{S'_i\}$ con $S'_i = -S_i$. En otras palabras, el valor de H no cambia si se invierten todos los espines. Esta simetría refleja que el sistema ferromagnético original no tiene una dirección privilegiada intrínseca. Es un caso de la simetría conocida como $\mathbb{Z}_2$ para un sistema discreto.

A pesar de su relativa simplicidad¹², el modelo Ising es suficientemente complejo como para mostrar un punto crítico con $T_C \neq 0$ (excepto el caso con $d = 1$ en el que la

¹²En el caso considerado, el espín del modelo de Ising tiene una sola "componente", mientras que el espín original en el modelo de Heisenberg es un vector de tres componentes. De todas maneras, como descripción del ferromagnetismo da buenos resultados cualitativos en general. Si la sustancia ferromagnética posee un eje preferencial entonces los resultados son buenos cuantitativamente. En un caso isotrópico será el modelo de Heisenberg el que reproduzca los valores adecuados.

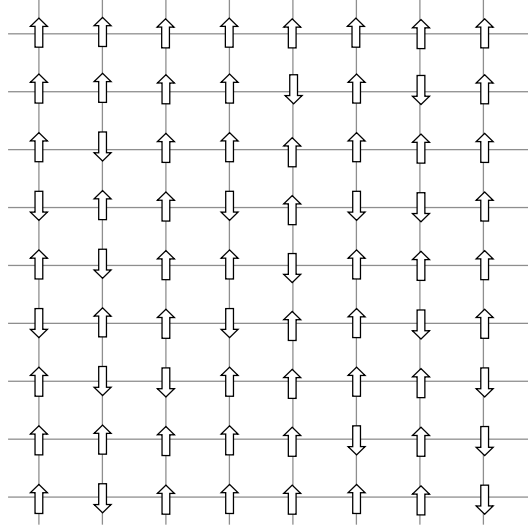


Fig. 1.6.-Red de espines en el Modelo de Ising, en una red cuadrada bidimensional $d = 2$

Se muestra una configuración típica de las variables en el modelo. La orientación de las flechas indica el valor del “espín” S_i en $+1$ o -1 .

temperatura crítica sí es $T_C = 0$). Es de destacar que siendo un modelo de aspecto tan inocente, solamente se conozcan las soluciones analíticas exactas de $d = 1$ y, gracias al trabajo de Onsager, en el caso $d = 2$ (tabla 1.2). En otros casos, los cálculos numéricos modernos permiten poner a prueba diversas teorías analíticas aproximadas.

La función de partición para este modelo en presencia de un campo externo, es

$$Z[B, T, N] = \sum_{\{S_i\}} e^{-H_I[S] + \sum_i B_i S_i} \quad (1.20)$$

en donde por conveniencia los campos y constantes de acoplamiento se han redefinido de forma de absorber la dependencia en la temperatura. N , la cantidad de puntos de la red, es un número grande que más adelante se lleva a infinito (un sistema con N finito no puede tener una transición de fase).

Una posible implementación del RG consiste en agrupar los espines S_i en bloques de s^d elementos, donde $s > 1$ es el *parámetro* de la transformación (por el momento un número entero), dando lugar a una nueva red de *bloques de espines*. A cada bloque le corresponde un sitio de la nueva red y se define una variable de espín S'_α que se

relaciona con los espines originales mediante¹³

$$S'_\alpha = \frac{\lambda(s)}{s^d} \sum_{S_i \in \alpha} S_i \quad (1.21)$$

donde $\lambda(s)$ es un factor de renormalización del espín. S'_α es un promedio de los espines originalmente presentes en el bloque α . La función de partición original Z tiene el mismo valor que la función de partición Z' calculada en la nueva red; sin embargo el hamiltoniano del nuevo sistema tiene un aspecto diferente. Formalmente está definido por la relación

$$e^{-H'[S'_\alpha]} = \sum_{\{S_i\} | S_\alpha} e^{-H[S_i]} \quad (1.22)$$

La suma es sobre las configuraciones de los espines S_i que dan lugar a una misma configuración de los espines S'_α , de tal forma que se tiene

$$Z = \sum_{[S_i]} e^{-H[S_i]} = \sum_{[S'_\alpha]} e^{-H'[S'_\alpha]} = Z' \quad (1.23)$$

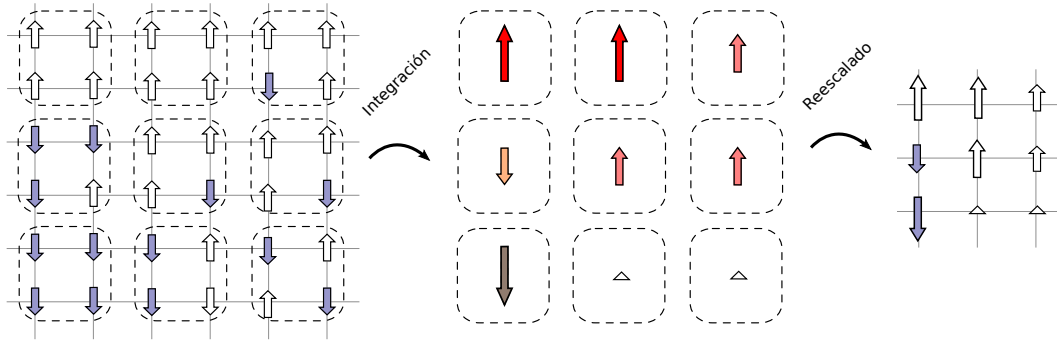


Fig. 1.7.-El método de bloques de espín

Los espines S_i se agrupan en bloques (en este caso de $2^2 = 4$ espines) para formar la nueva red de espines S'_α . La transformación (1.21) provoca que S'_α pueda tomar valores intermedios entre los extremos, y a diferencia de S_i no está restringida a ± 1 . En el paso de integración obtenemos una red nueva con un tamaño de celda mayor. Luego se reescala la unidad de longitud y se renormaliza la variable de espín, de modo de que el resultado se presta a ser comparado con la red original.

Al formar los bloques, el paso de la red se transforma efectivamente según $a \rightarrow a' = as$, por lo que debemos **reescalar** la unidad de longitud $x \rightarrow x/s$. De esta manera el sistema transformado quedará definido en una red comparable a la original.

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Un hecho muy importante que debemos observar es que el comportamiento a largas distancias no cambia por la aplicación de la transformación del grupo de renormalización: es el mismo para el sistema original y el transformado. Entonces podemos esperar que *si tratamos los detalles microscópicos del sistema de manera aproximada, no habrá una gran repercusión en las cantidades universales*; de aquí la ventaja de usar el RG.

La transformación descrita en (1.21) hace que los nuevos espines S'_i tomen valores que, a diferencia de los originales S_i , no están restringidos a ± 1 si no que toman valores intermedios; el propósito del factor $\lambda(s)$ en (1.21) es asegurar que los valores de la variable se mantengan (al menos aproximadamente) en el rango ± 1 . Se desea que la aplicación de dos transformaciones sucesivas de parámetros s_1 y s_2 sea equivalente a la aplicación de una única transformación de parámetro $s = s_1 s_2$. Esto ocurre si $\lambda(s_1 s_2) = \lambda(s_1) \lambda(s_2)$. De esta relación se concluye que $\lambda(s)$ es de la forma

$$\lambda(s) = s^y, \quad (1.24)$$

válida localmente, ya que y depende, en general, de los parámetros del hamiltoniano.

Luego de reiterar un gran número de veces la transformación del RG, la variable de espín podrá tomar prácticamente todos los valores en un intervalo de números reales, lo que generalizamos introduciendo el **campo escalar** $\varphi(x_i)$ para representar esta variable. Aquí x_i representa el punto de la red correspondiente. Podemos generalizar todavía más el modelo tomando el *límite continuo*, donde consideramos que la distancia a entre los puntos de la red va a cero, permitiendo que el campo $\varphi(x)$ esté definido en todo el espacio. En la práctica es preferible trabajar con una teoría definida en un continuo, en lugar de en una red.

Existe un modelo llamado “ φ^4 ” que describe una teoría de campos que puede también utilizarse para describir la transición ferromagnética. En el caso en que el campo φ es **escalar**, posee el mismo comportamiento que el modelo de Ising cuando ambos sistemas están próximos a su punto crítico, es decir, pertenecen a la misma clase de universalidad.

¹³ Una consecuencia inmediata de esta formulación del método de bloques de espín es que se puede mostrar explícitamente que la longitud de correlación se transforma de acuerdo a

$$\xi' = \xi/s$$

Si la función de correlación en la red original $G_{ij} \equiv \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$ cumple $G_{ij} \sim \exp(-r_{ij}/\xi)$ (r_{ij} es la distancia entre S_i y S_j) se encuentra que en la nueva red la función de correlación se comporta de acuerdo a $G_{\alpha\beta} \sim \exp(-sr_{\alpha\beta}/\xi)$ donde ξ y ξ' se miden en unidades de las redes respectivas[27].

En la función de partición usamos la *medida de integración*

$$\mathcal{D}\varphi \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \prod_i d\varphi(x_i) \quad (1.25)$$

de manera que

$$Z[B] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta H[\varphi]} \quad (1.26)$$

donde el hamiltoniano $H[\varphi]$ que describe el sistema es ahora una **funcional** del campo φ (decimos que $Z[B]$ es una funcional de B).

Para lograr una teoría en la misma clase de universalidad que el modelo de Ising en dimensión $d > 1$, basta con considerar un hamiltoniano dado por [27]:

$$H[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 \right\} \quad (1.27)$$

donde r_0 y u_0 son las constantes de acoplamiento¹⁴. Es conocido como el hamiltoniano de Ginzburg-Landau. El primer término del integrando es análogo a un término de energía cinética del campo y refleja la tendencia al alineamiento de los espines. El segundo término correspondería a un término de “masa” del campo representada por la constante r_0 . Estos dos términos por sí mismos describen una **teoría libre** en el espacio de momentos: para $u_0 = 0$ los modos de Fourier están desacoplados. La función de partición que corresponde a la teoría libre se puede calcular analíticamente ya que se puede representar como un producto de integrales gaussianas. Por ello al caso $u_0 = 0$ también se le llama el **modelo Gausiano**.

El término proporcional a φ^4 es el que le da el nombre al modelo y es el término más simple que permite la existencia de una magnetización espontánea. Todos los términos preservan la simetría $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$, pero este modelo también se puede usar en la transición líquido-gas, aunque la simetría no está presente en ese sistema. Los términos lineales en el campo φ se adscriben a una fuente externa, mientras que los términos cúbicos φ^3 se pueden absorber en los restantes redefiniendo el campo y las constantes de acoplamiento.

Estando en la misma clase de universalidad, estudiar el comportamiento a larga distancia del modelo φ^4 es equivalente a estudiar el del modelo de Ising. Más precisamente, la equiparación es posible cuando las distancias involucradas superan la distancia del paso de la red de manera que los detalles de ésta no sean decisivos en los cálculos;

¹⁴ Los prefactores numéricos son convencionales; su presencia simplifica algunas expresiones en los desarrollos perturbativos.

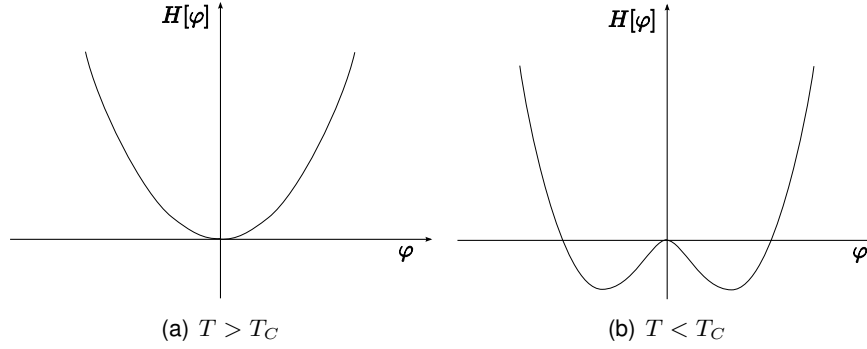


Fig. 1.8.-Densidad Hamiltoniana en el modelo escalar φ^4 .

(a) Por encima de la temperatura crítica el mínimo se presenta para $\varphi = 0$ y por lo tanto no aparece magnetización espontánea. (b) Por debajo de la temperatura crítica se presentan dos mínimos correspondientes a los estados con magnetización espontánea $\langle \varphi \rangle \neq 0$ y el estado con $\varphi = 0$ se vuelve inestable.

formalmente la teoría dada por (1.27) sólo describe correctamente la red de espines para distancias $l \gg a$ (ver por ejemplo Le Bellac [27]).

Esta restricción aparece más claramente al pasar al espacio de momentos. Además, la invariancia por traslaciones sugiere trabajar en este espacio. La transformada de Fourier del campo es

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \equiv \int d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \quad (1.28)$$

y el hamiltoniano (1.27) en términos de $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ luce como

$$H[\varphi] = \int_{\mathbf{k} \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{1}{2} (r_0 + \mathbf{k}^2) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) + \dots \right\} \quad (1.29)$$

donde se muestra explícitamente que las fluctuaciones que hacen su aparición en la integración son sólo aquellas de onda de valor $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$ (sólo se muestra la parte del hamiltoniano correspondiente a la teoría libre). Aquí $\Lambda \equiv a^{-1}$ representa un **cut-off ultravioleta**, de manera que no se incluyen fluctuaciones de corta distancia, por debajo de a . La presencia de este corte refleja la existencia subyacente de la red de espines. Esto se generaliza a otros sistemas estudiados por teoría de campos. La escala Λ indica el límite de validez de la teoría propuesta, más allá de la cual no se tiene acceso a una información que permita discriminar cual será la forma de las interacciones microscópicas¹⁵.

¹⁵ También podría ocurrir que se conozca que a partir de la escala Λ la forma de la teoría cambia drásticamente. La clave aquí es que no deben influir en las cantidades que se observan a una escala de

Por otro lado, la escala de largas distancias corresponde a los números de onda pequeños $|\mathbf{k}| \ll 1/a$.

En el caso del modelo φ^4 , una transformación del grupo de renormalización corresponde a la integración sobre vectores de onda $\Lambda/s \leq k \leq \Lambda$ (lo que se corresponde con la formación de bloques de espín; ver (1.21)), seguida por la dilatación de la unidad de longitud

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/s, \quad \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = s\mathbf{k} \quad (1.30)$$

(el vector de número de onda $\mathbf{k}$ es recíproco del vector de posición $\mathbf{x}$). Se completa la transformación al efectuar la renormalización del campo

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &\rightarrow \varphi'(\mathbf{x}') = s^{d_\varphi} \varphi(\mathbf{x}) \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) &\rightarrow \tilde{\varphi}'(\mathbf{k}') = s^{d_\varphi - d} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

El valor d_φ en estas relaciones debe ser tal que lleve al valor correcto de la función de correlación en el régimen crítico; en particular, depende del exponente crítico η . La ley de potencia para $G(x, y)$ en el régimen crítico, a grandes distancias, es (1.13):

$$G(x, y) = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (r = |x - y| \gg a) \quad (1.32)$$

Al considerar el sistema en el punto crítico, esta relación debe preservarse tras la renormalización, pero expresada en términos de las cantidades transformadas:

$$G'(x', y') = \langle \varphi'(x') \varphi'(y') \rangle \sim \frac{1}{(r')^{d-2+\eta}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{d-2+\eta} \quad (r' = |x' - y'| \gg a) \quad (1.33)$$

Mientras tanto tenemos $\langle \varphi'(x') \varphi'(y') \rangle = s^{2d_\varphi} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$, aplicando la transformación del campo. Esto implica que d_φ y el exponente crítico η no son independientes. Comparando los resultados deducimos que

$$d_\varphi = \frac{d - 2 + \eta}{2} \quad (1.34)$$

distancias grandes los detalles de las interacciones a una escala de longitudes muy, muy pequeña. En física de partículas, la escala Λ se corresponde con la escala de unificación de las fuerzas (escala de Planck). Dado que todas las observaciones experimentales se realizan con energías muy por debajo de esa escala, es razonable suponer que se pueden describir los fenómenos estudiados independientemente de lo que ocurra por encima de Λ .

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Al igual que en el caso de la red de espines, el hamiltoniano correspondiente al sistema transformado tiene nuevos términos con respecto al original. Separemos el campo $\varphi(\mathbf{k})$ en dos partes: $\varphi_{>}(\mathbf{k})$ que corresponde a los modos “rápidos” $k \in [\Lambda/s, \Lambda]$ de $\varphi(\mathbf{k})$ y $\varphi_{<}(\mathbf{k})$ que corresponde a los modos “lentos” $k \in [0, \Lambda/s]$. Entonces la relación que define formalmente el hamiltoniano transformado $H'[\varphi]$ en términos del original consiste en integrar los modos en la capa $[\Lambda/s, \Lambda]$:

$$e^{-H'[\varphi']} = \int \mathcal{D}\varphi_{>} e^{-H[\varphi]} \quad (1.35)$$

de manera que el campo transformado φ' se corresponde con $\varphi_{<}$; la función de partición expresada en términos de $H'[\varphi_{<}]$ es por lo tanto

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi_{<} e^{-H'[\varphi_{<}]} \quad (1.36)$$

Una vez transformado el hamiltoniano tendrá en general la forma funcional

$$H[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}r_0\varphi^2 + \frac{1}{4!}u_0\varphi^4 + \frac{1}{6!}u_6\varphi^6 + \frac{1}{8!}u_8\varphi^8 + \frac{1}{4!}v_0\varphi^2(\nabla\varphi)^2 + \dots \right\} \quad (1.37)$$

y el espacio de parámetros (de dimensión infinita) es el espacio de las constantes de acoplamiento

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \{r_0, u_0, u_6, u_8, v_0, \dots\} \\ \mathbf{K}' &= \{r'_0, u'_0, u'_6, u'_8, v'_0, \dots\} \\ \mathbf{K}' &= R\mathbf{K} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Conviene hacer la convención de que todos los parámetros aparecen en el sistema original, con la particularidad de que sólo los primeros son no nulos. Esto nos permite comparar las diferentes teorías, y en particular el efecto que tiene la incorporación de cada vez más fluctuaciones sobre las constantes de acoplamiento.

1.5. Flujo de renormalización

Al pensar el RG en el espacio de parámetros cada vector corresponde a una teoría distinta asociada a una escala de impulsos diferente. Mediante la aplicación sucesiva de la transformación R obtenemos una secuencia de teorías correspondientes

unas con otras, $K, K' = RK, K'' = RK', \dots$, cada una con una escala asociada

$$\begin{aligned}
 K &\longleftrightarrow \Lambda \\
 K' &\longleftrightarrow \Lambda/s \\
 K'' &\longleftrightarrow \Lambda/s^2 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

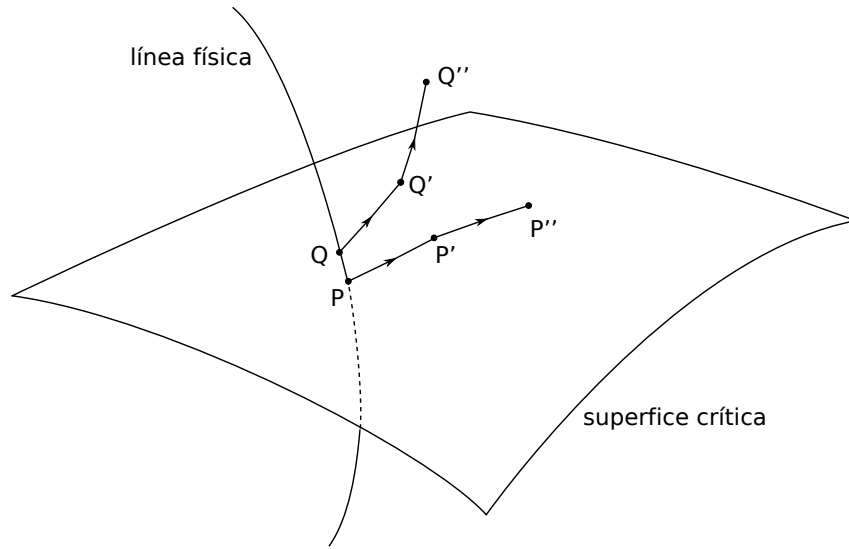


Fig. 1.9.-Flujo del grupo de renormalización

En el espacio de parámetros la aplicación sucesiva de transformaciones del RG da origen a una trayectoria de puntos. El conjunto de puntos accesibles por un sistema dado define la línea física en este espacio. Los sistemas con longitud de correlación divergente definen la superficie crítica. Si se parte de un punto fuera de esta superficie, la trayectoria se aleja de ella ($Q \rightarrow Q' \rightarrow Q''$), mientras que si se parte de un punto en la superficie la trayectoria se mantiene en ella ($P \rightarrow P' \rightarrow P''$).

La secuencia $K \rightarrow K' \rightarrow K'' \rightarrow \dots$ define un **flujo** de las constantes de acoplamiento, una trayectoria en el espacio de parámetros del que se puede extraer mucha de la información física del sistema bajo estudio.

Como en el caso anterior, la aplicación de R no cambia el comportamiento del sistema a largas distancias, y la longitud de correlación tiene el mismo valor en todos los sistemas. Pero luego de reescalar la unidad de distancia, la longitud de correlación se reduce de acuerdo $\xi' = \xi/s$. Por consiguiente el sistema transformado se aleja del comportamiento crítico; luego de un gran número de aplicaciones de R la longitud de correlación será del orden del espacio de la red - el comportamiento opuesto al crítico.

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

co.

La excepción ocurre en la criticalidad, ya que la longitud de correlación diverge: si $\xi = \infty$, entonces $\xi' = \xi/s = \infty$. El conjunto de puntos del espacio de parámetros para los que esto ocurre define la (hiper)**superficie crítica** y si el flujo del grupo de renormalización comienza en un punto de esta superficie, entonces nunca la abandona. Es decir, la trayectoria del RG conecta sistemas que se encuentran en la criticalidad.

Llevar el sistema a la temperatura T_C consiste en precisamente colocar el punto de partida del flujo de renormalización en la superficie crítica¹⁶. Se llama **línea física** del sistema al conjunto de valores del espacio de parámetros que el sistema bajo estudio puede realmente adoptar al cambiar su temperatura (u otro parámetro físico) y la intersección de la línea física con la superficie crítica ocurre en $T = T_C$ (por definición). Es justamente en el caso de las transiciones de segundo orden donde se hace posible alcanzar la superficie crítica ajustando únicamente un parámetro (i.e. la temperatura) cuando no hay campo magnético externo.

Un **punto fijo** del RG es un punto K^* en la superficie crítica que satisface $K^* = RK^*$. La existencia de un punto fijo permite caracterizar el comportamiento crítico del sistema estudiando el flujo de renormalización en un entorno del mismo. No obstante no se conocen teoremas que garanticen la existencia de un punto fijo en general, y por ello se suele adoptar la **hipótesis** de que para los puntos dentro de cierto dominio de la superficie crítica, el flujo del RG converge a un punto fijo. Esta hipótesis se cumple en el modelo φ^4 .

Una técnica para extraer información importante del sistema consiste en la **linealización alrededor del punto fijo**. La clave es considerar puntos $K = \{K_\alpha\}$ próximos al punto fijo $K^* = \{K_\alpha^*\}$ (pero no necesariamente sobre la superficie crítica) y estudiar cómo actúa una transformación del grupo de renormalización **infinitesimal** sobre este punto. Si K y K^* están suficientemente próximos, entonces la transformación se puede aproximar por una operación lineal sobre la diferencia $\delta K = K - K^*$. La linealización da la regla $\delta K_\beta \rightarrow \delta K'_\alpha \simeq \sum_\beta T_{\alpha\beta}(s) \delta K_\beta$, donde los coeficientes $T_{\alpha\beta}(s)$ definen la matriz de transformación $T(s)$.

Luego, se asume que en el espacio de parámetros existe un conjunto de autovectores $\{e^{(i)}\}$ de la transformación que forman una base del espacio, de manera tal que

¹⁶ La temperatura T es uno de los parámetros de K (recordemos que las constantes de acoplamiento de H se redefinieron para absorber el parámetro β).

cualquier punto puede referirse a esta base,

$$\delta \mathbf{K}_\beta = \sum_i t_i \mathbf{e}_\beta^{(i)} = t_1 \mathbf{e}_\beta^{(1)} + t_2 \mathbf{e}_\beta^{(2)} + \dots, \quad (1.40)$$

Utilizando la ley de grupo para $\mathbf{T}(s)$ se arriba a la siguiente relación para la transformación:

$$\delta \mathbf{K}'_\alpha = \sum_i t_i s^{\lambda_i} \mathbf{e}_\alpha^{(i)} = t_1 s^{\lambda_1} \mathbf{e}_\alpha^{(1)} + t_2 s^{\lambda_2} \mathbf{e}_\alpha^{(2)} + \dots \quad (1.41)$$

De esto se desprende que en un entorno del punto fijo, el flujo de renormalización se comporta como una ley de potencias según las “autodirecciones”. Los coeficientes t_i son las **constantes de acoplamiento de escala**. Cada transformación R los multiplica por s^{λ_i} , de lo cual podemos distinguir tres posibilidades:

- $\lambda_i > 0$ ($s^{\lambda_i} > 1$): t_i se amplifica con cada aplicación de R . Se le denomina **constante de acoplamiento relevante**.
- $\lambda_i < 0$ ($0 \leq s^{\lambda_i} < 1$): t_i decrece bajo la aplicación de R . Se le denomina **constante de acoplamiento irrelevante**.
- $\lambda_i = 0$ ($s^{\lambda_i} = 1$): en la aproximación lineal t_i permanece constante, por lo que es preciso ir más allá de esta aproximación para estudiar su comportamiento. Se le denomina **constante de acoplamiento marginal**, y el comportamiento es logarítmico en lugar de ser una ley de potencias.

Supongamos por simplicidad que no hay constantes de acoplamiento marginales¹⁷. Entonces las constantes irrelevantes conducen el flujo hacia el punto fijo (situado en el origen del espacio generado por $\{\mathbf{e}^{(i)}\}$, $t_i = 0 \forall i$) y las constantes relevantes lo alejan de él. Para poder estar en la superficie crítica, en la aproximación lineal hay que igualar entonces todas las constantes de acoplamiento relevantes a cero. En otras palabras, la cantidad de parámetros del sistema que hay que ajustar para observar el comportamiento crítico es la misma que la cantidad de constantes relevantes¹⁸. Los casos en los que estamos interesados son aquellos en los que el número de constantes relevantes es pequeño, de forma de poder llegar a la superficie crítica vía el ajuste

¹⁷ La presencia de un campo marginal hace que el flujo en la dirección correspondiente sea más lento, por lo que el sistema tarda más “tiempo” en ser afectado por el punto fijo; entretanto, el campo marginal tiene la oportunidad de modificar el comportamiento crítico con factores logarítmicos.

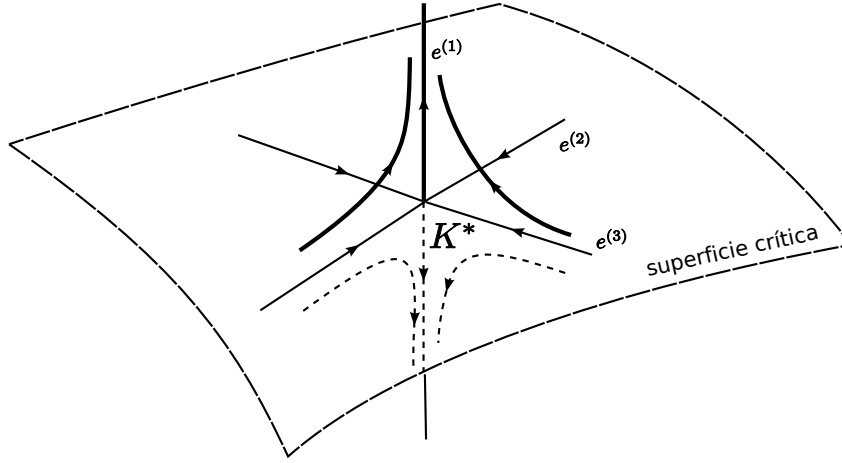


Fig. 1.10.-Comportamiento del flujo de RG en la proximidad de un punto fijo K^* . En este ejemplo aparece una constante de acoplamiento relevante, asociada con la dirección $e^{(1)}$, y dos irrelevantes asociadas con $e^{(2)}$ y $e^{(3)}$. El análisis lineal da una noción del comportamiento del flujo en un entorno de K^* .

fino de los parámetros del sistema. Para la transición ferromagnética son dos: basta entonces ajustar la temperatura y el campo magnético aplicado.

Podemos derivar leyes de escala para la función de correlación a dos puntos como ejemplo de los resultados del RG. Imaginemos un sistema con un único campo relevante t_1 y todos los demás campos $t_2, t_3, \dots$ irrelevantes. Corresponde al modelo de Ginzburg-Landau para un campo externo nulo. Para distancias r grandes en comparación con a , la función de correlación a dos puntos transformada cumple

$$G^{(2)}(r, t_1, t_2, \dots) \simeq s^{-2y} G^{(2)}\left(\frac{r}{s}, t'_1, t'_2, \dots\right) \quad (1.42)$$

que se deduce a partir de (1.21), (1.24) y la definición de $G^{(2)}$.

Cuando estamos en la temperatura crítica (con $t_1 = 0$ y $\mathbf{K} = \{t_1 = 0, t_2, t_3, \dots\}$) y en la región de validez de la aproximación lineal, se cumple para $r \gg a$

$$G^{(2)}(r, \mathbf{K}) = G^{(2)}(r, 0, t_2, t_3, \dots) \simeq s^{-2y} G^{(2)}\left(\frac{r}{s}, 0, s^{\lambda_2} t_2, s^{\lambda_3} t_3, \dots\right) \quad (1.43)$$

donde y está relacionado con el factor de renormalización del campo mediante $\lambda(s) = s^y$ (ecuación (1.21)).

¹⁸ Al utilizar la base $\{e^{(i)}\}$ estamos usando combinaciones lineales complicadas de los parámetros físicos usuales. Los parámetros que deben ser ajustados serán aquellos que llevan a que el punto que representa al sistema en este espacio tenga una proyección nula sobre las direcciones relevantes.

Ahora consideremos el caso $s = r/a$, que corresponde a integrar las fluctuaciones entre las escalas a y r . Esto conduce a

$$\begin{aligned} G^{(2)}(r, 0, t_2, \dots) &\simeq r^{-2y} G^{(2)}\left(a, 0, \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_2} t_2, \dots\right) \\ &\simeq r^{-2y} G^{(2)}(a, 0, 0, \dots) \\ &\sim r^{-2y} \end{aligned} \quad (1.44)$$

La segunda identidad es consecuencia de que $\lambda_2 < 0$ y por ello para r/a suficientemente grande, $(r/a)^{\lambda_2} t_2 \ll 1$. Con esto se muestra que se cumple (1.13), con la relación

$$2y = d - 2 + \eta. \quad (1.45)$$

De esta manera la invariancia de escala se deduce a partir del grupo de renormalización.

De forma similar se puede deducir que en la proximidad del punto crítico se debe cumplir

$$t_1|_{s=\xi/a} \sim |T - T_C| \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\lambda_1} \sim 1 \quad (1.46)$$

o en forma equivalente, $\xi \sim |T - T_C|^{-1/\lambda_1}$. Por comparación con (1.12) se obtiene

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} \quad (1.47)$$

Lo que muestran estas relaciones es que los exponentes críticos quedan definidos por el comportamiento del flujo de renormalización en la proximidad del punto fijo. Recordemos que gracias a las leyes de escala, dos de los exponentes críticos son suficientes para definir a los demás.

Además, la escala microscópica a no juega ningún papel en estas relaciones, y esto significa que todos los sistemas cuyo comportamiento está gobernado por el mismo punto fijo tienen los mismo valores de los exponentes críticos. Podemos decir por lo tanto que el RG permite probar la universalidad de los exponentes críticos.

Se puede ampliar lo expuesto en este capítulo consultando LeBellac [27] (en el que está principalmente basado) y Delamotte [16]. Son muy interesantes los artículos de

CAPÍTULO 1. PLANTEO DEL PROBLEMA

Wilson [38, 39] así como su lectura de 1982 al recibir el premio Nóbel [40]. H.E. Stanley [36] presenta una buena sinopsis de los temas discutidos.

2. Un nuevo método de aproximación

En este capítulo se resume el Grupo de Renormalización No Perturbativo y el esquema de aproximación BMW. El foco está puesto en los razonamientos y en los resultados; la mayoría de las deducciones completas se encuentran en los apéndices y en las referencias.

En el grupo de Renormalización del capítulo anterior las fluctuaciones de corta distancia son integradas progresivamente, creando una correspondencia entre distintas teorías que tienen el mismo comportamiento a largas distancias. Existe una formulación diferente del grupo de Renormalización donde las fluctuaciones de corta distancia están siempre presentes en la teoría. En la sección 2.2 se presenta esta formulación alternativa, llamada **Grupo de Renormalización No Perturbativo** (NPRG) o **Grupo de Renormalización Exacto** (ERG), siguiendo el método de la acción efectiva propuesto por Wetterich [37], también está desarrollado en Berges, Tetradis y Wetterich [6, 7], Ellwanger [17, 18], Morris [28], Morris y Tighe [29]. Como presentación pedagógica del tema son muy apropiados los textos de Delamotte y Canet [15] y Bagnuls y Bervillier [1].

La ecuación fundamental del NPRG es una ecuación exacta que reúne toda la información física del problema. En consecuencia tiene una estructura tan compleja que no se puede resolver en forma cerrada sin efectuar aproximaciones. En la sección 2.2.3 se presentan algunos esquemas de aproximación basados en el desarrollo en gradientes, abundantemente estudiados en la literatura [6, 14, 29, 37]. En la sección 2.3 se presenta un nuevo *esquema de aproximación* desarrollado por el grupo, que permite resolver las ecuaciones para las funciones de correlación con un nivel de aproximación que puede ser sistemáticamente mejorado [6, 14, 28, 37]. Finalmente, en la sección 2.4 consideramos el orden dominante del método para la función a dos puntos, donde veremos que ya en este nivel es muy preciso. Además de servir de ejemplo, es también

el punto de partida para considerar, en el próximo capítulo, la función de correlación a tres puntos.

2.1. Límites de la aproximación perturbativa

Antes de estudiar el Grupo de Renormalización No Perturbativo, veamos con más detenimiento las limitaciones de los métodos perturbativos. Una vez más sigo el texto de Le Bellac [27], y también el de Peskin [33].

Para sistemas físicos descritos por una teoría de campos, como en el caso del modelo escalar φ^4 ,

$$\beta H[\varphi] = \int_{\Lambda} d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + \frac{r_0}{2!} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{u_0}{4!} \varphi^4(\mathbf{x}) \right\}, \quad (2.1)$$

el **desarrollo perturbativo** es uno de los métodos de abordaje más conocidos e intuitivos para calcular las propiedades del sistema. Dado que este modelo surge del límite continuo de una teoría descrita en una red, el subíndice Λ en la integral es para indicar la escala microscópica subyacente en la cual está definida esta teoría, y por lo tanto en el espacio de impulsos los momentos que se integran están acotados por la escala de impulsos Λ . En otras palabras, la longitud de onda más pequeña posible en el sistema es del tamaño del paso de la red $a \sim \Lambda^{-1}$

Si la constante de acoplamiento u_0 es suficientemente pequeña, se espera poder describir el sistema mediante correcciones a la teoría *libre* descrita por un Hamiltoniano libre H_0 dado los términos cuadráticos

$$\beta H_0[\varphi] = \int_{\Lambda} d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + \frac{r_0}{2!} \varphi^2(\mathbf{x}) \right\}. \quad (2.2)$$

Para el hamiltoniano H_0 se conocen soluciones exactas. Viendo el hamiltoniano completo como la suma de una parte libre y un potencial de interacción H_1 ,

$$H[\varphi] = H_0[\varphi] + H_1[\varphi], \quad (2.3)$$

las funciones de correlación se pueden calcular considerando el desarrollo en serie de potencias de la exponencial que aparece en la función de partición,

$$e^{-H_0 - H_1} = e^{-H_0} (1 + a_1[\varphi] u_0 + a_2[\varphi] u_0^2 + \dots) \quad (2.4)$$

2.1. LÍMITES DE LA APROXIMACIÓN PERTURBATIVA

donde las funcionales $a_i[\varphi]$ dependen de los detalles de $H_1[\varphi]$ y la temperatura¹.

Gracias a desarrollos como este y la relativa simplicidad de H_0 , se pueden encontrar finalmente expresiones como por ejemplo

$$\chi^{-1} = r_0 + \frac{u_0}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}u_0 \int_{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r_0 + \frac{u_0}{2}\phi^2} + \dots \quad (2.5)$$

en un campo externo uniforme φ .

Hay principalmente dos *graves dificultades* con este desarrollo. La primera de ellas está relacionada con el pasaje al límite continuo de una teoría definida en un sistema discreto.

El segundo término de (2.5) tiene una fuerte dependencia en la escala Λ , y esto es indeseable si deseamos tener una descripción macroscópica de los fenómenos críticos, para los que esperamos que los resultados sean independientes de Λ . Al pasar al límite continuo, $\Lambda \rightarrow \infty$, nos topamos de esta manera con que el desarrollado perturbativo, en lugar de darnos pequeñas correcciones respecto a la teoría libre, nos da correcciones divergentes! A este tipo de divergencias se les llama **divergencias ultravioletas**, ya que provienen de la integración de los impulsos $\sim \Lambda$.

Una forma de remediar estas divergencias es a través de la **renormalización** de las constantes de acoplamiento. Reescribimos la teoría con la misma forma que la teoría original, utilizando nuevas constantes de acoplamiento adaptadas para de *absorber* las divergencias. Por ejemplo

$$\beta H[\varphi] = \int_{\Lambda} d^d x \left\{ \frac{Z(\Lambda)}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + \frac{r_0(\Lambda)}{2!} \varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{u_0(\Lambda)}{4!} \varphi^4(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.6)$$

Las constantes r_0 y u_0 se transformaron en $r_0(\Lambda)$ y $u_0(\Lambda)$ en esta expresión. El campo φ también es transformado, por lo cual es preciso añadir el factor $Z(\Lambda)$ al término cinético.

Tal reescritura será posible si logramos hallar una expresión para las constantes de acoplamiento c_0 de la teoría original (p.ej. r_0 y u_0) de la forma

$$c_0 = f_c(\Lambda) + c \quad (2.7)$$

¹ Redefinimos el hamiltoneano y el campo para absorber el factor β .

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

donde $f_c(\Lambda)$ es la parte que conduce a las divergencias y c es un valor constante que no depende de Λ . Si la teoría puede describirse en términos de las constantes c (y no de las c_0), entonces se puede tomar el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ y las divergencias no aparecen.

Cuando la renormalización de las constantes de acoplamiento es posible produciendo una teoría de la misma forma que la original, se dice que la teoría es **renormalizable**. El modelo φ^4 en $d \leq 4$ es un ejemplo de teoría renormalizable. La interpretación de las constantes renormalizadas es que son estas y no las originales a las que podemos acceder macroscópicamente y por lo tanto, son las que generalmente vemos cuando observamos el sistema. Si observásemos el sistema a la escala Λ , nos encontraríamos con los valores “desnudos” (*bare*) de c_0 .

La dimensión física del Hamiltoniano H no debe cambiar, evidentemente, por causa de la renormalización. Esta restricción impone, en primera instancia, la forma en la que la dimensión física del campo $\varphi(x)$ se ajusta en el proceso – analizando el término cinético, por ejemplo. A su vez, las dimensiones físicas de las constantes de acoplamiento $r(\Lambda)$ y $u_0(\Lambda)$ quedan determinadas por las de H y $\varphi(x)$. Es debido a la renormalización del campo que es introducido $Z(\Lambda)$ en el término cinético (ver apéndice B).

Entonces, mediante la renormalización, es posible “resolver” las divergencias ultravioletas en las teorías de campos. No obstante, todavía queda un problema pendiente que hace que las perturbaciones no sean “pequeñas”.

El desarrollado perturbativo (2.5) puede, aún después de la renormalización, presentar divergencias en el otro extremo de la integración. Esto es debido a la aparición de polos en el integrando cuando $q^2 + r = 0$. Cuando la constante r es positiva, esta actúa como una “masa” m dada por $r = m^2$, impidiendo la propagación indefinida de un modo de momento q . Esta constante caracteriza la longitud de correlación ξ a través de $r = \xi^{-2}$, y en la transición de fase, $r \rightarrow 0$. La divergencia que aparece en este caso es llamada una **divergencia infrarroja**. Está relacionada con el comportamiento a largas distancias del sistema, y por ello la forma de atacar este problema es a través del Grupo de Renormalización.

Definamos $r = \chi^{-1}$. En la aproximación de menor orden en potencias de u_0 ,

$$\chi_0^{-1} = r_0 = \bar{r}_0(T - T_0) \quad (2.8)$$

2.1. LÍMITES DE LA APROXIMACIÓN PERTURBATIVA

donde $\bar{r}_0$ es una constante positiva. Esto se aplica en un entorno de $T = T_0$, temperatura en la que r_0 se anula. La temperatura crítica se caracteriza por la divergencia de la longitud de correlación, que corresponde a $r = 0$. En la aproximación de menor orden, entonces, la temperatura crítica es T_0 .

En el orden siguiente, cuando $\varphi = 0$ se tiene

$$r = r_0 + \frac{1}{2}u_0 \int_{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r_0} \quad (2.9)$$

Esta ecuación muestra que la temperatura crítica T_C para la cual se anula r es diferente de T_0 ; para $T = T_0$ la expresión anterior da $r(T) > 0$. La raíz aparece en la región $T < T_0$, con lo que $r_0 < 0$. El problema es que entonces la integral en (2.9) no está bien definida. Veamos un análisis basado en la corrección de Ginzburg a la teoría de Landau [27].

En este orden de aproximación es válido reemplazar r por r_0 en la integral, siendo el error cometido en la ecuación para r de orden u_0^2 . Con esto tenemos

$$r = \bar{r}_0(T - T_0) + \frac{1}{2}u_0 \int_{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + r_0} \quad (2.10)$$

Evalando en $T = T_C$ queda

$$0 = \bar{r}_0(T_C - T_0) + \frac{1}{2}u_0 \int_{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \quad (2.11)$$

y la diferencia $r(T) - r(T_C)$ es

$$r = \bar{r}_0(T - T_C) - \frac{1}{2}u_0 \int_{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{r}{q^2(q^2 + r)} \quad (2.12)$$

Para el régimen crítico, teniendo $r = 0$, se ve que la integral diverge si $d \leq 4$, debido a los modos correspondientes a $q \rightarrow 0$ (longitud de onda larga). r presenta una divergencia infrarroja de la forma $\int dq/q^{5-d}$. Para $r \neq 0$, calculando la integral se puede escribir

$$r = \bar{r}_0(T - T_C) - u_0 C_{\Lambda} r^{(d-4)/2} \quad (2.13)$$

(C_{Λ} es una constante numérica fruto de la integración). Esto es incompatible con la

ley de escala $r \sim (T - T_C)$ (exponente crítico $\gamma = 1$) de la teoría de campo medio. Si $d \leq 4$ la expresión anterior es *inconsistente* con el exponente de campo medio. El término que debería ser correctivo (es decir, pequeño en comparación) diverge si $T \rightarrow T_C$.

El desarrollo perturbativo no da correctamente los exponentes críticos, debido a las divergencias causadas por el comportamiento colectivo a gran escala del sistema.

2.2. Grupo de Renormalización No Perturbativo

Veamos en qué consiste el NPRG, que conceptualmente es similar al RG de Wilson. Dada una teoría de campos, consideramos nuevamente la función de partición

$$Z = \sum_{\text{conf.}} e^{-\beta H} \quad (2.14)$$

con H el Hamiltoniano y $\beta = (k_B T)^{-1}$ donde la suma o integración se efectúa sobre los grados de libertad microscópicos. Si el sistema está dado por un campo $\varphi(\mathbf{x})$, entonces²

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta H[\varphi]} \quad (2.15)$$

En presencia de una **fente** $J(\mathbf{x})$, también llamado **campo externo**, la función de partición se transforma en una funcional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -H[\varphi] + \int d^d x \varphi(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.16)$$

Cuando el modelo se aplica a un sistema ferromagnético, $\varphi(\mathbf{x})$ representa la densidad de momento magnético y $J(\mathbf{x})$ un campo magnético aplicado sobre el sistema.

El logaritmo de la función de partición es, a menos de factores multiplicativos, la energía

² De aquí en adelante absorbemos el factor β de forma de que la temperatura no aparezca explícitamente en Z .

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

libre de Helmholtz

$$F[J] \equiv \log Z[J], \quad (2.17)$$

y las funciones de correlación conexas se obtienen de sus derivadas funcionales con respecto a J (ver sección 1.3). En particular, el valor esperado del campo $\varphi(x)$ es

$$\phi_J(x) \equiv \langle \varphi(x) \rangle_J = \frac{\delta F}{\delta J(x)} \quad (2.18)$$

Partiendo de $F[J]$, es posible determinar una funcional de $\phi(x)$ mediante una transformación de Legendre. La cantidad obtenida es³ la energía libre de Gibbs y le llamamos la **acción efectiva** $\Gamma[\phi]$:

$$\Gamma[\phi] \equiv -F[J] + \int d^d x \phi(x) J_\phi(x) \quad (2.19)$$

donde $J_\phi(x)$ viene de invertir (2.18). Varias cantidades macroscópicas se deducen directamente de la acción efectiva⁴ [26, 30, 32].

2.2.1. Acción eficaz

Teniendo en cuenta que en los fenómenos críticos las complicaciones aparecen debido a los efectos de fluctuaciones coherentes de larga distancia, se introduce una **acción eficaz** Γ_κ en la cual sólo son incluidas las fluctuaciones con momento $q^2 \gtrsim \kappa^2$. Esto es logrado mediante un *cutoff* infrarrojo (IR) en la integral funcional que define Γ , que suprime las fluctuaciones con número de onda $\lesssim \kappa$. En la práctica el *cutoff* IR es logrado dándole una “masa efectiva” $\sim \kappa$ a los modos lentos correspondientes a $q^2 \lesssim \kappa^2$. El valor κ^{-1} representa la escala de longitud hasta la que son tomadas en cuenta las fluctuaciones. Mientras κ sea suficientemente grande, Γ_κ será próxima al Hamiltoniano microscópico. Al disminuir κ , más y más fluctuaciones de momento $q^2 \gtrsim \kappa^2$ son incluidas, y por ende se logra explorar la teoría en escalas de distancia cada vez mayores. La acción eficaz puede ser vista como la acción efectiva para campos promediados sobre un volumen finito de tamaño $\sim \kappa^{-d}$.

³ A menos de factores multiplicativos que dependen suavemente de la temperatura T .

⁴ La función de partición Z o los potenciales F y Γ encapsulan toda la información mecánica-estadística del sistema. Por ejemplo, la densidad de energía de un sistema homogéneo de volumen V a temperatura T se puede hallar a partir de Γ como $u = g - T \frac{\partial g}{\partial T} - \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$ (donde $g = T\Gamma/V$ y μ es el potencial químico), etc. Γ incluye además *todas* las funciones de correlación.

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

Supondremos que la teoría **ya se encuentra renormalizada** en la escala Λ mediante los procedimientos de los métodos perturbativos y que por lo tanto no presenta divergencias del tipo UV. Asociamos Γ_Λ con el Hamiltoniano microscópico H correspondiente a esta escala, en la que no intervienen las fluctuaciones,

$$\Gamma_\Lambda = H \quad (\text{Hamiltoniano microscópico}) \quad (2.20)$$

Cuando $\kappa = 0$ evidentemente todas las fluctuaciones son consideradas, y por lo tanto la acción eficaz debe corresponder a la acción efectiva:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \Gamma_\kappa = \Gamma, \quad (2.21)$$

de manera que la acción eficaz permite interpolar entre la escala microscópica y la macroscópica a medida que κ disminuye.

Para ello, en la relación (2.16) se añade un término $\Delta H_\kappa[\varphi]$ al hamiltoniano H ,

$$F_\kappa[J] = \log Z_\kappa[J] = \log \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -H[\varphi] - \Delta H_\kappa[\varphi] + \int d^d x \varphi(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \right\} \quad (2.22)$$

donde

$$\Delta H_\kappa[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} R_\kappa(q) \varphi(-q) \varphi(q) \quad (2.23)$$

El factor $\exp(-\Delta H_\kappa[\varphi])$ se encarga de atenuar los modos larga distancia, correspondientes a un número de onda κ pequeño. La función $R_\kappa(q)$ es el perfil del **regulador infrarrojo**. Debe anularse cuando $\kappa \rightarrow 0$ y también cuando $q \gg \kappa$. Si $\kappa \rightarrow \Lambda$, entonces debe diverger (para q fijo). Esto asegura que $\Delta H_\kappa[\phi]$ tenga el comportamiento necesario para que se verifique (2.20) cuando $\kappa = \Lambda$ (como veremos más adelante).

Para $q^2 \ll \kappa^2$, el regulador se debe comportar como $R_\kappa(q) \sim \kappa^2$ (o mayor). Como $\Delta H_\kappa[\varphi]$ es cuadrático en los campos, directamente se puede interpretar que los modos correspondientes adquieren una masa efectiva $\sim \kappa$, y por lo tanto están fuertemente suprimidos – regulados – en la integral funcional. Mientras tanto los modos con $q^2 \gg \kappa^2$ no son afectados ya que el regulador se anula en este régimen.

La elección precisa de la función reguladora es arbitraria. Hay algunas observaciones a tener en cuenta:

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

- Si bien se espera que las simetrías del modelo sean recuperadas cuando $\kappa \rightarrow 0$ independientemente de la elección de $R_\kappa(q)$, es preferible utilizar un regulador que ya las posea. Si esto es posible, la teoría efectiva posee las simetrías para todo valor de κ .
- Los resultados del NPRG son en principio independientes del regulador escogido. Pero al efectuar aproximaciones y al resolver numéricamente el problema hay que considerar que diferentes reguladores pueden conducir a resultados algo diferentes.

En la figura 2.1 se muestra el comportamiento cualitativo de $R_\kappa(q)$.

En lo que sigue, el regulador elegido para trabajar es

$$R_\kappa(l) \equiv Z_\kappa(k^2 - l^2)\Theta(k^2 - l^2) \quad (2.24)$$

Θ es el escalón unitario; el factor Z_κ proviene de la renormalización del campo (no confundir con la función de partición) y depende del exponente η (se explicará más adelante y en el apéndice B).

Esta es el **regulador de Litim** [29]. Su forma se muestra en la figura 2.2. Notemos que $R_\kappa(q)$ es estrictamente cero si $q^2 \geq \kappa^2$.

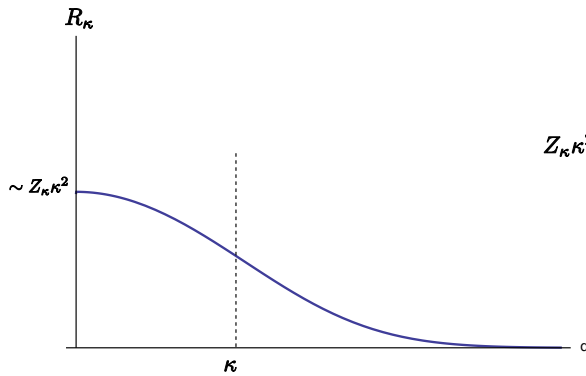


Fig. 2.1.-Regulador infrarrojo genérico.

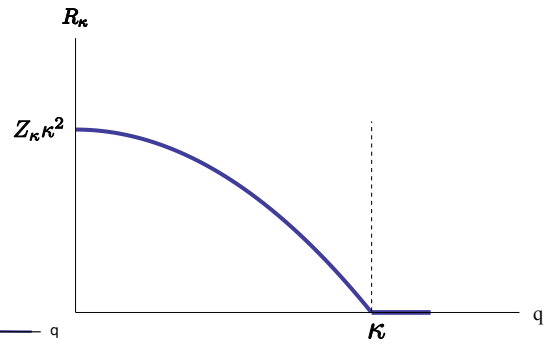


Fig. 2.2.-Regulador de Litim

Esta función se eligió porque tiene la virtud de que posibilita, más adelante, realizar algunos cálculos analíticos en forma cerrada y es muy simple de implementar en un programa numérico (sección 2.4 y apéndice F). Por otro lado, el regulador de Litim tiene el inconveniente de que es una función no analítica en $q^2 = \kappa^2$, ya que su derivada no está definida en ese punto. Entre otras, una consecuencia de la no analiticidad es

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

que da lugar a términos en las ecuaciones de flujo que dependen de potencias no analíticas de p (sólo deberían aparecer potencias de p^2). Uno debe entonces utilizar este regulador con cautela. Para el trabajo de esta tesis, la posibilidad de llevar adelante varios cálculos analíticos no es menospreciable, desde un punto de vista numérico. Para este trabajo, las no analiticidades que provienen del regulador de Litim no son un problema, dado que se manifiestan en los órdenes superiores de las aproximaciones.

En Morris y Tighe [29] se considera una familia de reguladores dependiendo de un parámetro y se estudia el impacto que tiene sobre los resultados.

La acción eficaz se define a través de una transformada de Legendre modificada de $F_\kappa[J]$:

$$\Gamma_\kappa[\phi] \equiv -F_\kappa[J] + \int d^d x J(x)\phi(x) - \Delta H_\kappa[\phi] \quad (2.25)$$

donde $\phi(x)$ es el valor esperado del campo $\varphi(x)$ en presencia de $J(x)$ y de $\Delta H_\kappa[\varphi]$ (compárese con (2.19)). La razón de esta definición proviene de la siguiente observación. Si consideramos la derivada funcional con respecto a $\phi(x)$ tenemos la transformación inversa modificada

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma_\kappa}{\delta \phi(x)} + \int d^d y R_\kappa(x-y)\phi(y). \quad (2.26)$$

Tomamos la exponencial de la expresión (2.22) para $F_\kappa[J]$ y sustituimos lo anterior, encontrando

$$e^{-\Gamma_\kappa[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-H[\varphi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma_\kappa}{\delta \phi(x)} \Delta\varphi(x)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta\varphi(x) R_\kappa(x-y) \Delta\varphi(y)\right) \quad (2.27)$$

donde $\Delta\varphi(x) \equiv \varphi(x) - \phi(x)$ es la diferencia entre el campo y su valor medio. En vista del comportamiento divergente de $R_\kappa(q)$ cuando $\kappa \rightarrow \Lambda$, el último factor en la expresión anterior se comporta como una delta funcional en este régimen,

$$e^{-\frac{1}{2} \int \Delta\varphi R_\Lambda \Delta\varphi} \sim \delta(\Delta\varphi),$$

(esto implica que $\varphi(x) \rightarrow \phi(x)$). Entonces, el resultado que tenemos es

$$e^{-\Gamma_\kappa[\phi]} \rightarrow e^{-H[\phi]} \quad \text{cuando } \kappa \rightarrow \Lambda \quad (2.28)$$

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

Por lo tanto la adición del término $\Delta H_\kappa[\phi]$ en la definición de Γ_κ es importante para preservar la condición $\Gamma_\Lambda[\phi] = H[\phi]$ (ver por ejemplo Delamotte [16], Berges, Tetradis y Wetterich [6]), mientras que no cambia el resultado $\Gamma_\kappa \rightarrow \Gamma$ cuando $\kappa \rightarrow 0$.

2.2.2. Ecuación Exacta

Derivemos la **ecuación de flujo** para la acción efectiva. Para ello consideremos

$$\hat{\Gamma}_\kappa[\phi] \equiv \Gamma_\kappa[\phi] + \Delta H_\kappa[\phi] = -F_\kappa[J] + \int d^d x J(x) \phi(x). \quad (2.29)$$

con $J = J_\kappa(\phi)$. Derivamos respecto a κ y obtenemos (ver apéndice C para una breve reseña del cálculo con funcionales)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \hat{\Gamma}_\kappa[\phi] \right|_\phi = - \left(\frac{\partial F_\kappa[J]}{\partial \kappa} \right)_J - \int d^d x \frac{\delta F_\kappa}{\delta J(x)} \frac{\partial J(x)}{\partial \kappa} + \int d^d x \phi(x) \frac{\partial J(x)}{\partial \kappa} \quad (2.30)$$

Los últimos dos términos se cancelan entre sí en virtud de que $\phi(x) = \delta F_\kappa / \delta J(x)$. De (2.22) la derivada de F_κ es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_\kappa}{\partial \kappa} &= \frac{1}{Z_\kappa} \int \mathcal{D}\varphi \frac{\partial \Delta H_\kappa[\varphi]}{\partial \kappa} e^{-H[\varphi] - \Delta H_\kappa[\varphi] + \int_x \varphi(x) J(x)} \\ &\equiv \left\langle \frac{\partial \Delta H_\kappa[\varphi]}{\partial \kappa} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \varphi(x) \frac{\partial R_\kappa(x, y)}{\partial \kappa} \varphi(y) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $R_\kappa(x, y)$ corresponde a la función regulador en el espacio de posiciones⁵:

$$\int d^d x d^d y R_\kappa(x, y) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} = R_\kappa(p) \delta^{(d)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \equiv R_\kappa(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (2.32)$$

(esta última identidad para el regulador se considera sólo si el sistema es invariante por traslaciones). Se usó que en la definición de F_κ sólo R_κ presenta una dependencia en κ .

⁵ Cuidado con el flagrante abuso de notación al llamar de la misma manera a las funciones $R_\kappa(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $R_\kappa(p)$ y $R_\kappa(x, y)$.

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} F_{\kappa}^{(2)}(x, y) &\equiv \frac{\delta^2 F_{\kappa}}{\delta J(x) \delta J(y)} = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle \\ &= \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \phi(x) \phi(y) \end{aligned} \quad (2.33)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \kappa} \hat{\Gamma}_{\kappa}[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \left\{ \frac{\partial R_{\kappa}(x, y)}{\partial \kappa} \frac{\delta^2 F_{\kappa}}{\delta J(x) \delta J(y)} + \phi(x) \frac{\partial R_{\kappa}(x, y)}{\partial \kappa} \phi(y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \left\{ \frac{\partial R_{\kappa}(x, y)}{\partial \kappa} F^{(2)}(x, y) \right\} + \frac{\partial \Delta H_{\kappa}}{\partial \kappa}[\phi]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Con esto resulta

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} \Gamma_{\kappa}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \left\{ \frac{\partial R_{\kappa}(x, y)}{\partial \kappa} F^{(2)}(x, y) \right\} \quad (2.35)$$

Por último usamos que $\delta^2 \hat{\Gamma} / \delta \phi(x) \delta \phi(y) = \delta J(x) / \delta \phi(y)$ es el inverso, en el sentido de operadores, de $\delta^2 F_{\kappa} / \delta J(x) \delta J(y) = \delta \phi(x) / \delta J(y)$, es decir:

$$\begin{aligned} \delta^{(d)}(x - z) &= \int d^d y F^{(2)}(x, y) \left[\frac{\delta^2 \hat{\Gamma}_{\kappa}[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(z)} \right] \\ &= \int d^d y F^{(2)}(x, y) \left[\frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(z)} (\Gamma_{\kappa}[\phi] + \Delta H_{\kappa}[\phi]) \right] \\ &= \int d^d y F^{(2)}(x, y) (\Gamma_{\kappa}^{(2)} + R_{\kappa})(y, z) \end{aligned} \quad (2.36)$$

En el espacio de impulsos, usando la transformada de Fourier

$$\check{\Gamma}_{\kappa}^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \equiv \int d^d x_1 \dots d^d x_n e^{-i(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{p}_n)} \frac{\delta^n \Gamma_{\kappa}[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}_1) \dots \delta \phi(\mathbf{x}_n)} \quad (2.37)$$

llegamos a la ecuación del grupo de renormalización no perturbativo:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \kappa} \Gamma_{\kappa}[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\partial R_{\kappa}(q)}{\partial \kappa} \left[\check{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + R_{\kappa}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right]^{-1}} \quad (2.38)$$

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

Esta ecuación es **exacta**. Describe la dependencia de la escala κ de Γ_κ en términos del **propagador promedio** inverso $\check{\Gamma}_\kappa^{(2)}$.

El lado derecho de (2.38) puede representarse con un diagrama similar a los de los métodos perturbativos (diagramas de Feynman), como se muestra en la figura 2.3. Si el sistema posee invariancia por traslaciones, lo cual sucede si evaluamos en un campo uniforme, entonces se aplica la conservación del impulso en todos los puntos. Extraemos una delta de Dirac de las funciones de correlación, mediante

$$\check{\Gamma}_\kappa^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|_{\text{inv. tras.}} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n) \Gamma_\kappa^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \quad (2.39)$$

El **propagador** $G_\kappa^{(2)}(q) \equiv [\Gamma_\kappa^{(2)}(q) + R_\kappa(q)]^{-1}$ se simboliza por una línea y el factor $\partial_\kappa R$ por el círculo $\otimes$. Como es habitual, se integra sobre los momentos internos.

En el diagrama del flujo de Γ_κ , ¡el único momento interno es q ! En contraste, en un desarrollo perturbativo, la cantidad de momentos internos aumenta progresivamente a medida que se desarrolla a mayor orden. En los diagramas de Feynman correspondientes, cada momento interno da lugar a un bucle o *loop*⁶. La ecuación del NPRG puede equipararse por lo tanto a un diagrama a un *loop* del desarrollo perturbativo. Pero mientras que este último es un resultado aproximado, que corresponde a la primera corrección sobre la teoría libre, el resultado del NPRG es *exacto*. El resultado perturbativo a un *loop* para Γ_κ es [6]

$$\Gamma_\kappa[\varphi] = H[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(H^{(2)}[\varphi] + R_\kappa \right) \quad \text{resultado perturbativo a 1 loop} \quad (2.40)$$

(la operación de traza Tr es una forma de representar la integración necesaria). $H^{(2)}[\varphi]$ es la segunda derivada funcional de $H[\varphi]$. Una vez tomada la derivada respecto a κ , se encuentra una ecuación similar a (2.38),

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_\kappa R_\kappa \left(H^{(2)}[\varphi] + R_\kappa \right)^{-1} \right]. \quad (2.41)$$

La sustitución $H^{(2)} \rightarrow \Gamma_\kappa^{(2)}$ transforma el resultado perturbativo en un resultado exacto,

⁶ Estrictamente, esto es cierto si se considera el desarrollo perturbativo en términos de los diagramas que no se pueden separar en subdiagramas al “cortar” un propagador. Estos diagramas son denominados 1-partícula-irreducibles, 1PI.

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

es decir

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_\kappa R_\kappa \left(\Gamma_\kappa^{(2)}[\varphi] + R_\kappa \right)^{-1} \right]$$

que no es otra que la ecuación (2.38).

Por otra parte, todos los resultados perturbativos pueden obtenerse fácilmente de la ecuación exacta del NPRG A orden 1 loop, basta con reemplazar los propagadores y funciones de correlación que surgen en la ecuación de $\Gamma_\kappa^{(2)}$ por los correspondientes derivados a partir de $H^{(2)}$, pero con constantes de acoplamiento dependientes de κ . Una vez que se desarrolla en las constantes de acoplamiento, se logra recuperar la teoría perturbativa a orden 1-loop [6].

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \partial_\kappa R_\kappa(q) \text{---} \\ \text{---} q \text{---} \text{---} \text{---} q \text{---} \\ \text{---} G_\kappa^{(2)}(q, -q) \text{---} \end{array}$$

Fig. 2.3.-Diagrama de la Ecuación de flujo para Γ_κ .

Es importante destacar, pese a su aspecto inocente, la notable complejidad de la ecuación (2.38). Γ_κ es una funcional que depende del campo ϕ y de la escala κ . La ecuación del NPRG da una relación integro-diferencial para la cual no existen herramientas matemáticas para determinar una solución general; la ecuación tiene toda la teoría 'adentro'. Por otro lado, como veremos a continuación, brinda un marco que posibilita derivar relaciones que sí pueden resolverse con aproximaciones *no perturbativas*.

Se puede encontrar una ecuación de flujo para $\Gamma_\kappa^{(2)} = \delta^2 \Gamma_\kappa / \delta \phi^2$ considerando las

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

derivadas de la ecuación (2.38) para Γ_κ . Esquemáticamente ⁷ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}}{\partial \kappa}(p, -p) &= \frac{\partial}{\partial \kappa} \frac{\delta^2 \Gamma_\kappa}{\delta \phi_{-p} \delta \phi_p} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_q \frac{\delta}{\delta \phi_{-p}} \left(\left[\Gamma_\kappa^{(2)} + R_\kappa \right]_{q,-q}^{-1} \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, -s) \left[\Gamma_\kappa^{(2)} + R_\kappa \right]_{-q,q}^{-1} \right) \\
 &= \int_q \partial_k R_q G_\kappa^{(2)}(q, -q) \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, -s) G_\kappa^{(2)}(-s, s) \Gamma_\kappa^{(3)}(-p, -q, s) G_\kappa^{(2)}(-q, q) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_q \partial_k G_\kappa^{(2)}(q, -q) \Gamma_\kappa^{(4)}(p, -p, q, -q) G_\kappa^{(2)}(-q, q)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

con

$$G_\kappa^{(2)}(q, -q) \equiv \left[\Gamma_\kappa^{(2)}(q, -q) + R_\kappa(q) \right]^{-1}.$$

y

$$s \equiv -p - q.$$

Esta relación muestra que el flujo de la función $\Gamma_\kappa^{(2)}$ depende de aquel de las funciones de mayor orden $\Gamma_\kappa^{(3)}$ y $\Gamma_\kappa^{(4)}$. Los diagramas correspondientes a esta ecuación se muestran en la figura 2.4. Los vértices donde se intersectan las líneas de los propagadores corresponden a las funciones de correlación a tres y cuatro puntos. Prosiguiendo con las derivaciones se puede ver que el resultado general es que la ecuación de flujo para la función $\Gamma_\kappa^{(n)}$ involucra las funciones $\Gamma_\kappa^{(n+1)}$ y $\Gamma_\kappa^{(n+2)}$. La dificultad original de la ecuación del NPRG se traduce en que las funciones de correlación vienen dadas por una “torre infinita” de ecuaciones integro-diferenciales, que debería ser resuelta simultáneamente para todo valor de n .

Gracias a la aparición de la función R_κ , la integración en q en la ecuación (2.38) es finita tanto en el régimen infrarrojo como en el ultravioleta, sin aparición de divergencias. Para el IR, con $q^2 \ll \kappa^2$, el regulador fue escogido para que el propagador posea un “término de masa” adicional $R_\kappa \sim \kappa^2$,

$$G_\kappa^{(2)}(q, -q) = \left[\Gamma_\kappa^{(2)}(q, -q) + R_\kappa(q) \right]^{-1} \tag{2.43}$$

⁷En el apéndice C se da una derivación detallada de la ecuación. Se puede derivar “diagramáticamente” con respecto a $\phi(p)$. La derivada de un vértice/función de correlación con n “patas” es un vértice con $n + 1$ patas (el impulso p entra por la nueva pata). La derivada de una línea/propagador $G_\kappa^{(2)}(q)$, además de un signo negativo, produce un vértice con tres patas con los impulsos p, q y $s = |p + q|$, conectadas a dos propagadores de impulso q .

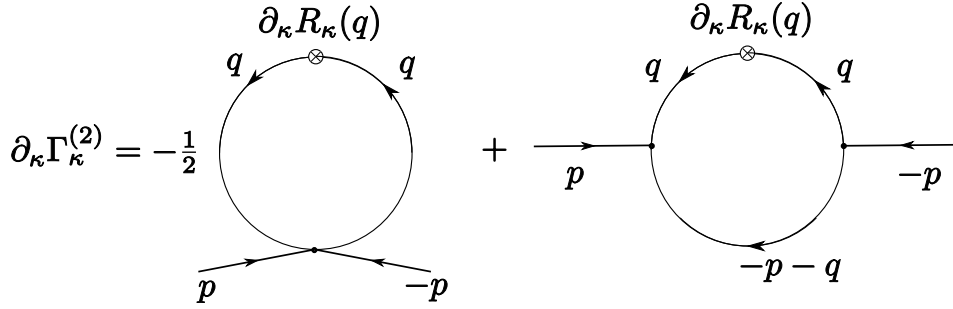


Fig. 2.4.-Diagramas de la ecuación de flujo del NPRG de la función de correlación a dos puntos.

(en una teoría estadística de campos, el propagador de una partícula (libre) de masa m es proporcional a $(q^2 + m^2)^{-1}$).

La masa efectiva evita que los modos de larga distancia aparezcan en el cálculo. Para estos modos, la ausencia de masa corresponde a una longitud de correlación divergente. Esta formulación es muy apropiada para tratar con teorías que en los métodos perturbativos presentan graves problemas en el infrarrojo. Las divergencias provenientes del régimen ultravioleta $q^2 \gg \kappa^2$ están suprimidas por la presencia del factor $\partial_\kappa R_\kappa$, que decae rápidamente en ese régimen (figura 2.5). Recordemos que la teoría de partida del NPRG ya se encuentra renormalizada. Una divergencia ultravioleta indicaría que los modos rápidos no se han integrado del todo al calcular Γ_κ .

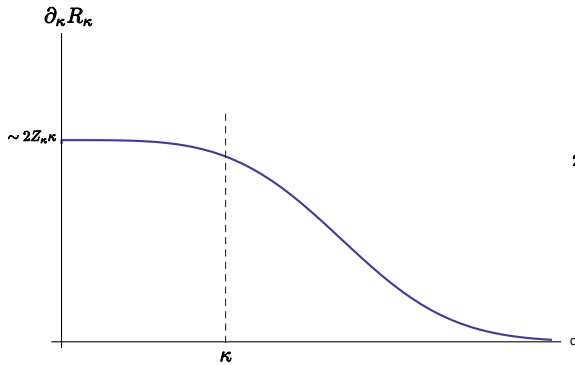


Fig. 2.5.-Derivada del regulador, $\partial_\kappa R_\kappa(q)$ (genérico)

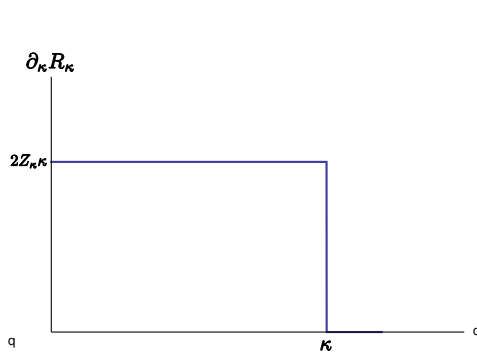


Fig. 2.6.-Derivada del regulador de Litim.

El efecto producido por el regulador es, para $\kappa \neq 0$, similar a colocar el sistema en una caja de tamaño $\sim \kappa^{-1}$. Esto previene la aparición de una transición de fase para $\kappa > 0$, y por consiguiente la acción Γ_κ no presenta singularidades.

2.2.3. Aproximaciones de Campo Local, LPA y LPA'

Una estrategia para atacar la ecuación del NPRG consiste en proponer un *ansatz* para la forma de Γ_κ que involucra sólo un número finito de derivadas del campo $\phi(x)$. Esto es posible gracias a que Γ_κ es regular para $\kappa > 0$. Para campos $\phi(x)$ que varíen lentamente –luego consideraremos un campo uniforme– las contribuciones principales vienen de las derivadas de menor orden y es viable un desarrollo en serie de potencias de $\nabla\phi(x)$, la *derivative expansion* o DE.

La aproximación más simple basada en la DE es la **aproximación de campo local** (*LPA*) en donde se plantea

$$\Gamma_\kappa^{LPA} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla\phi(x))^2 + V_\kappa(\phi(x)) \right\}. \quad (2.44)$$

$V_\kappa(\phi(x))$ es un potencial efectivo que respeta la simetría $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ y es suave como función de $\phi(x)$.

Esta aproximación resulta no ser suficiente para poder calcular todos los exponentes críticos con precisión. Por ejemplo, se obtiene $\eta^{LPA} = 0$. Una aproximación con mayor precisión es la llamada $O(\partial^2)$ o aproximación siguiente al dominante, en donde el *ansatz* para la acción es

$$\Gamma_\kappa^{(\partial^2)} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} Z_\kappa(\phi) (\nabla\phi(x))^2 + V_\kappa(\phi(x)) \right\}. \quad (2.45)$$

El próximo orden de aproximación incorpora los términos con $(\nabla\phi)^4$, y así sucesivamente.

La presencia del factor $Z_\kappa(\phi)$ conduce a un exponente η no trivial (ecuación (2.50) y apéndice B). En la práctica [12] ocurre que $Z_\kappa(\phi)$ varía lentamente con el valor de ϕ , lo que hace plausible una aproximación intermedia entre la *LPA* y la $O(\partial^2)$ a la que llamamos *LPA'*:

$$\Gamma_\kappa^{LPA'} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} Z_\kappa(\phi_0) (\nabla\phi(x))^2 + V_\kappa(\phi(x)) \right\}. \quad (2.46)$$

con $Z_\kappa = Z_\kappa(\phi_0)$, siendo ϕ_0 un valor fijo. La virtud de esta aproximación es que pese a su relativa sencillez permite posteriormente obtener valores para η (y los demás exponentes) que no están demasiado alejados de los valores exactos (obtenidos mediante técnicas mucho más complicadas). El factor Z_κ ya fue introducido en el regulador de Litim (2.24).

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

A pesar de que no es esencial en el NPRG, la aproximación LPA' numéricamente es un buen punto de partida, y da un punto de anclaje para hacer comparaciones con otros tipos de aproximaciones.

Observemos que para un campo homogéneo, el potencial es

$$V_\kappa(\phi) = \frac{\Gamma_\kappa[\phi]}{\mathcal{V}} \Big|_{\phi \text{ unif.}}, \quad (2.47)$$

siendo $\mathcal{V}$ es el volumen del espacio. La función de correlación a dos puntos, debe estar relacionada con la derivada segunda del potencial:

$$\mathcal{V} \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \phi) \Big|_{p=0} = \int d^d x d^d y \frac{\delta^2 \Gamma_\kappa}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi \text{ unif.}} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Big|_{p=0} = \frac{\partial^2 \Gamma_\kappa[\phi]}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi \text{ unif.}} \quad (2.48)$$

(el factor $\mathcal{V}$ en el lado izquierdo viene de $(2\pi)^d \delta^{(d)}(0)$). Concluimos que se satisface la relación

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p=0; \phi) = \frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial \phi^2} \quad (2.49)$$

Este es un resultado exacto y es importante que se cumpla independientemente de las aproximaciones que se realicen en cada caso.

El exponente crítico η está gobernado por

$$\boxed{\eta_\kappa = -\frac{\kappa}{Z_\kappa} \frac{\partial Z_\kappa}{\partial \kappa}; \quad \eta = \eta_\kappa \Big|_{\kappa \rightarrow 0}} \quad (2.50)$$

(ver apéndice B)

2.2.4. Ecuación para el potencial

Para un campo externo nulo, el valor medio del campo $\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle$ está dado por la condición

$$J = 0 = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.51)$$

y corresponde, por lo tanto, a la ubicación del mínimo del potencial. Cuando consideramos el flujo del NPRG y pasamos de la escala microscópica $\kappa = \Lambda$ a la escala macroscópica $\kappa \rightarrow 0$, el mínimo de V_κ tiene un flujo no trivial que debemos tomar en

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

cuenta..No obstante, se encuentra que las funciones de correlación son poco sensibles al valor de la situación precisa del mínimo [11].

Es conveniente usar

$$t \equiv \log \frac{\kappa}{\Lambda}. \quad (2.52)$$

como variable en lugar de κ . Si evaluamos (2.38) en un campo escalar $\phi(x)$ uniforme, obtenemos

$$\partial_t V_\kappa(\rho) = \frac{1}{2\mathcal{V}} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) \left[\Gamma_\kappa^{(2)}(q, q) + R_\kappa(q, q) \right]^{-1} \quad (2.53)$$

Usando la expansión (2.46), el potencial V_κ se relaciona con la función de correlación a través de

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(q, q') \Big|_{\phi \text{ unif.}} = \left(\frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial \phi^2} + Z_\kappa q^2 \right) (2\pi)^d \delta^{(d)}(q + q') \quad (2.54)$$

Sabiendo que $\delta^{(d)}(q = 0) = \mathcal{V}(2\pi)^{-d}$, la ecuación para el potencial en esta aproximación, resulta

$$\partial_t V_\kappa(\rho) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) G_\kappa^{LPA'}(q^2; \phi) \quad (2.55)$$

donde

$$G_\kappa^{LPA'}(q^2; \phi) = \left[\frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial \phi^2} + Z_\kappa q^2 + R_\kappa(q) \right]^{-1} \quad (2.56)$$

La simetría $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ del problema sugiere la utilización de la variable

$$\rho \equiv \frac{1}{2} \phi^2. \quad (2.57)$$

Resulta conveniente escribir las ecuaciones provenientes del NPRG en términos de cantidades **adimensionadas**, de manera que no aparezcan explícitamente las escalas κ y Λ . Esto, conjuntamente con la existencia de un punto fijo en el grupo de renormalización hace manifiesta la invarianza de escala en la transición de fase. Extraer las dimensiones físicas corresponderá entonces a usar el “espaciado móvil de la red”

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

κ^{-1} como unidad de longitud. Esto es análogo a la dilatación de la unidad de longitud efectuada en el proceso de formación de bloques de espín, visto en el capítulo anterior.

Además esto ayuda a que no haya enormes cambios, numéricamente, cuando κ varía de la escala microscópica Λ hasta la escala física $\kappa = 0$. Entonces, definimos las cantidades (en dimensión del espacio d)

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \frac{Z_\kappa \kappa^{2-d}}{K_d} \rho \\ \tilde{\mu}^2 &= \frac{1}{Z_\kappa \kappa^2} \frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial \phi^2} \\ \chi_\kappa(\tilde{\rho}) &= \frac{Z_\kappa(\rho)}{Z_\kappa}\end{aligned}\tag{2.58}$$

donde $K_d^{-1} = d2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$ es un factor numérico conveniente para absorber la parte angular de las integrales. En $d = 3$ vale $K_3 = 1/6\pi^2 \cong 0,017$.

Aunque en la aproximación LPA' $Z_\kappa \equiv Z_\kappa(\rho_0)$ es independiente de ρ , es esencial considerar el flujo correspondiente a $Z_\kappa(\rho)$ para mantener la coherencia con el límite $p \rightarrow 0$ y, por lo tanto, preservar el comportamiento de escala correcto de $\Gamma_\kappa^{(2)}(p, \rho)$ en el régimen IR. De ahí que se introduzca la función χ_κ .

La ecuación se puede encontrar al considerar función $\Sigma_\kappa(p; \phi)$

$$\Sigma_\kappa(p; \phi) \equiv \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \phi) - (\Gamma_\kappa^{(2)}(p=0; \phi) + p^2)\tag{2.59}$$

(esta función es análoga a una autoenergía[33] $\Gamma^{(2)}(p; \phi) - H^{(2)}(p; \phi)$) y observando que

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p; \phi) - \Gamma_\kappa^{(2)}(p=0; \phi) \cong p^2 Z_\kappa(\rho_0) \quad \text{cuando } p \rightarrow 0.\tag{2.60}$$

Para encontrar el potencial se deben resolver simultáneamente el flujo de $\tilde{\mu}_\kappa^2$, χ_κ y η_κ . Utilizando una forma definida del regulador, como en (2.24), se pueden efectuar las integrales en q provenientes de (2.46). Para ese caso se encuentra, tomando $\rho_0 = 0$,

2.2. GRUPO DE RENORMALIZACIÓN NO PERTURBATIVO

el sistema de ecuaciones acopladas

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mu}^2 = - (2 - \eta_\kappa) \tilde{\mu}^2 + (d - 2 + \eta_\kappa) \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2 - \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{d+2}\right) \left(\frac{\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2 + 2\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}}^2 \tilde{\mu}^2}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} - \frac{4\tilde{\rho}(\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2)^2}{(1 + \tilde{\mu}^2)^3} \right) \\ \partial_t \chi_\kappa = \eta_\kappa + (d - 2 + \eta_\kappa) \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \chi_\kappa - 2\tilde{\rho} \frac{(\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2)^2}{(1 + \tilde{\mu}^2)^4} + \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{d+2}\right) \left(\frac{8\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \chi \partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2}{(1 + \tilde{\mu}^2)^3} - \frac{\partial_{\tilde{\rho}} \chi_\kappa + 2\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}}^2 \chi_\kappa}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \right) \\ \eta_\kappa = \frac{\partial_{\tilde{\rho}} \chi_\kappa}{\partial_{\tilde{\rho}} \chi_\kappa / (d+2) + (1 + \tilde{\mu}^2)^2} \Big|_{\tilde{\rho}=0} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

La condición inicial para el potencial en $t = 0$ (o sea $\kappa = \Lambda$, ec. (2.52)) viene de asumir el modelo φ^4 con un campo uniforme en la escala microscópica (ec. (2.1)); las de $\chi_\kappa(\tilde{\rho})$ y η_κ son triviales puesto que $Z_{\kappa=\Lambda}(\rho) = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\Lambda(\phi) = \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{u_0}{4!} \phi^4 = r_0 \rho + \frac{u_0}{6} \rho^2 \\ \chi_\Lambda(\tilde{\rho}) = 1 \\ \eta_\Lambda = 0 \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Cada pareja de las constantes de acoplamiento r_0 y u_0 , o el de sus contrapartes adimensionados

$$\hat{r} = \Lambda^{-2} r_0 \quad \text{y} \quad \hat{u} = K_d \Lambda^{d-4} u_0, \quad (2.63)$$

definen una teoría microscópica distinta. Más adelante nos va a interesar estudiar el comportamiento para distintos valores de intensidad del acoplamiento en la teoría crítica. Para el modelo en consideración hay un único parámetro relevante si el potencial es simétrico. Entonces para estar próximos a la transición de fase, para cada valor de u_0 bastará ajustar el valor de r_0 de manera de situarnos lo más próximo posible a la superficie crítica (ver figura 1.9). Recordemos que la temperatura del sistema T fue absorbida en las constantes de acoplamiento al redefinir el hamiltoneano del sistema original.

Para saber que efectivamente estamos en la superficie crítica, lo que tenemos que notar es que sobre ésta el flujo del potencial adimensionado debe alcanzar un valor estacionario al aproximarnos a $\kappa = 0$. Por lo tanto, en general esperamos que el potencial

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

adimensionado tenga una rápida evolución en un entorno de $t = 0$ y que asintóticamente vaya al valor constante de punto fijo, para $t \rightarrow -\infty$. Sin embargo, este punto fijo es repulsivo, y por consiguiente para observar el comportamiento mencionado sería necesario situarse **exactamente** sobre la superficie crítica. Esto significa que se debe ajustar el valor de r_0 con una precisión ilimitada, lo cual resulta imposible (ya sea numérica o experimentalmente). La situación usual es que para un valor dado de u_0 , se logran determinar dos valores próximos $r_<$ y $r_>$ (separados por una distancia que depende de la precisión numérica) que llevan al modelo a las proximidades de la superficie crítica. El flujo del potencial es, al principio, similar al que se esperaría en el caso de estar sobre ella. Pero a partir de cierto punto, el flujo se comienza a separar del punto crítico y es atraído por los puntos fijos de alta o baja temperatura, según estemos en la fase rota o en la fase simétrica (ver fig.2.7)

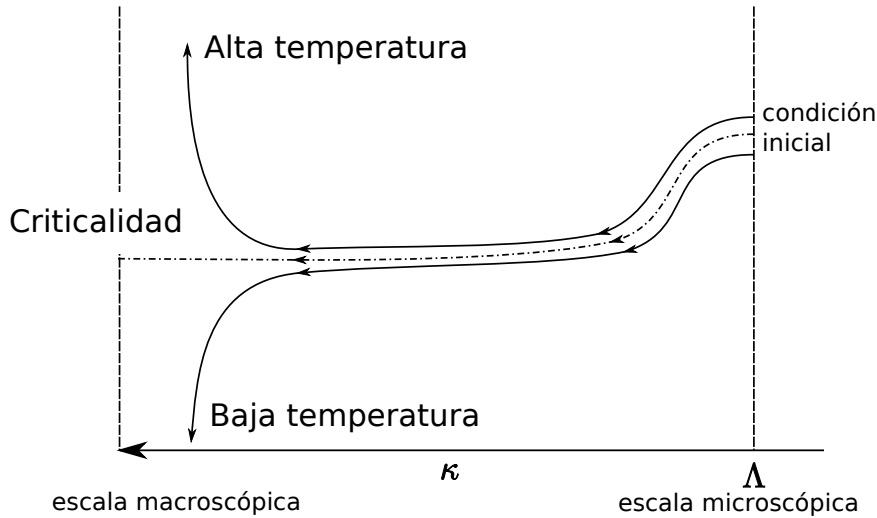


Fig. 2.7.-Flujo característico de las funciones de correlación o sus derivadas.

El flujo es resuelto a partir de una condición inicial especificada en la escala microscópica Λ . En la acción efectiva solo intervienen las fluctuaciones de escalas entre κ y Λ . La variable κ recorre todas las escalas intermedias hasta llegar a cero, momento en el que todas las fluctuaciones se toman en cuenta. De acuerdo a si el sistema se encuentra por encima o por debajo de la condición de criticalidad, el flujo es atraído por el punto fijo de alta o baja temperatura (no respectivamente ya que en general eso depende de cuál sea parámetro de orden, qué función se está estudiando, etc.). Vale la pena comparar con la figura 1.9.

No obstante, si el “tiempo” que el sistema permanece cerca de la superficie crítica es suficiente, se pueden extraer los valores los exponentes críticos (para lo cual deben determinarse $r_>$ o $r_<$).

2.3. Método BMW

En el cálculo de las funciones de correlación, cuando los impulsos involucrados son muy grandes los métodos perturbativos tradicionales dan resultados bastante buenos. Por otra parte, esperamos que aproximaciones del NPRG basadas en la DE sean apropiadas cuando los impulsos externos que aparecen en las funciones de correlación sean suficientemente pequeños. Más precisamente, una vez que $\kappa \rightarrow 0$, los impulsos deben satisfacer $p \lesssim m$, siendo m la menor de las “masas” en el modelo. En el régimen crítico, $m = \xi^{-1} = 0$, y la DE sólo permite calcular las funciones de correlación y sus derivadas en $p = 0$.

Para el cálculo de las funciones de correlación con impulsos arbitrarios es necesario un tipo de aproximación diferente. Digamos que queremos determinar la dependencia de la función de correlación $\Gamma_\kappa^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ en los impulsos $p_1, \dots, p_n$. Como mencionamos en la sección 2.2.2, la ecuación de flujo para $\Gamma_\kappa^{(n)}$ depende de las funciones $\Gamma_\kappa^{(n+1)}$ y $\Gamma_\kappa^{(n+2)}$. Estas aparecen evaluadas en impulsos que son combinaciones de los $p_1, \dots, p_n$ y q , el momento interno de la integral (la variable de integración).

El método propuesto por Blaizot-Méndez-Wschebor [8], BMW, explota la presencia de la derivada del regulador $\partial_t R_\kappa(q)$ en las integrales, que es una función que tiene valores apreciables sólo para $q \lesssim \kappa$. En el marco del NPRG, las funciones de correlación son suficientemente suaves para $\kappa > 0$ como para que sea razonable pensar en un desarrollo de las funciones de correlación en torno a $q = 0$. Al más bajo orden, se tiene por ejemplo

$$\Gamma_\kappa^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n - q, p_{n+1} + q) \cong \Gamma_\kappa^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \quad (2.64)$$

Observemos que esta aproximación en el caso de $p_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$ es la base de la DE, que se sabe que da buenos resultados en ese caso. Si los impulsos son mayores, la aproximación es cada vez mejor, volviéndose trivial cuando todos los p_i son mucho mayores que κ pues $q \lesssim \kappa$.

Al evaluar en un campo uniforme φ , la invarianza por traslaciones es preservada. Como consecuencia, la suma de los impulsos en cada función de correlación debe ser nula (p.ej. $p_1 + \dots + p_n = 0$). Sabemos que las funciones $\Gamma_\kappa^{(n+1)}$ y $\Gamma_\kappa^{(n+2)}$ aparecen en la ecuación de $\Gamma_\kappa^{(n)}$ bajo la integración de un único impulso q . Los diagramas en los que intervienen son como se muestran en la figura 2.8. Dado que son diagramas a un *loop* 1PI, si aproximamos $q \sim 0$, concluimos que debe anularse (al menos) uno de los $n + 1$

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

impulsos en $\Gamma^{(n+1)}$ y dos de los $n+2$ impulsos en $\Gamma^{(n+2)}$ (o sea, los que corresponden a q).

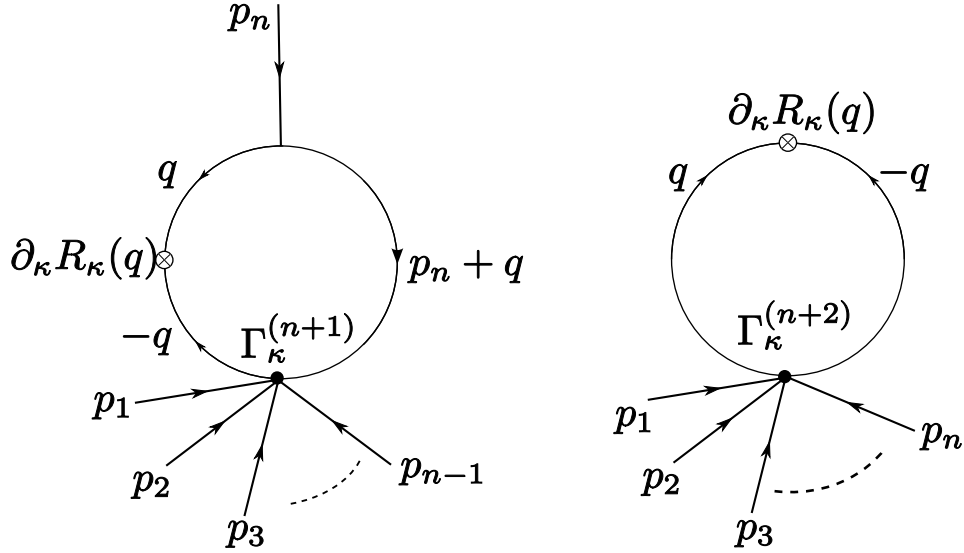


Fig. 2.8.-Diagramas que aparecen en la ecuación de flujo de la función a n puntos en los que intervienen las funciones a $n+1$ y $n+2$ puntos.

Hay n impulsos externos. En (a) uno de los impulsos en el vértice $\Gamma^{(n+1)}$ debe ser q . En (b), en el vértice $\Gamma^{(n+2)}$ dos de los impulsos son q y $-q$.

Luego, en presencia de un campo externo uniforme, se puede vincular una función de orden $n+1$ con uno de sus impulsos nulo con la derivada de la función de correlación de orden n con respecto al campo,

$$\Gamma_{\kappa}^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1} = 0; \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi) \quad (2.65)$$

(en el apéndice E se prueba esta relación)

Entonces, en definitiva, el método BMW consiste en considerar un campo externo y, en la ecuación de flujo para $\Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi)$ efectuar las sustituciones sobre los vértices

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa}^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n - q, q; \phi) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi) \\ \Gamma_{\kappa}^{(n+2)}(p_1, \dots, p_n, -q, q; \phi) &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi) \end{aligned} \quad (2.66)$$

En este esquema, los propagadores $G_{\kappa}^{(2)}$ no llevan aproximaciones (no obstante, posteriormente encontraremos útil utilizar la aproximación LPA' para $G_{\kappa}^{(2)}$).

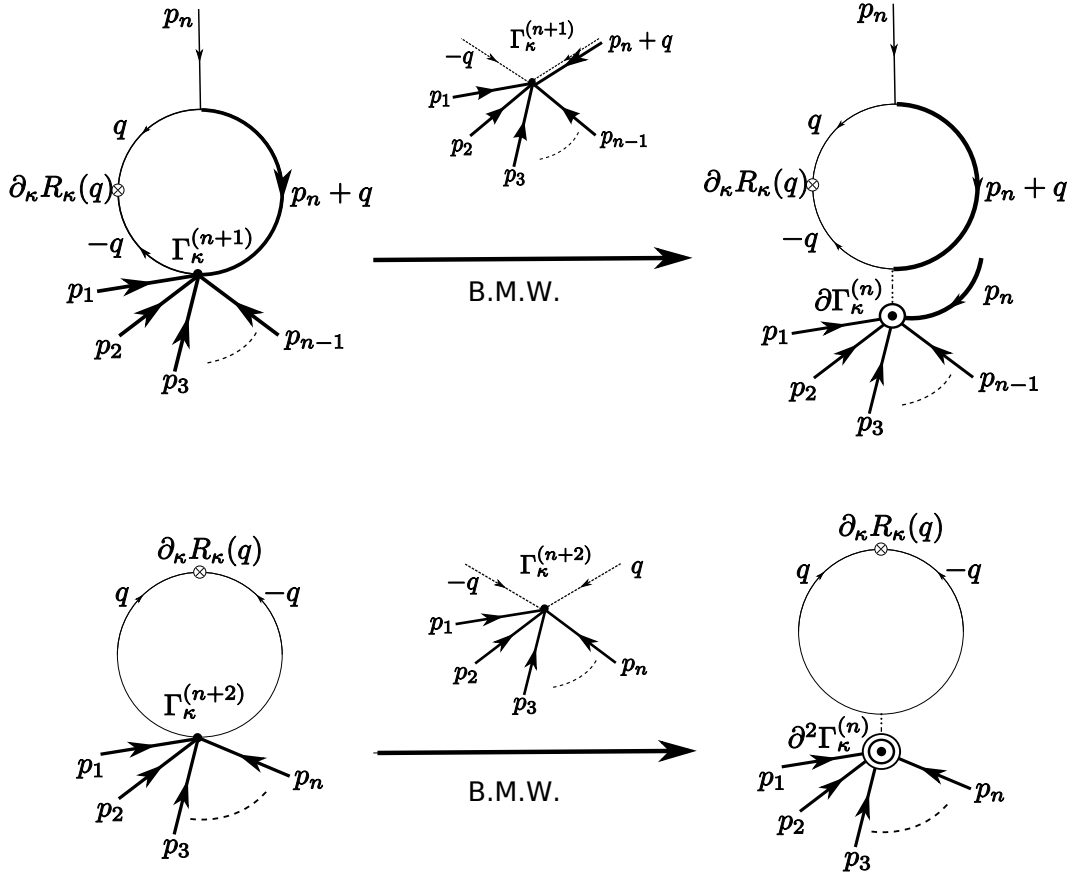


Fig. 2.9.-Representación de la transformación de los vértices en el esquema BMW
 Los valores del impulso interno q están controlados por la presencia de la derivada del regulador. Por lo tanto es aplicable la aproximación 2.66.

Entonces mediante esta aproximación se pueden resolver las ecuaciones de flujo (acopladas) de las funciones de correlación hasta el orden n . La aproximación se realiza sólo en las ecuaciones de las funciones de orden $n - 1$ y n . La precisión del cálculo aumentará cuando la aproximación se efectúe sobre la función de correlación de cada vez mayor orden. El orden dominante (LO) corresponde a aproximar las funciones a 3 y 4 puntos en la ecuación de la función a 2 puntos, y el “sistema” de ecuaciones está formado por esta última; en el orden siguiente (NLO), se aproximan las funciones de 5 y 6 puntos que aparecen en las ecuaciones para las funciones a 3 y 4 puntos, y el sistema está formado por la ecuación de la función a 2 puntos (ahora exacta) y las de las funciones a 3 y 4 puntos (con la aproximación BMW), y así sucesivamente.

Con el orden más bajo de la aproximación - sobre la función $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ - los resultados obte-

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

Orden del método	Ec. exacta para la función de orden:	Ec. aprox. para la función de orden:	Se aproximan las funciones de orden:
Orden principal	—	2	3,4
Orden siguiente al principal	2	—	—
	—	3	—
	—	4	5,6
Orden siguiente al siguiente	2	—	—
	3	—	—
	4	—	—
	—	5	—
	—	6	7,8
...	...	...	...

Tabla 2.1.-Ordenes progresivos en el método BMW para estudiar la jerarquía de las ecuaciones del NPRG

nidos para los exponentes críticos y otras cantidades pueden ya ser comparables a los que se encuentran con las técnicas tradicionales. En la tabla 2.4 se muestran algunos valores representativos.

Esto que indica que las correcciones introducidas por los órdenes posteriores deben ser pequeñas. El costo de cómputo numérico del método BMW es sustancialmente inferior en comparación con otros métodos numéricos, como simulaciones Monte-Carlo. Los exponentes críticos pueden determinarse con una computadora de escritorio ordinaria en unas pocas horas (según la precisión del cálculo exigida), mientras que una simulación de Monte-Carlo de alta precisión implica una *granja* de varios computadores trabajando en paralelo durante varios días (como mínimo)[2, 31].

Aunque el planteo aquí presentado se hizo para un campo ϕ escalar en un espacio euclídeo, se puede generalizar a teorías de campo más complicadas.

2.4. El orden dominante de la función a dos puntos (LO).

La primer aproximación en el método BMW, el orden dominante, consiste en aplicar (2.66) a la ecuación de flujo 2.67 para la función de correlación a dos puntos $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ en

2.4. EL ORDEN DOMINANTE DE LA FUNCIÓN A DOS PUNTOS (LO).

presencia de un campo uniforme ϕ

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_\kappa^{(2)}(p, -p; \phi) = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) G(q)^2 \Gamma_\kappa^{(4)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi) \\ & + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) G(q)^2 G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left(\Gamma_\kappa^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}; \phi) \right)^2, \end{aligned} \quad (2.67)$$

(con $G(q) \equiv G_\kappa^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi) = [\Gamma_\kappa^{(2)}(q, -q; \phi) + R_\kappa(q)]^{-1}$). Esta es la ecuación de flujo exacta derivada de la ecuación del NPRG (2.38). Utilizando

$$\begin{aligned} \Gamma_\kappa^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}; \phi) & \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_\kappa^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi) \\ \Gamma_\kappa^{(4)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}; \phi) & \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Gamma_\kappa^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}; \phi) \end{aligned} \quad (2.68)$$

la ecuación de flujo es

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_\kappa^{(2)}(p, -p; \phi) \Big|_{BMW} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) (G(q))^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Gamma_\kappa^{(2)}(p, -p; \phi) \\ & + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) (G(q))^2 G(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_\kappa^{(2)}(p, -p; \phi) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.69)$$

Como resultado de la aproximación aparece una simplificación adicional: las derivadas de la función de correlación se pueden poner fuera de la integración en q ,

$$\partial_t \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho) = J_d^{(3)}(p, \kappa; \rho) \left(\frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{2} I_d^{(2)}(\kappa; \rho) \frac{\partial^2 \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \phi)}{\partial \phi^2} \quad (2.70)$$

donde se definen las funciones

$$I_d^{(n)}(\rho; \phi) \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) [G(q; \rho)]^n \quad (2.71)$$

$$J_d^{(n)}(p, \rho; \phi) \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) G(\mathbf{p} + \mathbf{q}; \rho) [G(q; \rho)]^{n-1}. \quad (2.72)$$

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

En principio esta ecuación puede ser resuelta, pero para poder efectuar su implementación numérica es conveniente reformularla, debido a varias consideraciones importantes que afectan su comportamiento.

El cálculo de las integrales (2.71) y (2.72) implica conocer la función $G_{\kappa}^{(2)}(q)$ (y por lo tanto también $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(q)$ relacionada con su inversa, ec. (2.43)) para todos los valores del argumento q entre 0 e ∞ . Pero esta función debe ser obtenida a partir de la solución de (2.70). Para poder resolverla numéricamente, decidimos usar la aproximación LPA' (2.46) para los propagadores $G(q; \rho)$ es decir (ecuación 2.56)

$$G_{\kappa}^{(2)(LPA')}(q; \rho) = [Z_{\kappa} q^2 + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q = 0; \rho) + R_{\kappa}(q)]^{-1}. \quad (2.73)$$

Observamos que:

- Cuando $q \gtrsim \kappa$, $G_{\kappa}^{(2)}(q)$ decae rápidamente, aproximadamente como $\sim q^{-2}$, y la contribución a la integral en la ecuación de flujo está a su vez suprimida por el factor $\partial_t R_{\kappa}(q)$ en esa región.
- Para $q \lesssim \kappa$ es sabido que la LPA' es una buena aproximación [14].

Por estas observaciones, concluimos que si sustituimos $G_{\kappa}^{(2)}(q; \rho)$ por $G_{\kappa}^{(2)}(q; \rho)^{(LPA')}$ en las integrales, ya estamos considerando la contribución esencial del propagador, y entonces la sustitución está justificada. En Benitez, Blaizot, Chate, Delamotte, Mendez-Galain y Wschebor [4] se resuelve la ecuación BMW completa de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$, sin recurrir a la aproximación LPA' para el propagador.

En cuanto al propagador $G_{\kappa}^{(2)}(p + q)$ en (2.72), es fácil ver que se pueden hacer consideraciones análogas:

- Si $p \lesssim \kappa$, la integral sigue estando dominada por la región $q \sim \kappa$, gracias al factor $\partial_t R_{\kappa}(q)$ (como discutimos arriba).
- Si $p \gg \kappa$ (lo que eventualmente *siempre* ocurre ya que $\kappa \rightarrow 0$), entonces bajo la integral
 - o bien $|p + q| \gg \kappa$ y $G_{\kappa}^{(2)}(p + q) \sim |p + q|^{-2}$,
 - o bien $|p + q| \lesssim \kappa$, lo que sólo puede ocurrir si $q \approx p \gg \kappa$, y entonces el factor $\partial_t R_{\kappa}(q)$ hace que nuevamente la contribución de esta región sea insignificante.

2.4. EL ORDEN DOMINANTE DE LA FUNCIÓN A DOS PUNTOS (LO).

En todos los casos, la LPA' resulta una buena aproximación para la función $G_{\kappa}^{(2)}$.

Haciendo uso de la forma del regulador dada en (2.24) y la expresión para $G_{\kappa}^{(2)(LPA')}$, es posible [8] dar con la forma analítica de (2.71) y (al menos en $d = 3$) de (2.72). El resultado para $I_d^{(n)}$ es

$$I_d^{(n)}(\kappa, \rho) = 2K_d \frac{\kappa^{d+2-2n}}{Z_{\kappa}^{n-1}} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2(\tilde{\rho}))^n} \left(1 - \frac{\eta_{\kappa}}{d+2} \right) \quad (2.74)$$

La expresión para $J_d^{(n)}(p, \kappa; \rho)$ es considerablemente más compleja, debido a la dependencia en el impulso p . Por el momento sólo se ha resuelto en $d = 3$. Se estudia en el apéndice F para $d = 3$.

Vamos a aplicar dos aproximaciones independientes, la del método BMW por una parte y la LPA' para los propagadores. De manera que hay que tener especial cuidado para que no surjan inconsistencias; en particular debemos lograr que sea verificada la condición (2.49). Por ello encontramos que es conveniente estudiar el flujo de la diferencia

$$\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p, -p; \phi) \equiv \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p, -p; \phi) - \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0, 0; \phi) \quad (2.75)$$

y usar para $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0, 0; \phi)$ la expresión (2.49), es decir *imponemos explícitamente* la condición

$$\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0; \rho) = \frac{\partial^2 V_{\kappa}}{\partial \phi^2} \quad (2.49)$$

Para V_{κ} utilizamos el que surge de resolver el sistema (2.61).

La separación $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) = \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$ es análoga a la consideración de la *autoenergía* en teoría de campos [33]. Compárese con la ecuación (2.59). La introducción de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ es importante para separar el *bulk* de la función $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$, dado por $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0)$.

La ecuación correspondiente a $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p; \rho)$ proviene de considerar la diferencia entre (2.70) y la misma evaluada en $p = 0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p; \rho) = & J_d^{(3)}(p, \kappa; \rho) \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0; \rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p; \rho) \right]^2 \\ & - J_d^{(3)}(0, \kappa; \rho) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0; \rho) \right)^2 - \frac{1}{2} I_d^{(2)}(\kappa; \rho) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p; \rho) \end{aligned} \quad (2.76)$$

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

El paso siguiente es escribir la versión adimensionada de esta ecuación, para hacer manifiesta las propiedades de escala en el régimen crítico. Usamos la variable $\tilde{\rho}$ en lugar de ϕ (ec. (2.58)). Hay además otra escala física dada por el impulso p , que puede extraerse mediante el uso del impulso adimensionado $\tilde{p} \equiv p/\kappa$. Debemos observar que la utilización de cantidades adimensionadas produce la aparición de nuevas derivadas parciales, debido a que dependen implícitamente de κ . Dada cierta función $f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\rho, p} &= \left[\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \kappa} \bigg|_{p, \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \kappa} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \kappa} \bigg|_{p, \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \tilde{p}} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \tilde{p}} - \frac{\tilde{p}}{\kappa} \bigg|_{p, \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{p}} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \kappa} + \left(\frac{1}{Z_\kappa} \frac{\partial Z_\kappa}{\partial \kappa} + \frac{2-d}{\kappa} \right) \tilde{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} f(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \kappa) \right]_{\tilde{\rho}, \tilde{p}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

(usando (2.58) para $\tilde{\rho}$). En el lado derecho tenemos dos términos extra en comparación con el lado izquierdo (el cual puede expresarse en función de p y ρ).

Desde el punto de vista de la resolución numérica, es preferible tener una discretización de las variables adimensionadas $\tilde{\rho}$ y $\tilde{p}$, y luego reconstruir sus dimensiones. Esta es otra razón importante por la cual es preferible trabajar con cantidades adimensionadas: al tiempo que $\kappa \rightarrow 0$ se mantienen finitas, pese a que sus contrapartes dimensionadas van o bien a 0 o bien a ∞ .

La ecuación de flujo para $\Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \equiv (Z_\kappa \kappa^2)^{-1} \Delta \Gamma_\kappa^{(2)}(p, \rho)$ luego de las sustituciones es

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + (2 - \eta_\kappa) \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) - \tilde{p} \partial_{\tilde{p}} \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + (2 - d - \eta_\kappa) \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) = \\ 2\tilde{\rho} \left(\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(0, \tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{p}} \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \right)^2 \tilde{J}_d^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + 2\tilde{p} \left(\partial_{\tilde{p}} \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(0, \tilde{p}) \right)^2 \tilde{J}_d^{(3)}(0, \tilde{\rho}) \\ - \frac{1}{2} \tilde{I}_d^{(2)}(\tilde{\rho}) \left(\partial_{\tilde{p}} \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}}^2 \Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde se introdujeron las versiones adimensionadas de las integrales $I_d^{(n)}$ y $J_d^{(n)}$ definidas por

$$I^{(2)} = \frac{K_d \kappa^{d-2}}{Z_\kappa} \tilde{I}^{(2)} \quad (2.79a)$$

$$J^{(3)}(p) = \frac{K_d \kappa^{d-4}}{Z_\kappa^2} \tilde{J}^{(3)}(\tilde{p}) \quad (2.79b)$$

Falta una última transformación de esta ecuación. El segundo término del lado izquier-

2.4. EL ORDEN DOMINANTE DE LA FUNCIÓN A DOS PUNTOS (LO).

do, proporcional a $2 - \eta_\kappa$, es un término expansivo cuando $t \rightarrow -\infty$, en vista de que el factor multiplicativo es positivo (vemos de la tabla 2.4 que η es mucho menor que 2, y η_κ queda comprendido entre 0 y η). Esto conduce a un crecimiento exponencial de $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}$ en el régimen lineal y por lo tanto, errores numéricos pequeños producen inestabilidades al comienzo del flujo al régimen IR. La razón es que hay ciertas cancelaciones que deben ocurrir entre los términos de (2.78) que no son manifiestas. Esta situación puede resolverse considerando el flujo de la variable

$$Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \equiv \frac{\Delta \tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}(\tilde{p}, \tilde{\rho})}{\tilde{p}^2}, \quad (2.80)$$

ya que la ecuación que le corresponde no presenta ese problema:

$$\begin{aligned} & \partial_t Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) - \eta_\kappa Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) - \tilde{p} \partial_{\tilde{p}} Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + (2 - d - \eta_\kappa) \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) = \\ & 2\tilde{\rho} \left[\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_\kappa^{(2)}(0, \tilde{\rho}) \right]^2 \left\{ \frac{\tilde{J}_d^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) - \tilde{J}_d^{(3)}(0, \tilde{\rho})}{\tilde{p}^2} \right\} + 4\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_\kappa^{(2)}(0, \tilde{\rho}) \tilde{J}_d^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \partial_{\tilde{\rho}} Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) \\ & + 2\tilde{\rho} \tilde{p}^2 \tilde{J}_d^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{\rho}) [\partial_{\tilde{\rho}} Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho})]^2 - \frac{1}{2} \tilde{I}_d^{(2)} (\partial_{\tilde{\rho}} Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}}^2 Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho})) \end{aligned} \quad (2.81)$$

(se puede mostrar que el factor entre llaves del primer término del lado derecho tiene un límite finito cuando $\tilde{p} \rightarrow 0$; apéndice F).

Esta ecuación en derivadas parciales es equivalente a (2.69) para la función, pero está adaptada a una implementación numérica. La condición inicial para $Y_\kappa(\tilde{p}, \tilde{\rho})$ es (ver (2.60))

$$Y_{\kappa=\Lambda}(\tilde{p} = 0, \tilde{\rho} = 0) = 1 \quad (2.82)$$

y se resuelve acoplada con el sistema (2.61) (del potencial LPA' surgen además las funciones $I_d^{(2)}$ y $J_d^{(3)}$). Este es el orden dominante del método BMW para la función a dos puntos $\Gamma_\kappa^{(2)}$ con la aproximación LPA' para los propagadores $G_\kappa^{(2)}$.

Como ejemplo de los resultados obtenidos, en el cuadro 2.4 se observa que para este cálculo el exponente η obtenido es comparable en calidad al de la expansión derivativa en el orden siguiente al dominante⁸. Vemos que los resultados del orden principal para el método BMW+ LPA' da resultados comparables al orden siguiente al dominante de la expansión en gradientes para los exponentes críticos (DE, NLO). Existe una mejora con respecto BMW+ LPA' , implementada en Benitez, Blaizot, Chate, Delamotte, Mendez-Galain y Wschebor [4] (discutida en el capítulo de conclusiones), gracias a la cual

⁸ Para llegar a este valor se toma en para Z_κ el valor de $Z_\kappa(\rho)$ en el mínimo del potencial $\rho = \rho_0$ (ec. (2.50)).

CAPÍTULO 2. UN NUEVO MÉTODO DE APROXIMACIÓN

los exponentes críticos obtenidos son comparables a los que se obtienen utilizando en el siguiente orden (orden ∂^4) de la DE o a la teoría de perturbaciones a 7 *loops* [14].

Pero el interés principal del método es que permite estudiar la dependencia de la función a dos puntos en el impulso p (lo cual no está al alcance de la DE). Por ejemplo, consideremos el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein [30]. Un gas de bosones exhibe una transición de fase cuando a una temperatura del orden de pocos grados kelvin, ya que a baja temperatura las partículas del sistema se aglomeran en el estado fundamental, produciendo una *población macroscópica* de tal estado (por encima de la temperatura de transición ninguno de los estados tiene una población excesivamente grande). La explicación de este fenómeno, o más precisamente de por qué la temperatura crítica T_C no es $T_C = 0K$, proviene de la naturaleza cuántica de las partículas que forman el gas. Este modelo se utiliza, por ejemplo, para explicar la transición a la superfluidez del helio líquido y la superconductividad (ver tabla 1.1).

Es posible con algunos cálculos analíticos (que no son terriblemente complicados) determinar la temperatura de transición y otras propiedades interesantes, en el caso particular de un gas de bosones ideal. En ese caso se considera que las partículas que lo forman no interactúan entre sí. No se pueden hacer los cálculos si se consideran interacciones entre las partículas, aún cuando sean interacciones débiles. Los métodos perturbativos fallan por las razones explicadas en el capítulo 1.

Una de las propiedades interesantes de un gas de Bose con interacciones es el **corrimiento** ΔT_C de la temperatura de transición T_C con respecto a la temperatura de transición del gas sin interacciones T_C^0 . Este corrimiento verifica[3, 10, 20, 23]

$$\frac{\Delta T_C}{T_C^0} = c a n^{1/3} \quad (2.83)$$

donde n es la densidad del gas y a es la longitud de dispersión (*scattering*) de las colisiones. El coeficiente c se obtiene a través de una integración en la que interviene la autoenergía, evaluada en todos los valores posibles de impulso, desde la escala IR hasta la UV. La contribución principal a la integral se da en la región intermedia (*crossover*), lo que hace que el valor del coeficiente c sea un buen indicador de la calidad del cálculo de la función de correlación a dos puntos para impulsos arbitrarios – que no sean necesariamente muy pequeños (IR) o muy grandes (UV).

En Blaizot, Galain y Wschebor [10] se presentan los resultados de la aproximación BMW para el coeficiente c . Para el LO, se calcula $c = 1,3 \pm 0,3$; mediante cálculos en

2.4. EL ORDEN DOMINANTE DE LA FUNCIÓN A DOS PUNTOS (LO).

el *lattice* se obtiene $c = 1,09 \pm 0,09$ y $c = 1,07 \pm 0,105$.

Cálculo	Exponente η	Exponente ν
DE, LO [14]	0	0.6506
DE, NLO [14]	0.0443	0.6281
DE, NNLO [14]	0.033	0.632
BMW+ LPA' , LO [5]	0.052	0.647
BMW mejorado, LO [4]	0.0394	0.632

Tabla 2.2.-Comparación de valores de η para distintos tipos de aproximación.

Los primeros valores son tomados de Canet y otros [14], y corresponden a la expansión en gradientes. El penúltimo valor corresponde al tratamiento discutido en este texto. El último valor, más reciente, se obtiene gracias a un refinamiento en los cálculos (ver el capítulo de Conclusiones).

La meta del método BMW es poder ser aplicado a teorías de campo muy complejas, como por ejemplo la Cromodinámica Cuántica. Los resultados cuando es aplicado a la teoría ϕ^4 en el modelo $O(N)$ (la teoría escalar con simetría $\mathbb{Z}_2$ corresponde al caso $N = 1$) son prometedores. Si bien no hay pruebas rigurosas generales, la validez del método se conoce gracias a la excelente calidad de los resultados obtenidos (cabe destacar que sí se recuperan los resultados perturbativos y en el modelo $O(N)$ el límite $N \rightarrow \infty$ da resultados exactos [4]).

Cuando observamos el cuadro 2.4, cabe preguntarnos cuál es el margen de error en estos resultados y similares. Para contestar la pregunta se podrían comparar los resultados del orden dominante con los provenientes del orden siguiente de la aproximación. Se cree que el método converge rápidamente a los valores reales. La diferencia entre el LO y NLO debe dar un indicio de qué tan lejos se halla el LO del resultado real.

Para alcanzar el siguiente orden, hará falta determinar las funciones de correlación a tres y cuatro puntos (con lo cual la ecuación de la función a dos puntos no tendrá aproximaciones). En el próximo capítulo abordaremos la ecuación del NPRG y su correspondiente aproximación BMW para la función a tres puntos, siguiendo pasos similares al de este capítulo.

3. Función de Correlación a Tres Puntos

Mi trabajo de tesis consiste en estudiar la función de correlación a tres puntos $\Gamma_\kappa^{(3)}$ utilizando el esquema de aproximación BMW en la teoría ϕ^4 , como preámbulo al cálculo del orden siguiente al dominante. A medida que la función es investigada aprendemos que tiene interés en sí misma, por ejemplo, cuáles son sus propiedades de escala, dependencia en impulsos, cuáles son los efectos más importantes, etc. Además, $\Gamma_\kappa^{(3)}$ permite obtener la función a cuatro puntos $\Gamma_\kappa^{(4)}$ en campo nulo cuando uno de sus cuatro impulsos es cero (ecuación (3.8)).

En este capítulo desarrollo las ecuaciones de flujo para $\Gamma_\kappa^{(3)}$ y estudio algunas de sus propiedades analíticas. En el próximo capítulo presento los resultados numéricos de los cálculos.

3.1. Ecuaciones del NLO

Ya hemos visto (sección 2.4) que la ecuación del NPRG para $\Gamma_\kappa^{(2)}$ es

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_\kappa^{(2)}(p) = & \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) [G(q)]^2 G(s) [\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, -p - q)]^2 \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(q) [G(q)]^2 \Gamma_\kappa^{(4)}(p, -p, q, -q) \quad (3.1) \end{aligned}$$

Como el sistema posee invariancia por rotaciones y traslaciones espaciales, las funciones de correlación son escalares (invariantes bajo esas transformaciones). Esto permitió escribir $G_\kappa^{(2)}(p, -p) = G(p)$, puesto que $p \equiv |p|$ es el único escalar independiente que se puede formar a partir del vector p .

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

En el caso de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q})$, hay tres escalares independientes que pueden construirse a partir de los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, es decir, $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$ y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = pq \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores. La dependencia en los impulsos de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q})$ debe poder expresarse en términos de únicamente estos tres escalares. Es equivalente elegir, en lugar de $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, el módulo del vector $\mathbf{s} \equiv -\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Observemos que $s^2 = p^2 + q^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$. Por ello se puede escribir $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$, en la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$. Esto es más conveniente ya que así los tres impulsos $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ y $\mathbf{s}$ aparecen en forma simétrica en las ecuaciones. Se pueden considerar como impulsos independientes salvo que el impulso total debe ser cero (debido a la conservación del impulso en cada vértice). Al escribir la ecuación anterior se uso implícitamente la igualdad $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q})$, que es cierta en estas condiciones por invariancia de paridad.

Para la función $\Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$, con $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3$, valen las mismas consideraciones. Hay seis escalares que se pueden construir con $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. Ya que dentro de la ecuación del flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ sólo intervienen los impulsos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en la función a cuatro puntos, $\Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q})$ también es función solo de p , q y s . En resumen, de las $2d$ componentes de los vectores, la cantidad de variables a utilizar se reduce a solamente tres escalares.

En el LO del método BMW, las funciones $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ son reemplazadas por las derivadas de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ con respecto a un campo externo. En el orden siguiente para $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ (NLO), hay que determinar las ecuaciones de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ y $\Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q})$, y efectuar el reemplazo (2.66) para escribir las funciones $\Gamma_{\kappa}^{(5)}$ y $\Gamma_{\kappa}^{(6)}$ como derivadas de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ en sus ecuaciones de flujo (tabla 2.3).

3.1.1. Ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$

La ecuación de flujo exacta para $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ se encuentra al derivar la ecuación de flujo de la funcional¹ $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \phi)$ con respecto a $\phi(\mathbf{p}'')$ (apéndice C) y evaluar en $\mathbf{p} = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{q}$ y $\mathbf{p}'' = \mathbf{s}$.

¹ Primero consideramos un campo $\phi(x)$ arbitrario y luego de derivar evaluamos en un campo uniforme.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{p}'')} \left(\partial_t \Gamma_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \right) &\equiv \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \\ &\int_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_5} \dot{R}_{(q_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{p}'')} \left\{ G_{(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}) G_{(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_4)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_5, \mathbf{p}') G_{(\mathbf{q}_5, -\mathbf{q}_1)}^{(2)} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \dot{R}_{(q_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{p}'')} \left\{ G_{(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}, \mathbf{p}') G_{(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_1)}^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

La derivación actúa sobre cada factor salvo el regulador ya que no depende de los impulsos externos (como es usual suponemos que todas las funciones son lo suficientemente regulares como para poder intercambiar el orden de integración y derivación).

Usamos una notación compacta, con

$$\int_{\mathbf{q}_i} = \prod_{i=1,2,\dots} \int \frac{d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi)^d}.$$

$$\dot{R}_{(q_1)} = \partial_t R_{\kappa}(q_1),$$

y

$$G_{(\mathbf{q}_i, -\mathbf{q}_j)} = G_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{q}_i, -\mathbf{q}_j; \phi).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}_i} \dot{R}_{(q_1)} G_{(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2)} \Gamma_{\kappa}^{(5)}(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'') G_{(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_1)} \\ &\quad - \int_{\mathbf{q}_i} \dot{R}_{(q_1)} \left\{ G_{(-\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}'') G_{(-\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-\mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5, \mathbf{p}) G_{(-\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-\mathbf{q}_6, \mathbf{q}_7, \mathbf{p}') G_{(-\mathbf{q}_7, \mathbf{q}_1)} \right. \\ &\quad \left. + [\text{perm. } (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \leftrightarrow (\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)] + [\text{perm. } (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \leftrightarrow (\mathbf{q}_5, \mathbf{q}_1)] \right\} \\ &\quad + \int_{\mathbf{q}_i} \dot{R}_{(q_1)} \left\{ G_{(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}, \mathbf{p}'') G_{(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_4)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_5, \mathbf{p}') G_{(\mathbf{q}_5, -\mathbf{q}_1)} \right. \\ &\quad \left. + [\text{perm. } (\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}) \leftrightarrow (\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_5, \mathbf{p}')] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}_i} \dot{R}_{(q_1)} \left\{ G_{(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_4)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_5, \mathbf{p}'') G_{(\mathbf{q}_5, -\mathbf{q}_2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3, \mathbf{p}, \mathbf{p}') G_{(\mathbf{q}_3, -\mathbf{q}_1)} \right. \\ &\quad \left. + [\text{perm. } (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \leftrightarrow (\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1)] \right\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

Todas las funciones de correlación y propagadores dependen del campo $\phi(x)$ (la dependencia no se ha puesto explícitamente para aliviar la notación). Cuando evaluamos en un campo uniforme el sistema resulta invariante por rotaciones y traslaciones, y la suma de momentos $\sum p_i$ en cada vértice debe ser nula. Esto lleva a que finalmente quede un único impulso no trivial para integrar. Por ejemplo, evaluando en $p' = q$ y $p'' = s = -p - q$, en el primer término da lugar a las funciones delta

$$\delta^{(d)}(q_1 - q_6), \delta^{(d)}(q_6 - q_7 - p - q), \delta^{(d)}(q_7 - q_2), \\ \delta^{(d)}(q_2 - q_3 + p), \delta^{(d)}(q_3 - q_4), \delta^{(d)}(q_4 - q_5 + q), \delta^{(d)}(q_5 - q_1)$$

con lo que seis de las integrales son triviales, digamos las de q_2 a q_7 . Lo mismo ocurre en los demás términos. La razón es que los diagramas del NPRG tienen estructura a un *loop*.

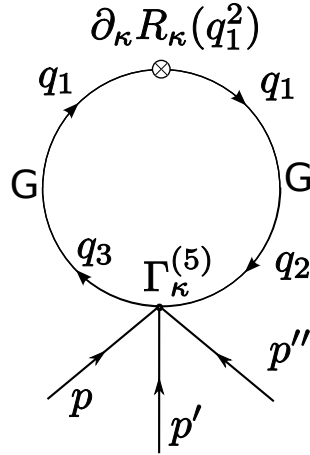


Fig. 3.1.-Primer diagrama en la ecuación de flujo de $\Gamma_\kappa^{(3)}$, sin evaluar en un campo uniforme.

Luego de evaluar en un campo uniforme, el integrando

$$\partial_\kappa R_\kappa(q_1) G_\kappa^{(2)}(q_1, -q_2) \Gamma_\kappa^{(5)}(q_2, -q_3, p, p', p'') G_\kappa^{(2)}(q_3, -q_1)$$

pasa a ser

$$\partial_\kappa R_\kappa(l) [G_\kappa^{(2)}(l)]^2 \Gamma_\kappa^{(5)}(p, q, s, l, -l),$$

siendo l la variable muda de integración, y además $p + q + s = 0$.

Llamando l al impulso que resta integrar luego de utilizar las funciones delta, la ecua-

ción de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \phi)$ es (en un campo uniforme):

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dot{R}_{(l)} [G_{(l)}]^2 \Gamma_{\kappa}^{(5)}(p, q, s, l, -l) \\
 & - \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dot{R}_{(l)} [G_{(l)}]^2 \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, q, |-q-l|) G_{(|q+l|)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|q+l|, s, |p-l|) G_{(|l-p|)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, |l-p|, l) \right. \\
 & + \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, s, |s-l|) G_{(l-p-q)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|l+s|, p, |q-l|) G_{(|l-q|)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(s, |p+l|, |q-l|) \\
 & \left. + \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, p, |p+l|) G_{(|p+l|)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|p+l|, q, |s-l|) G_{(|s-l|)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|s-l|, s, l) \right\} \\
 & + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dot{R}_{(l)} [G_{(l)}]^2 G_{(|l-q|)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l, p, s, q-l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|l-q|, q, l) \\
 & + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dot{R}_{(l)} [G_{(l)}]^2 G_{|l-p|} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l, q, s, l-p) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|l-p|, p, l) \\
 & + \underbrace{2}_{\text{PERM.}} \times \frac{1}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \dot{R}_{(l)} [G_{(l)}]^2 G_{(|l+s|)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p, q, -l, l+s) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(|l+s|, s, l)
 \end{aligned}$$

En la figura 3.2 se representan los diagramas que corresponden a las diversas integrales de la ecuación de flujo.

Para esta ecuación, el orden dominante de la aproximación BMW corresponde a sustituir en las integrales (ec (2.66))

$$\Gamma_{\kappa}^{(4)}(p, q, -s+l, -l; \phi) \simeq \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p, q, -s, 0; \phi) = \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi}(p, q, s; \phi) \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{\kappa}^{(5)}(p, q, -s, l, -l; \phi) \simeq \Gamma_{\kappa}^{(5)}(p, q, -s, 0, 0; \phi) = \frac{\partial^2 \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi^2}(p, q, s; \phi) \quad (3.4)$$

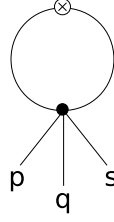
y las que se obtienen permutando p , q , y s . De este modo se obtiene una ecuación *cerrada* para $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \phi)$ (lo que significa que no depende de $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ ni $\Gamma_{\kappa}^{(5)}$). Desde luego, es necesario resolver la ecuación acoplada con (2.67), que depende además² de $\Gamma_{\kappa}^{(4)}(p, -p, q, -q; \phi)$. En este trabajo, como una primera aproximación, la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p; \phi)$ se resuelve en el LO (ec. (2.70))

En los términos donde aparece $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, l, |-p-l|)$ y similares ocurre la misma dificultad numérica encontrada en la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$: debería conocerse la función de correlación simultáneamente para todos los valores posibles de impulso. Si consideramos

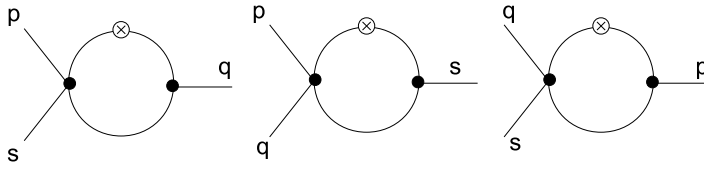
² La ecuación BMW para $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ se deriva en el apéndice D.

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

Diagrama con vértice de cinco puntos:



Diagramas con vértices de tres y cuatro puntos:



Diagramas con vértices de tres puntos:

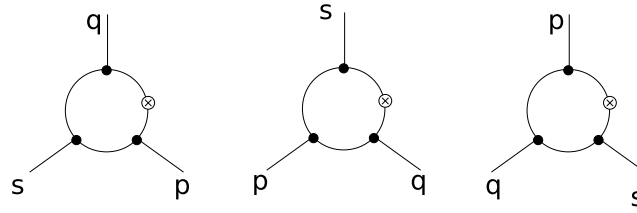


Fig. 3.2.-Diagramas de la ecuación de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$

en forma aproximada $l = 0$ podemos hacer el reemplazo

$$\Gamma_{\kappa}^{(3)}(s, -s - l, l; \phi) \simeq \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s, -s, 0; \phi) = \frac{\partial^2 \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi^2}(s, -s; \phi) \quad (3.5)$$

lo que resulta en una simplificación sustancial del problema numérico, y está justificada por argumentos análogos a los discutidos para el caso de la función a dos puntos (es decir, cuando l es grande la contribución a la integral está suprimida por $\partial_t R_{\kappa}(l)$).

Introducimos las funciones

$$I_\kappa(\rho) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) G_\kappa(l)^2 \quad (3.6a)$$

$$J_3(p, \kappa; \rho) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) [G_\kappa(l)]^2 G(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) \quad (3.6b)$$

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \kappa; \rho) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) [G_\kappa(l)]^2 G(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) G(|\mathbf{q} + \mathbf{l}|) \quad (3.6c)$$

Las funciones $I_\kappa(\rho)$ y $J_3(p, \kappa; \rho)$ son las mismas que aparecen en la ecuación BMW de $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$, y pueden calcularse analíticamente si se usan la aproximación LPA' y el regulador de Litim. Para la función $K(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \kappa; \rho)$ sólo parte de la integración se puede hacer analíticamente. Estas funciones se estudian en el apéndice F. Lo más relevante sobre la función K es que se puede obtener una versión semi-numérica que resulta una buena aproximación.

Mediante estas definiciones, la ecuación BMW para $\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s)$ al orden dominante es

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_\kappa^{(3)}}{\partial \phi^2}(p, q, s) I_\kappa \\ & + \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(3)}}{\partial \phi}(p, q, s) \left[\frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(p)}{\partial \phi} J_3(p) + \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(q)}{\partial \phi} J_3(q) + \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(s)}{\partial \phi} J_3(s) \right] \\ & - \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) \left[\frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(p)}{\partial \phi} \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(q)}{\partial \phi} K(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) + \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(q)}{\partial \phi} \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(s)}{\partial \phi} K(\mathbf{q}, -\mathbf{s}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(s)}{\partial \phi} \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(p)}{\partial \phi} K(\mathbf{s}, -\mathbf{p}) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al igual que en el caso de la ecuación para $\Gamma_\kappa^{(2)}$, conviene realizar varias transformaciones a esta ecuación de flujo. Hay varias observaciones que hay que tener presentes:

- El sistema posee la simetría $\mathbb{Z}_2$ (en el campo): es invariante ante $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow -\phi(\mathbf{x})$. Entonces es deseable (y debería ser posible) escribir la ecuación en términos de $\rho = \frac{1}{2}\phi^2$. Hay que tener precaución, sin embargo, de que la función de correlación a tres puntos es una *función suave de ϕ , no de ρ* (en potencias del campo, $\Gamma_\kappa^{(3)} \sim$

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

ϕ^3). Es inmediato concluir que en un campo externo nulo $\phi = 0$, para todo κ la función $\Gamma_\kappa^{(3)}$ es cero por la simetría. Se puede ver que la función que sí depende de ρ es la razón $\Gamma_\kappa^{(3)}/\phi$, que puede tener un flujo no trivial cuando $\phi \rightarrow 0$.

De hecho

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\Gamma_\kappa^{(3)}}{\phi}(p, q, s; \phi) = \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(3)}}{\partial \phi}(p, q, s; \phi) \Big|_{\phi=0} = \Gamma_\kappa^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}, 0; \phi) \Big|_{\phi=0} \quad (3.8)$$

donde usamos la relación (2.65) en la última igualdad. Esta identidad permite deducir propiedades de $\Gamma_\kappa^{(3)}$ que son más fáciles de extraer a partir del vértice a cuatro puntos (ver más adelante).

- Para resolver el potencial utilizamos la aproximación LPA', que luego es usado en los propagadores $G_\kappa^{(2)}$. Puesto que esta es una aproximación independiente, conviene formular la condición (2.49) explícitamente

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p=0; \phi) = \frac{\partial^2 V_\kappa}{\partial \phi^2}$$

y utilizar, como en el caso de la función a dos puntos, la función $\Delta \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho) \equiv \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho) - \Gamma_\kappa^{(2)}(0; \rho)$ en lugar de $\Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho)$.

- Más adelante se extraerá la dependencia en las dimensiones físicas de las variables, para que (i) puedan tener lugar las leyes de escala y (ii) sea viable el tratamiento numérico de las ecuaciones en las regiones de interés. Pero ocurre que el tratamiento numérico de la terna adimensionada $\{p/\kappa, q/\kappa, s/\kappa\}$ es sumamente complejo, en vista del cálculo de las derivadas numéricas en la versión discretizada del problema y la pérdida de precisión (en el siguiente capítulo veremos esto con más detenimiento).

Tomar los impulsos en forma adimensionada es ineludible para poder obtener el orden siguiente al dominante de $\Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho)$, pero dado que deseamos concentrarnos en la función $\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s; \rho)$ es factible realizar un adimensionamiento *parcial*, en el que son solamente los impulsos los que conservan sus dimensiones.

3.1.2. Función $\Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s)$

La introducción de la función $\Delta \Gamma_\kappa^{(2)}(p; \rho)$ es clave para realizar manifiestamente la sustracción de cantidades grandes cuya diferencia es muy pequeña. No podemos esperar

3.1. ECUACIONES DEL NLO

que si realizamos la sustracción numéricamente se alcance una precisión adecuada, y por ello hacer las cancelaciones explícitamente es preferible.

Para la función a tres puntos queremos en forma análoga definir una función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$, en términos de diferencias, que permita hacer las cancelaciones explícitamente. Una definición satisfactoria que preserve la simetría entre p, q , y s es

$$\phi\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho) \equiv \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \phi) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\phi}(p) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\phi}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\phi}(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\phi}(0) \quad (3.9)$$

En esta definición ya estamos tomando en cuenta la dependencia en el campo ϕ antes mencionada, de manera poder escribir $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ como una función suave de $\rho = \frac{1}{2}\phi^2$. De hecho, (3.9) puede ponerse como

$$\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho) \equiv \frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \phi) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\rho}(p) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\rho}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\rho}(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial\rho}(0) \quad (3.10)$$

lo que muestra esta propiedad explícitamente³. La definición de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$ es simétrica respecto a permutaciones de p, q y s puesto que $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$ lo es.

Si consideramos $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$ cuando $q = -p$ (por lo que $s=0$) encontramos

$$\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, 0; \phi) = \frac{\partial\Gamma_{\kappa}^{(2)}(\mathbf{p}; \phi)}{\partial\phi} \quad (3.11)$$

donde usamos la relación (2.65). Entonces $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ se anula si alguno de los impulsos p, q o s es nulo (el caso $s = p + q = 0$ significa $p = -q$, o sea $p = |p| = q$)

$$\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, 0) = \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(0, q, q) = 0 \quad (3.12)$$

Esta propiedad importante supone una gran simplificación para posteriormente llevar a cabo la resolución numérica.

³ Utilizando la relación $\partial/\partial\phi = \phi\partial/\partial\rho$

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

La ecuación de flujo de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$ puede derivarse en forma directa de la del flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho)$ si tomamos en cuenta (3.11), tomando entonces la diferencia de las ecuaciones de flujo

$$\phi \partial_t \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho) = \partial_t \left[\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s; \rho) - \frac{1}{2} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, 0; \rho) - \frac{1}{2} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q, q, 0; \rho) - \frac{1}{2} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(s, s, 0; \rho) \right] \quad (3.13)$$

Este proceso conduce finalmente a

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)) = & -\frac{1}{2} I_{\kappa} \left(3\partial_{\rho} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) + 2\rho \partial_{\rho^2} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \right) \\ & + \partial_{\phi} \left\{ \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) + \frac{1}{2\phi} \partial_{\phi} \left[\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) - \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) \right] \right\} \\ & \times \left[\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) J_3(p) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) J_3(q) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) J_3(s) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \left[2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) J_3(p) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J_3(0) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \left[2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) J_3(q) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J_3(0) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \left[2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) J_3(s) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J_3(0) \right] \\ & + \frac{3}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) \left[\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J_3(0) \right] \\ & - 2\rho \left(\left\{ \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) + \frac{1}{2\phi} \partial_{\phi} \left[\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) - \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) \right] \right\} \right. \\ & \times \left\{ \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) K(-\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) K(-\mathbf{q}, \mathbf{s}) + \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) K(-\mathbf{s}, \mathbf{p}) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \left\{ 2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) K(0, \mathbf{p}) + (\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p))^2 K(-\mathbf{p}, \mathbf{p}) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \left\{ 2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) K(0, \mathbf{q}) + (\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q))^2 K(-\mathbf{q}, \mathbf{q}) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \left\{ 2\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) K(0, \mathbf{s}) + (\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s))^2 K(-\mathbf{s}, \mathbf{s}) \right\} \\ & \left. + \frac{3}{2} (\partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0))^3 K(0, 0) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

(esta forma puede factorizarse de diferentes maneras). En la práctica, para la implementación numérica habrá que expresar las derivadas respecto a ϕ en términos de derivadas respecto a ρ , y usar $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) = \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$ para la función a dos

puntos (esto es mostrado en el apéndice D).

3.1.3. Adimensionamiento

Para extraer las dimensiones del campo usamos las cantidades definidas por

$$\tilde{\rho} = \frac{Z_\kappa \kappa^{2-d}}{K_d} \rho \quad (3.15a)$$

$$I_\kappa = \frac{K_d \kappa^{d-2}}{Z_\kappa} \tilde{I} \stackrel{d=3}{=} \frac{K_3 \kappa}{Z_\kappa} \tilde{I} \quad (3.15b)$$

$$J_3(p) = \frac{K_d \kappa^{d-4}}{Z_\kappa^2} \tilde{J}(\tilde{p}) \stackrel{d=3}{=} \frac{K_3}{\kappa Z_\kappa^2} \tilde{J}(\tilde{p}) \quad (3.15c)$$

$$K(p, q) = \frac{K_d \kappa^{d-6}}{Z_\kappa^3} \tilde{K}(\tilde{p}, \tilde{q}) \stackrel{d=3}{=} \frac{K_3}{\kappa^3 Z_\kappa^3} \tilde{K}(\tilde{p}, \tilde{q}) \quad (3.15d)$$

Como referencia, la ecuación de flujo para $\Delta \Gamma_\kappa^{(3)}$ que queda utilizando estas cantidades

es

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) &= (d - 2 + \eta_\kappa) \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) \\
&- \frac{1}{2} \tilde{I} (3 \partial_{\tilde{\rho}} \Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) + 2 \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}}^2 \Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s)) \\
&+ \frac{1}{Z_\kappa \kappa^2} \left\{ \left[\Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) + 2 \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} \Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) + \left(\frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(p)}^{(2)} + \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(q)}^{(2)} + \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(s)}^{(2)} - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(0)}^{(2)} \right) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{p}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{q}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{s}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(p)}^{(2)} \left[2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{p}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{J}(0) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(q)}^{(2)} \left[2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{q}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{J}(0) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(s)}^{(2)} \left[2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \tilde{J}(\tilde{s}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{J}(0) \right] \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{(0)}^{(2)} \left[\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{J}(0) \right] \right\} \\
&- \frac{2 \tilde{\rho}}{(Z_\kappa \kappa^2)^2} \frac{1}{\phi} \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s) \left\{ \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \tilde{K}(\tilde{p}, \tilde{q}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \tilde{K}(\tilde{q}, \tilde{s}) + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \tilde{K}(\tilde{s}, \tilde{p}) \right\} \\
&+ \left(\frac{\tilde{\rho}}{Z_\kappa \kappa^2 K_d \kappa^d} \right) \left[\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \left\{ 2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{K}(0, \tilde{p}) + (\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(p)}^{(2)})^2 \tilde{K}(-\tilde{p}, \tilde{p}) \right\} \right. \\
&\quad + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \left\{ 2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{K}(0, \tilde{q}) + (\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(q)}^{(2)})^2 \tilde{K}(-\tilde{q}, \tilde{q}) \right\} \\
&\quad + \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \left\{ 2 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)} \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \tilde{K}(0, \tilde{s}) + (\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(s)}^{(2)})^2 \tilde{K}(-\tilde{s}, \tilde{s}) \right\} \\
&\quad \left. - 3 \partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)} \left\{ (\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{(0)}^{(2)})^2 \tilde{K}(0, 0) \right\} \right] \quad (3.16)
\end{aligned}$$

En esta extensa ecuación vemos que la ecuación de flujo de $\Delta \Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s)$ puede escribirse utilizando las cantidades discutidas hacia el final de la sección 2.4, $\Gamma_\kappa^{(2)}(0)$ y $\Delta \Gamma_\kappa^{(2)}(p)$, y está por lo tanto expresada de forma cerrada (asumiendo con que se cuente con expresiones para las integrales $\tilde{I}, \tilde{J}(\tilde{p})$ y $\tilde{K}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$; véanse los comentarios luego de (3.6) y el apéndice F).

3.2. Truncación de $\Gamma_\kappa^{(3)}$

Para modelos más complicados que la teoría ϕ^4 es conveniente contar con versiones más simples de tratar de las ecuaciones del NPRG. Un método que se utiliza en ocasiones es realizar una expansión de las funciones de correlación en una serie de potencias

del campo externo, sobre las ecuaciones aproximadas obtenidas de la DE [16]. El método de **truncación** consiste en considerar sólo una cantidad finita de términos en el desarrollo en potencias.

En Guerra, Mendez-Galain y Wschebor [21] se estudia el procedimiento correspondiente aplicado sobre las ecuaciones del esquema BMW para la función $\Sigma(p)$. Se muestra la convergencia de los cálculos a medida que se aumenta el orden de potencias incluidas en las ecuaciones y los regímenes de criticalidad. Una observación muy importante es que se puede probar que *truncar la expansión en potencias del campo externo es equivalente a despreciar vértices de alto orden*.

La ecuación de flujo para la función a tres puntos (??) posee tres tipos de términos (representados con los diagramas de la de la figura 3.2). En el desarrollo en potencias de ρ de cada término de la ecuación, observamos que el término de menor orden proviene del que corresponde al diagrama (b), siendo $\sim \rho^0$. El término correspondiente al diagrama (a) es $\sim \rho^{1/2}$ y el correspondiente al diagrama (c), $\sim \rho$. Cuando $\phi \rightarrow 0$, es posible en una primer etapa trabajar con una ecuación de flujo *truncada* donde sólo intervienen esos términos, o sea

$$\partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)_{\rho \rightarrow 0} \simeq \partial_{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \left[\partial_{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) J(p) + \partial_{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) J(q) + \partial_{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) J(s) \right] \quad (3.17)$$

con el resultado correspondiente para $\Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}$,

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)_{\rho \rightarrow 0} = & \left\{ \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left(\Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \right\} \\ & \times \left[\partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right) J(p) + \partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right) J(q) + \partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) J(s) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right) J(p) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right) J(q) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\ & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) J(s) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\ & + \frac{3}{2} \partial_{\rho} \left[\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) \right]^2 J(0) \quad (3.18) \end{aligned}$$

Numéricamente estudiaremos primero la ecuación truncada para compararla luego con la ecuación completa (en el capítulo siguiente). Esto ayuda a evaluar la calidad de los

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

cálculos de las funciones de correlación en los que se desprecia la contribución de vértices de órdenes altos.

3.3. Regímenes de la función a tres puntos

Teniendo presente (3.8), se puede relacionar la función a tres puntos – específicamente $\Gamma_{\kappa}^{(3)}/\phi$ – con la función a cuatro puntos cuando uno de sus impulsos externos es nulo y $\phi \rightarrow 0$. Esto facilita tener ciertos puntos de referencia sobre la función a tres puntos para poder cotejar los resultados de los cálculos numéricos. Nos hemos limitado a la vecindad de la teoría crítica, que es donde suceden los fenómenos no perturbativos más importantes. Se pueden obtener resultados analíticos con relativa sencillez en los casos extremos

- Régimen Ultravioleta: para impulsos p, q, s suficientemente grandes deben ser válidos los resultados perturbativos, con los que las aproximaciones deben ser compatibles (en la práctica este régimen se alcanza eligiendo una constante de acoplamiento u_0 suficientemente pequeña en relación a los impulsos).
- Régimen Infrarrojo: en el otro extremo deben aparecer la forma de escala de las funciones de correlación, es decir, deben seguir leyes de potencia relacionadas con los exponentes críticos (en la práctica este régimen se alcanza eligiendo una constante de acoplamiento u_0 grande en relación a los impulsos).

En el régimen UV la función a cuatro puntos puede hallarse con (por ejemplo) un cálculo a 1 *loop*. A modo de ejemplo, consideremos una configuración **simétrica** con $p = q = s$ (los vectores forman un triángulo equilátero). Si $p \gg u$ (régimen UV) encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\phi}(p, q, s; \phi) \Big|_{\phi=0, p=q=s} &= \Gamma_{\kappa}^{(4)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}, 0; \phi) \Big|_{\phi=0, p=q=s} \\ &= u_0 - \frac{3}{2} u_0^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} G_{\kappa}^{(2)}(l) G_{\kappa}^{(2)}(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) + O(u_0^3) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde u_0 es la constante de acoplamiento de la teoría microscópica (ec. (1.27)).

3.3. RÉGIMENES DE LA FUNCIÓN A TRES PUNTOS

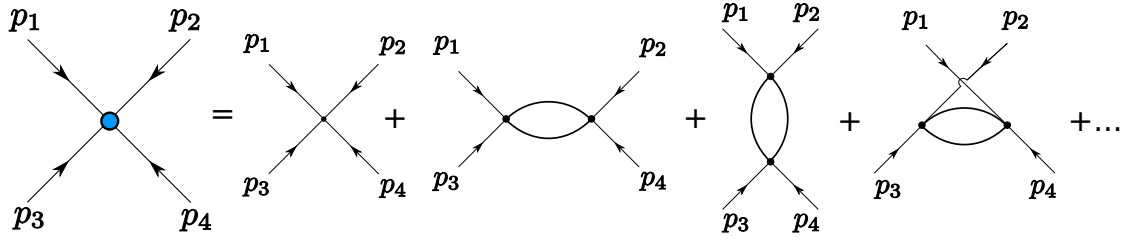


Fig. 3.3.-Desarrollo perturbativo de la función a cuatro puntos de la teoría φ^4 .

En el régimen perturbativo se efectúa una expansión en potencias de la constante de acoplamiento del término $\sim \varphi^4$. La potencia de la constante en el desarrollo determina el número de vértices (de cuatro patas) en los diagramas y el número de circuitos internos (loops). El primer diagrama corresponde al primer término del desarrollo, a 0 loops. Los otros tres dan la contribución siguiente, a 1 loop, y así sucesivamente. Si la serie se trunca con los diagramas mostrados, se dice que la expresión es correcta a un loop.

En el régimen perturbativo para masa nula, cuando $\kappa \rightarrow 0$ el propagador $G_\kappa^{(2)}(q)$ tiene la forma simple

$$G_\kappa^{(2)}(q) \rightarrow G^{(2)}(q) = \frac{1}{q^2} \quad (3.20)$$

lo cual, sustituido en la ecuación previa lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_\kappa^{(3)}}{\phi} &\sim u_0 - \frac{3}{2} u_0^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2} \frac{1}{(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|)^2} \\ &= u_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} u_0^2 \int_0^\infty dl \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{l^2 + p^2 + 2pl \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde se usaron coordenadas polares para representar $\mathbf{l}$, siendo θ el ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{l}$ y $l = |\mathbf{l}|$. La integral doble puede entonces efectuarse analíticamente con relativa facilidad usando las variables $v = \cos \theta$ y $x = p/l$. El resultado final es, válido a 1 loop,

$$\frac{\Gamma_\kappa^{(3)}}{\phi}(p = q = s) = u_0 - \frac{3u_0^2}{16} \frac{1}{p} \quad p \gg u, \kappa \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

o, con el mismo razonamiento para impulsos p, q y s genéricos,

$$\frac{\Gamma_\kappa^{(3)}}{\phi}(p, q, s) = u_0 - \frac{u_0^2}{16} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \right) \quad \text{Régimen UV: } p, q, s \gg u_0, \kappa \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

CAPÍTULO 3. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A TRES PUNTOS

Pasemos ahora al régimen infrarrojo, donde $p, q, s \ll u_0$. En la criticalidad, cuando $\kappa \rightarrow 0$, el sistema posee invariancia de escala. Esto significa que el sistema es invariante bajo la transformación de dilatación en parámetro λ (arbitrario)

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x/\lambda \\ p &\rightarrow p' = \lambda p \end{aligned} \tag{3.24}$$

Bajo esta transformación, la acción es invariante,

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow \Gamma' = \Gamma, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \lambda^\Delta \varphi, \\ \rho &\rightarrow \rho' = \lambda^{2\Delta} \rho, \end{aligned} \tag{3.25}$$

siendo $\Delta = (d-2+\eta)/2$ la dimensionalidad del campo φ . A partir de esta invariancia se puede derivar una ley de potencia para las funciones de correlación. Recordemos que las funciones de correlación se definen a partir de los valores esperados de productos de los campos, de manera que deben transformarse de la misma manera que tales productos,

$$\Gamma_\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \sim \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \rightarrow \Gamma_\kappa^{(n)'}(x'_1, \dots, x'_n) = \lambda^{n\Delta} \Gamma_\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \tag{3.26}$$

La propiedad de invariancia de escala implica una ley de potencia (y viceversa). Si $f(x/\lambda) = \lambda^{-\alpha} f(x)$ entonces se debe cumplir la ley de potencia $f(x) = Cx^\alpha$, con C una constante⁴.

Se puede probar directamente que si $F(p)$ representa la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces, aunque con otro exponente, $F(p)$ también posee invariancia de escala. Por lo tanto $F(p)$ también cumple una ley de potencia, que está dada en una dimensión por $F(p) = Kp^{\alpha-1}$ (siendo K una constante). Generalizando a un espacio d -dimensional, la ley de potencia resulta $F(\mathbf{p}) = Kp^{\alpha-d}$, si la función es además invariante por rotaciones.

Consideremos ahora el caso concreto de la función $\frac{1}{\phi}\Gamma^{(3)}$. Se transforma bajo dilataciones de la misma manera que $\Gamma^{(4)}$, de manera que se aplica el resultado (3.26) con $n = 4$. En el espacio de impulsos, tomando el caso especial $p = q = s$, se deduce de

⁴ Basta tomar $\lambda = x$ para probarlo. Desde luego consideramos $\alpha \neq 0$; en caso contrario nos topáramos con una ley logarítmica.

3.3. REGÍMENES DE LA FUNCIÓN A TRES PUNTOS

lo anterior que la función de correlación cumple la ley de potencia

$$\frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, p) = C p^{4-d-2\eta} \quad \text{Régimen IR: } p \ll u, \kappa \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

(siendo C constante) en el punto crítico. Cabe destacar que la condición de validez $\kappa \rightarrow 0$ implica $\kappa \ll p$ en este caso.

Para comprobar si esta relación se recupera luego de las aproximaciones efectuadas, cotejamos los cálculos numéricos estudiando la dependencia de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ en los impulsos p, q y s cuando nos aproximamos a $\kappa = 0$. Esto permite, de hecho, determinar el valor del exponente η .

En el siguiente capítulo analizaremos los resultados.

4. Solución Numérica

4.1. Resumen del problema

En los capítulos previos se establecieron cuales son las ecuaciones diferenciales que hay que resolver para encontrar las funciones de correlación. Para el nivel de aproximación discutido, debemos resolver simultáneamente el sistema dado por las ecuaciones para el potencial (2.61), para $\Gamma_\kappa^{(2)}$ (2.70) y $\Gamma_\kappa^{(3)}$ (3.14). Para las últimas dos hay que resolver, de hecho, el flujo de $\Delta\Gamma_\kappa^{(2)}$ (2.76) y $\Delta\Gamma_\kappa^{(3)}$ (3.14).

Necesitamos integrar estas ecuaciones diferenciales desde el punto inicial $\kappa = \Lambda$ hasta $\kappa = 0$, o de manera equivalente, con $t = \log \kappa / \Lambda$ recorriendo desde 0 hasta $-\infty$. Las condiciones iniciales para las funciones son, con $\kappa = \Lambda$,

$$\begin{aligned}
 V_\kappa(\rho) &= r_0\rho + \frac{u_0}{6}\rho^2 \\
 \chi_\kappa(\tilde{\rho}) &= 1 \\
 \eta_\kappa &= 0 \\
 \Delta\Gamma_\kappa^{(2)}(p; \tilde{\rho}) &= 0 \\
 \frac{1}{\phi}\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s; \tilde{\rho}) &= u_0 \\
 \Delta\Gamma_\kappa^{(3)}(p, q, s; \tilde{\rho}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La penúltima relación es el resultado a cero-loop para la función a cuatro puntos, aplicando la ecuación (3.8). La última relación se desprende de las definiciones (3.9) y (2.75) y las condiciones iniciales previas. Nótese que las constantes de acoplamiento r y u son adimensionadas (ver (2.63)); específicamente, $r = \Lambda^{-2}r_0$ y $u = K_d\Lambda^{d-4}u_0$, siendo r_0 y u_0 las constantes de acoplamiento de la teoría φ^4 original (ecuación (2.1)).

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

La información física aparece no sólo en los valores adoptados al final del flujo, sino que también de la dependencia con κ se pueden extraer varios resultados.

Introducimos el símbolo $\gamma_3 \equiv \Gamma_{\kappa}^{(3)}/\phi$, ya que este cociente es, en última instancia, la cantidad que tiene un valor no nulo (tanto en la fase simétrica como en la fase rota) y depende de ρ (y no separadamente de ϕ ; ver sección 3.1.1).

4.1.1. Cómo acercarnos al punto fijo

Para poder acceder numéricamente a distintos regímenes de las funciones de correlación es importante poder elegir varios valores de la constante de acoplamiento u_0 y de los impulsos p, q y $s = |p + q|$, debido a que necesitamos varios órdenes de magnitud de diferencia entre ambos (para el régimen UV, $u_0 \ll p, q, s$, mientras que para el régimen IR $u_0 \gg p, q, s$). Junto con κ , cada una de estas cantidades determina una escala en el problema que estamos tratando, y se pueden deducir propiedades del comportamiento de las ecuaciones de flujo de acuerdo a si $k \gg u_0$ o $k \ll u_0$, si $k \gg p, q, s$ o $\kappa \ll p, q, s$, etc. (ver más adelante, sección 4.3). Por lo general, para un valor de u_0 dado, la precisión del cálculos numérico limita cuán separados se pueden considerar los impulsos.

El espacio de parámetros del sistema ferromagnético posee una (hiper)superficie crítica con un parámetro relevante (ver fig. 1.9; si consideramos un campo externo no nulo hay un parámetro relevante adicional). Para cada valor de u , se debe hallar el valor r_C de la constante r que hace que el sistema se encuentre en la superficie crítica. Más precisamente lo que se halla es un intervalo (r_{min}, r_{max}) al que r_C pertenece, de la menor longitud que el cálculo numérico permita. Típicamente, el ancho del intervalo es del orden de una parte en 10^{15} del valor de r_C .

Dado r , para decidir si nos encontramos por encima o por debajo de la superficie crítica lo más simple es examinar el flujo de la derivada $\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}$ evaluada en $\tilde{\rho} = 0$ y $p = 0$. Si el sistema se encuentra en la fase simétrica, la función crecerá eventualmente hacia valores cada vez mayores, divergiendo exponencialmente como función de t una vez que adopta un valor positivo (esto puede verse inspeccionando la ecuación para $\tilde{\mu}^2$, (2.61), teniendo presente que $t = \log \kappa$ es negativo).

Por otro lado, si el sistema se encuentra en la fase rota, la función toma valores cada vez más negativos. Al aproximarnos a $\tilde{\mu}^2 = -1$ el cálculo del flujo 'explota' porque arribamos a un *polo* de la(s) ecuación(es) (ec. (2.61), etc.). En realidad esto es un

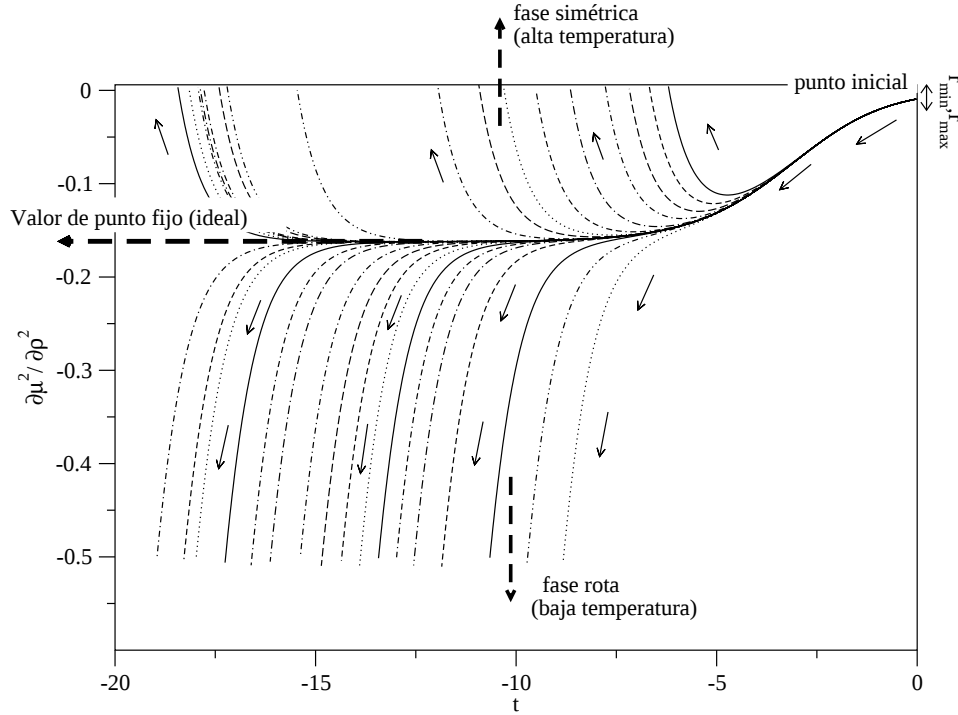


Fig. 4.1.-Ejemplo de búsqueda de la condición inicial de criticalidad.

En esta figura se representa el flujo de la derivada del potencial en campo nulo, a medida que se va estrechando el intervalo $(r_{\min}, r_{\max})$. Todas las curvas correspondientes a un mismo valor de u_0 que parten de un valor de $r_0 > r_C$, representan al sistema en la fase de alta temperatura y el sistema eventualmente se aparta de la superficie crítica, atraído por el punto fijo de alta temperatura. De modo semejante, las curvas que parten de un valor de $r_0 < r_C$ desembocan en el punto fijo de baja temperatura. A medida que r_0 se acerca a r_C el plateau se hace cada vez mayor (la función permanece casi constante durante grandes tramos durante el flujo); de este modo las curvas sucesivas van apareciendo de derecha a izquierda, conforme disminuye el intervalo $(r_{\min}, r_{\max})$ por bipartición. La precisión finita que implican los cálculos numéricos impiden que se alcance la condición exacta de criticalidad, pero esto no representa un obstáculo en la medida en que el plateau sea suficientemente extenso.

artefacto numérico: un denominador muy pequeño da lugar a términos muy grandes, cuya diferencia luego genera inestabilidades.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede automatizar la búsqueda de $r_{\min}$ y $r_{\max}$ definiendo un intervalo de valores permitidos para $\tilde{\mu}^2$ (en la práctica se usó un intervalo entre $r_{\min} = -0,5$ y $r_{\max} = 0$ que da buenos resultados). Si r está suficientemente próximo a r_C la evolución de $\tilde{\mu}^2$ será esencialmente monótona, por lo que el punto de escape del intervalo indica si el sistema está en la fase rota o simétrica.

4.1.2. Ajuste múltiple

La condición inicial $r = r_C$ no puede en general lograrse con precisión indefinida, y por ello en algún momento el sistema comienza a separarse de la superficie crítica hacia la fase simétrica o a la fase rota. Para poder extraer información acerca del comportamiento crítico es necesario que el flujo se aproxime lo más posible al punto fijo, o en forma equivalente, que el sistema permanezca suficientemente *estacionario* durante un amplio intervalo de valores de t . Lo deseable entonces es tener un **plateau** donde las funciones de correlación varíen en forma despreciable durante un rango de valores de t lo más amplio posible.

En la práctica, el tamaño asequible del *plateau* depende del valor de u utilizado. Al estudiar el régimen IR se puede alcanzar una duración de alrededor de diez unidades de t (esto es, con κ recorriendo varios órdenes de magnitud). Esto puede ser suficiente para estudiar ciertas dependencias de las funciones de correlación en los impulsos. Para el régimen UV, en cambio, lo habitual es que el *plateau* es apenas perceptible si aplicamos la estrategia mencionada, de manera que para acercarnos lo suficiente al punto fijo hay que implementar un paso adicional.

La solución es considerar algún momento $t = t_1$ del flujo en el cual el sistema aún permanece cerca de la superficie crítica, pero ya ha tenido oportunidad de evolucionar a partir de la condición inicial en $t = 0$ ¹. En el espacio de parámetros del sistema el potencial tiene la forma general

$$V(\rho, \kappa) = r(\kappa)\rho + u(\kappa)\rho^2 + v_1(\kappa)\rho^3 + v_2(\kappa)\rho^4 + \dots \quad (4.2)$$

Inicialmente elegimos como únicas constantes de acoplamiento no nulas r y u ($v_1(\Lambda) = v_2(\Lambda) = \dots = 0$) de acuerdo con (4.1). Que el sistema no se halle perfectamente sobre la superficie crítica es debido a la limitación en la precisión al dar la condición inicial en $t = 0$. En $t = t_1$ podemos *mover* el sistema para corregir la separación de la superficie crítica, ajustando el valor de la derivada del potencial evaluada en $\rho = 0$,

$$\left. \frac{\partial V(\rho, \kappa)}{\partial \rho} \right|_{t=t_1, \rho=0} = r(\kappa) \Big|_{t=t_1} \equiv r_1 \quad (4.3)$$

La estrategia es entonces encontrar un nuevo intervalo $(r_{min}^{(1)}, r_{max}^{(1)})$ al que pertenezca

¹El valor exacto de t_1 puede elegirse en forma bastante arbitraria siempre que el sistema no se haya apartado sensiblemente del *plateau*. Para la casi totalidad de los valores de u trabajados, $t_1 = -10$ ($\kappa/\Lambda = e^{-10}$) da buenos resultados.

el valor de r_1 necesario para conducir el sistema hacia la superficie crítica en $t = t_1$, de la misma manera en que se encontró el valor en $t = 0$. En el potencial y en las funciones de correlación el efecto del corrimiento de r es a lo sumo “corregir” su valor añadiendo la diferencia entre el valor de r_1 hallado y su valor previo. De hecho, a las funciones diferencia $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ y $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ no es necesario corregirlas (ver (2.75) y (3.9)).

Gracias al ajuste doble, el sistema logra aproximarse suficiente al punto crítico como para poder estudiar las dependencias deseadas. El *plateau* logrado de esta manera puede extenderse entre diez y quince unidades de t^2 .

4.2. Estrategia de resolución

Para resolver las ecuaciones de flujo mencionadas en la sección 4.1 utilizamos un algoritmo sencillo, que consta de unas pocas etapas. Primero, como datos de comienzo del programa se le indica el valor de las constantes de acoplamiento r y u y los impulsos p , q y s .

El programa puede hacerse cargo del ajuste de r , pero es más rápido indicar el valor correcto de r desde el comienzo. Esto se debe a que no implementamos el *feedback* del NLO sobre las ecuaciones de la función a dos puntos, de manera que ésta puede resolverse independientemente (en un futuro se llevaría a cabo la solución simultánea de todas las ecuaciones); el programa corre primero sin calcular $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ para ajustar r . En el caso del ajuste doble se indica el intervalo $[r_{min}, r_{max}]$ en $t = 0$ y $t = t_1$.

Se establecen las condiciones iniciales en $t = 0$ de acuerdo con (4.1) y las derivadas $\partial_{\kappa}\Delta\tilde{\Gamma}_{\kappa}^{(2)}$, $\partial_{\kappa}\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, etc. se calculan numéricamente para cada valor de t desde 0 hasta un valor final t_F en el cual el sistema se halla suficientemente próximo al punto fijo. A partir de las derivadas, se procede a una integración de euleriana (que es la más simple posible). En las secciones a continuación se discuten algunas consideraciones importantes de esta técnica.

²Este proceso puede reiterarse varias veces, si bien la precisión no aumenta significativamente

4.2.1. Discretización

Para resolver las ecuaciones numéricamente es necesario trabajar con versiones discretizadas de las variables. La elección de un esquema de discretización debe responder a la precisión necesaria para extraer información física, a lograr un tiempo de cálculo razonable y a que el cálculo no se torne **inestable**.

El potencial $\tilde{\rho}$ varía en un intervalo $[0, \tilde{\rho}_{MAX}]$ tomando valores discretos separados por $d\tilde{\rho}$. Para elegir $\tilde{\rho}_{MAX}$ se debe tomar en cuenta que el mínimo del potencial $\tilde{\rho}_0(\kappa)$ quede comprendido dentro del intervalo. Un valor razonable para el intervalo es entre $\tilde{\rho}_{MAX} = 5$ y $\tilde{\rho}_{MAX} = 10$. Si se utilizan valores mayores el cálculo es más extenso, pero los resultados referidos a la región $\tilde{\rho} \lesssim 5$ son *insensibles* a lo que pasa para $\tilde{\rho}$ mayores. La separación entre los puntos es típicamente $d\tilde{\rho} = 0,1$ o $d\tilde{\rho} = 0,05$, de manera de que hay del orden de 100 puntos en la variable $\tilde{\rho}$.

Aunque los valores de $d\tilde{\rho}$ parecen algo “gruesos”, sabemos que la dependencia de las funciones en el campo externo es bastante suave, de forma que las derivadas numéricas se pueden determinar con buena precisión. Además verificamos numéricamente que los resultados son estables cuando reducimos el paso. El motivo principal para no usar valores mucho menores de $d\tilde{\rho}$ es la aparición de derivadas de parciales de segundo orden en esta variable, junto con derivadas de primer orden de la variable t en el sistema de ecuaciones. Para poder tener una integración numérica *estable* en estas condiciones, el paso de discretización dt de la variable t debe cumplir [34]

$$dt \lesssim \text{cte.} \times d\tilde{\rho}^2 \quad (4.4)$$

Este resultado se deriva en el caso de ecuaciones diferenciales lineales. Para el caso presente se verifica que la relación es aplicable, pero con un prefactor bastante pequeño. En la práctica, para la elección $d\tilde{\rho} = 0,1$ por ejemplo, hay que utilizar un valor para dt al menos tan pequeño como 10^{-4} . Es preferible tomar un valor aún menor de dt para no estar en el borde de la región de estabilidad, así que en efecto, para el caso $d\tilde{\rho} = 0,1$, usamos $dt = 10^{-5}$. La variable t recorre desde 0 hasta t_{FIN} , con $t_{FIN} \cong -20$.

Consideraciones análogas se aplican a la discretización de los impulsos adimensionados $\tilde{p} = p/\kappa$, que se requiere para resolver completamente el NLO. Como se explicó previamente, si nos concentramos solamente en la función a tres puntos, optamos por

trabajar con los impulsos con dimensiones, p , q y s . El comportamiento más interesante de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ ocurre si son de tamaño comparable (más adelante prestaremos bastante atención a la configuración **simétrica** $p = q = s$ en que los vectores forman un triángulo equilátero). En general, dadas las relaciones $q = \lambda_1 p$ y $s = \lambda_2 p$, se puede determinar el ángulo entre p y q utilizando

$$s^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{s^2 - p^2 - q^2}{2pq} = \frac{\lambda_2^2 - 1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1} \quad (4.5)$$

El ángulo entre p y q aparece posteriormente en la función $\tilde{K}(\tilde{p}, \tilde{q})$.

4.2.2. Derivación Numérica

Las expresiones para el cálculo numérico de las derivadas numéricas se dan en el apéndice G.

Se calcularon derivadas centradas [34] con respecto a $\tilde{\rho}$ (y eventualmente con respecto a $\tilde{p}$) para $\partial_{\tilde{\rho}} \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}$, $\partial_{\tilde{\rho}} \Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}$, etc, excepto en los bordes en que se usaron derivadas laterales. La cantidad de puntos utilizados finalmente fue cinco, si bien se logran resultados razonables aún con tres puntos.

En el caso de utilizar las variables adimensionadas $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y $\tilde{s}$, las ecuaciones de flujo de las funciones de correlación presentan términos con derivadas parciales respecto a estas:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}; \tilde{\rho}) \right|_{p,q,s,\rho} = \left[\frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{1}{\kappa} \left(\tilde{p} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} + \tilde{q} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} + \tilde{s} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \kappa} \right)_{\rho} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \right] \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}; \tilde{\rho}) \quad (4.6)$$

(de forma análoga a la ecuación (2.77)).

Pero al calcular $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s})$, sus valores no son independientes, si no que deben satisfacer la conservación del momento total $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{s} = 0$ (por la invarianza traslacional del sistema). Esto dificulta emplear las relaciones anteriores para las derivadas, particularmente en los extremos del intervalo donde es preciso conocer la función evaluada en, por ejemplo, las ternas $\{\tilde{p}_0, \tilde{q}_0, \tilde{s}_0\}$, $\{\tilde{p}_1, \tilde{q}_1, \tilde{s}_1\}$ y $\{\tilde{p}_2, \tilde{q}_2, \tilde{s}_2\}$, con $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_0 + d\tilde{p}$, $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_0 + 2d\tilde{p}$ y el resto de las variables determinada de acuerdo a la ecuación de conservación del momento; las derivadas buscadas provienen de la interpolación de

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

$\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s})$ entre las ternas mencionadas. En contraste, variables como $\tilde{\rho}$ y t son totalmente independientes. Como punto a favor, las expresiones para las derivadas numéricas de la función a tres puntos reciben una enorme simplificación al utilizar la simetría ante la permutación de impulsos, $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s}) = \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{q}, \tilde{s}, \tilde{p}) = \Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{s}, \tilde{p}, \tilde{q}) = \dots$ (esto es aplicable también a $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{s})$, de acuerdo con (3.9)).

Por el momento se resolvió no utilizar los impulsos adimensionados, simplificando sustancialmente el programa. Esto es posible debido a que a este nivel no hay retroalimentación de la ecuación de la función a tres puntos sobre la a dos. Para la solución completa del NLO, sería necesario determinar las funciones de correlación sobre una región de impulsos adimensionados.

4.2.3. Integración Numérica

La relación que usamos para integrar el flujo entre el punto $t = t_n$ y el punto $t = t_n + dt = t_{n+1}$ es simplemente una integración de Euler dada por

$$f(t_{n+1}; \dots) = f(t_n; \dots) + dt \left. \frac{\partial f(t; \dots)}{\partial t} \right|_{t=t_n} \quad (4.7)$$

usando las ecuaciones (2.61), (2.70) y (3.14) para determinar $\partial f / \partial t$. A pesar de su simplicidad (en comparación, por ejemplo, con el método de Runge-Kutta de paso adaptativo) la precisión que puede alcanzarse con esta técnica es completamente satisfactoria, gracias a que las funciones adimensionadas varían suavemente en términos de t .

Al reducir el paso dt , la calidad de esta relación mejora; también aumenta el número de pasos necesario para el cálculo, como ocurriría usando métodos de integración más complejos, así que la razón para usar la integración de Euler es la sencillez de su implementación³.

4.3. Resultados y análisis

A continuación se presentan los resultados más relevantes de los cálculos. Hay dos categorías de resultados:

³ Desde luego, el *orden*, en potencias de dt , de los diferentes esquemas es diferente, pero nos interesa la precisión que *efectivamente* se logra.

- La primera está formada por los resultados que están orientados a la verificación del método y comprobar su validez. Lo que se hace es cotejar los datos obtenidos con resultados conocidos por otros medios. Se estudió la estructura de la ecuación de flujo (truncación, relevancia de los términos), se cotejó la relación entre las funciones de dos y tres puntos, y se comprobó que se recuperan los resultados de la teoría perturbativa en el régimen donde es aplicable.
- La otra categoría la forman aquellos resultados que, por ser originales, no tenemos información con la cual contrastar. Se estudió la incidencia del ángulo entre los impulsos sobre el flujo de la función a tres puntos. Además se extrajo el exponente crítico η a partir de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, cuyo valor está dentro de las barras de error de los valores aceptados con métodos de calidad equivalente (expansión en derivadas en el orden dominante y LO del método BMW utilizando LPA').

El algoritmo descrito en la sección anterior se implementó en FORTRAN77 y fue ejecutado para varias configuraciones de los parámetros del sistema. Como punto de partida consideramos un sistema que ya se encuentra renormalizado en el ultravioleta a la escala Λ . En adelante, todas las cantidades dimensionadas (constante de acoplamiento, impulsos, etc.) serán medidas en unidades de Λ (es decir, $\Lambda = 1$ en estas unidades). *El sistema posee solo una escala característica dada por el valor de la constante de acoplamiento u_0 .* En estas unidades, $u = K_d u_0$, siendo K_d la constante de integración angular.

Los regímenes ultravioleta o infrarrojo se caracterizan respectivamente por impulsos mucho mayores o mucho menores que u_0 . Para poder alcanzar estos regímenes numéricamente la constante de acoplamiento u fue variada en el intervalo entre 10^{-6} y 10^{-2} (no es posible estudiar todos los regímenes simultáneamente porque se pierde la estabilidad del programa). Para un valor dado de u , habiendo ajustado el valor de r , los impulsos p , q y s se toman en un intervalo de acuerdo al régimen buscado. Se consideraron diferentes posibilidades: mantener los módulo de p y q fijos mientras el ángulo entre ellos varía, o mantener el ángulo fijo mientras se varía el módulo de uno de ellos, etc. Recordemos que $s = -p - q$ queda determinado por p , q y el ángulo entre estos (4.5). En la tabla 4.1 se muestran algunas de las configuraciones utilizadas más adelante.

En general el valor de u y el de los impulsos gobiernan el flujo de la función de correlación. Una vez que κ se hace mucho menor que todos ellos el flujo se frena. También el flujo es lento al comienzo, mientras κ es mucho mayor que u y los impulsos. Entonces

⁴De forma equivalente, se pueden considerar las cantidades en relación a Λ . Por ejemplo escribiendo las ecuaciones para p/Λ en lugar de p , para u_0/Λ^{4-d} en lugar de u_0 , etc.

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Configuraciones	λ_1	λ_2	ángulo θ
Simétrica $p = q = s$	1.000	1.000	120°
Antiparalela, $q = -p$	1.000	0.000	180°
Particular, no simétrica	0.500	0.620	150°
q pequeño, ángulo agudo	0.100	1.054	60°
q pequeño, ángulo recto	0.100	1.100	90°

Tabla 4.1.-Varias configuraciones de impulsos utilizados, con sus proporciones y ángulos

las variaciones importantes sólo ocurren dentro del intervalo definido por estos, lo cual se comprueba en todas las gráficas que muestran el flujo de las funciones $\Gamma_{\kappa}^{(3)}/\phi$ o $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ (se puede verificar por ejemplo en las figuras 4.5 y 4.9).

Es importante aclarar que, en el caso del régimen UV, fue suficiente estudiar directamente la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}/\phi$, mientras que para el régimen IR fue necesario utilizar la función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y reconstruir $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ a partir de ésta, mediante la relación (3.9). Si bien la última estrategia se puede utilizar en el caso UV, la diferencia lograda es pequeña en comparación con la primera, y en algunos casos incluso resulta menos estable a medida que nos acercamos al final del flujo. Ambas estrategias fueron puestas en práctica para una gran diversidad de configuraciones en el UV; a partir de los resultados obtenidos se depende lo anterior.

Todos los cálculos se efectuaron en dimensión $d = 3$. El programa puede ser adaptado para usar una dimensión d arbitraria sacrificando, no obstante, las expresiones analíticas de la integral $J(p)$.

4.3.1. Truncación de la ecuación de flujo

En una primer fase del desarrollo de los programas se estudió la versión truncada de la ecuación de flujo para la función de correlación, de acuerdo con lo explicado en la sección 3.2. En este caso no aparecen los términos que corresponden a las integrales

I y K , y la ecuación estudiada resulta la (3.18),

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)_{\rho \rightarrow 0} = & \left\{ \partial_{\rho} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left(\Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \right\} \\
 & \times \left[\partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right) J(p) + \partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right) J(q) + \partial_{\rho} \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) J(s) \right] \\
 & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) \right) J(p) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\
 & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) \right) J(q) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\
 & - \frac{1}{2} \partial_{\rho} \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right\} \left[2 \left(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) \right) J(s) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) J(0) \right] \\
 & + \frac{3}{2} \partial_{\rho} \left[\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) \right]^2 J(0) \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Se espera que esta versión truncada del flujo dé buenos resultados para $\rho \rightarrow 0$, y todas las cantidades físicas pueden en principio encontrarse en esta versión de manera aproximada. Más adelante fue posible hacer una comparación con la versión completa de la ecuación de flujo. La comparación se muestra para los regímenes IR y UV en las figuras 4.2 y 4.3 respectivamente, utilizando una configuración simétrica de impulsos apropiada a cada caso.

En el caso IR ($u = 10^{-2}$), para $\rho \cong 0$ los resultados con y sin truncación prácticamente se superponen. Al considerar ρ mayores aparecen diferencias apreciables entre ambos métodos, como era de esperarse (en la figura se observan los resultados para $\tilde{\rho} = 10$, el mayor valor considerado en el programa a los efectos de esta comparación).

En cuanto al régimen UV ($u = 10^{-6}$) la versión truncada funciona razonablemente bien al comienzo del flujo pero se separa luego cuando $\kappa \sim u_0$. La solución proveniente de la ecuación completa también se desestabiliza (aunque en menor grado) si no se utiliza el método de doble ajuste. Mientras que la solución truncada muestra una dependencia importante en ρ , la solución completa en el régimen UV resulta prácticamente independiente de este. Tal independencia está de acuerdo con lo visto en la sección 3.3 para el régimen perturbativo. Veremos en la sección 4.3.3 que este régimen es correctamente recuperado por el programa.

Todas estas curvas fueron determinadas a partir de la ecuación de flujo para $\Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}$. Cuando se calcula directamente $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ a partir de su ecuación de flujo (sin usar $\Delta \Gamma_{\kappa}^{(3)}$ como intermediaria), la versión truncada da un flujo trivial con $\Gamma_{\kappa}^{(3)} = \text{const.}$ en el

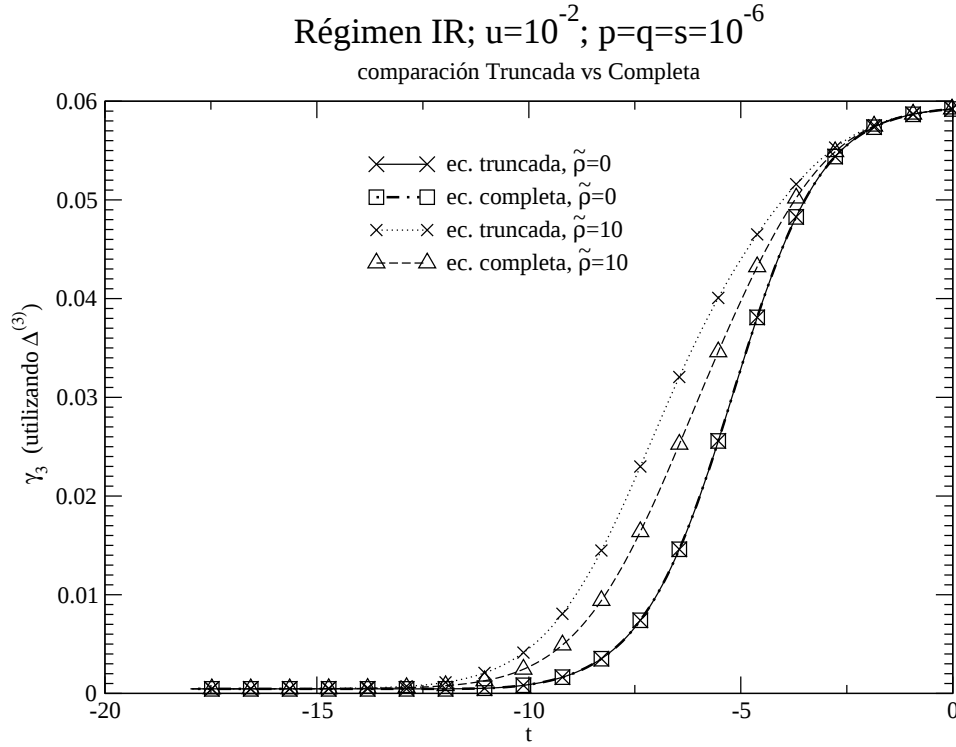


Fig. 4.2.-Comparación de la función a tres puntos en el régimen infrarrojo.
En la configuración simétrica, se comparan el resultado de usar la ecuación truncada (se desprecian los términos con I y con K) con la ecuación completa.

régimen UV; la versión no truncada también da el comportamiento correcto en este caso.

4.3.2. Comparación entre $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y la derivada de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$

La información más novedosa respecto a la función a tres puntos proviene de configuraciones de impulso tales que p , q y s no son demasiado disímiles. Cuando uno de ellos es mucho menor que los otros, entonces forzosamente se trata de una configuración *antiparalela*. Por ejemplo, si $s = |-p - q| \approx 0$ entonces debe cumplirse $q \approx -p$, y recíprocamente (análogo si $p \approx 0$ o $q \approx 0$; los impulsos son tratados de manera simétrica). En una configuración antiparalela se cumple, de acuerdo con (2.65)

$$\frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)}{\partial \rho} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, 0)}{\phi} \quad (4.9)$$

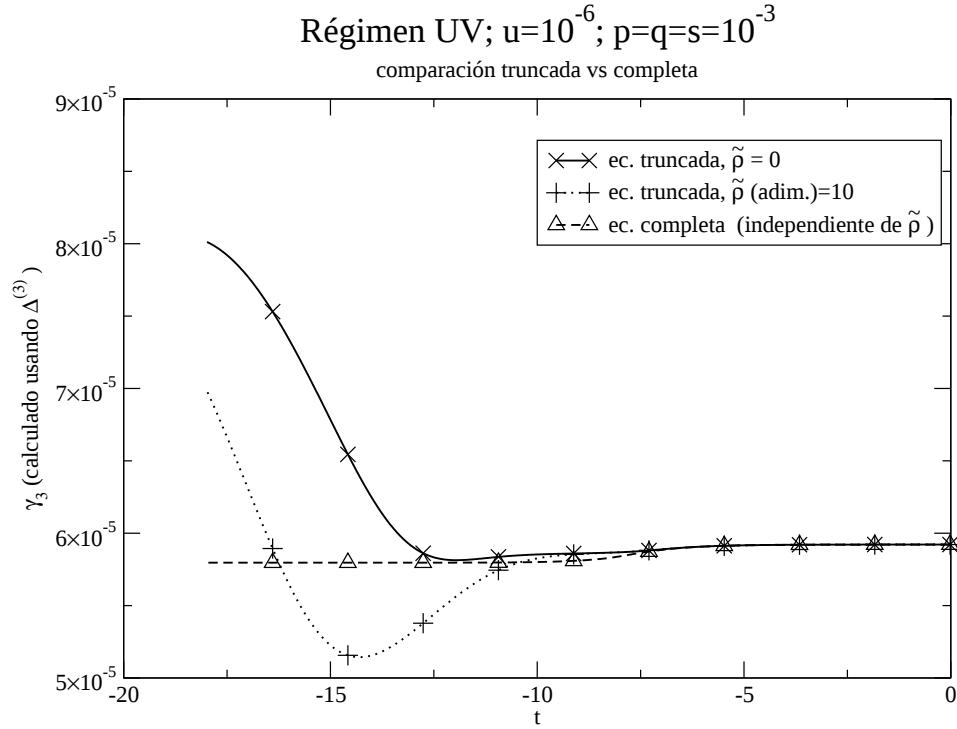


Fig. 4.3.-Comparación de la función a tres puntos en el régimen ultravioleta.

En la configuración simétrica, se comparan el resultado de usar la ecuación truncada (se descartan los términos con I y con K) con la ecuación completa. Para construir esta última se utilizó el método de doble ajuste.

(usando $\rho = \frac{1}{2}\phi^2$). A efectos de verificación del programa de cálculo, esta relación puede comprobarse numéricamente, calculando independientemente el lado izquierdo y el lado derecho.

Esta última ecuación es en cierto modo lo que conduce a la utilización de la función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$. Primero, la parte más importante del flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ queda determinado por los términos de la función a dos puntos asociados a las derivadas $\partial_{\rho}\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$, $\partial_{\rho}\Gamma_{\kappa}^{(2)}(q)$ y $\partial_{\rho}\Gamma_{\kappa}^{(2)}(s)$. La contribución proveniente de términos “genuinos” de la función a tres puntos es pequeña en comparación. Extraer y examinar esta contribución⁵ es un camino numéricamente desfavorable, dado que implica la sustracción de números cuya diferencia es muy pequeña. Al utilizar $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ en lugar de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, la sustracción ya se ha efectuado desde un principio, analíticamente, de modo que se evita el problema numérico.

Segundo, complementando lo anterior, la identidad anterior es **exacta** y constituye un punto de anclaje para el flujo de las funciones de correlación. Pero resolviendo indepen-

⁵O sea hallar $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ vía $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ y las derivadas de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$.

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

dientemente las ecuaciones de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ y $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ esta identidad solo se satisface de manera aproximada. La causa es que está en juego la aproximación BMW, que si se aplica en forma directa, no la toma en consideración. La solución, claramente, está en la introducción de la función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, gracias a lo cual, esta identidad está impuesta *implícitamente* a lo largo de todo el flujo.

Para ciertas elecciones de impulsos y constante de acoplamiento, el programa que resuelve directamente la ecuación de flujo de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ es suficientemente estable de todos modos, y no hace falta en ese caso recurrir al programa que sí utiliza $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$. Este es el caso del régimen UV, donde de hecho, el programa de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ puede llegar a resultar más inestable. Este régimen constituye el terreno conocido de la teoría de perturbaciones. Esto resulta útil en cuanto que permite verificar en parte que los cálculos son correctos (como vamos a ver a continuación), pero el interés principal de este trabajo está en el régimen opuesto, el régimen IR, que queda fuera del alcance de los métodos perturbativos. Es allí donde uso de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ es crucial.

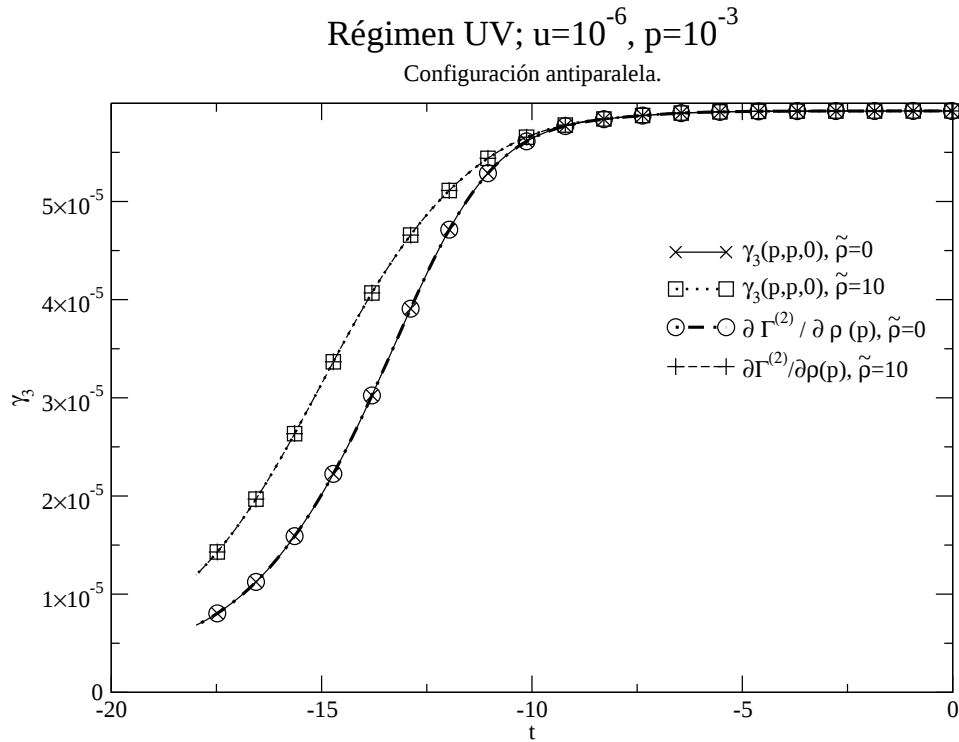


Fig. 4.4.-Comparación entre $\partial_{\rho}\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$ y $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q = -p, 0)$.

4.3.3. Régimen UV y resultados perturbativos

La región ultravioleta para los impulsos se caracteriza por impulsos muy grandes, tales que, por ejemplo, $p \gg u_0$. En esas condiciones la constante de acoplamiento es comparativamente muy pequeña, y por lo tanto son aplicables los resultados perturbativos. La condición de validez es, justamente, que la intensidad de las interacciones sea pequeña, y esta viene dada por el valor de u_0 (en la proximidad de un punto crítico solo hay dos escalas físicas para el sistema: la escala de los impulsos y la escala de las interacciones).

Entonces, si tomamos impulsos mucho mayores que u , esperamos que se cumpla la relación perturbativa (3.23) a un loop:

$$\frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)}{\phi} \cong u_0 - \frac{u_0^2}{16} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \right) \quad p, q, s \gg u_0, \kappa \rightarrow 0$$

El programa se corrió en la configuración simétrica para varios valores de $p \gg u_0$. En la figura 4.5 se representan los valores de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, p)/\phi$ en $\kappa \rightarrow 0$ para $\tilde{\rho} = 0$ y $\tilde{\rho} = 5$ (la dependencia en $\tilde{\rho}$ es muy débil en el UV), en función de p .

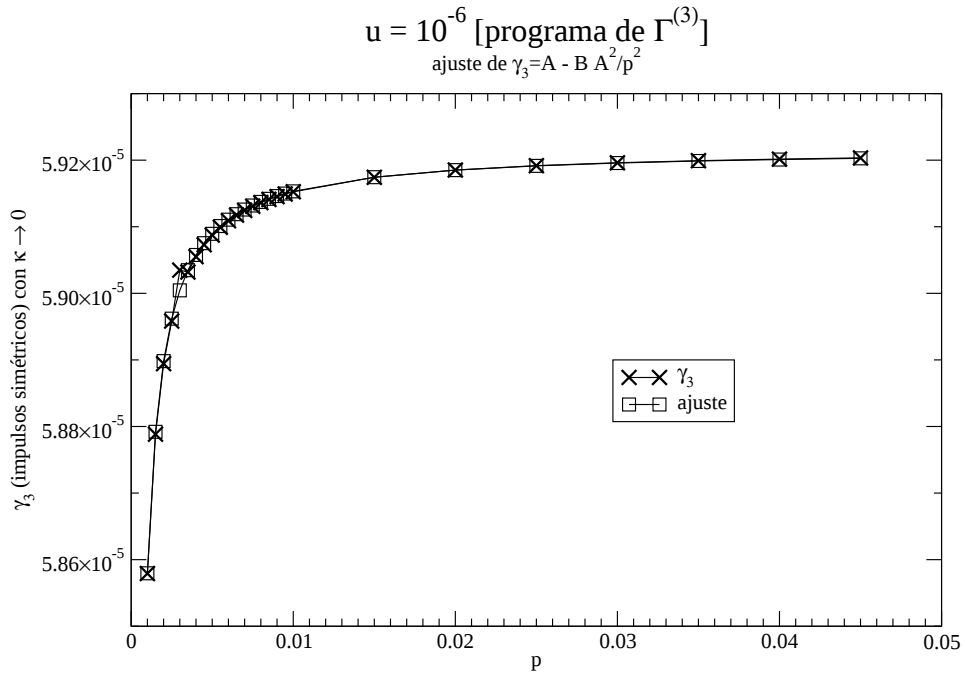


Fig. 4.5.-Régimen perturbativo para la función a tres puntos.

Los datos se ajustan satisfactoriamente al cálculo perturbativo en el régimen ultravioleta

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Los valores se ajustaron por regresión a la forma (3.23) con $p = q = s$. Usando los parámetros A y B para escribir

$$\frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\phi} = \gamma_3 = A - B \frac{A^2}{p^2} \quad (4.10)$$

se encuentra

$$A = 5,9217 \times 10^{-5}, \quad (4.11)$$

$$B = 0,1818. \quad (4.12)$$

Los valores teóricos correspondientes para ellos son, respectivamente,

$$A = u_0 = 6\pi^2 u = 5,9218 \times 10^{-5}, \quad (4.13)$$

$$B = 3/16 = 0,1875, \quad (4.14)$$

de manera que los errores cometidos representan un porcentaje de diferencia $\Delta A \sim 0,001\%$ y $\Delta B \sim 3\%$ con respecto a sus valores previstos. El pequeño error es consecuencia de que en el régimen UV el flujo de la función se detiene muy rápidamente, cuando κ es cercano a su valor inicial. Entonces, el valor de la función apenas evoluciona y no se aleja de su valor en $\kappa = \Lambda$, es decir, $u_0 = A$. Se puede decir que la concordancia con el régimen UV está impuesta numéricamente.

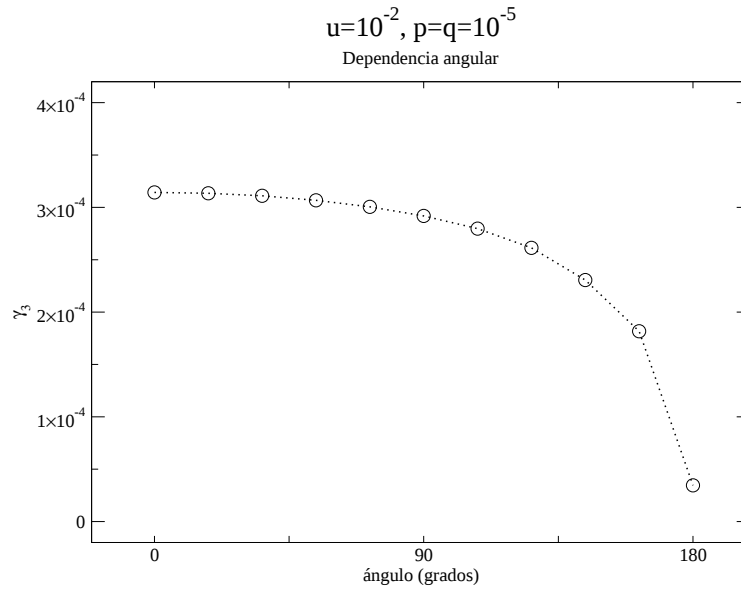
Se puede percibir en la figura una (muy) leve mejora en la calidad del ajuste a medida que los impulsos considerados son cada vez mayores, lo cual es razonable tomando en cuenta que cuanto mayor es el impulso, la condición del régimen UV se verifica más eficazmente.

4.3.4. Dependencia angular

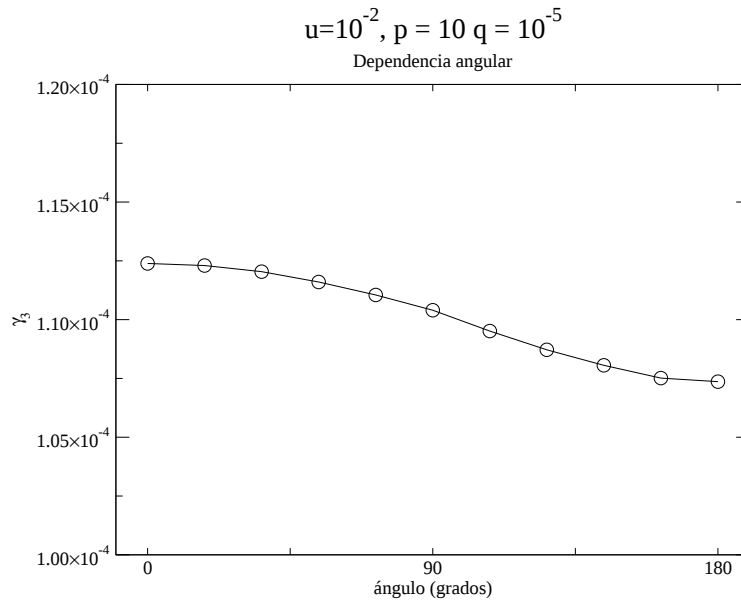
Se estudió la dependencia con el ángulo que forman p y q , manteniendo sus módulos fijos. En las figuras 4.6(a) y 4.6(b) se muestran los resultados en el régimen infrarrojo con $u = 10^{-2}$. En la primera $p = q = 10^{-5}$ y en la otra $p = 10^{-5}$ y $q = 10^{-6}$. El ángulo fue variado entre 0 y 180 grados (180 grados da lugar a la configuración antisimétrica cuando $p = q$). Gracias al tratamiento simétrico dado a los vectores p , q y s de la función a tres puntos, cualquier elección de impulsos se puede reordenar, permutando p , q y s , para obtener una configuración tal que $p \geq q \geq s$.

La gráfica de los valores finales ($\kappa \rightarrow 0$) en función del ángulo muestra que hay un pequeño decrecimiento monotónico al ir desde la configuración antiparalela hacia la si-

métrica. Se puede observar que en el régimen IR la dependencia con el ángulo es muy pequeña; las curvas del flujo quedan casi superpuestas para todos los ángulos. Para $p = q$ las diferencias son más marcadas; cuando $q = p/10$ la dependencia con el án-



(a) $p = q$



(b) $q = p/10$

Fig. 4.6.-Dependencia angular de la función a tres puntos en el régimen IR

Se representan los valores de $\frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ cuando $\kappa \rightarrow 0$ y en $\rho = 0$ (no hay una dependencia significativa en el campo $\tilde{\rho}$ en estas condiciones; ver figura 4.9).

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

gulo disminuye considerablemente (considérense las escalas verticales en las figuras 4.6(a) y 4.6(b)).

Se constata que la dependencia sobre los ángulos disminuye a medida que pasamos del régimen IR al régimen UV, a tal grado que las curvas se vuelven indistinguibles. En pleno régimen UV, incluso se pierde la dependencia en los impulsos: $\frac{1}{\phi}\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) = u_0 = \text{const.}$, de acuerdo con lo discutido en la sección 4.3.3. En la figura 4.8 se muestra γ_3 en $\kappa \rightarrow 0$, para $u = 10^{-6}$ y varios impulsos tales que $p, q \gg u_0$. Se consideran distintos ángulos θ entre 0 y 180 grados.

Hay que tener presente que, estando el impulso s determinado una vez que se dan los valores de p , q y θ (ecuación 4.5), no necesariamente se cumplirá $s \gg u_0$. Esto significa que es posible quedar lejos del régimen UV a pesar de tomar impulsos p y q muy grandes. Un ejemplo ocurre en la configuración antisimétrica, con $p = q$ y $\theta = 180^\circ$. Cuando ciertas combinaciones de impulsos externos se anulan en las funciones de correlación se habla de una **configuración excepcional**. En la figura 4.8 los puntos próximos a una configuración excepcional se alejan del valor perturbativo $\gamma_3 = u_0$; la configuración antisimétrica corresponde a $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, 0)/\phi = \partial_p \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$ (sección 4.3.2)⁶.

Lo anterior también explica la diferencia entre las figuras 4.6(a) y 4.6(b). Cuando $p = 10q$, tanto $|p + q|$ como $|p|$ resulan grandes en comparación con $|q|$. Si $p, s \gg q$, entonces se cumple que $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, |p + q|) \sim \partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)/\partial \phi$, independientemente del ángulo. En cambio, cuando $|p| = |q|$, $|p + q|$ varía entre $2p$ y 0 al variar el ángulo entre los vectores. En tal caso, la dependencia de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ con el ángulo es mucho más acentuada, ya que pasamos de una situación con $s \gg u_0$ a una con $s = 0$.

4.3.5. Régimen IR y leyes de potencia

La comprobación numérica de la ecuación (3.27) cuando $\kappa \rightarrow 0$

$$\frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\phi}(p, p, p) = Cp^{4-d-2\eta} \quad \kappa \ll p \ll u$$

en el régimen IR indica en primer lugar la existencia de un régimen invariante de escala en el sistema, y permite además la determinación del exponente η . En la figura 4.9 se

⁶ La escala de la figura 4.7 se escogió para que se pueda apreciar que $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ no es constante, lo que hace que algunos de los puntos con $\theta = 180^\circ$ queden fuera de la gráfica.

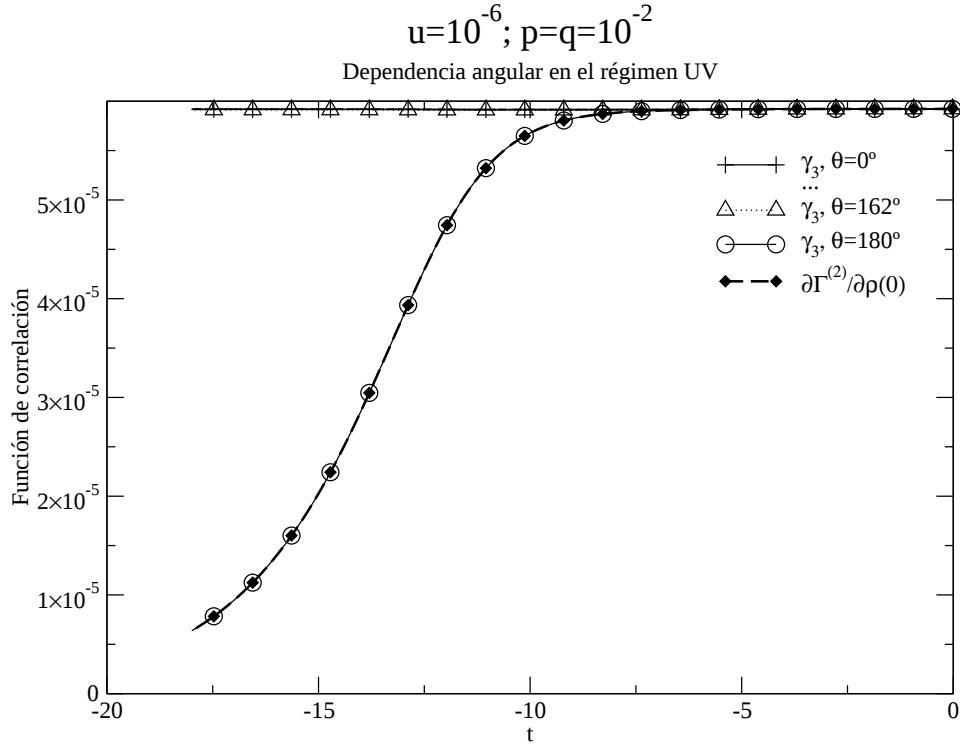


Fig. 4.7.-Flujo de la función de correlación para configuraciones con diferentes ángulos, en el régimen $p, q \gg u_0$.

Mientras s verifica $s \gg u_0$, la función de correlación se mantiene próxima a su valor perturbativo (régimen UV) que corresponde simplemente a $\gamma_3 \cong u_0 = \text{const.}$. La condición para s puede dejar de cumplirse en una configuración excepcional. En la configuración antisimétrica ($p = q, \theta = 180^\circ$) la función a tres puntos coincide exactamente con la derivada de la función a dos puntos.

muestra el flujo de $\Gamma_\kappa^{(3)}$ en este régimen. El comportamiento cualitativo en este régimen es generalmente el mismo. Al comenzar el flujo, éste se encuentra dominado por la escala de u_0 ; tal es así que para los distintos valores de impulsos (mucho menores que u_0) las funciones de correlación resultan indistinguibles y se comportan como si los impulsos fueran nulos, en tanto estos sean mucho menores que la escala κ . Cuando κ se acerca a los valores de los impulsos, la función de correlación se desprende del comportamiento de impulsos nulos y poco después alcanza su valor estacionario. Esto se manifiesta claramente al superponer las curvas para distintos valores de impulsos.

Como era de esperarse, también sucede que para cada valor de $\tilde{\rho}$ las curvas siguen una trayectoria que inicialmente es distinta una de otra, pero finalmente todas convergen al mismo valor al final del flujo. Esto se manifiesta en la figura 4.9. Por la definición (2.58) de $\tilde{\rho}$ en términos de ρ y κ , cuando κ tiende a cero también lo hace $\tilde{\rho}$,

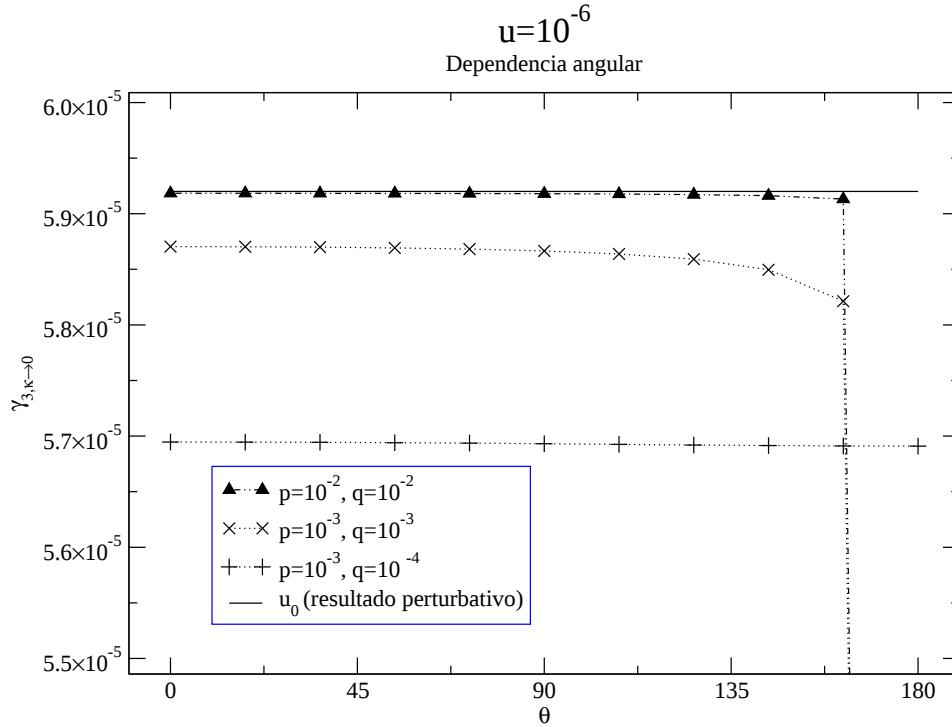


Fig. 4.8.-Dependencia angular de la función a tres puntos en el régimen UV.

La teoría perturbativa indica que la función a tres puntos, cuando κ va a cero, es constante en el régimen UV, y que $\gamma_3 \cong u_0$. Esto se constata perfectamente para los impulsos más grandes, excepto cuando ocurre una configuración excepcional (puntos fuera de la gráfica).

de manera que lo que observamos son las funciones de correlación en un campo nulo.

Determinación del exponente η

En la figura 4.10 están representados los valores de γ_3 en la configuración simétrica, en el final del flujo cuando $\kappa \rightarrow 0$, en función del impulso p . La gráfica está en escala logarítmica (*log-log*). Se aprecia que los puntos yacen en una recta, y eso señala una ley de potencia – al menos simple vista–; la ley de potencia es sinónimo de que el sistema posee invarianza de escala (sección 3.3). La pendiente corresponde al exponente previsto, $4 - d - 2\eta$, pero extraer el exponente crítico directamente de esta curva (por ejemplo por mínimos cuadrados) no tiene una precisión suficientemente satisfactoria.

En realidad los puntos en los extremos se separan del comportamiento de ley de po-

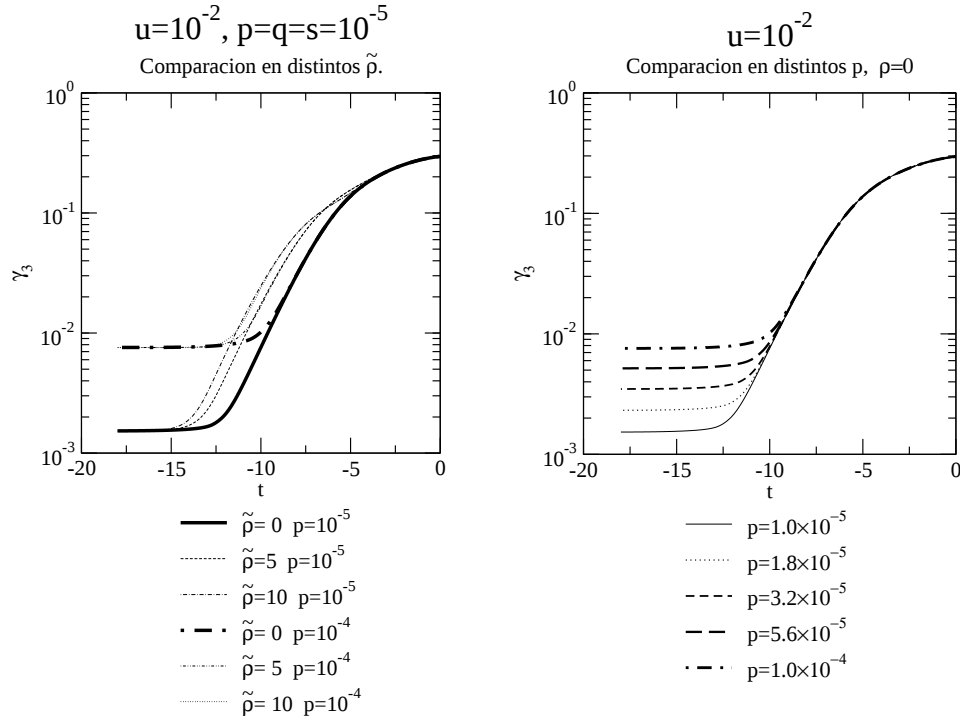


Fig. 4.9.-Régimen IR.

Flujo de la función a tres puntos, para diferentes valores de campo con impulsos fijos (a la izquierda) y distintos valores de impulso en campo nulo (a la derecha).

tencia (esto se manifiesta, por ejemplo, al trazar una recta por los puntos de la figura 4.10). Los puntos con los impulsos más grandes están abandonando la región del régimen infrarrojo. Por otra parte, cuanto más pequeño es el impulso, más tarda en detenerse el flujo de la función de correlación correspondiente (recordemos que las magnitudes que gobiernan el flujo son la constante u_0 y los impulsos p , puesto que son las únicas con dimensiones físicas; estamos considerando $\kappa \rightarrow 0$, así que $\kappa \ll u_0$ y entonces u_0 ya ejerció su influencia mucho antes). Si el impulso es demasiado pequeño, entonces $\kappa \not\ll p$, y el sistema posee una escala física dada justamente por tales impulsos.

El método siguiente es más apropiado para determinar el exponente η . Elegimos primero un valor η_c como candidato y dividimos los valores de γ_3 en el final del flujo entre $p^{4-d-2\eta_c}$. Si el valor de η_c está próximo al valor real de η , entonces los cocientes, de acuerdo con (3.27), deben ser

$$\frac{1}{\phi} \frac{\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p, p)}{p^{4-d-2\eta}} = C = \text{const.} \quad (4.15)$$

CAPÍTULO 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Con esta técnica es posible encontrar η ensayando varios valores de η_C y examinando los valores dados por (4.15) en función de p , los cuales deben, de hecho, ser independientes de p para el valor de η_C correcto. En la figura 4.11 se muestra un ejemplo para $u = 10^{-2}$ y varios valores de impulso en la configuración simétrica (nótese la escala logarítmica en el eje horizontal).

Régimen IR; $u=10^{-2}$, $p=q=s \ll u$

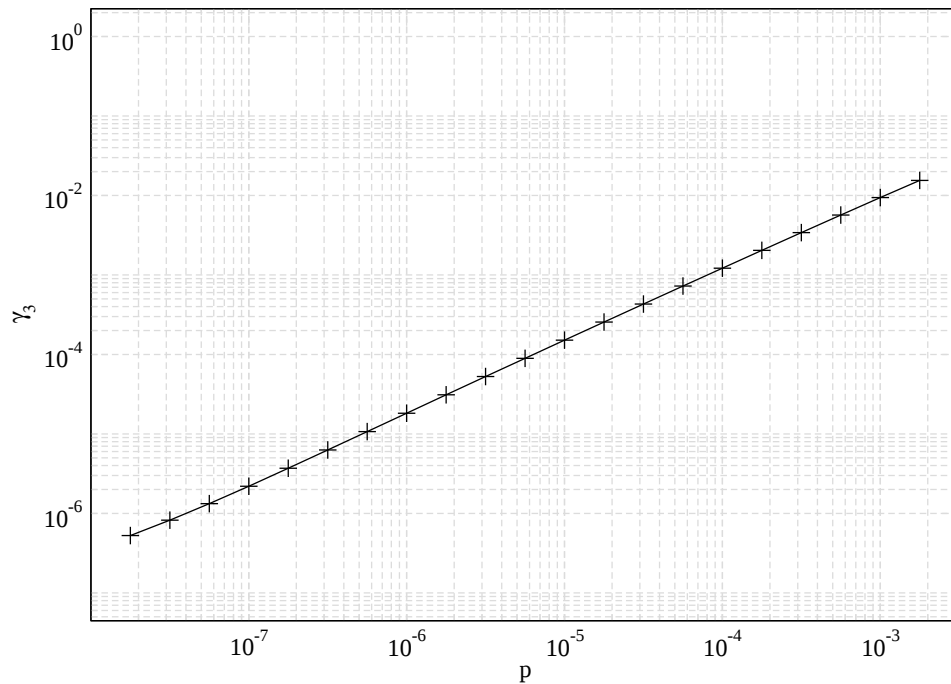


Fig. 4.10.-Ley de potencia en el régimen infrarrojo.

Se representan los valores de la función de correlación a tres puntos en función del impulso p en la configuración simétrica, con $p \ll u_0$. Se aprecia la ley de potencia esperada en este régimen.

En la figura 4.11 se muestran los resultados del procedimiento descrito, utilizando valores de η_C entre 0,03 y 0,06. Podemos encontrar así el valor más verosímil del exponente crítico. En estas curvas se aprecia mejor que la ley de potencia se cumple dentro de un amplio rango de valores de impulsos, dejando de valer en los extremos. Para los impulsos más grandes, se comienza a perder la condición del régimen IR, $p \ll u_0$. Para los impulsos que son demasiado pequeños, el flujo aún no se ha acercado lo suficiente al punto fijo en el momento considerado (la limitación de la precisión del cálculo numérico impide avanzar fácilmente más allá de los puntos mostrados).

En la región central, entre $p = 10^{-7}$ y $p = 10^{-5}$, las curvas son suficientemente planas.

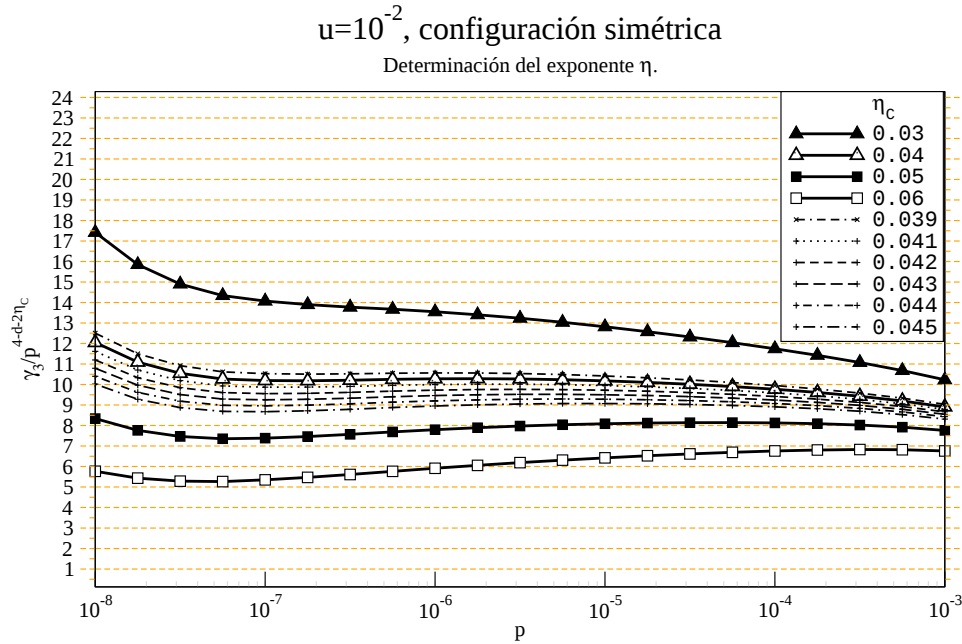


Fig. 4.11.-Determinación de η .

Se muestran los cocientes descritos por (4.15), considerando valores de η_c entre 0,3 y 0,6.

Para los valores practicados con η_c entre 0,039 y 0,045 los valores de la función de correlación varían menos de un 10 % en el rango de impulsos considerado. Si nos limitamos a esa región, podemos afirmar que el exponente crítico vale $\eta = 0,04$. El resultado tiene una sola cifra significativa, dado que estas curvas no permiten distinguir un valor con dos cifras significativas.

Para comparar, el valor determinado en forma análoga a partir de la función a dos puntos, usando el método de aproximación BMW+ LPA' es $\eta = 0,052$ (ver tabla 2.4), el cual tiene mayor precisión numérica. Los resultados son, por lo tanto, razonablemente compatibles.

Es importante tener presente que en ambos casos la precisión del cálculo global es muy alta; el error es relativamente grande sólo en la determinación del exponente de una ley de potencia.

En el próximo y último capítulo se sintetizan los resultados y se discuten dentro un contexto más amplio.

5. Conclusiones

La determinación de la función de correlación a tres puntos ha sido el objetivo de este trabajo. Examinemos si se ha alcanzado este objetivo.

5.1. Síntesis

A través de los resultados examinados en el capítulo 4 se ha corroborado que el cálculo de la función de correlación a tres puntos cumple todas las exigencias derivadas del conocimiento *a priori* de sus propiedades. Este conocimiento proviene del estudio analítico en dos casos extremos: a distancias muy pequeñas, microscópicas (correspondiente a impulsos muy grandes, en la llamada región ultravioleta), o a distancias muy grandes, macroscópicas (correspondientes a impulsos muy pequeños, en la llamada región infrarroja).

En estos casos extremos las propiedades analíticas de las funciones de correlación se simplifican y muchas de sus características se pueden predecir sin necesidad de recurrir a los métodos del grupo de renormalización no perturbativo, ni a aproximaciones subsecuentes basadas en éste, como es el caso de la aproximación BMW

En la sección 4.3.3 comprobamos que el programa que implementa la aproximación BMW junto con la aproximación LPA' discutida en la sección 2.2.3 reproduce los resultados perturbativos de manera satisfactoria. Tomando los impulsos y la constante de acoplamiento correspondientes, el error relativo con respecto a los valores de la teoría perturbativa en los coeficientes del ajuste de la ecuación (4.10) en el caso mostrado es considerablemente pequeño (recordemos que los valores hallados de los coeficientes A y B se hallan muy próximos al valor previsto, ecuaciones 4.11 y 4.13). Además, como se refleja en la figura 4.5, los puntos obtenidos no presentan una gran dispersión con respecto al valor esperado, si no que las curvas prácticamente se superponen. Por

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

consiguiente, el régimen ultravioleta, bajo las aproximaciones mencionadas, está correctamente descrito por la teoría perturbativa¹.

En la sección 4.3.5 estudiamos el otro régimen extremo de impulsos. Esta vez son las propiedades del régimen crítico las que nos indican las características de las funciones de correlación. En particular, la invariancia de escala fija las leyes de potencia que se deben cumplir en tal caso. Al analizar la función a tres puntos en el régimen crítico, recuperamos el comportamiento esperado; esto se refleja en la recta de la figura 4.10, o en el análisis que conduce a la figura 4.11.

El exponente de la ley de potencia queda fijado en términos de los exponentes críticos, que a su vez están fijados por la clase de universalidad a la que pertenece el sistema; en este caso, la clase de universalidad de la teoría φ^4 . El análisis presentado en la sección 4.3.5 permitió determinar el exponente de la ley de potencia, deduciendo entonces el exponente crítico η . El resultado encontrado tiene el orden de magnitud correcto. El valor de máxima verosimilitud está alrededor de $\eta = 0,04$. Cuando se utiliza la aproximación BMW al orden dominante en la función a dos puntos, acompañada con la aproximación LPA' [10], se obtiene $\eta = 0,052$. Una versión mejorada, sin utilizar la LPA', da $\eta = 0,039$ [5]. Los métodos de simulaciones Montecarlo indican $\eta = 0,036$ – en Pelissetto y Vicari [32, tabla 5] se muestran varios resultados de la literatura; el valor mostrado es un promedio de ellos; ver también la tabla 2.4.

El valor que se desprende de la función a tres puntos está más próximo al valor aceptado como correcto que el valor que surge de la función a dos puntos.

Esto resulta contraintuitivo. Las aproximaciones empleadas en ambos cálculos son las mismas. No se implementó la retroalimentación de la función a tres puntos sobre el flujo de la función a dos puntos. Se esperaría por lo tanto que el valor extraído de la función a tres puntos sea *a lo sumo* tan bueno como el extraído de la función a dos puntos, pero no mejor. No obstante, el η que se calculó con $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ está, en efecto más cercano al valor aceptado como correcto, a pesar de que el valor es menos preciso.

Podemos *especular* si este peculiar resultado se trata sólo de una casualidad o si, en cambio, hay una razón profunda detrás. Para dar cuenta de un resultado como este, deberíamos admitir que el flujo de la función a tres puntos sea (bastante) menos sensible al tipo de aproximaciones que se han empleado, es decir, la aproximación del método BMW junto a la aproximación LPA'; de esta manera los exponentes críticos aparecerían más próximos a sus valores reales que cuando se calculan con la función a dos puntos.

¹O viceversa.

Tal hipótesis debería ser puesta a prueba repitiendo los cálculos con modificaciones de algunos de los parámetros de las aproximaciones.

En cualquier caso, se recupera el comportamiento cualitativamente correcto, dictaminado por una ley de potencia; cuantitativamente el resultado para el exponente no es exacto, pero la diferencia no es excesivamente grande. El valor queda dentro de un margen de tolerancia esperable para un cálculo aproximado, y la ley de potencia *sí* se cumple. No hay que perder de vista que su exponente es $1 - 2\eta \sim 0,90$ o $\sim 0,92$, así que el exponente crítico proviene de una pequeña corrección sobre el comportamiento de la ley de potencia. La limitante está en la solución numérica, y es razonable que el cálculo vía $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ no pueda competir aún con el de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ en precisión.

En las figuras del capítulo 4 se constata además que el flujo de la función de correlación cumple las propiedades esperadas. El sistema posee en general dos escalas físicas, dadas por los impulsos y la constante de acoplamiento. Las variaciones importantes de la función de correlación ocurren cuando se incorporan las fluctuaciones en esas escalas físicas a medida que κ va recorriendo los valores desde la escala Λ hasta cero², por ejemplo en las figuras 4.7 o 4.9. El valor de $t = \log(\kappa/\Lambda)$ correspondiente a $\kappa \sim u_0 = K_d^{-1} \Lambda^{d-4} u$ es $t \sim -1,6$ para $u = 10^{-2}$ y $t \sim -9,7$ para $u = 10^{-6}$ (en forma análoga para los impulsos p, q y s).

Otro punto general que se puede apreciar es que la función a tres puntos no se aparta mucho de la derivada de la función a dos puntos correspondiente en el esquema BMW(ver ecuación 3.11). La diferencia es relativamente significativa sólo para un impulso q considerablemente grande³ en $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$. Esta propiedad y la correspondiente para la función a cuatro puntos son las que hacen posible que el orden dominante de la función a dos puntos, en el cual se aproxima $q \rightarrow 0$ en $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$, funcione adecuadamente.

También se constata que dada una configuración de impulsos, tomando diferentes valores iniciales del campo adimensionado el valor de la función al final del flujo converge a un único valor. Esto se desprende de que $\tilde{\rho}$ sea anula cuando κ va a cero.

--

² De manera más precisa, si se define un valor crítico $u_C \cong 0,1u_0$, se constata que la ecuación de flujo presenta sus variaciones más importantes en un entorno relativamente pequeño entre $\sim 0,1u_C$ y $10u_C$ aproximadamente [12].

³ En relación con κ . Notemos que en vista de la permutabilidad de p, q y s , los *tres* deben ser impulsos grandes.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Todas las propiedades analíticas que se esperaban del comportamiento de la función de correlación a tres puntos fueron recuperadas en los resultados numéricos. A partir de esto podemos confiar en que el cálculo es bueno en general, si bien la verificación completa depende de los resultados que se encuentren posteriormente a este trabajo.

5.2. Puntos para desarrollar

La función de correlación a tres puntos puede calcularse con mayor exactitud y precisión. Existen varios caminos a seguir que pueden mejorar los resultados, que pueden agruparse en mejoras respecto al cálculo numérico y en mejoras respecto a las aproximaciones realizadas. No todas las mejoras son igual de relevantes; hay que tomar en cuenta los tiempos de desarrollo en términos de cálculos analíticos y su implementación, y los tiempos de cálculo, que en general aumentan bastante, y la calidad de los resultados, que en general no aumenta tanto como uno desearía.

Mejoras en el cálculo numérico

En primer lugar se puede procurar disminuir los efectos de los errores de cálculo numérico. Para este trabajo, el cálculo numérico se implementó con una representación de los números reales de punto flotante doble precisión. La precisión de máquina⁴ en esta representación es $2^{53} \approx 10^{16}$, que corresponde a poder utilizar números en las operaciones con una mantisa de un máximo de quince dígitos (a lo sumo dieciséis). Cualquier dígito extra es descartado. Se necesita tener especial cuidado al formular sustracciones y cocientes, ya que debido a las sustracciones es posible (y probable) obtener resultados sin cifras significativas, cuando los operandos son de magnitud muy similar. Esta es parte de la razón por la que se introdujeron las funciones diferencias $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ y $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ (capítulos 2 y 3), gracias a las cuales las sustracciones más importantes son efectuadas explícitamente y no por el programa.

Sin embargo, la limitación más evidente es en la determinación de las condiciones iniciales para el régimen crítico y el reajuste (secciones 4.1.1 y 4.1.2). Como ya se dijo, para que la condición inicial corresponda *exactamente* al régimen crítico haría falta especificar las condiciones iniciales con una precisión ilimitada, lo que escapa a cualquier

⁴La precisión de máquina es el número más pequeño ϵ tal que la diferencia calculada entre 1 y $1 + \epsilon$ es no nula, esto es, es la menor diferencia entre dos números que la computadora reconoce.

forma de cálculo numérico. En vista que lo que nos interesa es permanecer cerca de la superficie crítica suficiente tiempo (no necesariamente *en* ella), este inconveniente se puede paliar iterando el proceso de reajuste.

En cuanto a utilizar técnicas de integración más sofisticadas, como el método de Runge-Kutta de paso adaptativo, introduce tanta complejidad en el programa que, en su implementación actual, no se justifica. La integración con el método de Euler funciona razonablemente bien (ver sección 4.2.3).

Las mayores diferencias entre la solución exacta para las funciones de correlación y las calculadas con el esquema presentado no provienen, de hecho, de las técnicas de cálculo, sino de las aproximaciones empleadas en las ecuaciones.

Mejoras en las ecuaciones

Desde el punto de vista de las ecuaciones usadas hay dos cambios importantes que pueden impactar favorablemente en los resultados, aunque el objetivo presente es la obtención del comportamiento correcto de la función de correlación. Los números derivados de este estudio pueden ser obtenidos de mejor manera con otros métodos.

- El primero de estos cambios consiste en abandonar la aproximación LPA' en los propagadores. En esta aproximación se utiliza un *ansatz* para la forma funcional de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$, que conduce a una expresión analítica del propagador $G_{\kappa}^{(2)}(p)$ (ecuación 2.56).

En lugar de éste, es posible considerar directamente la definición de $G_{\kappa}^{(2)}(p)$ a través de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$ y el regulador (ecuación 2.43). En ella, se utiliza para la función a dos puntos la que resulta de resolver su ecuación de flujo. En el orden dominante de la función a dos puntos, ya se ha comprobado que efectuando este cambio se producen valores para los exponentes críticos y la constante c de mucho mayor exactitud [4].

La forma explícita del propagador LPA' aparece, y fue utilizada, en la ecuación para el potencial (sección 2.2.4 y en las integrales I , $J(p)$ y $K(p, q)$ (apéndice F). Al prescindir de una forma explícita para la expresión analítica del propagador, nos vemos forzados a determinar numéricamente las integrales I , J y K . En vista de que el propagador $G_{\kappa}^{(2)}$ aparece como parte de los integrandos en las ecuaciones del NPRG, es crucial tener una densidad considerable de puntos

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

en la región de impulsos en que el integrando es relevante. Esto ocurre en un entorno de la escala móvil κ (el integrando decae rápidamente al alejarse de κ). La forma de subsistir con una grilla de tamaño sensato es escribir las ecuaciones de flujo en términos de cantidades adimensionadas, por ejemplo, en términos de $\tilde{p} = p/\kappa$ (esto también es cierto para el campo ρ , pero anteriormente discutíamos acerca del campo adimensionado $\tilde{\rho}$), con lo cual un centenar de puntos bastan para el cálculo.

Al dejar de usar la forma explícita del propagador $G_{\kappa}^{(2)}$, se hace superfluo usar una forma del regulador que sea particularmente sencilla, como el regulador de Litim (ecuación 2.24). Esto es una buena noticia, en vista de que ese regulador presenta no analiticidades que se manifiestan en sus derivadas de mayor orden. Otro efecto benigno es que los cálculos en modelos en diferentes dimensiones d presentan el mismo nivel de dificultad, de manera que no hace falta restringirse a una dimensión particular (en este trabajo usamos $d = 3$ porque usando el regulador de Litim conocemos la expresión analítica de la integral $J(p)$).

La mala noticia es que el uso de impulsos adimensionados genera derivadas parciales extra en las ecuaciones de flujo (ver sección 4.2.2). En los extremos de los intervalos de impulsos se complica el cálculo de las derivadas parciales (ver apéndice G). Pero la mayor dificultad surge de la condición de conservación del impulso total en cada función de correlación. La función a tres puntos $\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ puede ser evaluada solamente en conjuntos de impulsos $\{p, q, s\}$ tales que $p + q + s = 0$. Esta restricción hace que los bordes de la grilla de impulsos adquieran una forma extravagante⁵, y por consiguiente hallar las derivadas numéricas en los bordes se transforma en un problema delicado.

Con respecto a la grilla de impulsos, hay otro inconveniente, que nace de que el propagador en los integrandos puede aparecer evaluado en impulsos que quedan *siempre* fuera de la grilla. Esto ocurre, por ejemplo, en $G_{\kappa}^{(2)}(p + q)$: siempre habrán valores de $p + q$ superiores al valor máximo considerado de p o de q . El problema se manifiesta por ejemplo al calcular $J(p)$ numéricamente (la expresión analítica de $J(p)$ no tiene este inconveniente). Una solución para este problema ya fue utilizada para $\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$. El rápido decaimiento del integrando para grandes impulsos permite emplear expresiones aproximadas para los propagadores (ver apéndice F).

- El otro cambio trascendente respecto al estado actual del cálculo, es incorporar la información proveniente de la función a tres puntos en el flujo de la función de

⁵Por ejemplo, cuando $p = 0$, debe cumplirse $q = -s$.

correlación a *dos* puntos. Esta modificación implicará efectuar también la anterior. Por el momento, la falta de esta retroalimentación no ha impedido que la función $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ se comporte como es debido (como vimos al comienzo del capítulo), si bien este progreso por ahora no ha repercutido en la mejora de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$.

Desde luego, para acoplar el flujo de la función a dos puntos con el de la función a tres puntos hay que usar la ecuación del NPRG para $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$, sin la aproximación BMW. Resolver paralelamente la función a cuatro puntos también es preciso para lograr esto.

La búsqueda de las condiciones iniciales para el régimen crítico implican un tiempo mayor de cálculo con este procedimiento; cuando se usa desacoplada, el flujo de la función a dos puntos por sí misma se puede usar para discriminar el régimen crítico.

5.3. Comentarios finales

- La determinación de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ es una de las piezas que dentro del método BMW permiten calcular el orden siguiente al dominante (NLO) para la función de correlación a dos puntos (sección 2.3). Ya hemos visto [5] que los resultados del orden dominante (LO) están en excelente acuerdo con las cifras aceptadas para los exponentes críticos y varias magnitudes físicas (como es el caso del coeficiente c) que no pueden calcularse perturbativamente, sobre todo cuando se consideran los propagadores completos.

Por lo tanto es de esperar que la resolución del NLO, utilizando las funciones a tres y cuatro puntos, represente una corrección pequeña sobre los valores que se han obtenido hasta el momento con el LO. *Cuánto* vale la corrección cuando se usa el NLO es un dato muy importante, porque permite estimar cuánto representa el error que comete el LO. Este dato no se conoce en el presente salvo valores estimativos, basados en la dependencia de los parámetros de una familia de reguladores y por la comparación con las mejores estimaciones de la literatura.

- Si puede verificarse que, en efecto, para la teoría escalar φ^4 , el error que se comete en el LO es sumamente pequeño, es plausible la aplicación del método BMW a teorías de campo mucho más complicadas. Dentro de las teorías de

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

campo conocidas, la teoría escalar φ^4 es la más sencilla en lo que a su estructura matemática y física refiere. Por ejemplo, en la cromodinámica cuántica, que describe las interacciones nucleares fuertes, es preciso definir la teoría en un espacio-tiempo 4-dimensional (puesto que es relativista), y los campos poseen varios grados de libertad internos (vinculados al grupo de simetría de *color* de las partículas). Por supuesto que el próximo sistema a estudiar no sería este. En el grupo de investigación ya se ha estudiado el modelo $O(N)$ y actualmente se están estudiando problemas de sistemas fuera del equilibrio y de crecimiento de interfaces.

- Comenzamos con la ecuación original exacta del Grupo de Renormalización No Perturbativo para $\Gamma_\kappa^{(3)}$ para la teoría, y terminamos resolviendo una sistema de ecuaciones que incorporan un secuencia de varias aproximaciones (aproximación BMW, aproximación LPA' para los propagadores y el cálculo aproximado de la función $K(p, q)$). A pesar de los varios puntos para mejorar mencionados en la sección anterior, en el caso presente se encontraron resultados muy satisfactorios. Por ejemplo, se recupera satisfactoriamente el comportamiento correcto en los regímenes infrarrojo y ultravioleta, cualitativa y cuantitativamente.

Este éxito puede atribuirse, por una parte, a las ventajas de la utilización del NPRG, puesto que brinda un marco apropiado para el uso de las aproximaciones, especialmente la del método BMW. Por otra parte, más allá de los argumentos físicos que sugieren su pertinencia, los resultados encontrados validan *a posteriori* su empleo. Puede entonces decirse que el método BMW está justificado porque funciona.

No existe (aún) una prueba matemáticamente rigurosa de que el esquema BMW funcione correctamente en situaciones demasiado complicadas, pero los triunfos logrados por el grupo hasta el momento alientan su empleo. Para otras situaciones, recurrir al tipo de aproximaciones similares a las empleadas aquí para resolver el problema puede ser, no una elección, sino un camino ineludible. Dado que en los casos sencillos tales aproximaciones cumplen su cometido, cabe la esperanza de que lo mismo ocurra al utilizarlas en los casos más difíciles y obtener buenos resultados.

Veremos qué tiene para decirnos la función a cuatro puntos.

⁵A no ser por la trivial teoría libre.

Apéndices

A. Una interpretación de la función de correlación a dos puntos

Observemos que

$$\frac{\partial \langle m(x_1) \rangle}{\partial B(x_2)} = \frac{1}{\beta \mu_0} \frac{\partial^2 \log Z}{\partial B(x_1) \partial B(x_2)} = \beta \mu_0 G(x_1, x_2) \quad (\text{A.1})$$

lo que significa que la función de correlación determina (a menos de un factor $\beta \mu_0$) la respuesta del momento magnético m en el punto x_1 ante un cambio del campo externo B en el punto x_2 .

La función de correlación se puede medir experimentalmente mediante técnicas de difracción de neutrones por ejemplo. Los neutrones poseen un momento magnético que interactúa con el de los átomos del material ferromagnético. Si el vector de onda del haz incidente es $\mathbf{k}$ y el del difractado $\mathbf{k}'$, entonces la sección eficaz de difracción vale

$$\sigma = \sum_{x_1, x_2} \langle m(x_1) m(x_2) \rangle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. En caso de invariancia por traslaciones, para $\mathbf{q} \neq 0$ se tiene

$$\sigma \sim V \tilde{G}(\mathbf{q}) \quad (\text{A.3})$$

siendo V el volumen del sistema y $\tilde{G}(\mathbf{q})$ es la transformada de Fourier de $G(x_1, x_2)$:

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) \propto \sum_{x_1, x_2} G(x_1, x_2) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}. \quad (\text{A.4})$$

APÉNDICE A. UNA INTERPRETACIÓN DE LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN A DOS PUNTOS

Para $q = 0$ el resultado es

$$\chi \sim V\tilde{G}(q = 0). \quad (\text{A.5})$$

En teoría de campos cuántica, el papel de la función de correlación lo desempeña el **propagador**.

B. Relación entre Z_κ y η

Este apéndice discute la relación entre el factor de renormalización del campo Z_κ , el exponente crítico η y su contraparte en el NPRG, η_κ . Por supuesto, $\eta_\kappa \rightarrow \eta$ cuando $\kappa \rightarrow 0$.

El factor Z_κ es introducido a través de la aproximación LPA', en el término cinético de la acción 2.45:

$$\Gamma_\kappa = \int \frac{1}{2} Z_\kappa (\nabla \varphi)^2 + \dots$$

Por esto, las funciones de correlación van a estar relacionadas con Z_κ . En particular, la función de correlación a dos puntos $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$ o el propagador $G_\kappa^{(2)}(p)$ presentan una dependencia en Z_κ . Por otro lado, el exponente crítico η se define en términos del comportamiento de ley de potencia de la función de correlación $G^{(2)} = (\Gamma^{(2)})^{-1}$ en el régimen crítico, ecuación (1.13):

$$G^{(2)}(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$$

Cuando consideramos el régimen crítico y $\kappa \rightarrow 0$, obtenemos una relación entre η y Z_κ .

El punto clave es probar que

$$Z_\kappa|_{\kappa \rightarrow 0} \sim C \left(\frac{\kappa}{u_0^{1/(4-d)}} \right)^{-\eta} \quad (\text{B.1})$$

donde C es una constante. Esto es consecuencia de la invariancia de escala en el régimen crítico. Para llegar a este resultado, consideremos la función $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$ con $\kappa \ll$

APÉNDICE B. RELACIÓN ENTRE Z_κ Y η

$u_0^{1/(4-d)}$. La deducción está basada en Blaizot, Mendez-Galain y Wschebor [9, apéndice A]. En el régimen crítico la invariancia de escala implica

$$\frac{\Gamma_\kappa^{(2)}(p)}{\Gamma_\kappa^{(2)}(p')} = \tilde{f}\left(\frac{p'}{p}, \frac{p}{\kappa}\right) \quad (\text{B.2})$$

donde $\tilde{f}$ es una función adimensionada de sus argumentos. Esto se debe a que el cociente del lado izquierdo no puede depender de ninguna de las escalas físicas del sistema. Observemos que, aunque no está escrito explícitamente, la función $\Gamma_\kappa^{(2)}$ depende también de u_0 mientras que $\tilde{f}$ no.

Tomando $p' = 0$, podemos escribir

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p) = \Gamma_\kappa^{(2)}(0) \tilde{g}\left(\frac{p}{\kappa}\right) \quad (\text{B.3})$$

donde se define $\tilde{g}(p/\kappa) = \tilde{f}(0, p/\kappa)$. Debido a la invariancia de escala, se debe tener a su vez

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(0) \propto \kappa^2 \left(\frac{\kappa}{u_0^{1/(4-d)}} \right)^{-\eta} \quad (\text{B.4})$$

para que la función a dos puntos tenga las dimensiones físicas adecuadas y que el propagador $G^{(2)}$ tenga la forma (1.13).

Ahora observemos que Z_κ puede obtenerse de la función $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$. De acuerdo a (2.60), se cumple

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p) - \Gamma_\kappa^{(2)}(0) \cong Z_\kappa p^2 \quad \text{cuando } p \ll \kappa. \quad (\text{B.5})$$

Usando (B.3), esta diferencia se escribe como

$$\Gamma_\kappa^{(2)}(p) - \Gamma_\kappa^{(2)}(0) = \left(\tilde{g}\left(\frac{p}{\kappa}\right) - \tilde{g}(0) \right) \Gamma_\kappa^{(2)}(0) \quad (\text{B.6})$$

Cuando $p \ll \kappa$, se puede usar el desarrollo de Taylor $\tilde{g}(p/\kappa) \approx 1 + C(p/\kappa)^2$ donde C es una constante numérica. Al sustituir queda

$$\left(\tilde{g}\left(\frac{p}{\kappa}\right) - \tilde{g}(0) \right) \Gamma_\kappa^{(2)}(0) = C \left(\frac{p}{\kappa} \right)^2 \kappa^2 \left(\frac{\kappa}{u_0^{1/(4-d)}} \right)^{-\eta} = Cp^2 \left(\frac{\kappa}{u_0^{1/(4-d)}} \right)^{-\eta} \quad (\text{B.7})$$

Comparando los resultados, se deduce la relación buscada, ecuación (B.1).

Hay que tomar en cuenta que, siendo $\eta > 0$, la función Z_κ no tiende a un valor de

punto fijo cuando $\kappa \rightarrow 0$. Para adimensionar las ecuaciones de flujo apropiadamente este factor debe ser extraído [16].

La función η_κ es definida por la ecuación

$$\kappa \frac{\partial Z_\kappa}{\partial \kappa} = -\eta_\kappa Z_\kappa. \quad (\text{B.8})$$

En virtud de la forma que determinamos para Z_κ , es inmediato probar que η_κ tiene el comportamiento esperado cuando $\kappa \rightarrow 0$, es decir, $\eta_\kappa \rightarrow \eta$. La ecuación para η_κ se suele escribir como (ec. 2.50)

$$\eta_\kappa = -\partial_t \log Z_\kappa$$

La ecuación de flujo para Z_κ queda determinada por la de $\Gamma_\kappa^{(2)}$, de acuerdo con (2.60). Se puede expresar Z_κ como

$$Z_\kappa = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Gamma_\kappa^{(2)}(p) - \Gamma_\kappa^{(2)}(0)}{p^2} = \left. \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(2)}(p)}{\partial p^2} \right|_{p=0, \phi \text{ unif.}} \quad (\text{B.9})$$

La ecuación para $\partial_t Z_\kappa$ se calcula sustituyendo el resultado correspondiente para $\partial_t \Gamma_\kappa^{(2)}$ derivado respecto a p^2 , en $p = 0$. Este cálculo está efectuado en detalle en Blaizot y otros [12]. La ecuación para $\partial_t \eta_\kappa$ sigue de sustituir el resultado para $\partial_t Z_\kappa$ en (2.50). Finalmente se obtiene la ecuación (2.61).

En la implementación del programa se resuelve primero η_κ , y el valor de Z_κ en $t + dt$ se obtiene de su valor en t mediante

$$Z_\kappa|_{t+dt} = [Z_\kappa(1 - \eta_\kappa)]|_t \quad (\text{B.10})$$

(ver apéndice G).

C. Reglas de derivación para las funciones de correlación

C.1. Derivada de la función de correlación a n puntos

En el espacio de impulsos, y por la definición de las funciones de correlación,

$$\frac{\delta \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}{\delta \phi(p_{n+1})} = \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \quad (\text{C.1})$$

Se puede construir una regla diagramática para operar con los diagramas de Feynman. La derivada se puede simbolizar con el diagrama

$$\frac{\delta}{\delta \phi(p_{n+1})} \text{ [diagrama con } n \text{ patas]} = \text{ [diagrama con } n+1 \text{ patas]}$$

De manera resumida, decimos que derivar un *vértice* produce un vértice con una *pata* añadida.

C.2. Derivada del propagador

La derivada funcional del propagador $G_{\kappa}^{(2)}$ puede representarse en términos de la derivada funcional de la función $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$. Para ello consideremos primero un operador funcional $\mathbf{A}[\phi]$ que posee un inverso $\mathbf{A}^{-1}[\phi]$. Tomando la derivada funcional “ ∂ ” de la identidad $\mathbb{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, obtenemos simbólicamente

$$0 = \partial (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = (\partial \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A} (\partial \mathbf{A}^{-1}) \quad (\text{C.2})$$

APÉNDICE C. REGLAS DE DERIVACIÓN PARA LAS FUNCIONES DE CORRELACIÓN

de manera que

$$\partial \mathbf{A} = -\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \quad (\text{C.3})$$

En el espacio de posición esto se traduce a

$$\begin{aligned} \int d^d \mathbf{x}_2 \mathbf{A}(\phi; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{A}(\phi; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \delta^{(d)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \\ \rightarrow \frac{\delta \mathbf{A}(\phi; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\delta \phi(\mathbf{x}_3)} &= \int d^d \mathbf{x}'_a d^d \mathbf{x}'_b \mathbf{A}(\phi; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_a) \frac{\delta \mathbf{A}^{-1}(\phi; \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b)}{\delta \phi(\mathbf{x}_3)} \mathbf{A}(\phi; \mathbf{x}'_b, \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

y, análogamente, en el espacio de impulsos a

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \mathbf{A}(\phi; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \mathbf{A}(\phi; \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) &= (2\pi)^d \delta^{(d)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \\ \rightarrow \frac{\delta \mathbf{A}(\phi; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\delta \phi(\mathbf{p}_3)} &= \int \frac{d^d \mathbf{p}'_a}{(2\pi)^d} \frac{d^d \mathbf{p}'_b}{(2\pi)^d} \mathbf{A}(\phi; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_a) \frac{\delta \mathbf{A}^{-1}(\phi; \mathbf{p}'_a, \mathbf{p}'_b)}{\delta \phi(\mathbf{p}_3)} \mathbf{A}(\phi; \mathbf{p}'_b, \mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Estos resultados aplicados al propagador $G_\kappa^{(2)}(p_1, p_2; \phi) = \left[\Gamma_\kappa^{(2)}(p_1, p_2; \phi) + \mathbf{R}_\kappa(p_1, p_2) \right]^{-1}$ dan

$$\frac{\delta G_\kappa^{(2)}(p_1, p_2; \phi)}{\delta \phi(p_3)} = - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_\kappa^{(2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}; \phi) \Gamma_\kappa^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}; \phi) G_\kappa^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_2; \phi) \quad (\text{C.6})$$

usando la definición de las funciones de correlación y que el regulador no depende del campo ϕ :

$$\frac{\delta \left[\Gamma_\kappa^{(2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi) + \mathbf{R}_\kappa(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \right]}{\delta \phi(\mathbf{p}_3)} = \frac{\delta \Gamma_\kappa^{(2)}}{\delta \phi(\mathbf{p}_3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \phi) \equiv \Gamma_\kappa^{(3)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3; \phi) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(p)} \xrightarrow{q \rightarrow} \xleftarrow{q'} = - \xrightarrow{q \rightarrow} \begin{array}{c} p \downarrow \\ \bullet \end{array}$$

La derivada del propagador se puede simbolizar mediante la regla

D. Ecuaciones de flujo.

D.1. derivadas...

Observemos que las derivadas parciales respecto a κ se pueden reescribir mediante

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\kappa}{dt} \frac{\partial}{\partial \kappa} = \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \quad (\text{D.1})$$

Las derivadas respecto al campo ϕ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \phi \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} + 2\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

D.2. Ecuación de flujo para $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$

Tomemos la derivada con respecto a $\phi(q)$ de la

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(p'')} \left(\partial_t \Gamma_{\kappa}^{(2)} \kappa(p, p') \right) &\equiv \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)} \kappa(p, p', p'') = \\ &\int_{q_1, \dots, q_5} \partial_t R_{\kappa}(q_1^2) \frac{\delta}{\delta \varphi(p'')} \left\{ G_{(q_1, -q_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_2, -q_3, p) G_{(q_3, -q_4)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_4, -q_5, p') G_{(q_5, -q_1)}^{(2)} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{q_1, q_2, q_3} \partial_t R_{\kappa}(q_1^2) \frac{\delta}{\delta \varphi(p'')} \left\{ G_{(q_1, -q_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(q_2, -q_3, p, p') G_{(q_3, -q_1)}^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

La derivación afecta cada término salvo el regulador, ya que no depende del impulso externo. Como es usual, suponemos que todas las funciones son lo suficientemente regulares como para poder intercambiar el orden de integración, derivación,

etc.

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, p', p'') = \\
 & - \int_{\substack{q_1, \dots, \\ \dots, q_7}} \partial_t R_{(q_1^2)} \left\{ G_{(q_1, -q_6)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_6, -q_7, p'') G_{(q_7, -q_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_2, -q_3, p) G_{(q_3, -q_4)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_4, -q_5, p') G_{(q_5, -q_1)}^{(2)} \right. \\
 & \quad \left. + [\text{perm.}:(q_1, q_2) \leftrightarrow (q_3, q_4)] + [\text{perm.}:(q_1, q_2) \leftrightarrow (q_5, q_1)] \right\} \\
 & + \int_{q_1, \dots, q_5} \partial_t R_{\kappa}(q_1^2) \left\{ G_{(q_1, -q_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(q_2, -q_3, p, p'') G_{(q_3, -q_4)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_4, -q_5, p') G_{(q_5, -q_1)}^{(2)} \right. \\
 & \quad \left. + [\text{perm.}:(q_2, -q_3, p) \leftrightarrow (q_4, -q_5, p')] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{q_1, \dots, q_5} \partial_t R_{\kappa}(q_1^2) \left\{ G_{(q_1, -q_4)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q_4, -q_5, p'') G_{(q_5, -q_2)}^{(2)} \Gamma_{\kappa}^{(4)}(q_2, -q_3, p, p') G_{(q_3, -q_1)}^{(2)} \right. \\
 & \quad \left. + [\text{perm.}:(q_1, q_2) \leftrightarrow (q_3, q_1)] \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \int_{q_1, q_2, q_3} \partial_t R_{\kappa}(q_1^2) G^{(2)}(q_1, -q_2) \Gamma_{\kappa}^{(5)}(q_2, -q_3, p, p', p'') G^{(2)}(q_3, -q_1) \quad (\text{D.3})
 \end{aligned}$$

El aspecto de la ecuación anterior se simplifica considerablemente una vez que se evalúa en un campo uniforme, lo que impone conservación de impulso en cada vértice (ya que se tiene invariancia por traslaciones). Por esto, todas las integrales son en realidad en un solo impulso (los diagramas son de 1 loop). Llamando q a p' y $-p - q$ a

p'' (por la nomenclatura de la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(2)}$), se tiene ¹

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, -p - q) = & \\
 & - \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_{\kappa}(l) G(l)^2 \left\{ \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, q, -q - l) G(q + l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(q + l, -p - q, p - l) G(l - p) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, l - p, -l) \right. \\
 & + \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, -p - q, p + q - l) G(l - p - q) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - p - q, p, q - l) G(l - q) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-p - q, p + l, q - l) \\
 & + \left. \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, p, -p - l) G(p + l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p + l, q, -p - q - l) G(p + q + l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p + q + l, -p - q, l) \right\} \\
 & + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_{\kappa}(l) G(l)^2 G(l - q) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l, p, -p - q, q - l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - q, q, -l) \\
 & + \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_{\kappa}(l) G(l)^2 G(p - l) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l, q, -p - q, l - p) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - p, p, -l) \\
 & + \underbrace{2}_{\text{PERM.}} \times \frac{1}{2} \left[\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_{\kappa}(l) G(l)^2 G(l - p - q) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p, q, -l, l - p - q) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p + q - l, -p - q, l) \right] \\
 & - \frac{1}{2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_{\kappa}(l) G(l)^2 \Gamma_{\kappa}^{(5)}(p, q, -p - q, l, -l)
 \end{aligned}$$

La simetría de la función $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ en p, q y $-p - q$ es mantenida gracias a la suma las dos permutaciones correspondientes a la quinta línea de la ecuación anterior, los que acarrearán un factor $\frac{1}{2}$.

¹Recordar que $G_{\kappa}^{(2)}(\vec{p}, -\vec{p}) \equiv G_{\kappa}^{(2)}(p^2) \equiv G_{\kappa}^{(2)}(p)$, es decir, el propagador sólo puede depender del módulo del vector en este caso y mientras no haya confusión posible se suprimirá el exponente 2. Notar que por tanto $G(q) = G(-q)$. Lo mismo se aplica al regulador $R(\vec{q})$ si respeta la simetría del problema.

D.3. Ecuación de flujo para $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$

Retomando la ecuación para la función a tres puntos,

$$\begin{aligned} \partial_t \text{diagrama}_3 &= - \left\{ \text{diagrama}_3^{(1)} + \text{diagrama}_3^{(2)} + \text{diagrama}_3^{(3)} \right\} \\ &+ \text{diagrama}_3^{(4)} + \text{diagrama}_3^{(5)} + \text{diagrama}_3^{(6)} - \frac{1}{2} \text{diagrama}_3^{(7)} \end{aligned} \quad (D.4)$$

la ecuación para la función a cuatro puntos se obtiene aplicando el mismo algoritmo de derivación (los números 1, 2, 3 deben entenderse como p_1, p_2, p_3 donde además $p_1 + p_2 + p_3 = 0$). Finalmente aparecen cinco especies de diagramas:

$$\partial_t \text{diagrama}_4 = \sum_{\text{perm.}} \left\{ - \text{diagrama}_4^{(1)} - \text{diagrama}_4^{(2)} + \text{diagrama}_4^{(3)} + \text{diagrama}_4^{(4)} - \frac{1}{2} \text{diagrama}_4^{(5)} \right\} \quad (D.5)$$

donde la suma abarca todas las permutaciones (de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en $\{p_a, p_b, p_c, p_d\}$), pero considerando equivalentes los diagramas con intercambio de las patas de un mismo vértice y los diagramas que se obtienen uno de otro por reflexión. A continuación, veremos en detalle cada tipo de diagrama.

Diagrama {1}

El último diagrama de la ecuación de $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ es (no tiene permutaciones)

$$\begin{aligned} \text{diagrama}_4^{(5)} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma^{(6)}(p, p, q, -q, l, -l) \\ &\approx \Gamma^{(6)}(p, -p, q, -q, 0, 0) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R(l) G^2(l) \\ &= \frac{\partial^2 \Gamma_{\kappa}^{(4)}}{\partial \phi^2}(p, -p, q, -q) I^{(2)} \end{aligned}$$

obtenido mediante la ya clásica aproximación BMW.

Diagramas {2}

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama 2} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_1, p_2, l, -l - p_1 - p_2) G(l + p_1 + p_2) \\
 &\quad \times \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_3, p_4, l - p_3 - p_4, -l) \\
 &\approx \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_1, p_2, 0, -p_1 - p_2) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_3, p_4, p_3 - p_4, 0) \\
 &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) G(l + p_1 + p_2) \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi}(p_3, p_4, -p_3 - p_4) J(p_1 + p_2)
 \end{aligned}$$

Hay tres diagramas de este tipo tomando en cuenta las permutaciones. Se obtiene (notación abreviada ²) gracias a las propiedades de simetría de $\Gamma_{\kappa}^{(3)}$ y de J

$$\sum_{\text{perm.}} \text{Diagrama 2} = (\Gamma_{\kappa}^{(3)'}{}_{p,q,-p-q})^2 J(p+q) + (\Gamma_{\kappa}^{(3)'}{}_{p,-q,-p+q})^2 J(p-q) + (\Gamma_p'')(\Gamma_q'')J(0)$$

(D.6)

Diagramas {3}

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama 3} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_4, l, -p_4 - l) G(p_4 + l) \\
 &\quad \times \Gamma_{\kappa}^{(5)}(p_4 + l, -l, p_1, p_2, p_3) \\
 &\approx \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_4, 0, -p_4) \Gamma_{\kappa}^{(5)}(p_4, 0, p_1, p_2, p_3) \\
 &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) G(p_4 + l) \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_4) \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(4)}}{\partial \phi}(p_1, p_2, p_3, p_4) J(p_4)
 \end{aligned}$$

²Es decir $f' = \partial f / \partial \phi$, $\Gamma \equiv \Gamma_{\kappa}^{(2)}$, y se omiten la mayoría de los paréntesis de las funciones.

APÉNDICE D. ECUACIONES DE FLUJO.

Al sumar en las permutaciones y agrupar se obtiene sencillamente, gracias a las propiedades de simetría de $\Gamma_{\kappa}^{(4)}$ y J (notación abreviada)

$$\sum_{\text{perm.}} \text{Diagram} = 2\Gamma_{\kappa}^{(4)'}{}_{p,-p,q,-q} \{(\Gamma_p')J(p) + (\Gamma_q')J(q)\} \quad (\text{D.7})$$

Diagramas {4}

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l, p_1, -l - p_1) G(l + p_1) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l + p_1, p_2, -l - p_1 - p_2) \\ &\quad \times G(l + p_1 + p_2) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l + p_1 + p_2, p_3, -l + p_4) G(l - p_4) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - p_4, p_4, l) \\ &\approx \Gamma_{\kappa}^{(3)}(0, p_1, -p_1) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-p_3 - p_4, p_3, p_4) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-p_4, p_4, 0) \\ &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) G(l + p_1) G(l + p_1 + p_2) G(l - p_4) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_1) \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_4) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_3, p_4, -p_3 - p_4) L(p_1, p_2, p_3, p_4) \end{aligned}$$

Una vez sumadas las permutaciones el resultado que se obtiene es (notación abreviada)

$$\begin{aligned} \sum_{\text{perm.}} \text{Diagram} &= 2\Gamma_p' \Gamma_q' \left\{ \Gamma_p' \Gamma_q' [L(p, -p, -q, q) + L(p, -p, q, -q)] \right. \\ &\quad + [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,q,-p-q}]^2 L(p, q, -p, -q) + [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,-q,-p+q}]^2 L(p, -q, -p, q) \} \\ &\quad + [\Gamma_p']^2 [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,q,-p-q}]^2 L(p, q, -q, p) + [\Gamma_p']^2 [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,-q,-p+q}]^2 L(p, -q, q, p) \\ &\quad + [\Gamma_q']^2 [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,q,-p-q}]^2 L(q, p, -p, -q) + [\Gamma_q']^2 [\Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p,-q,-p+q}]^2 L(q, -p, p, -q) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Diagramas {5}

Hay dos versiones este tipo de diagramas:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l, p_3, p_4, -p_3 - p_4 - l) G(l + p_3 + p_4) \\
 &\quad \times \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l + p_3 + p_4, p_1, -l - p_3 - p_4 - p_1) G(l - p_2) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - p_2, p_2, -l) \\
 &\approx \Gamma_{\kappa}^{(4)}(0, p_3, p_4, -p_3 - p_4) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_1, p_2, -p_1 - p_1) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-p_2, p_2, 0) \\
 &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) G(l + p_3 + p_4) G(l - p_2) \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_2) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(3)}}{\partial \phi}(p_3, p_4, -p_3 - p_4) K(p_3 + p_4, p_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 2} &= \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_2, l, -l - p_2) G(l + p_2) \\
 &\quad \times \Gamma_{\kappa}^{(4)}(l + p_2, p_3, p_4, -l + p_1) G(l - p_1) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(l - p_1, p_1, -l) \\
 &\approx \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_2, p_3, p_4, p_1) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(-p_1, p_1, 0) \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p_2, 0, p_2) \\
 &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} R_{\kappa}(l) G^2(l) G(l + p_2) G(l - p_1) \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_2) \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(2)}}{\partial \phi}(p_1) \Gamma_{\kappa}^{(4)}(p_2, p_3, p_4, p_1) K(p_2, p_1)
 \end{aligned}$$

Luego de agrupar los términos comunes, las permutaciones obtenidas son

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{perm.}} \text{Diagram} &= \left\{ \left[\Gamma_p' \right]^2 K(p, -p) + \left[\Gamma_q' \right]^2 K(q, -q) \right\} \Gamma_{\kappa}^{(4)}{}_{p, -p, q, -q} \\
 &+ 2 \left\{ \Gamma_p' \Gamma_q' \Gamma_{\kappa}^{(4)}{}_{p, -q, q, -q} [K(p, q) + K(p, -q)] + \left[\Gamma_p' \right]^2 \Gamma_q'' K(p, 0) + \left[\Gamma_q' \right]^2 \Gamma_p'' K(q, 0) \right. \\
 &+ \Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{p, q, -p-q} \Gamma_{\kappa}^{(3)'}{}_{p, q, -p-q} \left[\Gamma_p' K(p + q, -p) + \Gamma_q' K(p + q, -q) \right] \\
 &\left. + \Gamma_{\kappa}^{(3)}{}_{-p, q, p-q} \Gamma_{\kappa}^{(3)'}{}_{-p, q, p-q} \left[\Gamma_p' K(p - q, -p) + \Gamma_q' K(p - q, -q) \right] \right\} \quad (\text{D.9})
 \end{aligned}$$

E. Demostración de la ecuación 2.65

Mostraremos una la relación entre las funciones de correlación a n y a $n + 1$ puntos en un campo externo uniforme, que es muy importante para la aplicación del método BMW (sección 2.3). La deducción que sigue es tomada de Blaizot y otros [8]; sigue las líneas de Golner [19].

Consideremos primero un campo ϕ arbitrario y la expansión de la acción efectiva alrededor un valor de campo constante ϕ_0 , en términos de las funciones de correlación:

$$\Gamma_\kappa[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n (\phi(x_1) - \phi_0) \dots (\phi(x_n) - \phi_0) \Gamma_\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi_0) \quad (\text{E.1})$$

Notemos que el término siguiente al mostrado tiene el aspecto

$$\frac{1}{(n+1)!} \int d^d y_1 \dots d^d y_n d^d y_{n+1} (\phi(x_1) - \phi_0) \dots (\phi(x_{n+1}) - \phi_0) \Gamma_\kappa^{(n+1)}(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}; \phi_0)$$

Como la acción no depende del campo constante elegido, entonces se anula la derivada con respecto a ϕ_0 :

$$\frac{\partial \Gamma_\kappa[\phi]}{\partial \phi_0} = 0 \quad (\text{E.2})$$

La derivada del término bajo la integral mostrado en el lado derecho de la expansión de $\Gamma_\kappa[\phi]$ puede agruparse en dos tipos de términos:

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_i (\phi(x_1) - \phi_0) \dots (\phi(x_{i-1}) - \phi_0) (\phi(x_{i+1}) - \phi_0) \dots (\phi(x_n) - \phi_0) \right] \Gamma_\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi_0) \\ & + (\phi(x_1) - \phi_0) \dots (\phi(x_n) - \phi_0) \frac{\partial \Gamma_\kappa^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

APÉNDICE E. DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN ??

Los n términos en que aparece $\Gamma_{\kappa}^{(n)}$ tienen $n - 1$ factores $(\phi(x_i) - \phi_0)$, mientras que sólo el término con la derivada $\partial \Gamma_{\kappa}^{(n)} / \partial \phi_0$ tiene n factores. Este último puede agruparse en la expansión (E.1) con los n términos que origina la derivación del factor con Γ^{n+1} (que no contienen a $\partial \Gamma^{n+1} / \partial \phi_0$). Estos vienen acompañados de una integral “extra” en comparación con el primero.

Del hecho que la derivada $\partial \Gamma_{\kappa}[\phi] / \partial \phi_0$ se anula para un campo $\phi(x)$ arbitrario, se deduce gracias a la agrupación descrita, que

$$\int d^d y \Gamma_{\kappa}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_n, y; \phi_0) = \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (\text{E.4})$$

El lado izquierdo puede considerarse como la transformada de Fourier de $\Gamma_{\kappa}^{(n+1)}$ sobre la variable y , en un impulso nulo (usando $e^{i0 \cdot x} = 1$). Completando la transformación para el resto de las variables, encontramos finalmente la propiedad buscada:

$$\Gamma_{\kappa}^{(n+1)}(p_1, \dots, p_n, 0; \phi_0) = \frac{\partial \Gamma_{\kappa}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (\text{E.5})$$

Esta propiedad podría preverse (a menos de factores multiplicativos) a partir de la definición de la transformación de Fourier.

F. Integrales I , J y K

F.1. Funciones de Umbral

La ecuación de flujo para una función de correlación obtenida en el formalismo del Grupo de Renormalización No Perturbativo se expresa en términos de integrales funcionales. Estas dependen de funciones de correlación de orden superior, las que sólo se pueden determinar una vez resuelto el problema. Pero gracias a la aproximación del método BMW las integrales pueden expresarse de manera aproximada, en términos de únicamente las funciones de correlación y sus derivadas, orden no mayor al de la función que se pretende resolver.

Para la ecuación de flujo de la función de correlación a tres puntos, las integrales que hay que determinar son (sección 3.1.1)

$$I_\kappa(\phi) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) \left[G_\kappa^{(2)}(l) \right]^2 \quad (\text{F.1})$$

$$J_\kappa(p; \phi) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) \left[G_\kappa^{(2)}(l) \right]^2 G_\kappa^{(2)}(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) \quad (\text{F.2})$$

$$K_\kappa(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \phi) \equiv \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) \left[G_\kappa^{(2)}(l) \right]^2 G_\kappa^{(2)}(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) G_\kappa^{(2)}(|\mathbf{q} + \mathbf{l}|) \quad (\text{F.3})$$

donde $R_\kappa(l)$ es el regulador y el propagador es

$$G_\kappa^{(2)}(p) = (\Gamma_\kappa^{(2)}(p) + R_\kappa(p))^{-1}. \quad (\text{F.4})$$

Estas funciones son una generalización de las funciones de umbral (*threshold*) introducidas en Berges y otros [6].

Las funciones $I_\kappa(\phi)$ y $J_\kappa(p; \phi)$ aparecen también en la ecuación de flujo de la función a dos puntos en el orden dominante del método BMW. Se estudian con detenimiento en Blaizot y otros [12].

Para resolverlas es preciso contar con una expresión analítica tanto para $R_\kappa(l)$ como para $G_\kappa^{(2)}(p)$. La primera es sencilla, puesto que se trata de elegir convenientemente el regulador. Para el propagador la situación es distinta ya que depende del conocimiento de la función de correlación a dos puntos. Este conocimiento surge, a su vez, de la propia resolución del problema.

Esta situación se puede atacar numéricamente. Las ecuaciones de flujo prescriben cómo determinar las funciones de correlación en $\kappa + \Delta\kappa$ a partir de sus valores en κ . Siendo suficientemente cuidadosos, se pueden determinar por integración numérica las funciones¹ I, J y K partiendo de los valores de $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$ y de $R_\kappa(l)$. Estas deben determinarse a cada paso sobre un rango suficiente de impulsos.

Otro enfoque es proponer una expresión analítica aproximada para el propagador $\Gamma_\kappa^{(2)}(p)$, con lo cual es plausible resolver analíticamente las integrales. En este trabajo se utilizó la aproximación LPA'(sección 2.2.3). A continuación veremos el resultado que se obtiene para I y $J(p)$ en dimensión tres, eligiendo el regulador de Litim. Sin embargo, la función $K(p, q)$, siendo más complicada, necesita un tratamiento semianalítico ya que no se logra completar la integración en forma cerrada.

F.2. Regulador y aproximación del propagador

Utilizamos el regulador de Litim 2.24 dado por

$$R_\kappa(l) \equiv Z_\kappa(\kappa^2 - l^2)\Theta(\kappa^2 - l^2) \quad (\text{F.5})$$

donde κ es la escala de acoplamiento móvil, Z_κ es la constante de renormalización del campo y $\Theta(x)$ es el escalón unitario. Su derivada con respecto a $t = \log \kappa$, que interviene en las integrales, es

$$\partial_t R_\kappa(l) = Z_\kappa \kappa^2 (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa \frac{q^2}{\kappa^2}) \Theta(\kappa^2 - q^2) + 2Z_\kappa \kappa^2 (\kappa^2 - l^2) \delta(\kappa^2 - q^2) \quad (\text{F.6})$$

¹Para aliviar la notación se omite la dependencia explícita de las integrales y del propagador en el campo y/o la escala κ .

La «función» $\delta(x)$ representa la derivada de $\Theta(x)$. Este regulador es no analítico, aunque los problemas se manifiestan en derivadas de orden superior.

Para el regulador, utilizamos la fórmula de la LPA' (2.56):

$$G_{\kappa}^{(2)(LPA')}(q) = \left[Z_{\kappa} q^2 + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q=0) + R_{\kappa}(q) \right]^{-1}. \quad (\text{F.7})$$

introduciendo además

$$\mu^2 \equiv \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q=0; \rho) = \frac{\partial^2 V_{\kappa}}{\partial \phi^2} \quad (\text{F.8})$$

Al sustituir el regulador, el propagador resulta

$$\begin{aligned} G_{\kappa}^{(2)}(l) &= \frac{1}{Z_{\kappa} l^2 + \mu^2 + R(l^2)} = \frac{1}{Z_{\kappa} l^2 + \mu^2 + Z_{\kappa}(\kappa^2 - l^2)\Theta(\kappa^2 - l^2)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{Z_{\kappa} \kappa^2 + \mu^2}, & l^2 < \kappa^2 \\ \frac{1}{Z_{\kappa} l^2 + \mu^2}, & l^2 > \kappa^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

F.3. Integrales

Cuando los integrandos son invariantes por rotaciones se puede efectuar la parte angular de manera general y cerrada. Podemos escribir

$$\int d^d \mathbf{l} \{ \cdot \} = S_d \int dl l^{d-1} \{ \cdot \} \quad (\text{F.10})$$

donde S_d es la superficie de la esfera d -dimensional de radio unitario

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{F.11})$$

Para lo que viene a continuación, es conveniente definir

$$K_d \equiv \frac{S_d}{d(2\pi)^d}. \quad (\text{F.12})$$

F.3.1. Cálculo de I

La integral más simple es

$$I = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R(l^2) \left[G_\kappa^{(2)}(l) \right]^2 \quad (\text{F.13})$$

Sustituyendo el propagador y el regulador queda

$$I = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{Z_\kappa \kappa^2 (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa l^2 / \kappa^2) \Theta(\kappa^2 - l^2) + 2Z_\kappa \kappa^2 (\kappa^2 - l^2) \delta(\kappa^2 - l^2)}{(Z_\kappa l^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - l^2) \Theta(\kappa^2 - l^2))^2} \quad (\text{F.14})$$

Esta integral solo recibe una contribución si $l^2 \leq \kappa^2$. Estamos considerando $x\delta(x) = 0$ para todo x (incluso si $x = 0$). Simplificando, queda

$$I = \int_{l^2 \leq \kappa^2} \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{Z_\kappa \kappa^2}{(\mu^2 + Z_\kappa \kappa^2)^2} (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa l^2 / \kappa^2) \quad (\text{F.15})$$

Realizando la integración angular según (F.10), tenemos

$$I = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{Z_\kappa \kappa^2}{(\mu^2 + Z_\kappa \kappa^2)^2} \int_{l^2 \leq \kappa^2} dl \left((2 - \eta_\kappa) l^{d-1} + \eta_\kappa \frac{l^{d+1}}{\kappa^2} \right) \quad (\text{F.16})$$

cuyo resultado es

$$I = \frac{\kappa^d K_d}{Z_\kappa \kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \left(2 - \eta_\kappa + \frac{d}{d+2} \eta_\kappa \right) \quad (\text{F.17})$$

donde $\tilde{\mu}^2$ queda definido por $Z_\kappa \kappa^2 \tilde{\mu}^2 = \mu^2$. La función I depende sólo de κ y del campo, a través de $\tilde{\mu}^2$.

F.3.2. Cálculo de $J(p)$

Con la aproximación LPA' y el regulador de Litim, la integral $J(p)$ es

$$J(p) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[\frac{Z_\kappa \kappa^2 (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa l^2 / \kappa^2) \Theta(\kappa^2 - l^2) + 2Z_\kappa \kappa^2 (\kappa^2 - l^2) \delta(\kappa^2 - l^2)}{(Z_\kappa l^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - l^2) \Theta(\kappa^2 - l^2))^2} \right. \\ \left. \times \frac{1}{(Z_\kappa (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2) \Theta(\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2))} \right] \quad (\text{F.18})$$

Reescribimos $J(p)$ en términos de las variables $\tilde{p} = p/\kappa$, $\tilde{l} = l/\kappa$ y $\cos \gamma = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}/pl$. La integral se transforma en $d = 3$, utilizando los factores $\Theta(\kappa^2 - l^2)$ y $\delta(\kappa^2 - l^2)$, en²

$$J(p) = \frac{3}{2} \frac{K_3}{\kappa Z_\kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \int_0^1 d\tilde{l} \tilde{l}^2 \int_{-1}^1 d(\cos \gamma) \times \frac{2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa \tilde{l}^2}{\Theta(1 - \tilde{l}^2 - \tilde{p}^2 + 2\tilde{l}\tilde{p} \cos \gamma) + (\tilde{l}^2 + \tilde{p}^2 - 2\tilde{l}\tilde{p} \cos \gamma)\Theta(\tilde{l}^2 + \tilde{p}^2 - 2\tilde{l}\tilde{p} \cos \gamma - 1) + \tilde{\mu}^2} \quad (\text{F.19})$$

Para completar la integral en $\cos \gamma$ se separa el dominio de integración según el valor de las funciones Θ restantes. Luego se completa la integral en $\tilde{l}$, mediante integración por partes y descomposición en fracciones simples. El resultado final queda separado en regiones según si $\tilde{p} > 2$ o $\tilde{p} \leq 2$ y según el signo de $\tilde{\mu}^2$:

■ $\tilde{p} > 2, \tilde{\mu}^2 < 0$:

$$J(p) = \frac{3K_3}{2\kappa Z_\kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \left\{ 2 + \frac{\eta_\kappa}{2} \left(-\frac{5}{3} + \tilde{p}^2 - 3\tilde{\mu}^2 \right) + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[-1 + \frac{\eta_\kappa}{4} + \left(\tilde{p} + \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} \left(\tilde{p} + \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \right) \right] \log \left(\frac{\tilde{p} - 1 + \sqrt{-\tilde{\mu}^2}}{\tilde{p} + 1 + \sqrt{-\tilde{\mu}^2}} \right) + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[-1 + \frac{\eta_\kappa}{4} + \left(\tilde{p} - \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} \left(\tilde{p} - \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \right) \right] \log \left(\frac{\tilde{p} - 1 - \sqrt{-\tilde{\mu}^2}}{\tilde{p} + 1 - \sqrt{-\tilde{\mu}^2}} \right) \right\} \quad (\text{F.20})$$

■ $\tilde{p} \leq 2, \tilde{\mu}^2 < 0$:

$$J(p) = \frac{3K_3}{2\kappa Z_\kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \left\{ -1 + \frac{\eta_\kappa}{4} + \frac{\eta_\kappa \tilde{\mu}^2}{4} + \tilde{p} \left(\frac{3}{2} - \frac{\eta_\kappa}{8} - \frac{7\eta_\kappa \tilde{\mu}^2}{8} \right) - \frac{3\eta_\kappa}{4} \tilde{p}^2 + \frac{25\eta_\kappa}{48} \tilde{p}^3 + \frac{1}{1 + \tilde{\mu}^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4\eta_\kappa}{15} - \tilde{p} + \frac{\eta_\kappa}{3} \tilde{p}^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{\eta_\kappa}{6} \right) \tilde{p}^3 + \frac{\eta_\kappa}{120} \tilde{p}^5 \right) + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[1 - \frac{\eta_\kappa}{4} - \left(\tilde{p} + \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} \left(\tilde{p} + \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \right) \right] \log \left(\frac{\tilde{p} + 1 + \sqrt{-\tilde{\mu}^2}}{1 + \sqrt{-\tilde{\mu}^2}} \right) + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[1 - \frac{\eta_\kappa}{4} - \left(\tilde{p} - \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} \left(\tilde{p} - \sqrt{-\tilde{\mu}^2} \right)^2 \right) \right] \log \left(\frac{\tilde{p} + 1 - \sqrt{-\tilde{\mu}^2}}{1 - \sqrt{-\tilde{\mu}^2}} \right) \right\} \quad (\text{F.21})$$

²En una dimensión d arbitraria el diferencial angular tiene un exponente $d/2 - 1/2$.

- $\tilde{p} > 2, \tilde{\mu}^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 J(p) = & \frac{3K_3}{2\kappa Z_\kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \left\{ 2 + \frac{\eta_\kappa}{2} \left(-\frac{5}{3} + \tilde{p}^2 - 3\tilde{\mu}^2 \right) \right. \\
 & + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[-1 + \frac{\eta_\kappa}{4} + (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \right) - \eta_\kappa \tilde{\mu}^2 \tilde{p}^2 \right] \log \left(\frac{(\tilde{p} - 1)^2 + \tilde{\mu}^2}{(\tilde{p} + 1)^2 + \tilde{\mu}^2} \right) \\
 & \left. - 2\tilde{\mu}^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{2} (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \right) \left(\arctan \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{p} - 1} - \arctan \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{p} + 1} \right) \right\} \quad (F.22)
 \end{aligned}$$

- $\tilde{p} \leq 2, \tilde{\mu}^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 J(p) = & \frac{3K_3}{2\kappa Z_\kappa^2} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \left\{ -1 + \frac{\eta_\kappa}{4} + \frac{\eta_\kappa \tilde{\mu}^2}{4} + \tilde{p} \left(\frac{3}{2} - \frac{\eta_\kappa}{8} - \frac{7\eta_\kappa \tilde{\mu}^2}{8} \right) - \frac{3\eta_\kappa}{4} \tilde{p}^2 \right. \\
 & + \frac{25\eta_\kappa}{48} \tilde{p}^3 + \frac{1}{1 + \tilde{\mu}^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4\eta}{15} - \tilde{p} + \frac{\eta_\kappa}{3} \tilde{p}^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{\eta_\kappa}{6} \right) \tilde{p}^3 + \frac{\eta_\kappa}{120} \tilde{p}^5 \right) \\
 & + \frac{1}{2\tilde{p}} \left[1 - \frac{\eta_\kappa}{4} - (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{4} (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \right) + \eta_\kappa \tilde{\mu}^2 \tilde{p} \right] \log \left(\frac{(\tilde{p} + 1)^2 + \tilde{\mu}^2}{1 + \tilde{\mu}^2} \right) \\
 & \left. + 2\tilde{\mu}^2 \left(1 - \frac{\eta_\kappa}{2} + \frac{\eta_\kappa}{2} (\tilde{p}^2 - \tilde{\mu}^2) \right) \left(\arctan \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{p} + 1} - \arctan \tilde{\mu}^2 \right) \right\} \quad (F.23)
 \end{aligned}$$

Estás expresiones se transcriben directamente en el programa de resolución del método BMW. Se han probado extensivamente las expresiones para I y $J(p)$ en diversos regímenes [12]. Al igual que en el caso de la función I , la dependencia en el campo aparece a través de $\tilde{\mu}^2$. La aparición de potencias impares de $\tilde{p}$ se puede rastrear a la discontinuidad en la derivada del regulador de Litim.

Es posible desarrollar las expresiones anteriores en potencias de $\tilde{p}$ si $\tilde{p} \ll 1$ o de $\tilde{p}^{-1}$ si $\tilde{p} \gg 1$. En efecto, en la implementación de esta función se utilizan valores de umbral para pasar de la expresión completa a la expresión aproximada si $\tilde{p}$ pertenece a alguno de los rangos extremos. Por ejemplo, si $\tilde{p} \leq 10^{-2}$, $J(p)$ se calcula a través de su desarrollo para $p \ll \kappa$ (el valor 10^{-2} , que es bastante arbitrario, brinda buenos resultados para la discretización utilizada).

F.3.3. Cálculo de $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

La expresión para la última integral que discutiremos, utilizando la aproximación LPA' y el regulador de Litim es

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[\frac{Z_\kappa \kappa^2 (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa l^2 / \kappa^2) \Theta(\kappa^2 - l^2) + 2Z_\kappa \kappa^2 (\kappa^2 - l^2) \delta(\kappa^2 - l^2)}{(Z_\kappa l^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - l^2) \Theta(\kappa^2 - l^2))^2} \right. \\ \times \frac{1}{(Z_\kappa (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2) \Theta(\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{p})^2))} \\ \left. \frac{1}{(Z_\kappa (\mathbf{l} + \mathbf{q})^2 + \mu^2 + Z_\kappa (\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{q})^2) \Theta(\kappa^2 - (\mathbf{l} + \mathbf{q})^2))} \right] \quad (\text{F.24})$$

Introducimos las variables $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\kappa$, $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/\kappa$ y $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{l}/\kappa$ y nos restringimos al caso $d = 3$. Entonces

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{3K_3}{2\kappa^3 Z_\kappa^3} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^2} \int_0^1 d\tilde{l} \tilde{l}^2 \int_{-1}^1 d(\cos \gamma) (2 - \eta_\kappa + \eta_\kappa \tilde{l}^2) \\ \times \frac{1}{(\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{p}})^2 + \tilde{\mu}^2 + (1 - (\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{p}})^2) \Theta(1 - (\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{p}})^2)} \frac{1}{(\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{q}})^2 + \tilde{\mu}^2 + (1 - (\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{q}})^2) \Theta(1 - (\tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{q}})^2)} \quad (\text{F.25})$$

Por invariancia rotacional, la función $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ sólo depende de los escalares p^2 , q^2 y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$. Esto se puede hacer manifiesto al expandir el denominador en la expresión anterior en términos de los cuadrados $\tilde{p}^2$, $\tilde{q}^2$ y $\tilde{l}^2$ y los productos $\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}$ y $\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}$.

Por ejemplo consideremos un desarrollo del integrando en potencias de estas cantidades. La integral de los términos lineales en $\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}$ y $\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}$ se anulan por simetría. El término que poseen el doble producto

$$(\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{l}})(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}) = \sum_{i,j} \tilde{p}_i \tilde{l}_i \tilde{q}_j \tilde{l}_j$$

solamente pueden originar una integral no nula para los términos con $i = j$:

$$\int d^d \tilde{\mathbf{l}} (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{l}})(\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{l}}) = \int d^d \tilde{\mathbf{l}} \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i \tilde{l}_i^2 = \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i \int d^d \tilde{\mathbf{l}} \tilde{l}_i^2 = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \frac{S_d}{d+1}$$

usando que

$$\int d^d \tilde{\mathbf{l}} \tilde{l}_i^2 = \frac{1}{d} \int d^d \tilde{\mathbf{l}} (\tilde{l}_1^2 + \dots + \tilde{l}_d^2) = \frac{1}{d} \int d^d \tilde{\mathbf{l}} \tilde{l}^2 = \frac{S_d}{d(d+1)}$$

(ver ecuación F.10).

En efecto, se puede resolver la integral K cuando $p, q \ll \kappa$ desarrollando el integrando en la serie de potencias mencionada y conservando los primeros términos. Al orden más bajo se obtiene (este término en particular se puede calcular para d genérica)

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \simeq \frac{K_d \kappa^d}{(Z_\kappa \kappa^2)^3} \frac{1}{(1 + \tilde{\mu}^2)^4} \left[2 - \frac{2\eta_\kappa}{1 + \tilde{\mu}^2} \left(60 + 8d + \left(3 + \frac{13}{d} \right) \eta_\kappa \right) (\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2) \right] \quad (\tilde{p}, \tilde{q} \ll 1) \quad (\text{F.26})$$

A este orden no aparece el escalar $\tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$. Esto es por causa de haber usado el regulador de Litim.

En el régimen de impulsos grandes también se puede lograr una integración cerrada, al aproximar los propagadores como

$$G_\kappa^{(2)}(\mathbf{p} + \mathbf{l}) \simeq \frac{1}{Z_\kappa p^2}; \quad (p \gg \kappa) \quad (\text{F.27})$$

Por lo anterior, en los casos de impulsos extremos obtenemos aproximaciones analíticas para $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (para $p \gg \kappa$ o $p \ll \kappa$, y análoga e independientemente para q), pero no podemos aplicarlas a la región intermedia, es decir, cuando $p, q \sim \kappa$. En vista de que la función K juega un papel de alguna forma secundario en la ecuación de flujo de la función a tres puntos, es plausible usar una versión analítica aproximada muy sencilla de la integral, fácil de implementar en el programa de cálculo y de bajo costo computacional.

Las condiciones que debe cumplir la versión aproximada $K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ se desprenden de la definición de la integral en términos del propagador LPA y el regulador de Litim,

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \partial_t R_\kappa(l) \left[G_\kappa^{(2)}(l) \right]^2 G_\kappa^{(2)}(|\mathbf{p} + \mathbf{l}|) G_\kappa^{(2)}(|\mathbf{q} + \mathbf{l}|). \quad (\text{F.28})$$

- Cuando $q \ll \kappa$, se puede reemplazar $G_\kappa^{(2)}(\mathbf{q} + \mathbf{l}) \simeq (Z_\kappa \kappa^2 + \mu^2)^{-1}$ gracias a la forma del regulador; la integral $K(p, 0)$ es totalmente análoga a $J(p)$, de manera que tenemos

$$K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \simeq \frac{1}{Z_\kappa \kappa^2 + \mu^2} J(p); \quad (q \ll \kappa) \quad (\text{F.29})$$

- Cuando $q \gg \kappa$ se reemplaza $G_\kappa^{(2)}(q) \simeq (Z_\kappa q^2)^{-1}$, que puede extraerse de la integración, dando lugar a

$$K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \simeq \frac{1}{Z_\kappa q^2} J(p); \quad (q \gg \kappa) \quad (\text{F.30})$$

- $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ es simétrica al intercambiar $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q}$, y por lo tanto esto es un requisito para la versión aproximada.
- Como ya se señaló, sólo depende de los escalares p^2 , q^2 y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$. Este último se puede hallar a partir de $s = |\mathbf{p} + \mathbf{q}|$ (sección 4.2, ecuación 4.5).

A continuación mostramos la expresión elegida para $K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ después de ensayar varias alternativas. Supongamos por el momento $p \geq q$.

- La expresión queda definida en términos de tres parámetros α_1 , α_2 y ϵ , que dan lugar a una familia de funciones K_{ap} válidas.
- En caso de $q \leq \epsilon$, entonces $K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = G_\kappa^{(2)}(0)J(p) = (Z_\kappa \kappa^2 + \mu^2)^{-1}J(p)$ (el propósito del parámetro ϵ es indicar un valor muy pequeño que podamos considerar casi cero).
- Construimos una interpolación suave entre los regímenes $q \ll \kappa$ y $q \gg \kappa$. Primero definimos los factores

$$f_1 = \frac{(\tilde{p}/\alpha_1)^2}{\exp(\tilde{p}/\alpha_1)^2 - 1}, \quad f_2 = \frac{(\tilde{q}/\alpha_2)^2}{\exp(\tilde{q}/\alpha_2)^2 - 1},$$

y, para lograr una expresión simétrica,

$$r = \sqrt{\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2}.$$

Para un impulso $\tilde{p}$ pequeño, $f_1 \sim 1$, y decae rápidamente si $\tilde{p} > \alpha_1$. El comportamiento de f_2 es análogo. Observemos que al ser $p \geq q$, entonces $q \gg \kappa$ implica $p \gg \kappa$, de manera que en este caso tanto f_1 como f_2 son despreciables (siempre que $\alpha_1 \text{ sim } \alpha_2 \sim 1$).

Luego, la función $K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ viene dada por

$$K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f_1 G_\kappa^{(2)}(0)J(r) + (1-f_1) f_2 G_\kappa^{(2)}(0)J(p) + (1-f_2) G_\kappa^{(2)}(p)J(q) \quad (\text{F.31})$$

- Si $p < q$, intercambiamos el papel entre p y q .

APÉNDICE F. INTEGRALES I, J Y K

De esta manera, contamos con una expresión suficientemente simple para $K_{ap}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ que cumple todos los requisitos.

Para validar esta expresión, la comparamos con el resultado obtenido por integración numérica $K_{int}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a partir de la definición usando los propagadores LPA' con un valor supuesto conocido de $\tilde{\mu}^2$ y η_κ , en varios intervalos de impulsos. La coincidencia no es completamente exacta en todos los casos, pero es suficiente para nuestro propósito.

En la figura F.1 se muestran varios ejemplos de los resultados obtenidos a través de la integración numérica en las configuraciones de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ paralelos y $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ opuestos, con $\tilde{p}$ variando entre 0,10 y 10 y cuatro valores de $\tilde{q}$ dentro del mismo intervalo. En este caso se escogieron $\tilde{\mu}^2 = 0$ y $\eta_\kappa = 0$. Como era de esperarse, las curvas tienden a coincidir cuando ambos impulsos son muy pequeños o uno de ellos es grande. Las mayores discrepancias ocurren en la región intermedia $\tilde{p} \sim \tilde{q} \sim 1$, como queda de manifiesto en el caso (3) de la figura ($\tilde{q} = 1,26$).

En la figura F.2 se muestra el cociente entre la expresión aproximada y el cálculo numérico, K_{ap}/K_{int} , para la configuración (3), donde se aprecia lo anteriormente dicho. La diferencia llega a alcanzar casi el 40 % en el peor caso, pero eso es una situación excepcional. Aunque el error relativo es considerable, la discrepancia no es significativa en la ecuación de flujo de la función a tres puntos, ya que los términos que incluyen $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ son pequeños en relación con los otros y además son estrechas las regiones de κ sobre las cuales la función no es despreciable.

En la figura F.3 se representa una vez más la comparación, con un valor más grande de $\tilde{\mu}^2$. Tal como manifiestan estas curvas, el resultado mejora al considerar valores cada vez mayores de $\tilde{\mu}^2$, como se espera gracias a la expresión de los propagadores.

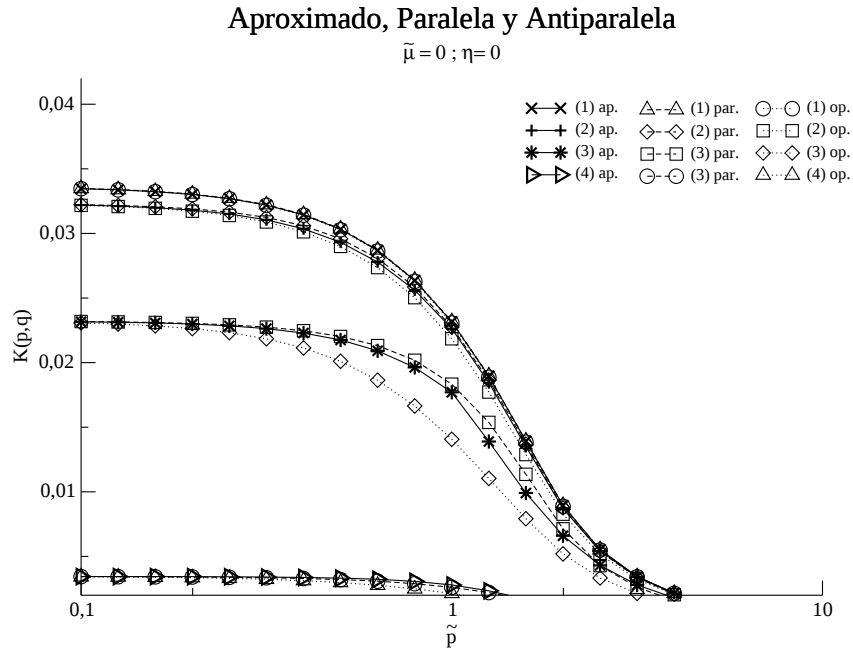


Fig. F.1.-Comparación entre K_{ap} y K_{int} en varias configuraciones de impulsos.
 En estas curvas se tomó $\tilde{\mu}^2 = 0$, $\eta_{\kappa} = 0$ y diferentes valores de impulso: (1) $\tilde{q} = 0,10$, (2) $\tilde{q} = 0,32$, (3) $\tilde{q} = 1,26$, (4) $\tilde{q} = 3,16$. Para K_{int} se consideran las configuraciones con los impulsos paralelos y opuestos.

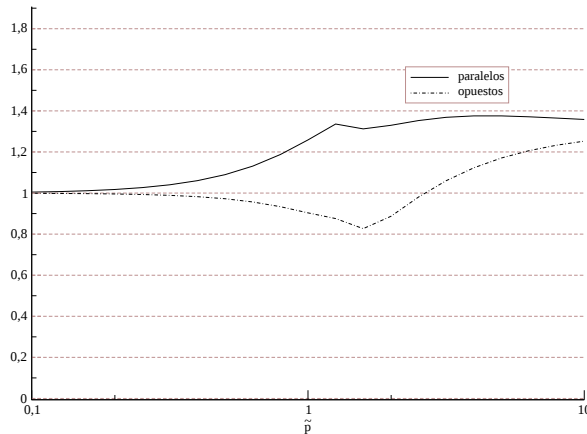


Fig. F.2.-Proporción entre K_{ap} y K_{int} .
 Se muestra el cociente para la configuración (3) de la figura F.1, en el caso paralelo y antiparalelo.

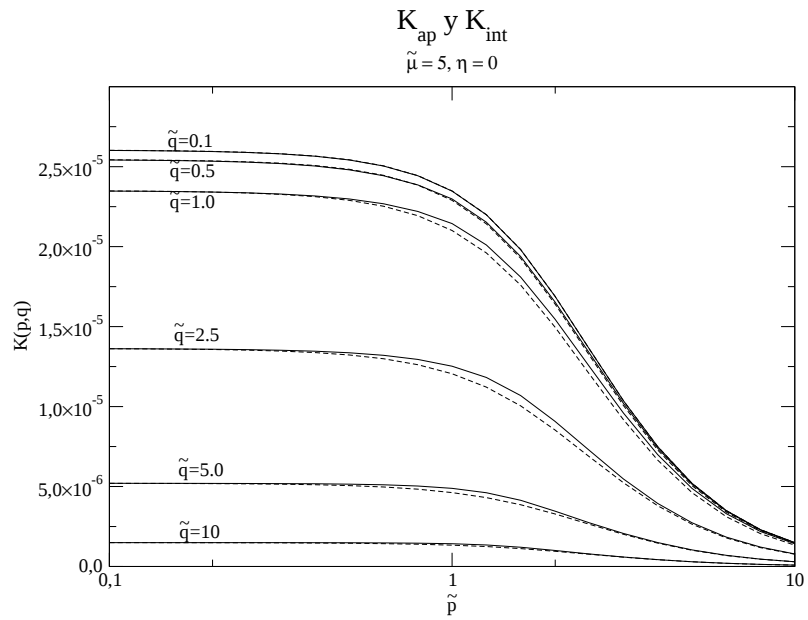


Fig. F.3.-Comparación entre K_{an} y K_{int} para $\tilde{\mu}^2$ grande.
Se tomaron $\tilde{\mu}^2 = 5$ y $\eta_\kappa = 0$, y la función K_{int} se calculó en la configuración antiparalela.

G. Algunos detalles del cálculo numérico

En este apéndice se discuten algunos aspectos concretos sobre la implementación numérica de la resolución de las ecuaciones de flujo.

Los programas fueron desarrollados en lenguaje Fortran77 y compilados sobre linux con el compilador GNU g77 . Todas las variables que representan números reales se definieron de doble precisión. La salida de los programas son archivos de texto ASCII formateados para guardar las cifras significativas. Las gráficas de los datos se construyeron utilizando la interfaz xmgrace.

G.1. Derivadas Numéricas

La derivada de una función $f(x)$ está definida, cuando existe, por el límite del cociente incremental cuando el incremento tiende a cero,

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}, \quad (\text{G.1})$$

y la definición se extiende a derivadas de mayor orden. El cálculo numérico de las derivadas debe hacerse por aproximación, y es intrínsecamente “peligroso”: un número pequeño debe obtenerse de una diferencia de cantidades de tamaño similar, y el resultado debe ser dividido por otro número pequeño de dimensiones similares.

Hay diversas maneras de determinar el valor aproximado de las derivadas. Consideremos la función $f(x)$ de la que se conocen sus valores en $x \equiv x_i$, en $x - dx \equiv x_{i-1}$ y en $x + dx \equiv x_{i+1}$. La derivada numérica centrada $f'_N(x_i)$ es

$$f'_N(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2 dx} \quad (\text{G.2})$$

APÉNDICE G. ALGUNOS DETALLES DEL CÁLCULO NUMÉRICO

Esta expresión da una aproximación de $f'(x)$ correcta hasta segundo orden en dx , es decir,

$$f'(x_i) = f'_N(x_i) + O(dx^2). \quad (\text{G.3})$$

La expresión dada para f'_N no está definida en los extremos del intervalo en el que se definen las x_i . En cambio, la expresión para la derivada en el primer resulta

$$f'_N(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2dx}, \quad (\text{G.4})$$

también correcta hasta segundo orden en dx , con un resultado análogo para la derivada en el último punto x_n .

Las expresiones anteriores para $f'_N(x)$ pueden hallarse al interpolar los puntos de la función $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i = (x_i, f(x_i))$ y $P_{i+1} = (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, por una función cuadrática $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Las derivadas de $p(x)$ dan las aproximaciones a las derivadas de $f(x)$ en los puntos correspondientes. La diferencia entre la función $f(x)$ y la función interpolante $p(x)$ es de tercer orden en dx , de lo que se deduce el orden de aproximación de las expresiones. Con este proceso se obtiene además una derivada segunda $f''_N(x_i)$ correcta hasta primer orden.

Una interpolación $p(x)$ sobre una cantidad mayor de puntos genera expresiones para las derivadas numéricas correctas hasta un orden mayor en dx (observemos sin embargo que no es equivalente tener mayor orden a tener mayor precisión). Para el programa fueron utilizadas derivadas con cinco puntos. Esta vez se necesita una consideración especial para dos de los puntos en cada extremo. El resultado para las derivadas en los puntos internos es

$$\begin{aligned} f'_N(x_i) &= \frac{f(x_{i-2}) - 8f(x_{i-1}) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12dx}, \\ f''_N(x_i) &= -\frac{f(x_{i-2}) - 16f(x_{i-1}) + 30f(x_i) - 16f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))}{12dx^2} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

y para el extremo inicial

$$\begin{aligned} f'_N(x_0) &= -\frac{25f(x_0) - 48f(x_1) + 36f(x_2) - 16f(x_3) + 3f(x_4))}{12dx}, \\ f''_N(x_0) &= \frac{35f(x_0) - 104f(x_1) + 114f(x_2) - 56f(x_3) + 11f(x_4))}{12dx^2}, \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} f'_N(x_1) &= \frac{-3f(x_0) - 10f(x_1) + 18f(x_2) - 6f(x_3) + f(x_4)}{12 dx}, \\ f''_N(x_1) &= \frac{11f(x_0) - 20f(x_1) + 6f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)}{12 dx^2}. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Las expresiones para las derivadas en x_{n-1} y x_n se obtienen de estas reemplazando $x_0, \dots, x_4$ por $x_n, \dots, x_{n+4}$ y dx por $-dx$. El método de interpolación también permite calcular derivadas numéricas mayores, aunque no son necesarias en las ecuaciones de flujo¹.

Aunque la discusión se hizo para una función $f(x)$ de una sola variable, los resultados también se aplican a las derivadas parciales para funciones de varias variables (por ejemplo para hallar $\partial_x f(x, y)$).

G.2. Integrales numéricas

Como se discute en el capítulo 4, la integración de las ecuaciones de flujo se realiza a través del método de Euler. Este método se basa en la igualdad

$$f(t_{n+1}) - f(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt' \frac{df}{dt}(t'). \quad (\text{G.8})$$

Cuando la distancia $dt_n = t_{n+1} - t_n$ es pequeña, el integrando se considera aproximadamente constante por lo que la integral se simplifica y tenemos

$$f(t_{n+1}) = f(t_n) + dt_n \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_n}. \quad (\text{G.9})$$

El método usado en el programa es la generalización de lo anterior a funciones de varias variables. La derivada del lado derecho se calcula a través de la ecuación de flujo para la función buscada, y la variable “temporal” es $t = \log \kappa$.

¹Es una pésima idea calcular las derivadas superiores por composición de las expresiones para f'_N y f''_N). En serio.

G.3. Código fuente

El código fuente para los programas y las instrucciones para su compilación y utilización está [||estarán||](#) a disposición en mi página personal de Internet².

La tabla siguiente muestra algunas de las variables principales usadas en los programas (la lista extensiva se encuentra junto con el código fuente).

<i>Nombre</i>	<i>Significado</i>	<i>Comentario</i>
mu	$\tilde{\mu}^2$	Derivada del potencial (adimensionado). Se calcula usando la LPA'.
mu1	$\partial_{\tilde{\rho}} \tilde{\mu}^2 = \tilde{\mu}^{2'}$	Derivadas primera y segunda de $\tilde{\mu}^2$ con respecto a $\tilde{\rho}$.
Función a 2 puntos		
Self	$\Sigma(p) = \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + p^2$	Autoenergía. Se calcula usando la LPA'.
D2ro	$\partial_{\tilde{\rho}} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p, \tilde{\rho})$	Derivada de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$. Se obtiene a partir de $\Sigma(p)$.
G2ro_p,	$\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) = \partial_{\tilde{\rho}}(\Gamma_{\kappa}^{(2)}(0) + \Delta\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p))$	Función a dos puntos. Se encuentra a partir
G2ro_0	$\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0, \tilde{\rho}) = Z_{\kappa} \kappa^2 \tilde{\mu}_1^2(\tilde{\rho})$	
D2fi2_p,	$\partial_{\phi^2}^2 \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) = (\partial_{\rho} + 2\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}) \Gamma_{\kappa}^{(2)}(p)$	Derivada respecto a ϕ .
Función a 3 puntos		
D3	$\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \equiv \frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$ $-\frac{1}{2} \partial_{\rho} [\Gamma_{\kappa}^{(2)}(p) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(q) + \Gamma_{\kappa}^{(2)}(s) - \Gamma_{\kappa}^{(2)}(0)]$	Función $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$, calculada directamente con su ecuación de flujo. Para calcularla se usa gamma3.
D3ro	$\partial_{\tilde{\rho}} \Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s)$	Función a tres puntos obtenida a partir de $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$. Función a tres puntos calculada directamente (sin usar $\Delta\Gamma_{\kappa}^{(3)}$).
gamma3	$\frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \Big _{\Delta}$	
G3	$\frac{1}{\phi} \Gamma_{\kappa}^{(3)}(p, q, s) \Big _{\Gamma}$	
G3ro	$\partial_{\tilde{\rho}} \Gamma_{\kappa}^{(3)} \Big _{\Gamma}$	

²<http://www.fing.edu.uy/~ncasabal>

Bibliografía

- [1] C. BAGNULS y C. BERVILLIER: «Exact renormalization group equations: An introductory review». *Phys. Rept.*, 2001, **348**, p. 91. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00137-X. (cita en página 39).
- [2] CLIVE F. BAILLIE, RAJAN GUPTA, KENNETH A. HAWICK y G. STUART PAWLEY: «Monte Carlo renormalization-group study of the three-dimensional Ising model». *Phys. Rev. B*, 1992, **45(18)**, pp. 10438–10453. doi: 10.1103/PhysRevB.45.10438. (cita en página 64).
- [3] G. BAYM, J.-P. BLAIZOT y J. ZINN-JUSTIN: «The transition temperature of the dilute interacting Bose gas for N internal states». *EPL (Europhysics Letters)*, 2000, **49(2)**, pp. 150–155.
<http://stacks.iop.org/0295-5075/49/150> (cita en página 70).
- [4] F. BENITEZ, J. P. BLAIZOT, H. CHATE, B. DELAMOTTE, R. MENDEZ-GALAIN y N. WSCHEBOR: «Solutions of renormalization group flow equations with full momentum dependence», 2008.
arXiv.org:0901.0128 (cita en páginas 66, 69, 71, 119).
- [5] FEDERICO BENITEZ, RAMON MENDEZ GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «On the 2-point function of the $O(N)$ model». *Physical Review B*, 2008, **77**, p. 024431.
doi:10.1103/PhysRevB.77.024431 (cita en páginas 71, 116, 121).
- [6] J. BERGES, N. TETRADIS y C. WETTERICH: «Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics». *Physics reports*, 2002, **363(4)**, pp. 223–386. (cita en páginas 39, 49, 51, 52, 143).
- [7] J. BERGES, N. TETRADIS y C. WETTERICH: «Non-Perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics». *Physics Reports*, 2002, **363**, p. 223.
arXiv.org:hep-ph/0005122 (cita en página 39).

Bibliografía

- [8] J. P. BLAIZOT, RAMON MENDEZ GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «A new method to solve the Non Perturbative Renormalization Group equations». *Physics Letters B*, 2006, **632**, p. 571.
arXiv.org:hep-th/0503103 (cita en páginas 61, 67, 141).
- [9] J. P. BLAIZOT, R. MENDEZ-GALAIN y N. WSCHEBOR: «Non perturbative renormalisation group and momentum dependence of n -point functions (I)». *Physical Review E*, 2006, **74**, p. 051116.
doi:10.1103/PhysRevE.74.051116 (cita en página 128).
- [10] JEAN-PAUL BLAIZOT, RAMON MENDEZ GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «Non Perturbative Renormalization Group, momentum dependence of n -point functions and the transition temperature of the weakly interacting Bose gas». *Europhysics Letters*, 2005, **72**, p. 705.
arXiv.org:cond-mat/0412481 (cita en páginas 70, 116).
- [11] JEAN-PAUL BLAIZOT, RAMON MENDEZ-GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «Non perturbative renormalization group and momentum dependence of n -point functions (II)». *Physical Review E*, 2006, **74**, p. 051117.
doi:10.1103/PhysRevE.74.051117 (cita en página 57).
- [12] JEAN-PAUL BLAIZOT, RAMON MENDEZ-GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «Non-Perturbative Renormalization Group calculation of the scalar self-energy». *The European Physical Journal B*, 2007, **58**, p. 297.
doi:10.1140/epjb/e2007-00223-3 (cita en páginas 55, 117, 129, 144, 148).
- [13] H.B. CALLEN y HL SCOTT: «Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics». *American Journal of Physics*, 1998, **66**, p. 164. (cita en página 7).
- [14] L. CANET, B. DELAMOTTE, D. MOUHANNA y J. VIDAL: «Nonperturbative renormalization group approach to the Ising model: a derivative expansion at order ∂^4 ». *Physical Review B*, 2003, **68**, p. 064421.
doi:10.1103/PhysRevB.68.064421 (cita en páginas 39, 66, 70, 71).
- [15] B. DELAMOTTE y L. CANET: «What can be learnt from the nonperturbative renormalization group?» *CONDENSED MATTER PHYS.*, 2005, **8**, p. 163.
arXiv.org:cond-mat/0412205 (cita en página 39).
- [16] BERTRAND DELAMOTTE: Feb. 2008. «An introduction to the nonperturbative renormalization group». *arXiv:cond-mat/0702365v1*, Rev. Feb. 2008. (cita en páginas 7, 37, 49, 85, 129).

- [17] U. ELLWANGER: «Collective fields and flow equations». *Z. Phys.*, 1993, **C58**, pp. 619–627. doi: 10.1007/BF01553022. (cita en página 39).
- [18] ULRICH ELLWANGER: «Flow Equations for N Point Functions and Bound States». *Zeitschrift für Physik C*, 1994, **62**, p. 503.
doi:10.1007/BF01555911 (cita en página 39).
- [19] GEOFFREY R. GOLNER: «Exact renormalization group flow equations for free energies and N-point functions in uniform external fields», 1998.
arXiv.org:hep-th/9801124 (cita en página 141).
- [20] PETER GRÜTER, DAVID CEPERLEY y FRANK LALOË: «Critical Temperature of Bose-Einstein Condensation of Hard-Sphere Gases». *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79(19)**, pp. 3549–3552. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.3549. (cita en página 70).
- [21] DIEGO GUERRA, RAMON MENDEZ-GALAIN y NICOLAS WSCHEBOR: «Correlation functions in the Non Perturbative Renormalization Group and field expansion». *The European Physical Journal B*, 2007, **59**, p. 357.
doi:10.1140/epjb/e2007-00296-x (cita en página 85).
- [22] RICCARDO GUIDA y JEAN ZINN-JUSTIN: «Critical Exponents of the N-vector model». *J.PHYS.A*, 1998, **31**, p. 8103.
arXiv.org:cond-mat/9803240 (cita en páginas 12, 22).
- [23] MARKUS HOLZMANN y WERNER KRAUTH: «Transition Temperature of the Homogeneous, Weakly Interacting Bose Gas». *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **83(14)**, pp. 2687–2690. doi: 10.1103/PhysRevLett.83.2687. (cita en página 70).
- [24] LEO P. KADANOFF, WOLFGANG GÖTZE, DAVID HAMBLÉN, ROBERT HECHT, E. A. S. LEWIS, V. V. PALCIAUSKAS, MARTIN RAYL, J. SWIFT, DAVID ASPNES y JOSEPH KANE: «Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment». *Rev. Mod. Phys.*, 1967, **39(2)**, pp. 395–431. doi: 10.1103/RevModPhys.39.395. (cita en páginas 11, 23).
- [25] C. KITTEL y P. MCEUEN: *Introduction to solid state physics*. Wiley New York, 1971. (cita en páginas 14, 15).
- [26] L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZS: *Statistical Physics*. Pergamon Press, 1958. (cita en páginas 7, 10, 11, 45).
- [27] M. LE BELLAC: *Quantum and statistical field theory*. Clarendon Pr, 1991. (cita en páginas 7, 12, 17, 22, 23, 28, 29, 30, 37, 40, 43).

Bibliografía

- [28] TIM R. MORRIS: «The Exact Renormalisation Group and Approximate Solutions». *International Journal of Modern Physics A*, 1994, **9**, p. 2411.
[arXiv.org:hep-ph/9308265](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9308265) (cita en página 39).
- [29] TIM R. MORRIS y JOHN F. TIGHE: «Convergence of derivative expansions of the renormalization group». *JHEP*, 1999, **9908**, p. 007.
[arXiv.org:hep-th/9906166](https://arxiv.org/abs/hep-th/9906166) (cita en páginas 39, 47, 48).
- [30] R.K. PATHRIA: «Statistical mechanics, 1996». (cita en páginas 45, 70).
- [31] G. S. PAWLEY, R. H. SWENDSEN, D. J. WALLACE y K. G. WILSON: «Monte Carlo renormalization-group calculations of critical behavior in the simple-cubic Ising model». *Phys. Rev. B*, 1984, **29(7)**, pp. 4030–4040. doi: 10.1103/PhysRevB.29.4030.
(cita en página 64).
- [32] ANDREA PELISSETTO y ETTORE VICARI: «Critical Phenomena and Renormalization-Group Theory». *Physics Reports*, 2002, **368**, p. 549.
[arXiv.org:cond-mat/0012164](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012164) (cita en páginas 22, 45, 116).
- [33] M.E. PESKIN y D.V. SCHROEDER: *An introduction to quantum field theory*. Basic Books, 1993. (cita en páginas 40, 58, 67).
- [34] W.H. PRESS, S.L.A. TEUKOLSKY, B.N.P. FLANNERY y W.M.T. VETTERLING: *Numerical Recipes: FORTRAN*. Cambridge University Press New York, NY, USA, 1990. (cita en páginas 96, 97).
- [35] AVINASH KHARE SOMENDRA M. BHATTACHARJEE: «Fifty Years of the Exact Solution of the Two-Dimensional Ising Model by Onsager», 1995.
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/9511003v2> (cita en página 17).
- [36] H. EUGENE STANLEY: «Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena». *Rev. Mod. Phys.*, 1999, **71(2)**, pp. S358–S366. doi: 10.1103/RevModPhys.71.S358. (cita en página 38).
- [37] CHRISTOF WETTERICH: «Exact evolution equation for the effective potential». *Phys. Lett.*, 1993, **B301**, pp. 90–94. doi: 10.1016/0370-2693(93)90726-X. (cita en página 39).
- [38] KENNETH G. WILSON: «Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture». *Phys. Rev. B*, 1971, **4(9)**, pp. 3174–3183. doi: 10.1103/PhysRevB.4.3174. (cita en páginas 11, 23, 38).

- [39] KENNETH G. WILSON: «Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior». *Phys. Rev. B*, 1971, **4(9)**, pp. 3184–3205. doi: 10.1103/PhysRevB.4.3184. (cita en páginas 11, 23, 38).
- [40] KENNETH G. WILSON: «The 1982 Nobel Lectures», 1982. (cita en páginas 23, 38).
- [41] KENNETH G. WILSON y MICHAEL E. FISHER: «Critical Exponents in 3.99 Dimensions». *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **28(4)**, pp. 240–243. doi: 10.1103/PhysRevLett.28.240. (cita en página 23).
- [42] K.G. WILSON y J. KOGUT: «The renormalization group and the ε expansion», 1974, **12**, pp. 75–199. doi: 10.1016/0370-1573(74)90023-4. (cita en página 23).