Instituto de Física – Facultad de Ingeniería – Universidad de la República
MÓDULO: TRANSFERENCIA de CALOR.
(Año 2002- Sandra Kahan).

INTRODUCCIÓN.

Siempre que existe un gradiente de temperaturas en un sistema o siempre que dos cuerpos con diferentes temperaturas se ponen en contacto, se transfiere energía. Este proceso se conoce como *transferencia de calor*.

Desde el punto de vista de la Ingeniería, el problema es determinar, dada una diferencia de temperatura, cuánto calor se transfiere. En ese sentido, se reconocen tres modos distintos de transferencia de calor: *conducción, convección y radiación*.

En los tres procesos la temperatura del sistema es una variable que depende tanto de la posición como del tiempo T(**r**,t) y por lo tanto un análisis matemático de esos procesos involucra ecuaciones diferenciales de varias variables.

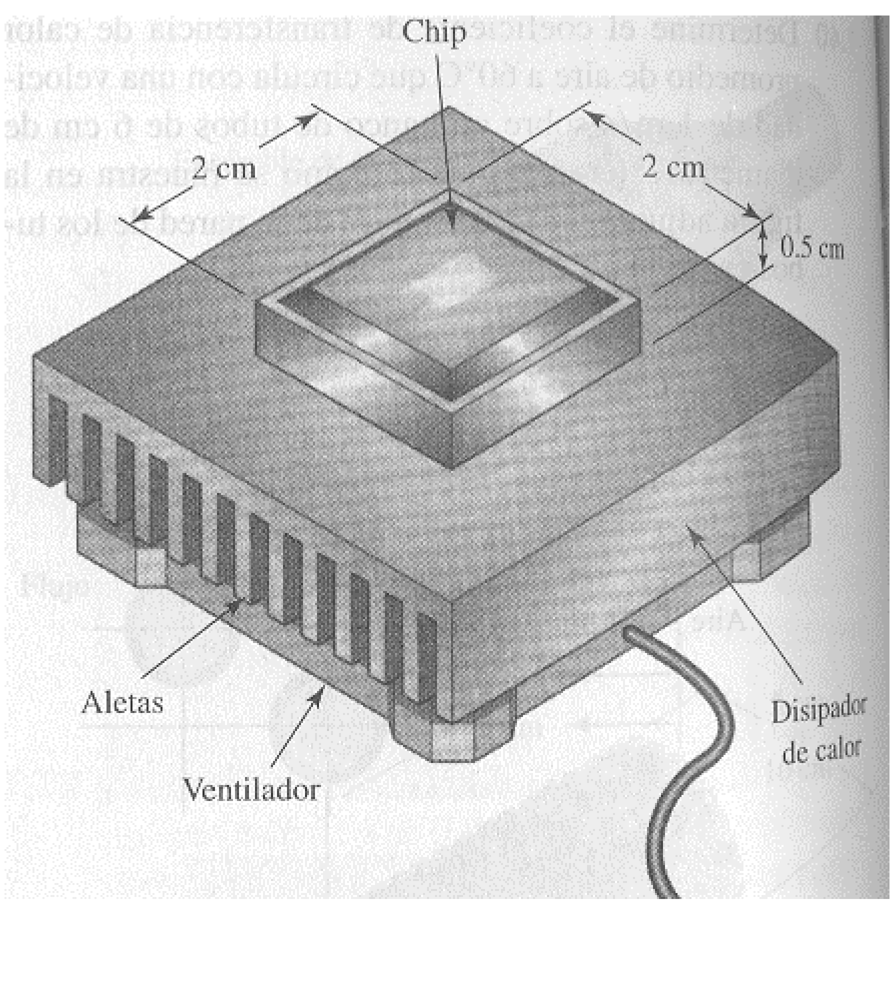
Estos apuntes tienen como objetivo que el estudiante se familiarice con los procesos de transferencia de calor, sepa identificar cuáles son los más relevantes para modelar determinado sistema y sea un usuario inteligente de sus aplicaciones tecnológicas.

Por eso, se ha planificado abordar el tema en dos etapas:

Primer abordaje: En la primera sección introduciremos los conceptos más relevantes de los tres tipos de transferencia de calor, cuando la temperatura no depende del tiempo (caso estacionario) y en geometrías sencillas T(x). En la segunda sección analizaremos la relevancia del problema en el contexto del primer principio de la termodinámica, cuando la única variable relevante para la temperatura es la temporal T(t).

Segundo abordaje: En la sección 3, volveremos a estudiar el mecanismo de conducción del calor, deduciendo la llamada *ecuación del calor*: una ecuación diferencial que involucra a la temperatura T(**r**,t) como variable en el espacio y en el tiempo. En esa sección también estudiaremos cómo se combinan la conducción y la convección sobre una superficie extendida, como son las aletas de un disipador. En la sección 4, nos proponemos comentar algunos resultados de mecánica de fluidos, que influyen en la toma de decisiones, a la hora de calcular el mecanismo de convección.

El cursillo usará el problema de la disipación de la potencia generada por un circuito electrónico, como el del microprocesador que se observa en la figura, como motivación al planteamiento de los temas. Sin embargo, los conceptos se discutirán en un marco general por lo que el estudiante podrá reconocerlos en otro tipo de problema que los involucre.



1.1.a Conducción. Caso Estacionario y Unidimensional.

Figura 1.a

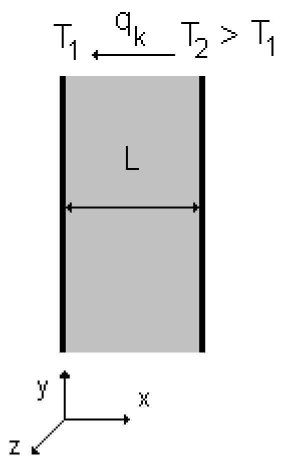
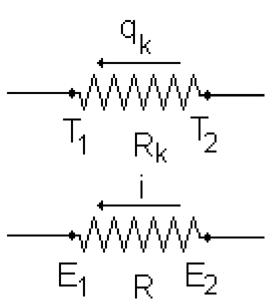


Figura 1.b



Siempre que existe un gradiente de temperaturas en un medio sólido, el calor fluirá desde la región con mayor temperatura a la región con menor temperatura. La *Ley de Fourier* indica que potencia calorífica que se transfiere por conducción q_k es proporcional al gradiente de temperatura y al área a través de la cual se transfiere el calor[1]:

$$q_k = -k\ A \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

donde k es la constante de proporcionalidad llamada *conductividad térmica* y refleja las propiedades conductoras del material[2]; el signo negativo indica que cuando la temperatura aumenta con la posición, el calor fluye hacia regiones de menor temperatura.

La figura 1a muestra esta situación en un sistema donde las paredes paralelas al plano (y,z), separadas una distancia L, se encuentran a temperaturas T_1 y $T_2 > T_1$ conocidas. El calor fluirá en la dirección x (porque no existe gradiente de temperaturas en las otras direcciones) y puede expresarse como:

$$q_k = -k\ A \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (2)$$

siempre que la conductividad térmica k sea constante a lo ancho del material.

Observando esta ecuación se puede definir un circuito térmico (fig.1b) que permita representar al sistema como una resistencia térmica con el flujo de calor análogo a la corriente eléctrica y la diferencia de temperaturas análoga a la diferencia de potencial. Dicho circuito verificará una ley que, a semejanza de la ley de Ohm, expresa:

$$q_k = \frac{\Delta T}{R_k} \quad / \quad R_k = \frac{L}{kA} \quad (3)$$

donde R_k es la resistencia térmica del sistema.

El modelo aquí expuesto tiene ciertas limitaciones que hay que tener en cuenta:

- Estamos estudiando un caso estacionario, donde las temperaturas no varían en el tiempo. Más adelante estudiaremos, aplicando el primer principio de la termodinámica, que la transferencia desde o hacia el sistema, provoca cambios de temperatura en el sistema.
- La resistencia térmica calculada en la ecuación (3), al igual que la ley de Fourier (1) y la relación entre calor y temperatura de la ecuación (2), responde a una geometría particularmente sencilla. Más adelante, veremos la ecuación de conducción en su forma más analítica y observaremos que estas ecuaciones pueden generalizarse para otras geometrías, siempre que el problema sea estacionario.

Habiendo señalado las limitantes de esta representación del problema de la conductividad en forma de circuito térmico, hacemos notar que, de todas formas es útil puesto que permite calcular rápidamente cuál es el calor que fluye a través de materiales que se colocan en serie o paralelo (fig. 2a y fig, 2b, resp).

---

[1] La notación de los libros de transferencia de calor señalan a la potencia calorífica con minúscula: q en lugar de señalarla con mayúscula y un punto, como es usual en los libros de termodinámica En estos apuntes se optó por seguir aquella notación.

[2] Obsérvese que cuando mayor es la conductividad térmica del material, mayor será la cantidad de calor que atraviesa el sistema, para un mismo gradiente de temperatura.

Figura 2.a

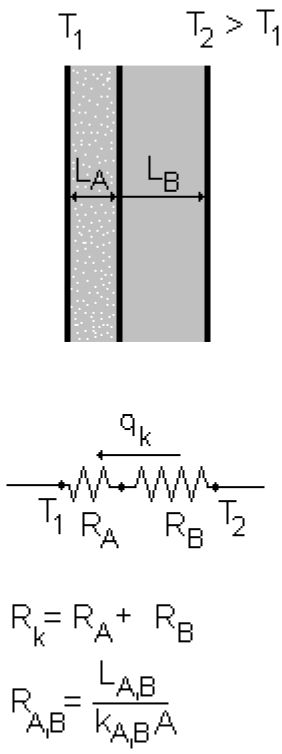
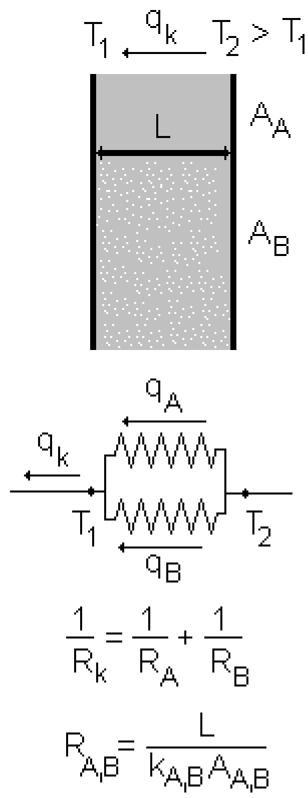


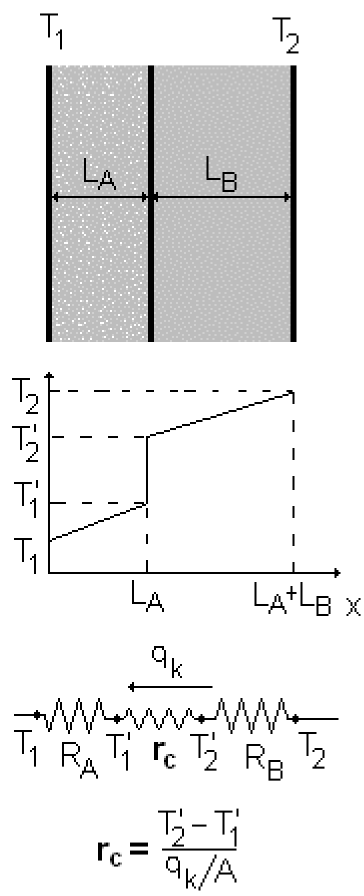
Figura 2.b



1.1.b Resistencia de Contacto.

Cuando dos diferentes superficies conductoras se ponen en contacto (fig.3), se presenta una resistencia adicional: la *resistencia de contacto*. Como las superficies no son perfectamente pulidas, en medio de ellas siempre existirá una pequeña capa de aire que provoca una caída de la temperatura adicional. Esa caída de temperatura se representa, también como una nueva resistencia en el circuito térmico.

Figura 3



Suponga que el sistema de la figura 3 representa las distintas etapas de disipación de potencia de un circuito electrónico (chip) cuya temperatura de operación está representada por T_2. Si la temperatura T_1 es fija y se conoce la cantidad de calor q_k que disipa el chip, la existencia de una resistencia de contacto, provoca el aumento de la resistencia térmica del sistema y por lo tanto el aumento de la temperatura T_2.

Para evitar este inconveniente, entre el chip y el disipador, entre las diferentes etapas de disipación, se coloca una resina conductora que disminuye la resistencia de contacto y por lo tanto la caída de temperatura ($T_2' - T_1'$) que ella produce.

1.2 Convección.

La convección es el proceso de transferencia de calor que interviene cuando entran en contacto un fluido y un sólido. El fluido puede moverse sobre la superficie impulsado por una fuerza externa (por ejemplo un ventilador) en cuyo caso se trata de una convección forzada, o puede simplemente alejarse de la superficie impulsado por una diferencia de presiones, en cuyo caso se trata de la convección natural.

Tanto en la convección forzada como en la natural, actúan dos mecanismos. Suponiendo que el sólido está a mayor temperatura que el fluido el mecanismo que se observa en la interfase entre ambos es el de conducción: las moléculas de la superficie sólida transmiten energía cinética a las moléculas del fluido que se encuentran cerca de la interfase y la transferencia de calor verifica la ecuación (1), evaluada en la *interfase*:

$$q_c = -k_{fluido}\, A \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \quad (4)$$

El segundo mecanismo de transferencia de calor, involucra el movimiento macroscópico de fracciones de fluido cuyas moléculas “arrastran” el calor a regiones alejadas de la superficie y que se encuentran a temperaturas más bajas.

Tomando en cuenta ambos mecanismo, la potencia calorífica que se transfiere por convección es proporcional al área de contacto entre el sólido y el fluido y a la diferencia de temperaturas de la superficie T_s y la del fluido en un punto alejado de esa superficie T_∞

$$q_c = h\, A\left(T_s - T_\infty\right) \quad (5)$$

siendo h la constante de proporcionalidad, llamado *coeficiente de convección*.

Es importante señalar que la expresión (5) es una expresión fenomenológica que, planteada por *Newton* en 1701, se sigue usando hasta nuestros días. El valor de h depende de la velocidad del fluido, de la forma de la superficie, de las propiedades físicas del fluido.

Por el momento, se advierte que, dado el coeficiente h, se puede definir una resistencia térmica de convección:

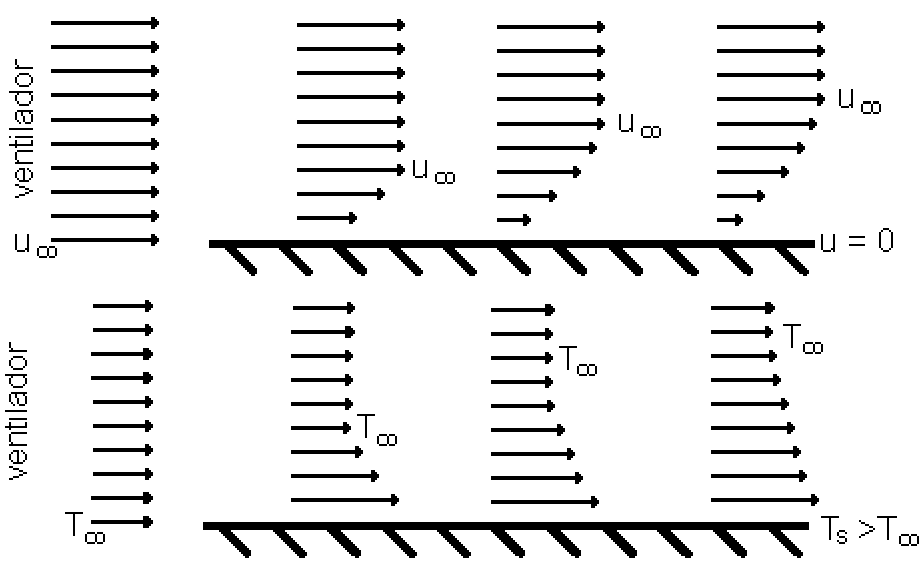
$$q_c = \frac{(T_s - T_\infty)}{R_c} \quad / \quad R_c = \frac{1}{h\,A} \qquad (6)$$

Esa resistencia térmica completa un circuito térmico equivalente para el problema de la disipación de potencia desde un chip, dado que un disipador siempre presenta una superficie expuesta al aire del ambiente.

1.2.a Convección forzada. (Análisis Cualitativo).

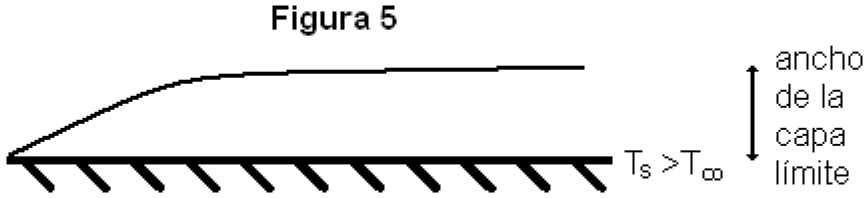
Las relaciones (5) y (6) presentan limitaciones en su aplicación. En la figura 4 se observa una superficie a temperatura $T_s > T_\infty$ por encima de la cual circula una corriente de aire provocada por un ventilador que no se dibuja) y que le imprime velocidad u_∞ , paralela a la superficie. Debido a la viscosidad del aire[3], la corriente al ingresar a la zona donde está la superficie no puede tener la velocidad u_∞ en toda la región puesto que, particularmente sobre la superficie y al estar ésta quieta, la velocidad del aire también debe ser nula. Del mismo modo, si la temperatura del aire es T_∞ en regiones alejadas de la superficie, esta temperatura no puede mantenerse en regiones cercanas a la superficie donde la temperatura es $T_s > T_\infty$.

Figura 4

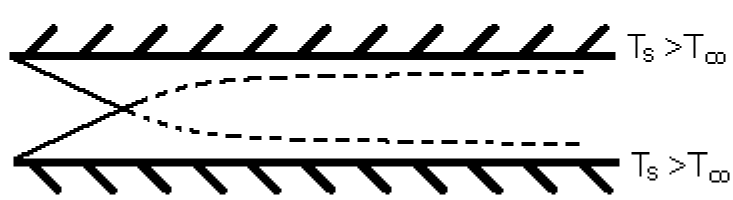


Estas condiciones de borde, impuestas por la presencia de la superficie a enfriar, generan una zona llamada *capa límite*, entre la superficie y una línea imaginaria donde se conoce que la velocidad y la temperatura del fluido coinciden con u_∞ y T_∞, respectivamente.

Figura 5



Hipótesis válida de Flujo Libre



Hipótesis no válida de Flujo Libre

En la figura 5 se dibuja el límite de la capa límite en el caso en que la superficie que disipa calor por convección cumple con la hipótesis de flujo libre: más allá de la capa límite, el fluido tiene velocidad y temperatura u_∞ y T_∞, por lo que la relación fenomenológica (5) es válida. Pero si la superficie (como se observa en la figura inferior, la superficie a enfriar

[3] La viscosidad de un fluido es la magnitud física que indica que el fluido pierde energía, en su trayectoria. Es el análogo de la "fuerza de rozamiento" en el movimiento de los sólidos.

estuviera cerca de otra superficie a la temperatura T_s, una amplia región entre ambas jamás alcanzaría la temperatura T_∞ y ya no se podría calcular la transferencia de calor por convección como proporcional a (T_s - T_∞).

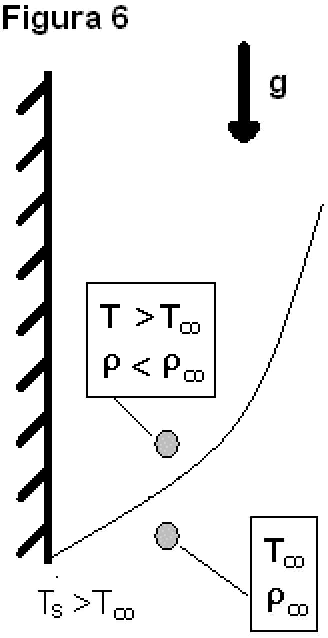
1.2.b. Convección Natural (Análisis muy cualitativo).

Aún cuando no existe una fuerza externa que imprima una velocidad al fluido, puede observarse un gradiente de temperaturas cerca de la superficie que se encuentra a temperatura $T_s > T_\infty$, de similares características al descrito en la sección anterior. A través de la definición de coeficiente de dilatación térmica del fluido, puede observarse que la densidad del fluido ($\rho = 1/v$) disminuye con el aumento de la temperatura porque el coeficiente β es siempre positivo:

$$\beta \equiv \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}\bigg|_P = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\bigg|_P \cong -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta \rho}{\Delta T}\bigg|_P = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho_\infty - \rho}{T - T_\infty}\right) \quad (7)$$

donde ρ_∞ es la densidad del fluido que se encuentra lejos de la superficie y está a temperatura T_∞, mientras ρ es la densidad del fluido a otra temperatura T, en algún punto de la región cercana a la superficie.

Figura 6



Observaremos que, debido a esta variación de la densidad, existe una fuerza ascendente sobre el fluido y por lo tanto existirá una velocidad media ascendente ya no impuesta sino, natural. Dicha velocidad tendrá un rol muy similar al de la velocidad impuesta en el proceso de convección forzada sólo si es paralela a la superficie a ser enfriada, o sea sólo si la superficie está inclinada o es vertical, como se muestra en la figura 6.

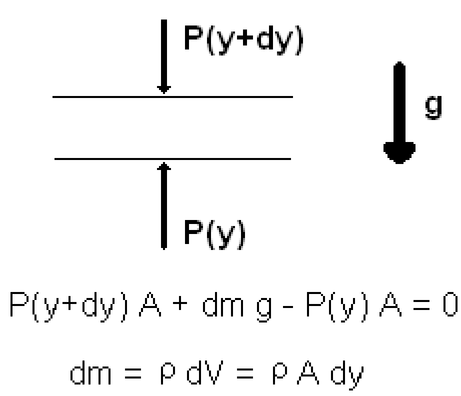
Cualitativamente, en la figura 6 se observa que una porción de aire con densidad ρ_∞ que se encuentra afuera de la capa límite, tiende a desplazarse hacia regiones interiores a la capa límite, porque están a mayor temperatura y son menos densas.

Cuantitativamente, determinaremos la aceleración que sufre la una porción de aire que se encuentra cerca del borde externo de la capa límite.

Cuando una columna de aire está en equilibrio (no actúan fuerzas sobre ella), se observa que la presión varía con la altura de la columna de acuerdo a la siguiente relación:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho_\infty\, g \quad (8)$$

Figura 7



Esa situación se observa lejos de la superficie a enfriar, puesto que ahí la temperatura es T_∞ constante y el sistema está en equilibrio. Sin embargo, cuando la columna de aire no está en equilibrio, la sumatoria de las fuerzas tiene como consecuencia una aceleración neta ascendente:

$$\rho\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dP}{dy} - \rho\, g \quad (9)$$

Una porción de fluido que se encuentra cerca del borde externo de la capa límite, no está en equilibrio. Sin embargo, su gradiente de presiones se aproxima por la ecuación (8) (aproximación de Boussinesq, que supone una densidad hidrostática constante). Sustituyendo esa ecuación en (9) y dividiendo entre la densidad del fluido en cuestión, se obtiene:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_\infty - \rho\right) g \quad (10)$$

Tomando en cuenta la ecuación (7) que relaciona el coeficiente de dilatación térmica del aire con la diferencia de densidades, puede observarse que:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \beta\left(T - T_\infty\right) g = \frac{(T - T_\infty)}{T_\infty} g \quad (11)$$

donde la última igualdad surge de considerar que el coeficiente β puede calcularse para un gas ideal ($Pv = RT \rightarrow \beta = 1/T$) y es constante por lo que se evalúa a temperatura T_∞, lejos de la superficie.

1.3 Radiación.

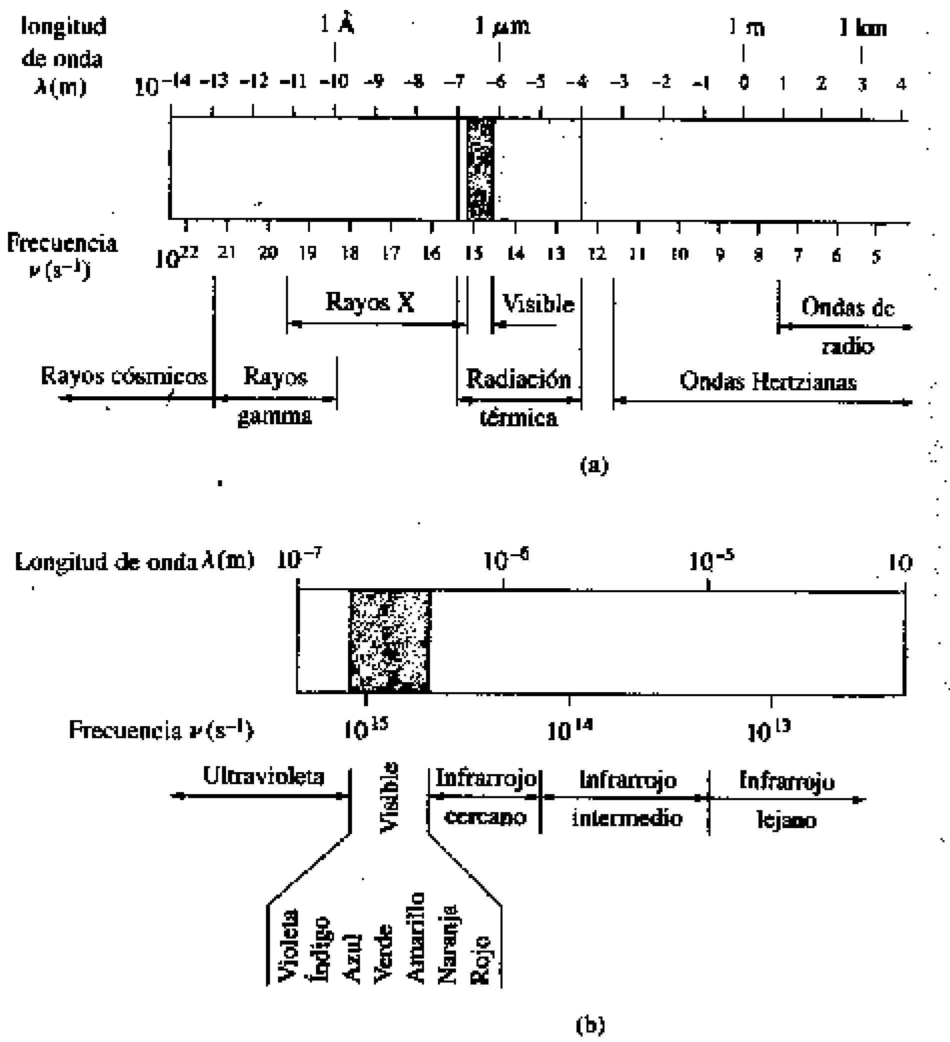


FIGURA 8 (a) Espectro electromagnético. (b) Parte de radiación térmica electromagnético.

Todos los cuerpos que se encuentran a una temperatura T > 0 K, *emiten radiación térmica* que es transportada por ondas electromagnéticas de diferentes frecuencias *ν* o longitudes de onda *λ* ($c = \nu\, \lambda$). Del mismo modo, todos los cuerpos *absorben radiación térmica* de los alrededores o de otros cuerpos que se encuentran a temperatura T’ ≠ T. La combinación de estos dos fenómenos determina la transferencia de calor por radiación, único mecanismo de transferencia de calor que no necesita de un medio físico.

1.3.a Radiación de un cuerpo negro.

La teoría que permite modelar la potencia emitida por un cuerpo a temperatura T, se relaciona estrechamente con la radiación de un *cuerpo negro* (B). Un cuerpo negro es una cavidad que emite radiación por un pequeño orificio, de acuerdo a la siguiente ley.

$$E_{\lambda,B}(T) = \frac{2\pi\, c^2 h}{\lambda^5 \left(e^{ch/\lambda k T} - 1 \right)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} c = 2{,}998\, x\, 10^{8}\ m/s & \text{velocidad de la luz en el vacío} \\ h = 6{,}626\, x\, 10^{-34}\ J\, s & \text{constante de Planck} \\ k = 1{,}381\, x\, 10^{-23}\ J/K & \text{constante de Boltzmann} \end{array} \right. \qquad (12)$$

Esta relación (que se demuestra con argumentos estadísticos, fuera del alcance de este curso), fue determinada por *Planck* en 1900 e indica cómo es la potencia emitida por unidad de área de un cuerpo negro que se encuentra a temperatura T y en determinada longitud de onda, razón por la cual se la conoce como *potencia espectral emitida*: En la figura 9 se grafica esta relación para cuerpos negros a diferentes temperaturas.

En la figura 9, también se observa que, a determinada temperatura, existe un máximo en la potencia espectral emitida. La longitud de onda y la intensidad de ese máximo varía con la temperatura del cuerpo. La longitud de onda λ_{max} para la cual la potencia espectral es máxima, se determina fácilmente, derivando la expresión (12), respecto de la longitud de onda.

$$\frac{d\, E_{\lambda,B}(T)}{d\, \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} T = 2897{,}8\ \mu m\, K \quad \text{Ley de Wien.} \quad (13)$$

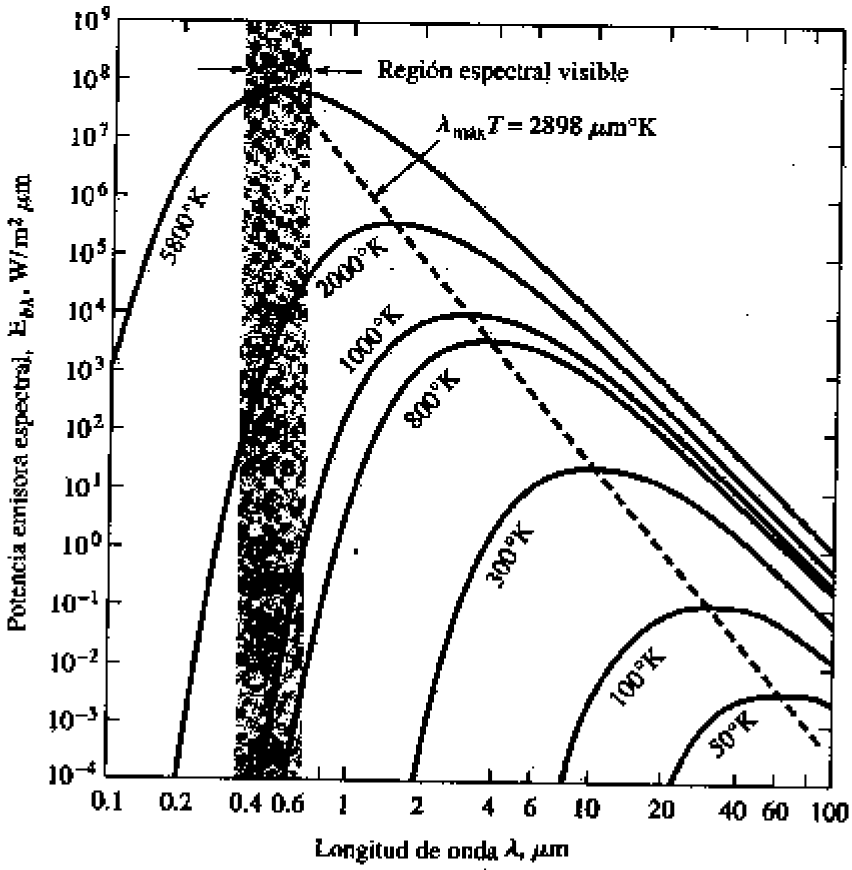


FIGURA 9 Potencia emisora monocromática de un cuerpo negro.

La potencia total emitida por unidad de área, se determina integrando la expresión (12) en todas las longitudes de onda del espectro:

$$E_B = \int_0^\infty E_{\lambda,B}(T)\,d\lambda = \sigma T^4 \quad / \quad \sigma = 5{,}67\,x\,10^{-8}\ W/m^2K^4 \quad \text{Ley de Stefan - Boltzmann} \quad (14)$$

1.3.b Emisión de un cuerpo real.

La teoría que permite modelar la potencia emitida por parte que un cuerpo real, es similar a la del cuerpo negro, excepto que para el cuerpo real, se agrega un factor ε (0< ε <1), llamado *emisividad* o *emitancia*. Así, la emisividad espectral ε_λ (aquella que depende de la longitud de onda) se agrega a la expresión (12), para observar cómo se modifican las gráficas de la figura 9, en un caso real:

$$E_{\lambda,R}(T) = \varepsilon_\lambda E_{\lambda,B}(T)$$

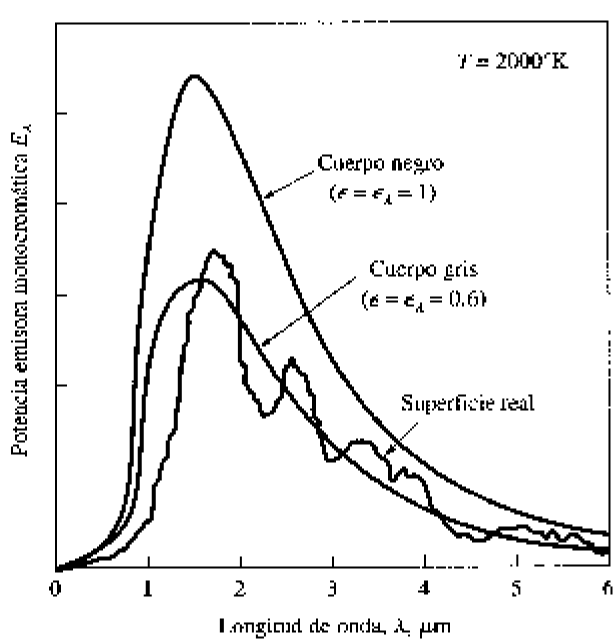


FIGURA 10 Comparación de emisión hemisférica monocromática de una superficie opaca, una gris (ε_g = 0.6), y una real.

La figura 10 muestra cómo es la potencia espectral de emisión de un cuerpo negro a temperatura de 2000 K, cómo sería si se multiplica por un factor de emisividad ε = 0,6 (que no depende de la longitud de onda, razón por la cual se llama “cuerpo gris”) y también cómo es la potencia emitida por un cuerpo real, cuya emitancia depende de la longitud de onda. Comparando la gráfica de la superficie real con la del cuerpo gris, se observa que la emitancia para valores de la longitud de onda entre (aprox.)2 µm y 2,5 µm es menor que 0,6; mientras que entre (aprox.) 2,5 µm y 3 µm es mayor que 0,6.

Vale notar que la potencia total emitida por la superficie gris verifica:

$$q_G = A\int_0^{\infty} \varepsilon\, E_{\lambda}(T)\, d\lambda = \varepsilon\, A\sigma\, T^4 \quad (15)$$

donde se ha tenido en cuenta el área de la superficie[4]. Sin embargo, para superficies reales, la integral no es tan sencilla porque la emitancia depende de la longitud de onda y no puede "sacarse afuera" de la integral. No obstante ello y siendo tan sencilla la expresión (15), en los casos reales se define una emitancia media. En la figura 10 se observa que el área debajo de la curva de la potencia espectral del cuerpo gris, es aproximadamente igual al encerrada por la potencia espectral de la superficie real.

1.3.c. Absorción de un cuerpo real

La potencia disipada por un cuerpo real, no sólo depende de la energía que emite, sino también de la energía que absorbe. Supongamos que sobre la superficie de un cuerpo incide la potencia irradiada por otro cuerpo $G_{\lambda}(T')$ que se encuentra a temperatura T'[5]. Parte de la potencia incidente será absorbida por el cuerpo, parte de la potencia incidente será reflejada por el cuerpo, parte de la potencia incidente, será transmitida.

$$G_{\lambda}(T') = \alpha_{\lambda}\; G_{\lambda}(T') + \rho_{\lambda}\; G_{\lambda}(T') + \tau_{\lambda}\; G_{\lambda}(T') \quad \begin{cases} \alpha_{\lambda} & \text{absortancia} \\ \rho_{\lambda} & \text{reflectancia} \\ \tau_{\lambda} & \text{transmitancia} \end{cases} \quad \alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} + \tau_{\lambda} = 1 \; (16)$$

donde los factores definidos son espectrales, pues depende de la longitud de onda de la radiancia espectral incidente. Ejemplos de la vida diaria, tomando como fuente de energía el Sol, ilustran ese hecho:

- "Agujero de la Capa de Ozono": La capa de ozono, cuando tiene un ancho significativo, tiene una transmitancia casi nula en regiones del espectro ultravioleta, mientras que atenúa relativamente poco las longitudes de onda del espectro visible. La disminución del ancho de la capa de ozono, tiene como consecuencia el aumento de esa transmitancia y perjudica la salud de nuestra piel.
- "Colores": Los colores que observamos en los diferentes objetos, se deben a que esos objetos reflejan la luz incidente en determinadas longitudes de onda y no en otras[6]. El negro, tiene una reflectancia casi nula en todo el espectro. El blanco, tiene una reflectancia muy alta en la región del espectro visible. El rojo tiene una reflectancia muy alta en la región del espectro visible correspondiente a ese color.

Cuando los cuerpos son opacos (no son transparentes, $\tau_{\lambda} = 0$) se verifica: $\alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} = 1$. Esto se observa cuando se usa ropa negra en el verano. La reflectancia de la tela es muy baja y por lo tanto, la absortancia muy alta, razón por la cual se siente más "calor" que usando ropa clara.

1.3.d Potencia transferida por un cuerpo real.

Nos proponemos demostrar que la emitancia y absortancia espectrales de un cuerpo real son iguales (*Ley de Kirchhoff*) Para ello, volveremos a trabajar con un cuerpo negro, cuyo comportamiento teórico es bien conocido (ecs. 12 y 15, fig.9).

Supongamos que nuestro sistema es un cuerpo real opaco y rígido a temperatura T que se encuentra adentro de una cavidad y que esa cavidad, se comporta como cuerpo negro a temperatura T'. El sistema debe verificar el primer principio de la termodinámica.

$$\frac{dU}{dt} = q - w = q \quad / \quad w = 0 \quad \text{por tratarse de un cuerpo rígido}$$

donde la variación de energía interna depende de las variaciones de temperatura. El sistema emite calor por radiación (calor saliente): $\varepsilon_{\lambda}\, E_{\lambda}(T)$ es la potencia espectral emitida por tratarse de un cuerpo real a temperatura T, donde $E_{\lambda}(T)$ está dada por la ecuación (12). La cavidad emite calor por radiación $G_{\lambda}(T')$, dada por la ecuación (12). Pero el sistema absorbe sólo parte de esa radiación (calor entrante): $\alpha_{\lambda}\, G_{\lambda}(T')$.

Si nuestro sistema está en equilibrio térmico con la cavidad (T' = T), toda la potencia calorífica que el sistema absorbe del cuerpo negro debe ser igual a la potencia calorífica que el sistema emite. Así, para cada longitud de onda, se verifica:

$$\alpha_{\lambda}\; G_{\lambda}(T) = \varepsilon_{\lambda}\; E_{\lambda}(T) \;\; (17)$$

[4] Recordar que la ecuación (12) expresa la potencia espectral por unidad de área.

[5] Para esa potencia incidente sobre el sistema, usamos otra letra de modo tal de distinguirla claramente de la potencia emitida por el sistema.

[6] Es importante no confundir la potencia reflejada: $\rho_{\lambda}\, G_{\lambda}\,(T')$, con la potencia emitida: $\varepsilon_{\lambda}\, E_{\lambda}\,(T)$.

Como la potencia incidente $G_\lambda(T)$ sobre el sistema es la potencia espectral emitida por un cuerpo negro que actualmente está a temperatura T, la emitancia y absortancia espectrales de un cuerpo real son iguales.

$$G_\lambda(T) = E_\lambda(T) \quad \text{y} \quad \alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \quad (18)$$

La emitancia y absortancia de un cuerpo no dependen de la temperatura, sólo depende de la longitud de onda. Por lo tanto la absortancia y emitancia espectrales serán iguales, aún cuando el cuerpo real y el cuerpo negro estén a diferente temperatura $T \neq T'$. En este caso, la radiación que emite el cuerpo negro es igual a la que incide sobre el sistema, pero diferente a la que el sistema emite:

$$E_\lambda(T') = G_\lambda(T') \neq E_\lambda(T) \quad (19)$$

En particular, si el sistema está a mayor temperatura que el cuerpo negro y la cavidad ($T > T'$), el primer principio de la termodinámica indica que el sistema pierde calor. Y por lo tanto la potencia neta transmitida por radiación será:

$$q_r = \alpha\, \sigma\, T'^4 - \varepsilon\, A\, \sigma\, T^4 = -\varepsilon\, A\, \sigma\, (T^4 - T'^4) \quad (20)$$

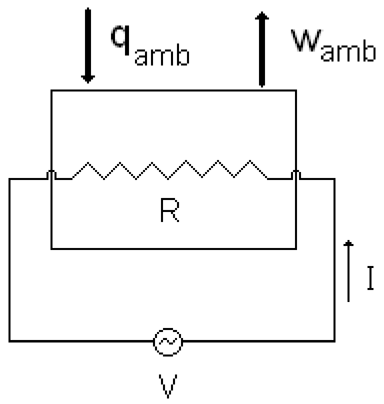
donde A es el área del cuerpo que disipa calor ($q_r < 0$) y se ha considerado la igualdad entre los valores medios de la absortancia y emitancia.

Cuando el sistema se encuentra en un recinto cerrado (como es el caso de un chip, en una computadora) el ambiente puede modelarse como un cuerpo negro que emite a temperatura T_∞ y se deprecia la radiación incidente de otras fuentes de radiación, como la luz de las lámparas o la luz solar.

Por último, señalamos que la ecuación (20) puede expresarse como:

$$q_r = \varepsilon\, A\, \sigma\, (T^4 - T'^4) = \left[\varepsilon\, A\, \sigma (T^2 + T'^2)(T + T')\right](T - T') = \frac{(T - T')}{R_r} \quad (21)$$

y por lo tanto se puede definir una resistencia térmica de radiación. La transferencia de calor por radiación es una propiedad de la superficie del sistema y por lo tanto, compite con la transferencia de calor por convección. En otras palabras, si el sistema cuya potencia queremos disipar, presentara una resistencia de convección muy alta (no se ventila correctamente) la temperatura del sistema aumentará, disminuyendo la resistencia de radiación.



2. Primer Principio de la Termodinámica aplicado a la Transferencia de Calor.

La aplicación del primer principio de la termodinámica nos permitirá determinar cómo varía la temperatura de un sistema con el tiempo T(t)

Si suponemos que la temperatura del sistema es uniforme (un punto del sistema está a la misma temperatura que otro punto del sistema), la única variable que rige el análisis del problema de la transferencia de calor es la temporal. Esta hipótesis, llamada "*sistema de mosaico*", permite calcular T(t) en el caso no estacionario. Sobre el final de esta sección, veremos cuándo es válida esa hipótesis.

La figura muestra un sistema cerrado que intercambia calor y trabajo (en forma de potencia) con el ambiente q_{amb} y w_{amb} y, además, potencia eléctrica w_{elect}, a través de una resistencia. El primer principio de la termodinámica indica:

$$\frac{dU}{dt} = q_{amb} - w_{amb} - w_{elect} \qquad (1)$$

donde la potencia eléctrica, en módulo, está dada por: $\left|w_{elect}\right| = I^2 R = \frac{V^2}{R} = V\,I$

El primer principio expresado en (1) considera que el trabajo entrante es negativo y por lo tanto, siguiendo esa convención:

$$w_{elect} = -I^2 R \quad / \quad \frac{dU}{dt} = q_{amb} - w_{amb} + I^2 R = q_{amb} - w_{amb} + q_G \qquad (2)$$

definiéndose así $q_G = I^2 R$, la potencia calorífica generada por el sistema. Si, además, el sistema se encuentra en un ambiente a presión constante la suma de los calores es igual a la variación de entalpía:

$$\frac{dH}{dt} = q_{amb} + q_G \quad / \quad q_G = I^2 R \qquad (3)$$

En particular, cuando el sistema es un sólido de masa *m* y calor específico *c*:

$$mc\frac{dT}{dt} = q_{amb} + q_G \qquad (4)$$

En la primera sección de estos apuntes, se describieron las distintas formas de transferencia de calor entre el sistema y el ambiente. Por lo tanto, dado un problema particular, se estará en condiciones de resolver la ecuación (3), sustituyendo q_{amb} por el mecanismo más adecuado. En ese sentido, se señala que la ecuación (3) tiene en cuenta que la potencia q_{amb} es positiva cuando entra al sistema.

Supongamos que el sistema es simplemente el conductor de resistencia R y que intercambia calor por convección con el ambiente. Cuando por él no circula corriente eléctrica, su temperatura es T_0, la temperatura del ambiente. Cuando comienza a circular una corriente I por el alambre, es de esperar que aumente su temperatura. Demostraremos eso planteando la ecuación (4) para el conductor de masa *m* y calor específico *c* y usando la relación de transferencia de calor por convección:

$$m\,c\frac{dT}{dt} = hA\left(T_0 - T\right) + I^2 R$$

donde *h* es el coeficiente de transferencia de calor por convección, *A* es la superficie externa del conductor, T_0 es la temperatura del ambiente y *T* es la temperatura que varía con el tiempo. Obsérvese que la diferencia de temperaturas se ha tomado de modo tal que la potencia calorífica intercambiada con el ambiente sea saliente al sistema y por lo tanto negativa: recuerde que la temperatura del conductor aumentará en el tiempo.

La ecuación que surge de esta aplicación sencilla, es una ecuación diferencial que tiene la siguiente solución, si se toma en cuenta que la condición inicial de la temperatura del alambre es la temperatura del ambiente:

$$T(t) = \frac{I^2 R}{hA}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + T_0 \quad / \quad \tau = \frac{m\,c}{h\,A}$$

Analizando esa solución, se observa que el conductor tiene una temperatura de régimen:

$$T(t \to \infty) = \frac{I^2 R}{hA} + T_0$$

y, como era de esperar, esa temperatura es mayor, cuanto mayor sea la potencia generada por el conductor y menor sea el coeficiente de transferencia de calor por convección o la superficie externa a través de la cual se produzca la disipación.

La constante τ indica cuán rápidamente llega el conductor a su temperatura de régimen. Fijada la potencia eléctrica y las propiedades físicas del conductor, se observa que cuanto mayor sea al producto hA (la transferencia de calor hacia el ambiente sea más eficiente), el sistema tarda menos en llegar a su temperatura de régimen.

En el análisis anterior, se ha ignorado el hecho de que el conductor tiene un radio o espesor a finito y que la temperatura en su centro $T(\mathrm{r}=0)$ no tiene por qué ser la misma que la temperatura en la superficie $T(\mathrm{r}=a)$. Veremos en qué condiciones esta diferencia de temperaturas puede ser ignorada, o sea cuándo es válida la *hipótesis de mosaico*.

El circuito térmico del conductor que disipa potencia por convección, consiste en dos resistencias en serie: una resistencia térmica que representa los efectos de la conducción R_k (en el interior) y una resistencia térmica que representa los efectos de la convección R_c.(en el exterior). Si bien el cálculo de esas resistencias depende de factores geométricos, podemos estimar su orden de magnitud como:

$$R_k \approx \frac{a}{kA} \qquad R_c \approx \frac{1}{hA}$$

donde, para la conducción se ha usado un "ancho característico" del conductor (su radio a) y su superficie externa A. Considerando que la potencia transferida debe ser la misma (ambas resistencias térmicas están en serie) la diferencia de temperatura entre el centro del conductor y su superficie, puede ignorarse, si:

$$R_k << R_c \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{kA} << \frac{1}{hA} \quad \text{y} \quad Bi \equiv \frac{ha}{k} << 1$$

donde se ha definido el módulo de Biot (Bi) que sirve para comparar los efectos de la convección (en el exterior) frente a los efectos de la conducción (en el interior).

Supongamos que el conductor es de cobre ($k \approx 100$ W/m K) que la convección se produce en un ambiente superventilado ($h \approx 1000$ W/m^2 K) y que el diámetro del conductor es de 1,0 mm. El módulo Biot de nuestro problema será: Bi ≈ 0.01[7] y por lo tanto verifica la hipótesis de mosaico que permite validar la ecuación (4) para el estudio de este problema.

[7] Obsérvese que el módulo Biot es adimensionado.

3. Ecuación de Conducción.

Hasta este momento, hemos expuesto los modos de transferencia de calor, haciendo incapié especial en los conceptos que ellos implican. En esta sección, nos proponemos ampliar lo estudiado con referencia a la conducción, combinando la variables tiempo y espacio en una ecuación que permita calcular $T(\mathbf{r},t)$ y resolviendo esa ecuación en algunos casos particulares de utilidad en el análisis de problemas eléctricos. En el curso de "Ecuaciones Diferenciales" se estudia más detalladamente la solución de la ecuación de conducción, también llamada ecuación del calor.

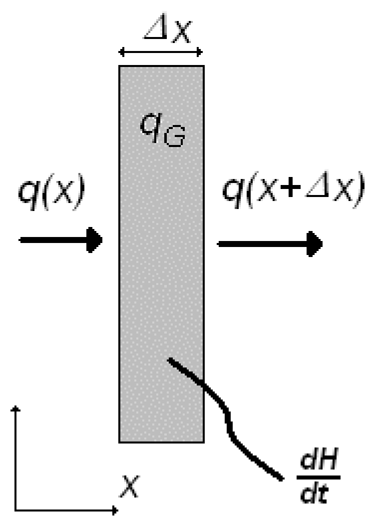


Figura 1

3.1 Caso unidimensional.

Comenzaremos analizando un sistema que transfiere calor por conducción en una dirección y en coordenadas rectangulares. La figura 1 muestra un sistema de ancho Δx que, además de conducir calor (en forma de potencia) en la dirección x, genera calor (en forma de potencia) q_G. Aplicando el primer principio al sistema, resulta:

$$q(x) + q_G = q(x+\Delta x) + \frac{dH}{dt} \quad (1)$$

Dicho en palabras: el calor entrante y el calor generado tienen que ser igual al calor saliente y a los cambio de entalpía del sistema (dado que la presión es constante). Determinaremos la forma de cada unos de esos términos:

- Según la ley de Fourier, el calor entrante es proporcional al gradiente de temperatura que se observa en el punto de coordenada x [8]:

$$q(x) = -k\,A\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x \quad (2)$$

Vale notar que se ha usado para el gradiente de temperatura la derivada parcial puesto que la temperatura ahora será función de dos variables $T(x,t)$. Para el calor saliente se tendrá una relación muy similar, pero evaluada en $(x+\Delta x)$.

- En lugar de trabajar con la potencia q_G generada por todo el sistema, conviene considerar la potencia genera por unidad de volumen: q_G' y si esa potencia está uniformemente distribuida en el sistema:

$$q_G = q_G'\ A\,\Delta x \quad (3)$$

- Los cambios temporales de la energía del sistema, representados como cambios de entalpía, dependerán de la masa del sistema m (o su densidad $\rho = m/V$), del calor específico del sistema c y de las variaciones de la temperatura con el tiempo. Pero la temperatura no sólo varía en el tiempo sino que también varía en el espacio. Optamos por evaluar sus variaciones temporales en el punto medio del sistema:

$$\frac{dH}{dt} = m\,c\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}} = \rho\ A\,\Delta x\ \ c\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}} \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2),(3),(4) en la ecuación (1) y dividiendo entre el área A que figura en todos los términos se tiene:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x + k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} + q_G'\ \Delta x = \rho\,\Delta x\ \ c\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}} \quad (5)$$

Dividiendo la ecuación (5) entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, se tiene la ecuación del calor:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x\right) = \frac{\partial}{\partial}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_G' = \rho\,c\,\frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

Si además, si la conductividad térmica k es constante, podemos definir la *difusividad térmica* α como[9]:

[8] No confunda la notación empleada con la usada en el tema "Potenciales Termodinámicos" del curso Física Térmica.

[9] La difusividad térmica es la capacidad que tiene un sistema de transportar energía y es muy importante en el estudio de la convección.

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q'_G = \rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'_G}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad / \quad \alpha \equiv \frac{k}{\rho\, c} \qquad (7)$$

3.2 Caso general.

La ecuación (7) ahora se puede generalizar para un caso general, sin importar la geometría del problema, dado que el primer término, en una geometría más compleja no es otra cosa que el *operador Laplaciano*:

$$k\,\nabla^2 T + q'_G = \rho\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (8)$$

donde se debe recordar que q_G' es la generación de calor por unidad de volumen, la cual se consideró uniforme en todo el sistema.

La ecuación general (8), puede resolverse computacionalmente para cualquier geometría, dadas las condiciones de frontera adecuadas (ver demos de Matlab 6.0: pdex1.m que resuelve la ecuación unidimensional, sin término de generación). En este curso, comentaremos la solución de la ecuación en algunos casos particulares.

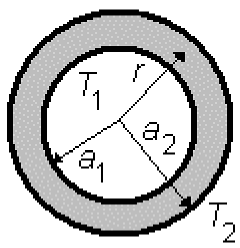


Figura 2

3.2.a Ecuación de Laplace. Resistencia Térmica.

Si se tiene un tubo cilíndrico muy largo y hueco por el que circula un fluido que lo mantiene a temperatura T_1 constante en su interior (radio interior a_1), mientras el exterior está a temperatura constante $T_2 \neq T_1$ (radio exterior a_2). El sistema no genera calor, ni tiene variaciones de temperatura con el tiempo. La ecuación de conducción del calor es estacionaria y se llama ecuación de Laplace. Como además, el sistema tiene simetría cilíndrica, la temperatura sólo dependerá de la distancia radial r de un punto dentro del tubo.

$$\nabla^2 T(r) = 0 \quad / \quad \frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad (9)$$

donde se expresa la el operador laplaciano en coordenada cilíndricas con simetría axial[10].

Es sencillo demostrar que la solución de la ecuación (9) es:

$$T(r) = C_1\,\log r + C_2 \begin{cases} C_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{\log\left(a_2 / a_1\right)} \\[2ex] C_2 = T_1 - C_1\,\log a_1 \end{cases} \qquad (10)$$

donde la evaluación de las constantes de integración C_1 y C_2 deben verificar:

$$T(a_1) = T_1 \quad \text{y} \quad T(a_2) = T_2$$

Si deseamos calcular la potencia calorífica que se trasmite por conducción en el tubo, debemos considerar la ley de Fourier, pero en coordenadas cilíndricas (con simetría axial):

$$q(r) = -k\;A(r)\left.\frac{dT}{\partial r}\right|_r = -k\,(2\pi\, r\, L)\left.\frac{dT}{\partial r}\right|_r \quad \Rightarrow \quad \frac{q_k}{L} = -k\,(2\pi\, r)\,\frac{C_1}{r} = 2\pi\, k\,\frac{T_1 - T_2}{\log\left(a_2 / a_1\right)} \qquad (11)$$

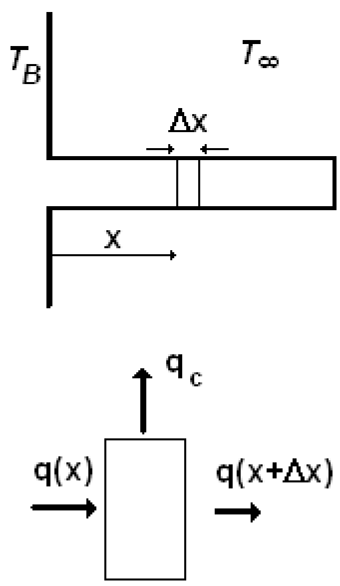
donde se hace notar que el área $A(r)$ a través de la cual se transfiere calor varía con el radio pero, la potencia calorífica no depende de la posición r y por lo tanto, se puede definir una resistencia térmica para el tubo de largo L, dada por.

$$q_k = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad / \quad R_k = \frac{\log\left(a_2 / a_1\right)}{2\pi\, k\, L} \qquad (12)$$

[10] Vale notar que esta ecuación (sustituyendo la temperatura por el potencial eléctrico) es idéntica a la ecuación que permite determinar cómo son las líneas equipotenciales en el interior de un medio dieléctrico cilíndrico e infinitamente largo.

3.2 Superficies extendidas.

Figura 3



Otra aplicación de la ecuación de conducción tiene que ver con la transferencia de calor combinada de conducción y convección que tiene lugar en una aleta; por ejemplo las aletas de un disipador. Trataremos el caso en que la sección de la aleta *S* es recta (no depende de *x*), como muestra la figura 3. Otra variable importante en el análisis será el perímetro *P* de la aleta que rodea la sección. El material de la aleta tiene conductividad térmica *k* y además es enfriada por el aire circundante con un coeficiente de convección *h*.

La temperatura a lo largo de la aleta T(*x*), variará con la coordenada *x* medida desde la base de la aleta que está a temperatura $T_B = T(x{=}0)$. El ambiente se encuentra a una temperatura $T_\infty < T_B$.

En el interior de la aleta se conduce calor por conducción, mientras que la aleta pierde calor por convección, a través de su superficie externa. En la parte inferior de la figura se representa esa situación para un elemento de la aleta de ancho Δ*x*. La ecuación de conservación del calor (ver figura inferior) indica que:

$$q(x) = q(x+\Delta x) + q_c \quad (1)$$

Los calores de conducción: q(*x*) y q(*x*+Δ*x*) verifican la ley de Fourier. El calor que se disipa por convección verifica la ley de Newton pero es importante notar que la temperatura del elemento de ancho Δ*x*, depende de su posición *x* y debemos evaluarla, por ejemplo, en el punto medio del elemento:

$$-k\,S\left.\frac{dT}{dx}\right|_x = -k\,S\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+\Delta x} + h\,A\left(T(x+\Delta x/2) - T_\infty\right) \quad (2)$$

donde de ha distinguido la sección de la aleta *S* de la superficie *A*= *P* Δ*x* que rodea al elemento y que es la que está expuesta a la corriente de convección. Dividiendo la ecuación entre *A*:

$$\frac{k\,S}{P\,\Delta x}\left(\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{dT}{dx}\right|_x\right) = h\,\left(T(x+\Delta x/2) - T_\infty\right) \quad (3)$$

Tomando el límite Δ*x*→0 surge la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{k\,S}{P}\,\frac{d^2T}{dx^2} = h\,\left(T(x) - T_\infty\right) \quad (4)$$

Para resolverla será más sencillo hacer un cambio de variable θ(*x*) y sintetizar todas las constantes del problema en una sola variable *m*:

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_\infty \;\Rightarrow\; \frac{k\,S}{P}\,\frac{d^2\theta}{dx^2} = h\;\theta(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\theta(x)\;/\;m^2 = \frac{hP}{kS} \quad (5)$$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma:

$$\theta(x) = C_1\,e^{m\,x} + C_2\,e^{-m\,x}\;/\;m = \sqrt{\frac{hP}{kS}} \quad (6)$$

Y, como en otros casos ya estudiados, las constantes de integración C_1 y C_2 se evalúan considerando las condiciones de borde de cada problema, en particular.

CASO 1: El problema más sencillo de analizar es el de una *aleta muy larga* de modo tal que la temperatura de su extremo sea igual a la temperatura del ambiente[11]:

$$\theta(x\to\infty) \equiv T(x\to\infty) - T_\infty = 0 \;\Rightarrow\; \theta(x) = C_2\,e^{-m\,x} \quad (7)$$

donde el término con exponente positivo (creciente según *x*) debe ser nulo. Considerando, además, que en la base de la aleta, la temperatura en conocida, es fácil ver que:

$$\theta(x=0) \equiv T(x=0) - T_\infty = T_B - T_\infty \equiv \theta_B \;\Rightarrow\; \theta(x) = \theta_B\,e^{-m\,x} \quad (8)$$

Ahora determinaremos una expresión de la resistencia térmica para la aleta. El calor que entra a la aleta, desde su base y que se transfiere por conducción, verifica la ley de Fourier, evaluando el gradiente de temperatura en la base de la aleta:

[11] Es obvio que una aleta tiene un largo no infinito. Para aletas de largo L, existen soluciones de la ecuación (6) más complejas (ver bibliografía).

$$q_B = -k\, S \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -k\, S \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = m\, k\, S\, \theta_B = \sqrt{h\, P\, S\, k}\,\left(T_B - T_\infty\right) \qquad (9)$$

donde se ha derivado la expresión (8) y se la ha evaluado en $x = 0$. De ecuación (9) surge claramente que toda la aleta puede considerarse como una resistencia térmica entre las temperatura T_B y-T_∞ por la que se disipa el calor q_B:

$$q_B = \frac{\left(T_B - T_\infty\right)}{R_t} \quad / \quad R_t = \frac{1}{\sqrt{h\, P\, S\, k}} \qquad (10)$$

la cual tiene en cuenta la combinación de la transferencia de calor por conducción a través de la sección *S* y la conductividad térmica *k* de la aleta y la transferencia de calor por convección a través de el perímetro *P* y el coeficiente *h*.

Por último, para el sistema de aleta infinita, vale señalar que todo el calor que entra por conducción desde la base, es igual a todo el calor que la aleta disipa por convección:

$$q_{C,total} = \int_0^\infty h\, P\, \theta(x)\; dx = \sqrt{h\, P\, S\, k}\,\left(T_B - T_\infty\right) \quad (11)$$

como se puede demostrar usando la solución $\theta(x)$, dada por la ecuación (8).

CASO 2: Cuando la temperatura en el extremo de la aleta no coincide con la temperatura del ambiente, el calor que llega por conducción al extremo, tiene que disiparse por convección:

$$-k \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\, \theta(L) = h\left(T(L) - T_\infty\right) \quad (12)$$

Sustituyendo esta condición en la solución general (6) se determina que la resistencia térmica de una aleta es:

$$R_t = \frac{1}{\sqrt{h\, P\, S\, k}} \left[\frac{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}\right] \quad (13)$$

donde se ha usado además que:

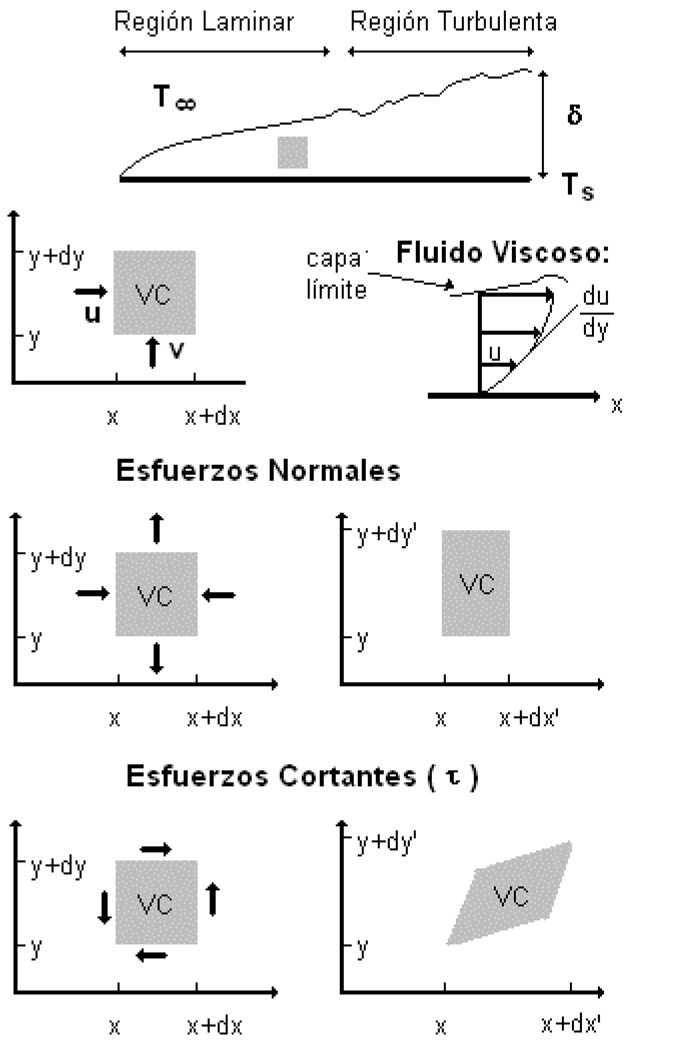
$$T_B - T_\infty = \theta(x=0) = C_1 + C_2 \quad (14)$$

Y la expresión (13) en la mayoría de las aplicaciones prácticas es del mismo orden que la resistencia térmica calculada por "fuerza bruta", o sea aquella que solamente tiene en cuenta la transferencia de calor por convección en la aleta:

$$R_t \approx \frac{1}{h\, A_T} \quad (15)$$

siendo A_T el área total expuesta a la corriente convectiva. Por esta razón, muchos programas comerciales que ayudan a calcular la disipación en sistemas electrónicos, usan esa aproximación, sin entrar en el estudio detallado que hasta aquí se ha desarrollado.

4. CONVECCIÓN



4.1 Nociones de Mecánica de los Fluidos.

Para entender mejor los parámetros significativos de la convección, se definirán (aunque no se demostrarán) algunas conceptos importantes en el campo de la *Mecánica de los Fluidos*.
En la figura se observa una superficie que transfiere calor al ambiente a temperatura $T_\infty < T_s$ por convección. La corriente de aire, propulsada por un ventilador viene desde la izquierda y tiene velocidad máxima u_∞. El ancho δ de la capa límite crece con la coordenada *x* (medida desde el borde de entrada de la superficie). Se distinguen dos regimenes de comportamiento: la *región laminar* (ordenada), que se observa cerca del borde y la *región turbulenta* (desordenada), que se observa más allá de una región intermedia, llamada región de transición.

4.1.a Ecuaciones de conservación.

El tratamiento clásico de la convección utiliza tres leyes de conservación muy conocidas en otros campos de la Física y que provienen de aplicarlas al volumen de control señalado en la figura. El VC está definido en el plano (*x,y*) porque se supone que las variables no dependen de la coordenada *z*. Determinaremos solamente de qué variables dependen esas ecuaciones, para ver cuáles son relevantes al problema.

- **Conservación de la masa**. La velocidad del fluido que entra al VC según *x* es *u*(*x,y*), y hay fluido que se desplaza según *y* con velocidad *v*(*x,y*). Del curso de Física Térmica sabemos:

$$\sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s = \frac{dm_{vc}}{dt}$$

Pero, además, sabemos que la masa que entra o sale del VC depende de la densidad del fluido ρ, de su velocidad y del área que atraviesa. Por lo tanto, la densidad del fluido juega un roll importante ($\rho \approx 1{,}0$ kg/m^3).

- **Conservación de la cantidad de movimiento**. La segunda ley de Newton habla de las *fuerzas inerciales* que actúan sobre el fluido y que son aquellas que verifican el teorema del trabajo y la energía o sea la ecuación de Bernoulli, cuando el fluido es incompresible e irrotacional:

$$P + \frac{\rho\, u^2}{2} + \rho\; g\; y = cte$$

donde *P* es la presión estática del fluido, *g* la aceleración gravitatoria y el segundo término de la ecuación, corresponde a la *fuerza inercial*.

Pero además, para un fluido existen otros dos tipos de fuerzas: los *esfuerzos normales*, perpendiculares a la superficie del VC (como las correspondientes a la presión estática *P*) y los *esfuerzos cortantes*, paralelos a la superficie del volumen de control. En la figura se muestra, cuáles son las deformaciones que sufre el fluido, debido a esas fuerzas. Entonces, la presión es importante en esta ecuación. Los esfuerzos cortantes están directamente relacionados con la viscosidad μ del fluido, la definen formalmente y se las conoce como fuerzas viscosas:

$$\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

Por lo tanto la viscosidad del fluido juega un roll importante ($\mu \approx 2 \times 10^{-5}$ N s/m^2)[12].

- **Conservación de la energía.** Del curso de Física Térmica sabemos:

$$Q_{vc} - W_{vc} + \sum \dot{m}_e h_e - \sum \dot{m}_s h_s = \frac{dE_{vc}}{dt}$$

y que la energía de un gas ideal (el aire) está relacionada con su calor específico c_p y la temperatura del sistema. Por lo tanto la capacidad calorífica del aire juega un roll importante ($c_p \approx 1{,}0$ kJ/kg K).

4.1.b. Números adimensionados y la capa límite.

En el estudio de un fluido y muy especialmente en el cálculo del ancho δ de la capa límite, tanto en régimen laminar como en régimen turbulento, se usan tres números adimensionados que miden relaciones entre propiedades físicas del fluido. Es importante notar que el ancho de la capa límite varía con la coordenada x, medida desde el borde de la superficie que se desea enfriar y, por lo tanto, esos números también dependerán de esa coordenada.

Para definirlos, recordemos que son importantes: la densidad del fluido ρ, la viscosidad μ, el calor específico c_p y dado que queremos observar el comportamiento del fluido en un proceso de transferencia de calor, serán importantes, también: la velocidad del fluido (usamos u_∞, que es la que conocemos), la conductividad térmica del fluido k_f y el coeficiente de convección h.

- **Número de Reynolds**: compara cómo son las fuerzas inerciales, respecto de las fuerzas viscosas. Usando las definiciones del párrafo "conservación de la cantidad de movimiento":

$$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho u_\infty^2 / 2}{\mu u_\infty / x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}_x \equiv \frac{\rho u_\infty}{\mu} x$$

El número de Reynolds determina hasta qué distancia el fluido es laminar ($\mathrm{Re}_x < 10^5$) y a partir de qué distancia, el fluido es turbulento ($\mathrm{Re}_x > 2 \times 10^5$)[13]. Por ejemplo, si la velocidad del fluido es de 7 m/s, se puede determinar que sobre una aleta existirá régimen laminar, sólo en el caso en que la aleta tenga un largo L:

$$L < 10^5 \frac{\mu}{\rho u_\infty} = 28{,}6\ cm$$

- Número de Prandlt: recordamos que la *difusividad térmica* de una sustancia se definía combinando su conductividad térmica k_f, densidad ρ y calor específico c_p y que es la propiedad que indica que el sistema es capaz de transportar energía, conduciéndola. Combinando la densidad ρ y viscosidad μ, definimos la *viscosidad cinética* o simplemente difusividad, que está relacionada con la propiedad del sistema de transportar masa.

$$\begin{matrix}\text{difusividad térmica} \\ \text{transporte de energía}\end{matrix} \left\{ \alpha = \frac{k_f}{\rho c_p} \right. \quad \Bigg| \quad \begin{matrix}\text{viscosidad cinética} \\ \text{transporte de masa}\end{matrix} \left\{ \nu = \frac{\mu}{\rho} \right.$$

En número de Prandlt compara cómo es el transporte de masa, respecto del transporte de energía del fluido:

$$\frac{\text{transporte de masa}}{\text{transporte de energía}} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pr} \approx 0{,}71 \quad \text{(para el aire)}$$

- Número de Nusselt: relaciona el calor transportado por convección con el transportado por conducción en la interfase entre la superficie y el fluido.

$$\frac{\text{calor por convección}}{\text{calor por conducción}} \quad \Rightarrow \quad Nu_x = \frac{h}{k_f} x$$

Usando estos números adimensionados, el ancho de la capa límite y el coeficiente de convección h (según x y en valor medio) se calculan:

[12] Los valores que aquí se dan para las variables son valores aproximados. Dependen de la temperatura.
[13] Estos límites varían un poco, según los autores. Es más, si la superficie no es perfectamente plana (por ejemplo el aire debe circular por encima de un chip o entre dos aletas, o entre varias plaquetas) el flujo se observa turbulento para valores del número de Reynolds bastante menores.

$$\text{Para flujo laminar :}$$
$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$
$$\left.\begin{aligned} h(x) &= 0{,}332\,\frac{k_f}{x}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \\ Nu_x &= 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \bar{h} = 2h(x = L)$$

$$\text{Para flujo turbulento :}$$
$$\delta(x) = \frac{0{,}37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}$$
$$\left.\begin{aligned} h(x) &= 0{,}0296\,\frac{k_f}{x}\,\mathrm{Re}_x^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \\ Nu_x &= 0{,}0296\,\mathrm{Re}_x^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \bar{h} = \frac{5}{4}h(x = L)$$

siendo L el largo de la superficie a ser enfriada:

Si calculamos el ancho de la capa límite y el valor medio del coeficiente de convección, para una aleta de 10 cm de largo, cuando circula un flujo a velocidad de 7 m/s, resulta[14]:

$$\text{Para flujo laminar : } \delta_{\max} = 3\ mm\ ;\ \ \bar{h} = 33\ W/m^2K$$
$$\text{Para flujo turbulento : } \delta_{\max} = 5\ mm\ ;\ \ \bar{h} = 43\ W/m^2K$$

lo cual implica que la separación entre aletas de un disipador debe ser mayor que $2\delta_{max}$, caso en el cual se puede aplicar la relación determinada en la sección “Superficies extendidas” o incluso (como hacen algunos programas comerciales) suponer que todo el disipador se comporta como una resistencia térmica $1/hA$, siendo A la superficie total expuesta a la corriente de aire.

4.2 Características de un Fan Cooler.

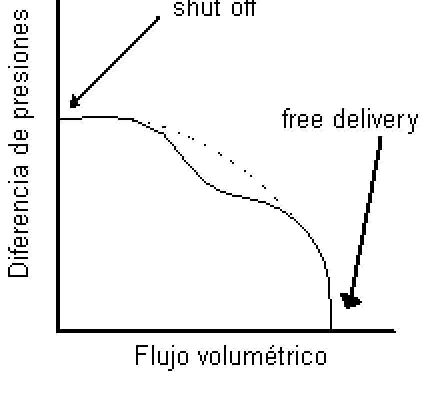
Un “fan cooler” es un propulsor de aire que puede trabajar de dos formas:
a) succionando el aire caliente del interior de la cabina de una computadora, hacia el ambiente
b) propulsando el aire para que circule por el interior de la cabina y salga por los agujeros de ventilación. Para ello tiene aspas rotatorias de geometría aerodinámica, que tiene un comportamiento similar a las alas de un avión o las aspas de un helicóptero.

Las propiedades de transferencia de un fan cooler están determinadas por su radio, medido en pulgadas (1,0 in = 2.54 cm), su frecuencia de rotación ($f = \omega/2\pi$), medida en revoluciones por minuto (1 rpm = 1/60 Hz)) y el flujo volumétrico (CFM, cubic feet per minute), medida en pies cúbicos por minuto (1,0 ft = 30,48 cm), siendo el CFM el *volumen máximo* que es capaz de succionar el propulsor. Es importante observar que, siendo el fan cooler una máquina que extrae un flujo volumétrico constante, el flujo másico que propulsará, depende de la densidad del fluido ($\rho \approx 1{,}0$ kg/m^3):

$$\dot{m} = \rho\,\dot{V} \quad / \quad \dot{V} \le CFM \quad (1)$$

El calor disipado por el fan (tomando en cuenta el primer principio para sistemas abiertos) está dado por:

$$q = \dot{m}\,c_p\,(T_{in} - T_\infty) = \rho\,\dot{V}\,c_p\,(T_{in} - T_\infty) \quad (2)$$



siendo c_p el calor específico del aire ($c_p \approx 1{,}0$ kJ/kg K)

Nos concentraremos en el estudio de un fan que succiona aire caliente, como el que se observa en la parte posterior de una PC, el cual sirve para ventilar la fuente que alimenta el sistema. El aire no es un fluido incompresible pero, para explicar cualitativamente el comportamiento de la corriente de aire que atraviesa el fan, apelaremos a la ecuación de Bernoulli, en ausencia de fuerzas gravitatorias:

$$P_{in} - P_{out} + \frac{1}{2}\left(\rho_{in}\,u_{in}^{\ 2} - \rho_{out}\,u_{out}^{\ 2}\right) = cte \quad (2)$$

[14] El número de Reynolds máximo (calculado para L = 0,1m) es Re = 3,5 x $10^4 < 10^5$ y por lo tanto, el sistema estaría en régimen laminar, según el criterio expuesto anteriormente. Pero, en un disipador real la superficie por la que circula el aire no es tan plana como esa condición requiere.

siendo *P* la presión estática y *u* la velocidad del fluido; la constante tiene en cuenta la potencia eléctrica que consume el motor del fan. La ecuación indica que si la presión de salida disminuye, el fluido tendrá un aumento de la energía cinética de salida.

Por lo tanto la diferencia de presiones compite con la cantidad de aire que el fan es capaz de succionar, como se muestra en la figura. Un fan cooler real trabajará en algún punto de la curva continua, succionando menos aire del que indica su especificación. El punto señalado como "free delivery" coincide con el CFM del fan, punto que jamás se logra en la práctica.

El otro punto a tener en cuenta es el "shut off" (también llamado staff condition) para el cual la diferencia de presiones es máxima, pero el flujo volumétrico succionado es nulo. Como la presión en la cara interna del fan es muy alta, el aire que se encuentra en el interior de la cabina no fluye hacia el lugar donde está el fan y el dispositivo deja de cumplir su función.

Por último, señalamos que los fabricantes de fan cooler recomiendan que los equipos de disipación por aletas, dejen áreas libres para que pueda pasar aire con menor velocidad que 7 m/s.

Bibliografía:

- Principios de transferencia de calor - F. Kreith & M.S. Bohn - Thomson Learning - ISBN: 970-686-063-0 - 6ta edición
- Fundamentos de transferencia de calor y masa - F.P. Incropera & D.P. de Witt - John Wyley & Sons - ISBN: 0-471-51729-1 - 3era edición
- http://www.aerodyn.org/Frames/1design.html
- http://www.aerodyn.org/Propulsion/propeller.html
- http://www.melcor.com/
- http://www2.thomasregister.com/olc/melcor/structur.htm
- http://jchemed.chem.wisc.edu/Journal/Issues/1996/oct/abs940.html