Teoría de Modelos: herramientas clásicas y aplicaciones

M. Dickmann

June 16, 2012

El curso está programado para entre 35 y 40 horas de clase (5 ó 6 horas por semana) + sesiones de consulta + listas semanales de ejercicios.

Prerrequisitos:

— Nociones sintácticas básicas de la lógica de primer orden (cálculo proposicional y cálculo de predicados).
— Conocimientos elementales de:
(i) Teoría de conjuntos.
(ii) Estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos).
(iii) Topología general y de espacios euclídeos.
(iv) Conjuntos ordenados.
(v) Algebras de Boole.

Textos recomendados para consulta (sobre tópicos seleccionados):

— C. C. Chang y H. J. Keisler, **Model Theory**, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, North-Holland (1990). [Nota: existe también en Dover Books on Mathematics, a precio mucho menor.]
— W. Hodges, **Model Theory**, Encyclopedia of Math. and Appl., vol. 42, Cambridge Univ. Press (1993), xii + 772 p.
— W. Hodges, **A Shorter Model Theory**, Cambridge Univ. Press (2002).
— J. Bell y A. Slomson, **Models and Ultraproducts**, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, North-Holland (1974). [Nota: existe también en Dover Books on Mathematics (2006), a precio mucho menor.]
— D. Marker, **Model Theory: An Introduction**, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (2002).
— Sobre temas específicos serán distribuidas notas manuscritas.

Programa.

(1) Nociones básicas: estructuras; sintaxis y semántica.

Noción de estructura e interpretación de la sintaxis de primer orden (satisfacción, validez, verdad, consecuencia lógica, etc.). Conjuntos definibles. Equivalencia elemental. Teorías. Subestructuras y homomorfismos. El método de diagramas. Clases de estructuras axiomatizables; ejemplos. Algebra de Lindenbaum. Tipos.

(2) Construcción de modelos por constantes.

Completitud y compacidad de la lógica de primer orden. Aplicaciones: teoremas de Löwenheim – Skolem. Conjuntos de Hintikka y álgebras de términos. Teoremas de preservación.

(3) Modelos numerables de teorías completas.

Modelos atómicos y primos. Modelos saturados numerables. Condiciones de existencia. Teorías $\aleph_0$-categóricas. Ejemplos y aplicaciones (grafos aleatorios, leyes $0 - 1$, etc.).

(4) Otros métodos de construcción de modelos.

(a) Ultraproductos. Filtros y ultrafiltros. Construcción de productos reducidos y ultraproductos de estructuras. Teorema de Łoś. Aplicaciones: no axiomatizabilidad de ciertas clases de estructuras. Productos reducidos y fórmulas de Horn.
(b) Modelos saturados. Homogeneidad y universalidad. Saturación de ultraproductos.
(c) Construcción de modelos por amalgamación. Método de Fraïssé. Aplicaciones: teorema de omisión de tipos y otras.

(5) Eliminación de cuantificadores.

Criterios generales de eliminación. Aplicación a diversas teorías matemáticas: cuerpos algebraicamente cerrados, cuerpos real cerrados, grupos abelianos, etc.

(6) Temas optativos (alguno de los temas siguientes, *si el tiempo permite*).

(a) Isomorfismos parciales (método de "ida y vuelta").
(b) Construcción de modelos por indiscernibles (modelos de Ehrenfeucht – Mostowski).
(c) Teorías ω-estables; teorema de categoricidad de Morley.
(d) Grupos de automorfismos de estructuras.

NOTAS IMPORTANTES.
(i) El tiempo requerido para desarrollar los temas (1) – (5) es variable; (1) va a tomar menos de una semana (2 a 3 horas); (2) y (3) aproximadamente una semana (5 a 6 horas) cada uno; (4) y (5) mas de una semana cada uno.

(ii) Evaluación. Una parte importante de la evaluación será basada en las respuestas a los ejercicios distribuidos semanalmente (a resolver en casa; consulta a libros permitida). Se puede organizar también un examen final con dos modalidades posibles: (a) oral, en Noviembre ó Diciembre 2012 (yo estaré en Buenos Aires hasta fines de Diciembre 2012 y podría viajar a Montevideo para el examen); (b) examen escrito (lista de ejercicios a resolver), que los participantes me enviarían por correo electrónico para corrección y calificación.

M. Dickmann
Directeur de Recherche CNRS
Projets Logique Mathématique et Topologie et Géométrie Algébiques
Institut de Mathématiques de Jussieu – Universités Paris 6 et 7
Paris – FRANCIA