

Nº. 151

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Director Dr. HILARIO MAGLIANO

SERIE TERCERA

13

PUBLICACIONES ESPECIALES

SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

FOR

EL INGENIERO CIVIL

FELIX DE MEDINA

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE MAQUINAS
Y PROFESOR TITULAR DE MAQUINAS Y RESISTENCIA DE MATERIALES
EN LA FACULTAD DE INGENIERIA DE MONTEVIDEO



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS
MARZO DE 1942

PRECIO \$ 5,00

00402

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PRESIDENCIA Y CONSEJO SUPERIOR

(1942)

Presidente: doctor Alfredo L. Palacios.

Vicepresidente: ingeniero Gabriel C. del Mazo.

Consejeros titulares: Ingeniero agrónomo Juan C. Lindquist, ingeniero Gabriel C. del Mazo, ingeniero Julio R. Castiñeiras, ingeniero Aquiles Martínez Cívelli, doctor Luis R. Longhi, doctor Ricardo de Labougle, doctor Orestes E. Adorni, doctor José Belbey, doctor Juan E. Cassani, doctor Alfredo D. Calcagno, doctor Carlos A. Sagastume, doctor Hércules Corti, doctor Joaquín Frenguelli, doctor Max Birabén, e ingeniero Félix Aguilar.

Consejeros suplentes: ingeniero agrónomo Arturo Burkart, ingeniero agrónomo Teófilo V. Barañao, ingeniero Juan B. Gandolfo, ingeniero Juan L. Albertoni, doctor Carlos Cossio, doctor Arturo Barcia López, doctor Victorio Monteverde, doctor José E. Caeiro, doctor José María Monner Sans, profesor Alberto Paleos, doctor Reinaldo Vanossi, doctor Alejandro M. Oyuela, ingeniero agrónomo Lorenzo R. Parodi e ingeniero Nicolás Besio Moreno.

Secretario general y del Consejo superior: abogado Bernardo Rocha.

Guarda-sellos: ingeniero agrónomo Alejandro Botto.

Representantes de los estudiantes: señores Mario E. Ochoa y Guillermo O. Dick.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Decanato y Consejo académico

(1942)

Decano: ingeniero Julio R. Castiñeiras.

Vicedecano: ingeniero Juan B. Gandolfo.

Consejeros titulares: ingenieros Emilio Dickmann, Adolfo Dorfman, José Garralda y Enrique Humet.

Consejeros suplentes: ingenieros Eugenio Alcaraz, Eduardo Arenas, Juan P. Arnaud y Evaristo Artaza.

Secretario general: ingeniero Luis A. Bonet.

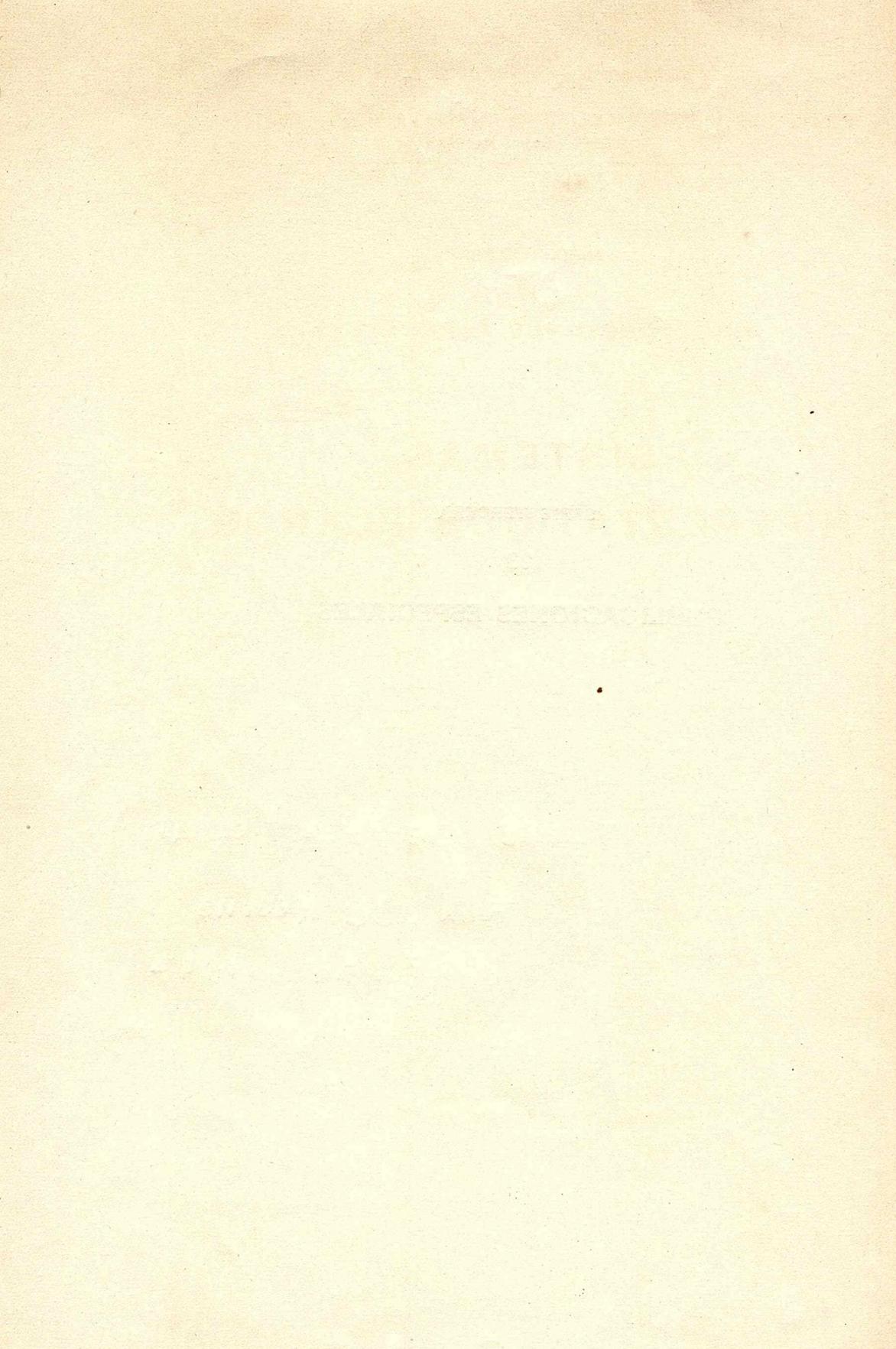
Delegados estudiantiles: señores Pablo Martín y Fabriciano Palmero Ortiz.

SERIE TERCERA

13

PUBLICACIONES ESPECIALES

INSTITUTO DE ESTADÍSTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
BOLIVIA 1942



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Director Dr. HILARIO MAGLIANO

SERIE TERCERA

13

PUBLICACIONES ESPECIALES

SISTEMAS HIPERESTATICOS PLANOS

POR

EL INGENIERO CIVIL

FELIX DE MEDINA

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE MAQUINAS
Y PROFESOR TITULAR DE MAQUINAS Y RESISTENCIA DE MATERIALES
EN LA FACULTAD DE INGENIERIA DE MONTEVIDEO



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS
MARZO DE 1942

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DPTO. DE DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
BIBLIOTECA CENTRAL
Ing. Edo. García de Zúñiga
MONTEVIDEO - URUGUAY

PRECIO \$ 5,00

PREFACIO

El tema de este trabajo fué motivo de las dos disertaciones que tuve el honor de ofrecer en la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata en el acto de inauguración del intercambio de profesores con la Facultad de Ingeniería de Montevideo.

El adelanto actual de la Resistencia de Materiales apreciado a través de la cantidad cada vez más grande de problemas que aborda y del número creciente de nuevas teorías y procedimientos de cálculo hace pensar seriamente en la necesidad de limitar su extensión en los cursos corrientes de opción al título, y reservar su desarrollo ulterior para cursos de post-graduados, que por disponer de más tiempo o de más vocación están en mejores condiciones que los estudiantes — generalmente apremiados por la preparación simultánea de materias importantes — para profundizar sus conocimientos en esta rama básica de la Técnica, y para contribuir, llegado el caso, con el aporte de su juvenil entusiasmo a su evolución y progreso.

Como además hay interés especial en que el graduado posea, al terminar sus cursos, una eficaz preparación, no sólo para el éxito de su ejercicio profesional, sino para el porvenir científico de su labor de post-graduado estudioso, se hace necesario suministrarle durante ese período de enseñanza limitada una cantidad de conocimientos indispensables en una forma cuidadosamente seleccionada para que su asimilación sea posible a costa de un esfuerzo mínimo.

Y como entiendo que el mejor sistema para conseguir ese objeto es la realización de cursos prácticos y experimentales muy intensos, en los que el alumno pueda resolver numerosos problemas y realizar variadas experiencias, mi idea es la de simplificar en lo posible el desarrollo del curso teórico, siempre claro está, que ello sea posible sin desmedro del rigor científico, que sostengo debe marcar la orientación indiscutida de todo Instituto Técnico.

El trabajo que se publica ahora dirá si realmente he tenido éxito al tentar su realización práctica, ya que me he propuesto resumir en una corta exposición lo que conceptúo es fundamental para el estudiante de Teoría de Estructuras en lo referente a los Sistemas Hiperestáticos Planos. Me he concretado naturalmente a la simple consideración teórica de los problemas básicos, esto es, a la que propugno debe ser breve, en el bien entendido de que la perfecta asimilación de los principios solo podrá conseguirse completando la teoría con la enseñanza práctica nutrida y bien orientada a que ya hice referencia.

Y ahora unas pocas palabras sobre la organización de este trabajo. La primera parte — que comprende tres capítulos — se refiere al tratamiento general, ya clásico, del problema, para el que he elegido como norma directriz la ecuación de MAXWELL-MOHR derivada del teorema de los trabajos virtuales. Podrá parecer poco oportuna, o cuando menos innecesaria, su inclusión en este estudio, existiendo en la Argentina obras valiosas que tratan magistralmente este punto, entre ellas los tratados de los profesores DUCLOUT y BUTTY; pero la he creído necesaria para no sacrificar la unidad de la exposición.

Me he preocupado en destacar, en el segundo capítulo, la importancia del Segundo Principio de Reciprocidad, ya que constituye la base teórica de los procedimientos de la Estática Experimental, que tanto han contribuído al progreso actual de la Ciencia de la Construcción.

Los dos primeros capítulos de la segunda parte se emplean en exponer un método que por su poder simplificador conceptúo genial: la « Analogía de la Columna », que el profesor HARDY CROSS comunicó al mundo técnico en el N° 215 del Boletín de la Engineering Experimental Station, University of Illinois, publicado en 1930.

Aprovechando precisamente esta analogía como herramienta (« a tool », como la designa con toda propiedad su eminente creador) desarrollo en el capítulo tercero la teoría de la viga con empotramientos elásticos, deducida de las propiedades nucleares de su columna análoga, y fundamento sobre ella el clásico método de STRASSNER, o de los puntos fijos, para los pórticos continuos.

El último capítulo se refiere a los sistemas rígidos de elevada indeterminación estática, y en él se hace una breve reseña de los procedimientos usuales para su resolución —de MOHR, de CROSS y de GEHLER— expuestos como consecuencia directa o indirecta de la analogía de la columna en un esfuerzo tendiente a hacer más sencilla la enunciación de sus principios. He tratado en ese forma de facilitar el trabajo de adaptación que debe realizar el que los estudia, propendiendo así a que el futuro ingeniero adquiera en esta importante materia el dominio suficiente que le permitirá seleccionar luego, frente al problema que le plantea el cálculo de una estructura compleja, el método de ataque que lo conduzca al término de su proyecto por el camino más breve, exacto y seguro.

No me es posible terminar esta introducción sin cumplir con el muy grato deber de expresar mi íntimo agradecimiento a los señores Decano, Vicedecano, Miembros del Consejo Académico, Profesores y Estudiantes de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata por las atenciones recibidas durante mi visita en agosto de 1941 a esa admirable Casa de Estudios y de manifestar cuan honrado me siento al poder presentar este trabajo de divulgación de mi materia predilecta bajo auspicio tan prestigioso como el que le confiere dicha Facultad al incluirlo en la Lista de sus Publicaciones.

FÉLIX DE MEDINA.

BIBLIOGRAFIA

PRIMERA PARTE

- E. MÜLLER-BRESLAU: *Scienza delle Costruzioni*. Milán 1927.
G. COLONNETTI: *Statica delle Costruzioni*. Turín 1928.
W. KAUFMANN: *Statik der Tragwerke*. Berlín 1930.
R. KIRCHOFF: *Statik der Bauwerke*. Berlín 1928.
J. DUCLOUT: *Teoría de la Elasticidad*. Buenos Aires 1928.
E. BUTFY: *Resolución Estática de Sistemas Planos*. Buenos Aires 1933.
J. PARCEL and G. MANEY: *Statically Indeterminate Stresses*. Nueva York 1936.
J. VAN DEN BROEK: *Elastic Energy Theory*. Nueva York 1931.
C. MC CULLOUGH and E. THAYER: *Elastic Arch Bridges*. Nueva York 1931.
J. RICALDONI: *Estática Experimental de Estructuras*. Montevideo y Rosario 1938.
F. DE MEDINA: *Análisis cinemático de las deformaciones flexionales*. Boletín de la Facultad de Ingeniería N° 3. Montevideo 1937.

SEGUNDA PARTE

- H. CROSS and N. MORGAN: *Continuous Frames of Reinforced Concrete*. Nueva York 1932.
CH. SPOFFORD: *Continuous Structures and Arches*. Nueva York 1937.
L. GIORGI: *El método de Cross*. «Revista Ingeniería». Marzo y Mayo 1931. Montevideo.
J. CASTIÑEIRAS: *Entrepisos sin Vigas*. Buenos Aires 1940.
J. PARCEL and G. MANEY: *Statically Indeterminate Stresses*. Nueva York 1936.
G. MAGNEL: *Stabilité des Constructions*. T. II. Gante 1935.
A. ESCUDERO: *Cálculo de sistemas elásticos*. Buenos Aires 1937.
O. T. VOODHIGULA: *Statically Indeterminate Trussed Structures*. «Proceedings Amer. Soc. of Civil Engineers». Enero 1941.

INDICE

PREFACIO	5
BIBLIOGRAFÍA	9
INDICE	11

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO I

EL TEOREMA DEL TRABAJO VIRTUAL

ART.	Pág.
1. — Estructuras a fibra media	17
2. — Un principio previo	18
3. — Elasticidad elemental	19
4. — Efecto inelástico	19
5. — Resiliencia	21
6. — Desplazamientos y deformaciones de la estructura	21
7. — Teorema del trabajo virtual	23
8. — Algo de historia	27

CAPÍTULO II

LAS LEYES DE ELASTICIDAD

ART.	
9. — Forma práctica de la ecuación de MAXWELL-MOHR	31
10. — Ley de CLAPEYRON	32
11. — Leyes de reciprocidad	32
12. — Ley de BETTI	33
13. — Segundo principio	34

CAPÍTULO III

RESOLUCION GENERAL DE LOS SISTEMAS PLANOS

ART.	
14. — Cálculo de desplazamientos	43
15. — Teorema de CASTIGLIANO	45
16. — Sistemas hiperestáticos	46
17. — Forma de las ecuaciones de elasticidad	49
18. — Principio de MENABREA	53
19. — Resolución de las ecuaciones	54
20. — Líneas de influencia	55
21. — Selección de incógnitas	57

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO I

ANALOGIA DE LA COLUMNA

ART.	Pág.
1.— Tensiones en una columna corta	63
2.— Analogía de la columna	67
3.— Influencia de la posición del centro de rotación	70

CAPÍTULO II

APLICACIONES DE LA ANALOGIA

ART.	Pág.
4.— Resolución de sistemas doblemente empotrados	73
5.— Efecto inelástico y corrimiento de apoyos	75
6.— Acortamiento elástico en los arcos	77
7.— Sistemas cerrados	77
8.— Teorema de WINCKLER	79
9.— Articulaciones	79
10.— Constantes de rigidez	79
11.— Viga recta doblemente empotrada	83
12.— Viga recta empotrada y apoyada	87
13.— Pórtico de dos articulaciones	89

CAPÍTULO III

VIGA RECTA CON EMPOTRAMIENTOS ELASTICOS

ART.	Pág.
14.— Flexibilidad y grado de empotramiento	91
15.— Columna análoga de una viga con empotramientos elásticos	92
16.— Puntos nucleares	94
17.— Centro y módulos	96
18.— Método de STRASSNER	98
19.— Momentos hiperestáticos debidos a cargas transversales	99
20.— Ejemplo de aplicación del método gráfico	101
21.— Simplificación para la viga de sección constante	104
22.— Carga concentrada y carga uniforme en la viga de sección constante ..	106
23.— Rigidez para el traslado vertical	108
24.— Rigidez para la rotación de una punta	112
25.— Valor de φ' para la viga de sección constante	116

CAPÍTULO IV

SISTEMAS RIGIDOS

ART.	Pág.
26. — Teorema del nudo	117
27. — Viga conectada a nudos elásticos	118
28. — Método de los focos	119
29. — Método de los focos: desplazamientos laterales	122
30. — Fuerzas de fijación	124
31. — Método de CROSS: nudos inmóviles	126
32. — Método de CROSS: nudos móviles	130
33. — Ecuación del cortante en sistemas con barras ortogonales	135
34. — Momentos secundarios	139
35. — Ecuaciones del «slope deflection»	141
36. — Método de MOHR para los esfuerzos secundarios en los sistemas triangulados	144
37. — Interpretación del método de CROSS y generalización de VOODHIGULA	145

PRIMERA PARTE

CAP. I. TEOREMA DEL TRABAJO VIRTUAL

CAP. II. LEYES DE ELASTICIDAD

**CAP. III. RESOLUCION GENERAL DE LOS SISTEMAS
PLANOS**

CAPITULO I

EL TEOREMA DEL TRABAJO VIRTUAL



1. **Estructuras a fibra media.** — Nuestro estudio se refiere solamente a las estructuras que resultan de la conexión de *barras*, llamadas también *estructuras a fibra media* desde que el elemento básico, la barra, se supone engendrado por el desplazamiento de una sección plana, que se mueve ortogonalmente sobre el *eje o fibra media* (recto o curvo) al que pertenece continuamente su centroide. Se admite además la pequeñez de las dimensiones transversales comparadas con las longitudinales, siendo éstas a su vez comparables al radio de curvatura del eje en los tramos curvos. Nos concretaremos en la exposición a los sistemas planos, aunque la extensión de las ecuaciones y leyes de éstos a los sistemas espaciales es muy simple y será mencionada oportunamente.

Las barras de la estructura plana pueden conectarse entre sí con uniones de tres tipos: rígidas, articuladas y deslizantes; y lo mismo sucede con las conexiones a tierra. La figura 1 muestra un sistema

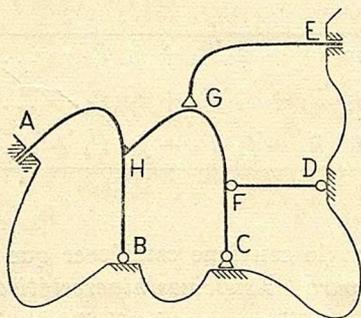


Fig. 1.

plano de cuatro barras, con apoyo rígido, triple, o empotramiento en *A* y en *E*; con apoyo articulado o doble en *B* y en *D*; con apoyo corredizo o simple en *C*; y con unión rígida en *H*; articulada en *F* y corrediza en *G*. Se sabe de Estática que cada uno de estos apo-

tos equivale a una, dos o tres reacciones vinculares; y que el grado hiperestático del sistema es igual a $r = a + s - 3p$, en donde a es el número de reacciones vinculares internas; s el de reacciones externas y p el número de barras.

2. Un principio previo. — En un sistema isostático como el que representa la figura 2 en cada punto M se definen los *parámetros de la sollicitación externa, flector, cortante y directa*, que llamare-

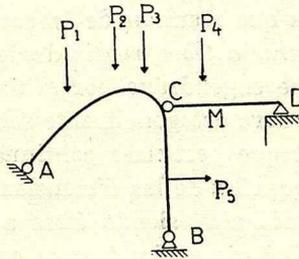


FIG. 2.

mos M , V , F , y, que de acuerdo con el principio de superposición de los efectos estáticos, están ligados a las fuerzas o cargas P_1, P_2, P_3, \dots por expresiones lineales y homogéneas de la forma

$M = m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + \dots$	[1]
$V = v_1 P_1 + v_2 P_2 + v_3 P_3 + \dots$	
$F = f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3 + \dots$	

Como principio previo conviene establecer que las ecuaciones [1] son *válidas también para los sistemas hiperestáticos*. Admitiendo esto la ordenación de lo que sigue es más fácil, surgiendo la demostración inmediatamente después de expuesto el método de cálculo de dichos sistemas.

3. **Elasticidad elemental.** — La figura 3 se refiere a un trozo de barra de largo ds infinitésimo. Las fórmulas de las sollicitaciones

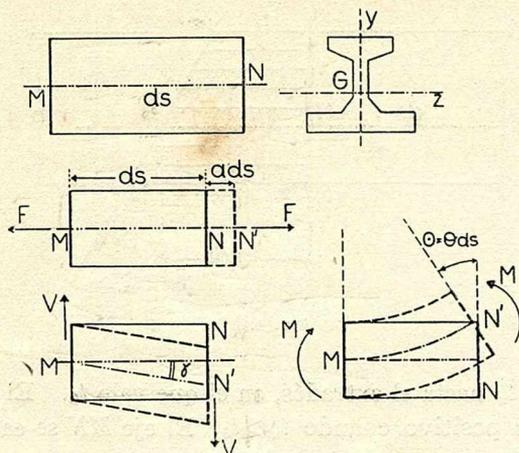


FIG. 3.

simples permiten evaluar las deformaciones a por fuerza directa; γ por fuerza cortante y θ por flexión en la forma siguiente:

$$\boxed{a = \frac{F}{E \Omega} \quad ; \quad \gamma = \chi \frac{V}{G \Omega} \quad ; \quad \theta = \frac{M}{EI}} \quad [2]$$

E es el módulo de YOUNG; G el módulo transversal; Ω , I , χ respectivamente el área, la inercia sobre el eje de flexión y el factor de corte. Los dos primeros parámetros dependen de las propiedades físicas de la barra; y los tres últimos de las geométricas de su sección. En la figura 3 se marcan los ejes Gyz , de los cuales el Gy , de simetría, está contenido siempre en el plano de la estructura.

4. **Efecto inelástico.** — La deformación de la barra elemental producida por efecto térmico, de frague, etc., la llamaremos en general efecto inelástico, y será asimilada siempre a una variación de temperatura t , que produce la dilatación $\alpha_t t$.

En las barras planas se tiene en cuenta este efecto suponiendo (fig. 4) que el calentamiento varía linealmente desde el intradós,

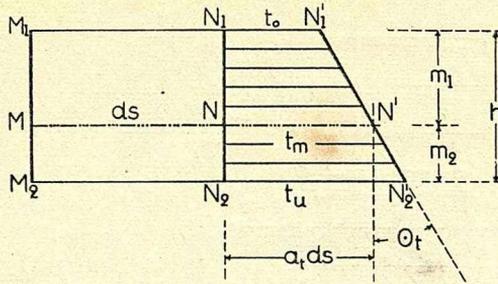


FIG. 4.

en el que vale t_u hasta el extradós, en el que vale t_0 . El incremento $\Delta t = t_u - t_0$ es positivo cuando $t_u > t_0$. El eje MN se calienta pues,

$$t_M = t_0 + \frac{t_u - t_0}{h} m_1$$

y se dilata:

$$\boxed{a_t = \alpha_t t_M} \quad [3]$$

El calentamiento desigual produce el giro de la sección N_1NN_2 en forma análoga al de la deformación por flexión, siendo el ángulo de giro

$$\odot_t = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds.$$

La deformación angular θ_t por unidad de longitud será así

$$\boxed{\theta_t = \frac{\odot_t}{ds} = \alpha_t \frac{\Delta t}{h}} \quad [4]$$

El efecto inelástico es, pues, una *dilatación* similar a la producida por la fuerza directa, de valor $\alpha_t t_M = a_t$ y un giro similar al producido por la flexión de valor $\alpha_t \frac{\Delta t}{h} = \theta_t$.

5. Resiliencia. — Las fórmulas de las dilataciones elásticas recordadas en el Art. 3 se refieren al caso de la aplicación lentísima e

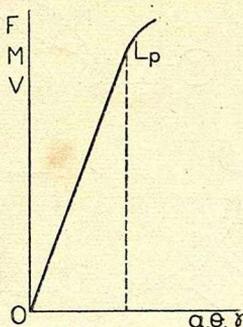


FIG. 5.

isoterma de las cargas F , M , V , y, a condición de mantener las tensiones por debajo del límite proporcional L_P (fig. 5). La resiliencia o trabajo de deformación está dada en este caso por

$$dW = \frac{1}{2} (F a + M \theta + V \gamma) ds$$

o sea:

$$dW = \frac{1}{2} \left(\frac{F^2}{E \Omega} + \frac{M^2}{EI} + \chi \frac{V^2}{G \Omega} \right) ds.$$

y referida a toda la barra:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_0^s \left(\frac{F^2}{E \Omega} + \frac{M^2}{EI} + \chi \frac{V^2}{G \Omega} \right) ds} \quad [5]$$

6. Desplazamientos y deformaciones de la estructura. — La estructura de barras que estamos estudiando puede *deformarse* al desplazarse cada uno de los puntos M de su fibra media según el vector δ de componentes u, v , que supondremos muy pequeñas con respecto a las dimensiones longitudinales. El vector δ cuyas componentes paralelas a los ejes y o x (fig. 6 a) son u, v , es el *desplazamiento*; y en la figura 6 b se ha analizado lo que ocurre al despla-

zarse el elemento infinitésimo de barra MN , que suponemos, por su pequeñez, recto.

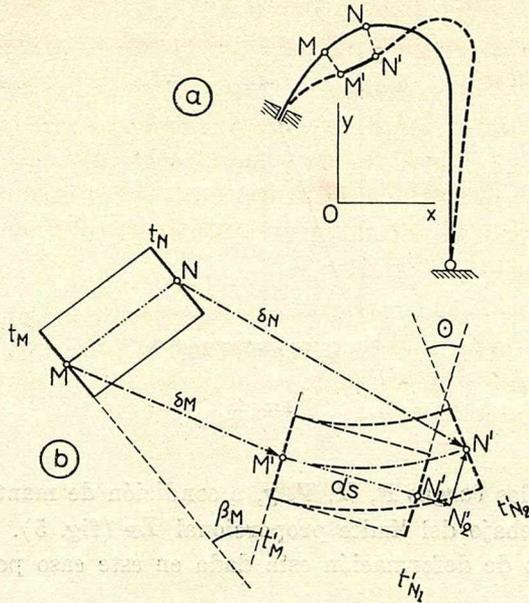


FIG. 6.

El punto M y la sección t_M se desplazan a M' y a t'_M ; hay el desplazamiento lineal δ_M y el angular o desviación de la tangente

$$\beta_M = \sphericalangle t_M t'_M.$$

Si el desplazamiento fuera un movimiento rígido los tres parámetros u_M ; v_M ; β_M lo definen, y el elemento MN se desplazaría hasta la posición $M'N_1'$; pero como los movimientos u , v , no tienen por qué corresponder, en general, a las formas simples del movimiento rígido las posiciones finales del punto N y de la sección t_N se obtienen superponiendo al movimiento rígido de M , t_M , una *deformación plana* definida precisamente por el movimiento relativo de t'_N con respecto a t'_M . Esta deformación se descompone en:

a) *alargamiento o dilatación longitudinal* $a = \frac{N_1' N_2'}{ds}$;

b) *deslizamiento transversal o distorsión*, $\gamma = \frac{N' N_2'}{ds}$;

c) *rotación unitaria* $\theta = \frac{\odot}{ds}$.

Los signos positivos para estas deformaciones se eligen en concordancia con los signos positivos de las sollicitaciones F , V , M mencionadas en el artículo 3 y en la figura 3.

Las causas que producen los desplazamientos y deformaciones de la estructura son :

- 1) aplicación de cargas, en forma lentísima e isoterma;
- 2) efecto inelástico, ya sea térmico, de frague, etc.;
- 3) defectos de diseño o construcción, que obligan la deformación previa de un elemento de la estructura para ajustar su montaje;
- 4) movimiento de los apoyos.

En lo que sigue se supondrá siempre que los desplazamientos obedecen a una de estas causas, y que son, por lo tanto, reales, no existiendo otra restricción que la de su pequeñez con respecto a las dimensiones longitudinales.

7. Teorema del trabajo virtual. — El objeto de este estudio es el planteo, en una forma que creemos sencilla, de la ecuación del trabajo de MAXWELL-MOHR para las estructuras definidas en el artículo 1, admitiendo provisoriamente el principio expuesto en el

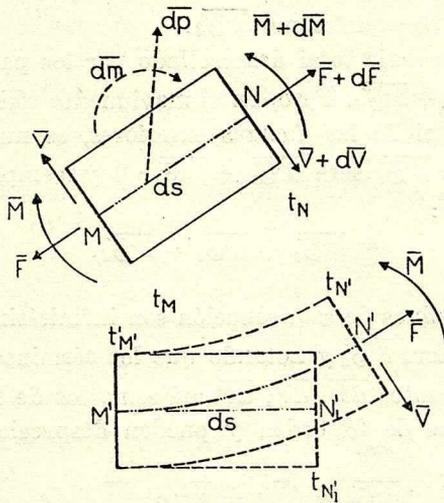


FIG. 7.

Art. 2; y la deducción, a partir de esa ecuación, de todas las leyes y métodos de cálculo de deflexiones y reacciones en los sistemas hiperestáticos.

Se supone una deformación real de la estructura que lleva el elemento MN a la posición final $M'N'$, con su correspondiente deformación dada por a (logitudinal); γ (distorsión) y θ (rotación).

La estructura se carga, antes de la deformación, con un sistema arbitrario de fuerzas \bar{P} , bien entendido en equilibrio con sus reacciones vinculares \bar{C} y que define en cada punto los tres parámetros de sollicitación *simulada* o *virtual* (*dummy-loading*). Lo único que se admite para esta carga es su compatibilidad con la estructura en lo que se refiere a los vínculos y al equilibrio total o parcial; de modo que el sistema que en la figura 7 se aplica al elemento infinitésimo MN y que se compone de los parámetros de reducción \bar{M} , \bar{V} , \bar{F} en la sección t_M ; $\bar{M} + \overline{dM}$; $\bar{V} + \overline{dV}$; $\bar{F} + \overline{dF}$ en t_N ; y carga y par infinitésimos \overline{dp} ; \overline{dm} aplicados al eje MN será un sistema equilibrado.

Avaluemos ahora el trabajo virtual desarrollado por la carga simulada en el desplazamiento real del elemento MN ; y para eso desdobleemos el trabajo de los parámetros \bar{M} , \bar{V} , \bar{F} en dos partes; una correspondiente al trabajo durante el movimiento rígido que lleva t_M a t'_M , que llamo $\overline{d\mathcal{G}_m}$; y otro correspondiente a la deformación que lleva $t_{N'}$ a t_N que llamo $\overline{d\mathcal{G}_d}$.

Si $\overline{d\mathcal{G}_p}$ es el trabajo total desarrollado por los parámetros se tendrá $\overline{d\mathcal{G}_p} = \overline{d\mathcal{G}_m} + \overline{d\mathcal{G}_d}$. Pero, en el movimiento rígido el trabajo total, incluyendo el de las fuerzas exteriores, es nulo; llamando al de estas últimas $\overline{d\mathcal{G}_e}$ será $\overline{d\mathcal{G}_m} + \overline{d\mathcal{G}_e} = 0$ y reemplazando en la expresión anterior:

$$\overline{d\mathcal{G}_p} + \overline{d\mathcal{G}_e} = \overline{d\mathcal{G}_d}.$$

Todos los términos de esta ecuación son infinitésimos de 2º orden.

Avaluando ahora $\overline{d\mathcal{G}_d}$ y notando que los términos correspondientes a los incrementos \overline{dM} , \overline{dV} , \overline{dF} así como los de la carga \overline{dp} , \overline{dm} son infinitésimos de 3º orden y pueden despreciarse, se obtiene:

$$\overline{d\mathcal{G}_d} = (\bar{F}a + \bar{V}\gamma + \bar{M}\theta) ds$$

y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\boxed{\overline{d\mathcal{G}_p} + \overline{d\mathcal{G}_e} = (\bar{F}a + \bar{V}\gamma + \bar{M}\theta) ds} \quad [6]$$

que es la forma diferencial de la ecuación del trabajo. Integrando para cada barra y sumando luego para todas las barras se obtiene la ecuación en términos finitos:

$$\int d\overline{\mathcal{G}}_p + \int d\overline{\mathcal{G}}_e = \Sigma \int (\overline{F} a + \overline{V} \gamma + \overline{M} \theta) ds.$$

El segundo miembro es el *trabajo virtual de la deformación*; la integral $\int d\overline{\mathcal{G}}_e = \Sigma \overline{P} \delta$ se representa simbólicamente por la sumatoria del segundo miembro, que se interpreta como la suma de los trabajos virtuales elementales obtenidos multiplicando cada carga por el desplazamiento según ella del punto de aplicación, que será

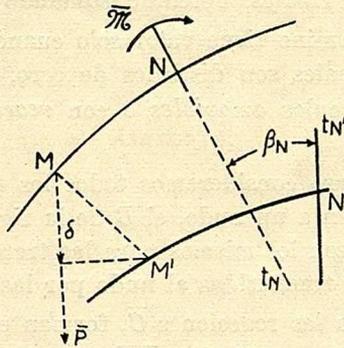


FIG. 8.

un desplazamiento lineal en el caso de una fuerza o un ángulo en el caso de un par (fig. 8). Con referencia a dicha figura el trabajo sería $\overline{P} \delta + \overline{M} \beta$.

Queda por último la integral $\int d\overline{\mathcal{G}}_p$ que corresponde al trabajo de los parámetros y que estudiaremos refiriéndonos a la figura 9, en una estructura de tres barras curvas AB , BC , BD , con el nudo

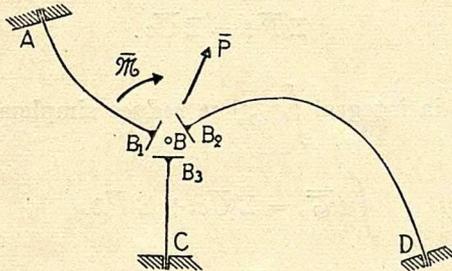


FIG. 9.

triple B que hemos desdoblado en las tres terminales $B_1 B_2 B_3$ de cada barra y con los tres empotramientos A, C, D .

Es evidente que al realizar la integral $\int d\overline{\mathcal{O}}_p$ los términos correspondientes a secciones contiguas de la misma barra se anulan, por ser igual el desplazamiento e iguales y de signo contrario los parámetros; quedando solamente los términos correspondientes a las secciones terminales, que pueden ser de dos clases: o finales (conectadas a tierra) o intercalares (conectadas a nudos).

En el primer caso (secciones finales) el trabajo es el desarrollado por las reacciones vinculares correspondientes a la carga simulada, que llamo genéricamente \overline{C} , en el movimiento de dichas secciones (cedimiento de apoyos) que llamo c , y, el trabajo total en todas las secciones finales, obtenido sumando todos los parciales, será $\Sigma \overline{C}c$. Este término tiene valor solo cuando los corrimientos c de las secciones finales son distintos de cero, en cuyo caso el sistema se dice a vínculos *amovibles* o con *reacciones que producen trabajo*.

En el segundo caso consideremos todos los términos $\Sigma \overline{C}c$ de las barras que concurren a un nudo, el B de la figura 9 como ejemplo. Los corrimientos c son los mismos para las tres terminales B_1 ; B_2 ; B_3 ; y las presiones transmitidas al nudo por las tres barras, que son iguales y opuestas a las reacciones \overline{C} , forman con la carga aplicada al nudo — que puede ser el par $\overline{\mathcal{M}}$ y la fuerza \overline{P} — *un sistema equilibrado*; de modo que la ecuación del trabajo para el corrimiento c del nudo (real); las cargas aplicadas \overline{P} y las presiones de las barras \overline{c} da

$$\Sigma \overline{P}\delta - \Sigma \overline{C}c = 0$$

o sea, que para cada nudo intercalar

$$\Sigma \overline{P}\delta = \Sigma \overline{C}c.$$

Por lo tanto, la integral $\int d\overline{\mathcal{O}}_p$ se reduce simplemente a

$$\int d\overline{\mathcal{O}}_p = \Sigma \overline{C}c + \Sigma \overline{P}\delta.$$

en donde el primer término $\Sigma \overline{C}c$ es el trabajo de los vínculos externos y $\Sigma \overline{P}\delta$ el trabajo de las fuerzas exteriores nodales, que pasará

por lo tanto a formar parte del término ya encontrado al integrar $\int d\bar{C}_e$.

En la ecuación diferencial del trabajo se consideraron como fuerzas exteriores sólo las infinitésimas que corresponden a una fuerza continua $\bar{d}p$ o a un par continuo $\bar{d}m$; si se quiere considerar la presencia de cargas o pares concentrados \bar{P} , \bar{W} en los puntos M , N de una barra (fig. 10) bastará considerar dichos puntos como *nudos*

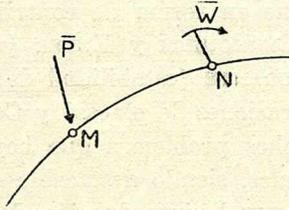


FIG. 10.

y aplicar el resultado anterior; de modo que en definitiva hemos demostrado la siguiente relación:

$$\boxed{\Sigma \bar{P}\delta + \Sigma \bar{C}c = \Sigma \int (\bar{F}a + \bar{V}\gamma + \bar{M}\theta) ds} \quad [7]$$

que es la *ecuación del trabajo de MAXWELL-MOHR* en términos finitos. $\Sigma \bar{P}\delta$ es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores, concentradas o continuas; en nudos o en puntos intermedios. $\Sigma \bar{C}c$ es el trabajo virtual de las reacciones vinculares finales.

El primer miembro es así el *trabajo virtual de las fuerzas exteriores*.

El segundo miembro es el *trabajo virtual de la deformación*, y la expresión [7], que establece la igualdad entre el trabajo externo y el interno demuestra el llamado *Principio del Trabajo virtual*.

8. Algo de historia. — Es interesante resumir, en este momento, la historia de la teoría de estructuras, para fijar la posición que este teorema tiene en su desarrollo. La estática de los cuerpos rígidos fué desarrollada después de SIMÓN STEVINUS (1548-1620); y recibió aportes de VARIGNON y GALILEO. Este último abordó por primera vez el estudio de la viga en ménsula.

La ley de elasticidad de HOOKE, descubierta en 1660, fué expresada en 1677 en el célebre anagrama *ceiwinosssttuw*, que equivale a *ut tensio sic vis*; MARIOTTE la aplicó en 1680 al problema de GALILEO; y THOMAS YOUNG midió los módulos de elasticidad, cuyo concepto introdujo en 1798.

NAVIER propulsó en forma notable la teoría de la elasticidad con sus famosas lecciones publicadas en *Annales des Ponts et Chaussées* en 1826; y la escuela francesa, con POISSON, LAMÉ y SAINT VENANT le dió un gran desarrollo.

Conviene aclarar que en forma de contribuciones aisladas BERNOULLI (elásticas); BERNOULLI y EULER (vibraciones de vigas y barras); EULER y LAGRANGE (estabilidad de barras comprimidas); SOPHIE GERMAIN (vibraciones de placas) y COULOMB (flexión y torsión) resolvieron muchos problemas que hoy forman parte de la Resistencia de Materiales, siendo destacable el hecho de corresponder a EULER y LAGRANGE la introducción del concepto del *trabajo elástico*.

Los trabajos anteriores se refieren más bien a Teoría de Elasticidad y Física matemática; la Teoría de Estructuras o Ciencia de la Construcción, o Elasticidad Técnica es más nueva, y su punto de partida, según los americanos (PARCEL y MANEY) debe verse en la obra de WHIPPLE, publicada en 1847 y referente a la construcción de puentes metálicos reticulados.

En 1863, 1864, 1866 aparecen la obra de AUGUST RITTER, el artículo de JAMES CLERK MAXWELL y la obra de K. CULMANN que aclaran de manera definitiva el problema de los sistemas triangulados.

En el artículo de MAXWELL publicado en el *Philosophical Magazine* (Vol. 27) está expuesto por primera vez el teorema del trabajo virtual restringido a los sistemas articulados, pero que le permite resolver cualquier problema de desplazamientos o hiperestático.

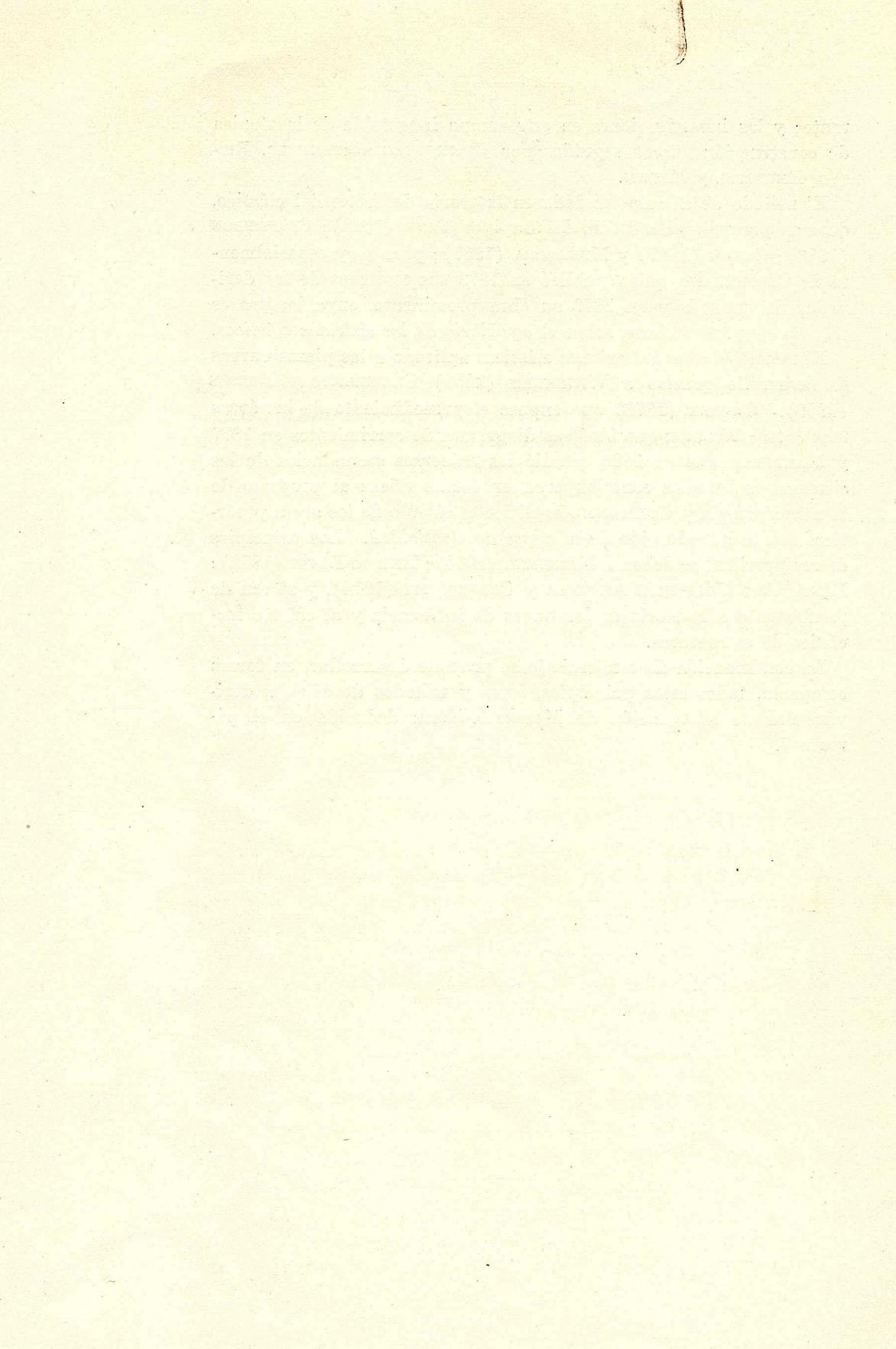
Fué OTTO MOHR, que ya en 1868 había formulado su famoso teorema de la elástica, quien perfeccionó la ecuación de MAXWELL extendiéndola a los sistemas resistentes a la flexión, y llevándola a la forma de la ecuación [7]. La aplicación sistemática de esa ecuación a la resolución de los sistemas hiperestáticos se debe principalmente a MÜLLER BRESLAU, quien la aplicó a gran número de estructuras construídas en Alemania después de 1880. Fué también este autor quien ideó el *método cinemático* para el cálculo de sistemas isostáticos, estando fechada la comunicación respectiva en 1892. La contribución de KHRON, LAND y FOPPL es también muy impor-

tante; y las investigaciones en este campo inagotable de la técnica de construcción fueron seguidas por HENNEBERG, OSTENFELD, RITTER, ENGESSER y MELAN.

El método de cálculo fundado en la teoría del potencial elástico, debe su progreso al esfuerzo del Capitán VENE (1818); CLAPEYRON (1833); GREEN (1837) y MENABREA (1857); pero muy especialmente de CASTIGLIANO quien publicó en 1873 sus teoremas de las derivadas del trabajo y en 1879 su obra prominente, cuya lectura es todavía muy provechosa, sobre el *equilibrio de los sistemas elásticos*.

El método de las deflexiones elásticas aplicado a las piezas curvas se desarrolló gracias a WINCKLER (1856) CLAPEYRON y BRESSE (1859). GREENE (1872) que expuso el procedimiento de las áreas momentos; WILLIOT que ideó sus diagramas de corrimientos en 1877 y MANDERLA que en 1880 estudió los esfuerzos secundarios de los sistemas reticulados contribuyeron en forma eficaz al progreso de la nueva ciencia y CULMANN simplificó el cálculo de los arcos y pórticos con la introducción de la *elipse de elasticidad*. Los principios de reciprocidad se deben a MAXWELL (1864); ENRICO BETTI (1872); LAND, VITO VOLTERRA, ALBENGA y COLONNETTI (1914), y sirven de fundamento a la teoría de las líneas de influencia y al cálculo mecánico de estructuras.

La continuación de este trabajo se propone desarrollar, en forma compacta, todos estos principios, leyes y métodos de cálculo, derivándolos de la ecuación de MAXWELL-MOHR deducida en el párrafo 7.



CAPITULO II

LAS LEYES DE ELASTICIDAD

9. **Forma práctica de la ecuación de Maxwell-Mohr.** — Se obtiene reemplazando en la ecuación [7] los valores de los parámetros de deformación real a, γ, θ por los que corresponden a una sollicitación real M, F, V ; y a un efecto inelástico definido por t_M y Δt y cuyos valores, expuestos en los artículos 3 y 4 son:

$$a = \frac{F}{E\Omega} + \alpha_i t_M \quad ; \quad \gamma = \chi \frac{V}{G\Omega} \quad ; \quad \theta = \frac{M}{EI} + \alpha_i \frac{\Delta t}{h}$$

La ecuación [7] se transforma así en

$$\boxed{\Sigma \bar{P}\delta + \Sigma \bar{C}c = \Sigma \int \left(\frac{\bar{F}F}{E\Omega} + \chi \frac{\bar{V}V}{G\Omega} + \frac{\bar{M}M}{EI} \right) ds + \Sigma \alpha_i \int \left(\bar{F}t_M + \bar{M} \frac{\Delta t}{h} \right) ds} \quad [8]$$

El primer término del segundo miembro es el trabajo virtual en la deformación elástica producida por las cargas que definen los parámetros F, V, M ; el segundo corresponde al efecto inelástico.

En los sistemas planos y triangulados, con cargas nodales, no existen V, M ; y la constancia de \bar{F}, F, E, Ω para cada barra permite calcular las integrales del segundo miembro y expresar la ecuación [8] en la forma de MAXWELL:

$$\boxed{\Sigma \bar{P}\delta + \Sigma \bar{C}c = \Sigma \frac{\bar{F}F}{E\Omega} s + \alpha_i \bar{F}t_M s} \quad [9]$$

La generalización de la ecuación [8] a los sistemas gausos se obtiene de inmediato agregando el término referente al momento torsor \overline{M}_t y a su flexibilidad $t \frac{ds}{GJ}$ y desdoblado el flector y el cortante en sus dos componentes según los ejes de la sección; pero como no daremos ejemplos de tales estructuras nos será suficiente esta mención, considerando innecesaria la redacción de la fórmula que es por lo demás absolutamente similar a la [8].

10. Ley de Clapeyron. — Aunque la idea de los desplazamientos virtuales fué aplicada ya por NAVIER fué CLAPEYRON quien en 1833 combinó los desplazamientos reales con las cargas reales. La ecuación [8] da, si se supone la inexistencia de efecto inelástico y la nulidad del trabajo vincular:

$$\Sigma P \delta = \Sigma \int \left(\frac{F^2}{E \Omega} + \chi \frac{V^2}{G \Omega} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

y teniendo en cuenta la expresión del trabajo de deformación o resiliencia W recordada en el Art. 5:

$$\Sigma P \delta = 2 W$$

o sea:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \Sigma P \delta} \quad [10]$$

La ecuación [10] expresa la *Ley de Clapeyron*: el trabajo desarrollado en la deformación de una estructura por un sistema de cargas de aplicación lenta e isoterma depende solo del estado final, y vale la mitad del trabajo que se produciría si las fuerzas se mantuvieran constantes durante la deformación.

11. Leyes de reciprocidad. — La ecuación de MAXWELL-MOHR [8] en el supuesto de vínculos que no generen trabajo y de ausencia de efectos inelásticos se reduce a

$$\boxed{\Sigma \overline{P} \delta = \Sigma \int \left(\frac{\overline{F} F}{E \Omega} + \chi \frac{\overline{V} V}{G \Omega} + \frac{\overline{M} M}{EI} \right) ds} \quad [11]$$

y da origen a una demostración simple de los famosos principios o leyes de reciprocidad, tan útiles para el cálculo analítico o mecánico de las estructuras.

Reseñando la historia de estos principios bastará decir que la idea básica partió de JAMES CLERK MAXWELL, quien la expuso en un artículo del *Philosophical Magazine* en 1864 en la forma conocida hoy como *Ley de Maxwell*; que no es sino un corolario o caso particular del *Primer Principio* o *Ley de Enrico Betti*, expuesta en un artículo sobre *Teoría de l'Elasticidad* publicado en 1872 en la revista « Il Nuovo Cimento ».

El segundo principio, que no se aclaró definitivamente hasta los trabajos de COLONNETTI en 1912-1916 aparece, sin embargo, en forma esbozada o implícita en la obra de MÜLLER BRESLAU, en un artículo de LAND y en otro de ALBENGA (*Sul teorema de Land*), en el que se aplica la ley de BETTI a su demostración. El profesor BEGGS de Princeton, cuando inició sus estudios sobre influenciometros y deformadores, llegó a establecer el principio como generalización del teorema del trabajo virtual, y lo sometió a una rigurosa comprobación experimental (posiblemente en 1918).

La demostración general de COLONNETTI se apoya en la teoría de las distorsiones de VITO VOLTERRA, y se refiere al cuerpo elástico tridimensional; en nuestra exposición nos referiremos solo al tipo de estructura de barras ya definido al que se aplica la ecuación de MAXWELL-MOHR en su forma restringida.

12. *Ley de Betti*. — En la *ley de Betti* se consideran dos sistemas independientes de cargas P, P' a los que corresponden desplazamientos δ, δ' y la demostración surge inmediata al aplicar la

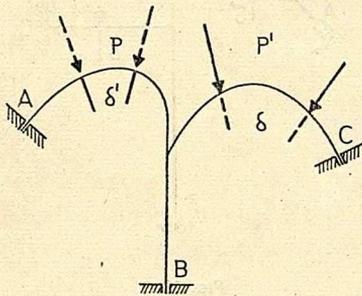


FIG. 11.

ecuación de MAXWELL a las cargas P y corrimientos δ' y a las cargas P' y corrimientos δ entendiéndose que δ' son los corrimientos que el

sistema P' produce según la dirección de las cargas P y recíprocamente (fig. 11).

Se tendrá así, con $M, V, F; M', V', F'$; correspondiendo a los sistemas P y P' respectivamente:

$$\Sigma P \delta' = \Sigma \int \left(\frac{MM'}{EI} + \chi \frac{VV'}{G\Omega} + \frac{FF'}{E\Omega} \right) ds$$

$$\Sigma P' \delta = \Sigma \int \left(\frac{M'M}{EI} + \chi \frac{V'V}{G\Omega} + \frac{F'F}{E\Omega} \right) ds$$

o sea la *Ley de Betti*:

$$\boxed{\Sigma P \delta' = \Sigma P' \delta} \quad [11']$$

Cuando los sistemas se reducen cada uno a una fuerza unidad se deduce como corolario la *Ley de Maxwell* (fig. 12):

$$\boxed{\delta = \delta'} \quad [12]$$

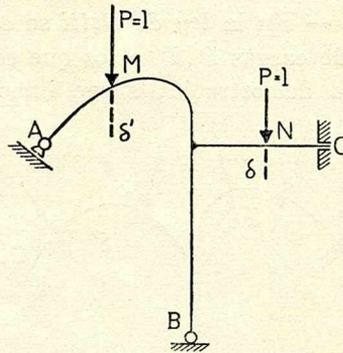


FIG. 12.

13. Segundo principio. — Para demostrar el segundo principio o *Ley de Colonnetti*, es necesario introducir dos nociones nuevas: la de *cortadura* y la de *dislocación*.

En la estructura plana de la figura 13 en el punto M se imagina

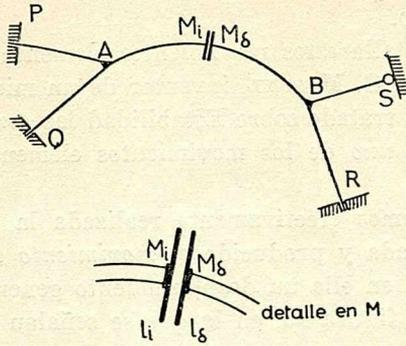


FIG. 13.

una *cortadura* o *separación* que establezca una discontinuidad en la barra; y se suponen soldadas a cada una de las puntas M_i , M_s (izquierda y derecha) dos rectas rígidas l_i , l_s que llamaremos *labios de la cortadura*. Claro está que como se trata de un corte imaginario en el estado real de la estructura cargada no podrá haber *ningún corrimiento relativo entre los labios*.

En cambio si el corte es efectivo ese corrimiento plano tendrá tres grados de libertad, y dependerá entonces de tres parámetros, que se eligen así:

a) traslación paralela al eje de la barra cortada que *separa* los labios la longitud $\overline{\Delta s}$.

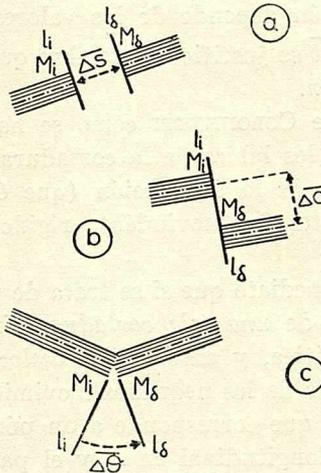


FIG. 14.

b) traslación normal al eje de la barra cortada que *desliza* los labios la longitud $\overline{\Delta c}$ descendiendo l_s con respecto a l_i .

c) rotación $\overline{\Delta\theta}$ alrededor de M que obliga a l_2 a girar sobre l_1 en sentido levogiro.

La figura 14 detalla estos movimientos elementales.

El profesor belga G. MAGNEL, inventor de un microinfluenciógrafo, introduce en su tratado sobre Estabilidad las *cortaduras simples*, que permiten solo *uno* de los movimientos elementales que hemos considerado.

Si ahora suponemos efectivamente realizada la cortadura en la estructura descargada y producido el *movimiento recíproco* de sus labios se verificará en ella un desplazamiento general que se ha esquematizado en la figura 15, en la que se señalan los corrimientos

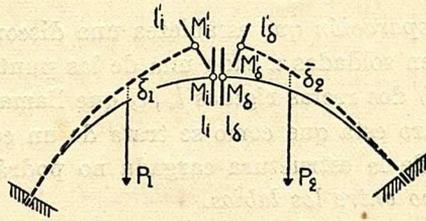


FIG. 15.

que corresponderían en ese desplazamiento a los puntos de aplicación de las cargas reales, y que es lo que llamaremos, de acuerdo con LOVE, *dislocación*.

Como esta dislocación depende de los valores arbitrarios de los parámetros $\overline{\Delta s}$, $\overline{\Delta c}$, $\overline{\Delta\theta}$ se justifica el nombre que se les da de *parámetros de la dislocación*.

En la exposición de COLONNETTI como se hace referencia a un cuerpo tridimensional los labios de la cortadura son elementos planos; y los parámetros de la dislocación (que él llama *distorsión*) son las seis componentes del movimiento rígido relativo de los labios planos.

Se comprende de inmediato que si se trata de una estructura isostática la introducción de *una sola cortadura simple* la transforma en una cadena cinemática, y entonces la *dislocación* se determina fácilmente por las leyes de los pequeños movimientos.

Así, en la figura 16 que corresponde a un pórtico de tres articulaciones la cortadura longitudinal en M y el parámetro de dislocación $\overline{\Delta s}$ permiten la determinación inmediata de la figura dislocada $AB'C$ en la que AB' es una recta.

Si en cambio la estructura es hiperestática la introducción de una cortadura simple, doble o triple le quita uno, dos, o tres grados de hiperestaticidad, y la dislocación podrá entonces determinarse con el trazado de la elástica de un sistema que previamente habrá sido resuelto como isostático o hiperestático, según el caso.

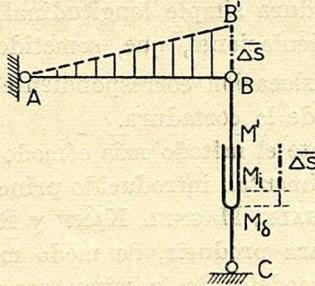


FIG. 16.

La figura 17 muestra en (a) y (b) problemas del primer tipo, o sea de cortaduras que reducen la estructura a isostática. Las fuerzas auxiliares que definen primero la sollicitación y luego, de acuerdo

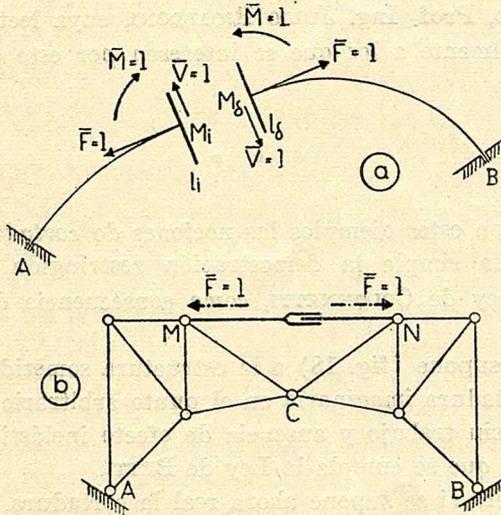


FIG. 17.

con las leyes de elasticidad, la dislocación de la estructura y los parámetros de dislocación se toman generalmente por comodidad iguales a 1; E ; EI ; etc., según los casos.

En (a) hay una cortadura triple que reduce un arco de doble em-

potramiento a dos ménsulas, cuyas deformaciones por las fuerzas auxiliares $\bar{F} = 1$; $\bar{M} = 1$; $\bar{V} = 1$ definen *la dislocación*; y dentro de ésta los tres corrimientos relativos entre los labios de la cortadura son los *parámetros de la dislocación*.

En (b un arco reticulado de dos articulaciones se transforma, al introducir una cortadura simple longitudinal en la barra MN , en un arco de tres articulaciones, que, sometido a la carga auxiliar $\bar{F} = 1$, origina la dislocación correspondiente a la separación que resulte de los labios de la cortadura.

Pero indudablemente el método más cómodo para obtener las dislocaciones es el experimental, introducido principalmente por BEGGS, COLONNETTI, GOTTSCHALK, MAGNEL, KANN y RIECKHOF, que idearon distintos aparatos para producir, de modo más o menos perfecto, las dislocaciones en modelos de la estructura construídos con diferentes técnicas (en plano, en elevación, muy flexibles, muy rígidos, etc.) y medir luego las dislocaciones y sus parámetros. La discusión de esos procedimientos — que nos llevaría fuera del tema — está expuesta con toda claridad y detalle en una publicación del Director del Instituto de Estática de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, Prof. Ing. JULIO RICALDONI, cuya lectura recomendamos especialmente a los que se interesen por este aspecto de la cuestión.

* * *

Aclaradas con estos ejemplos las nociones de *cortadura* y de *dislocación* resulta simple la demostración restringida del segundo principio, o Ley de COLONNETTI, como consecuencia de la Ley de BETTI.

Para eso se supone (fig. 18) a la estructura sometida a cargas P y con una cortadura imaginaria en el punto arbitrario M . Se asumen vínculos sin trabajo y ausencia de efecto inelástico, lo que es necesario para que se cumpla la Ley de BETTI.

Nada se altera si se supone ahora real la cortadura, siempre que se apliquen en sus labios los valores reales de los tres parámetros de reducción que corresponden a las cargas P : M , V , F , que se han representado con los signos positivos usuales en (b).

Hemos conseguido así *dividir* nuestra estructura en dos, agregando a los labios de la cortadura, como cargas exteriores, los parámetros de reducción M , V , F .

A este sistema de cargas, que llamaremos reales, corresponden desplazamientos reales, de los que interesa especialmente el des-

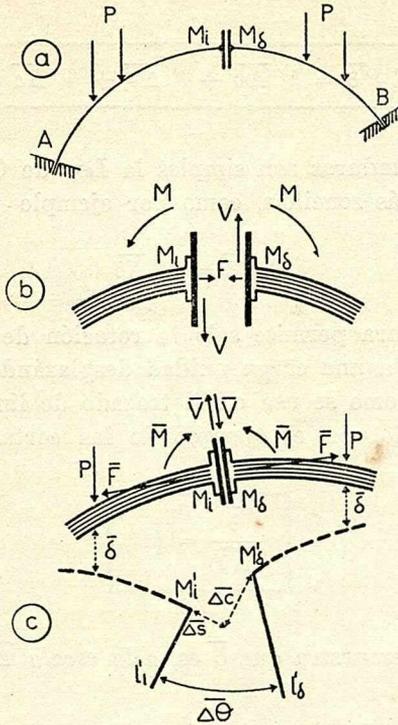


FIG. 18.

plazamiento relativo entre los labios de la cortadura, que por la continuidad de la barra, es *evidentemente nulo*.

Produzcamos ahora, con ayuda de las cargas \bar{M} ; \bar{V} ; \bar{F} indicadas en (c) una *dislocación de la estructura*, cuyos parámetros sean $\bar{\Delta s}$; $\bar{\Delta c}$; $\bar{\Delta \theta}$ y cuyos desplazamientos para las cargas P sean $\bar{\delta}$. Aplicando la Ley de BETTI y combinando los desplazamientos reales con las fuerzas que producen la dislocación por una parte; y los desplazamientos de la dislocación con las fuerzas reales por otra, y teniendo en cuenta que intencionalmente se han elegido los signos positivos de los parámetros de la dislocación para que resulten negativos los términos $M \bar{\Delta \theta}$; $F \bar{\Delta s}$; $V \bar{\Delta c}$, obtiene:

$$\Sigma P \bar{\delta} - (M \bar{\Delta \theta} + F \bar{\Delta s} + V \bar{\Delta c}) = \bar{M} \Delta \theta + \bar{F} \Delta s + \bar{V} \Delta c,$$

y como el segundo miembro es nulo por serlo $\Delta\theta$, Δs , Δc por la continuidad de la barra en M se obtiene la expresión del segundo principio de reciprocidad o Ley de COLONNETTI en la forma siguiente:

$$\boxed{\Sigma P \bar{\delta} = M \bar{\Delta\theta} + F \bar{\Delta s} + V \bar{\Delta c}} \quad [13]$$

Cuando las cortaduras son simples la Ley de COLONNETTI se reduce a formas más sencillas, como por ejemplo

$$\Sigma P \bar{\delta} = M \bar{\Delta\theta}$$

cuando la cortadura permite solo la rotación de los labios.

Si P se reduce a una carga unidad desplazándose paralelamente a una dirección como se usa en el trazado de líneas de influencia se tiene, siguiendo con el ejemplo de las cortaduras simples de rotación:

$$\boxed{\frac{\bar{\delta}}{\Delta\theta} = M} \quad [14]$$

y esta ecuación demuestra que $\bar{\delta}$ es, a la escala $\bar{\Delta\theta}$ la línea de influencia de M .

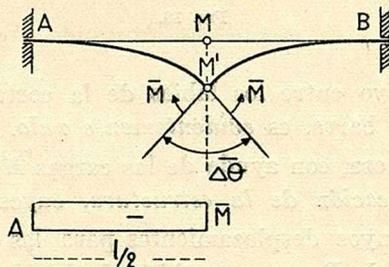


FIG. 19.

La figura 19 es una aplicación de la ecuación [14] al caso de una viga doblemente empotrada, en la que se ha determinado la línea de influencia del momento flector en la sección media calculando las elásticas de dislocación producidas por dos momentos \bar{M} aplicados en los labios de la cortadura. Por la simetría del

sistema pueden determinarse por Estática los diagramas de flector y trazarse las elásticas de acuerdo con ellos, obteniéndose los arcos de circunferencia AM' , $M'B$ conectados en M' . La ordenada MN' se calcula como sigue (método de las áreas-momentos):

$$\text{flecha } MM' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{M} l^2}{4 EI} = \frac{M l^2}{8 EI}$$

$$\overline{\Delta\theta} = 2 \cdot \frac{Ml}{2 EI} = \frac{Ml}{EI}$$

ordenada en M de la línea de influencia:

$$\overline{\delta}_M = \frac{\overline{\Delta\theta}}{MM'} = \frac{l}{8}$$

que es una expresión bien conocida.

En los *influenciógrafos* este cálculo se reemplaza por la dislocación producida por deformadores especiales, que pueden dar, a los labios de la cortadura, cualquiera de los parámetros $\overline{\Delta\theta}$, $\overline{\Delta c}$, $\overline{\Delta s}$ que se miden con toda exactitud para reducir el margen de error. En los aparatos de más precisión la medida de las flechas $\overline{\delta}$ y el calibrado del deformador se hacen con ayuda de microscopios (deformador de BEGGS y microinfluenciógrafo de MAGNEL).

CAPITULO III

RESOLUCION GENERAL DE LOS SISTEMAS PLANOS

14. **Cálculo de desplazamientos.** — La ecuación de MAXWELL-MOHR da origen al procedimiento de cálculo de desplazamientos conocido como método de la *carga unidad simulada* (dummy unit loading), que consiste en colocar, en la dirección del desplazamiento deseado, la carga virtual $\bar{P} = 1$ (fig. 20) y aplicar la ecuación de MAXWELL a los corrimientos reales producidos por cargas o efecto inelástico combinados con la sollicitación $\bar{P} = 1$.

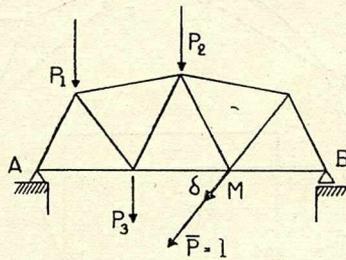


FIG. 20.

Como evidentemente $\Sigma \bar{P} \delta$ se reduce al desplazamiento buscado δ se obtendrá:

$$\delta = -\Sigma \bar{C}c + \Sigma \int \left(\frac{\bar{F}F}{E\Omega} + \chi \frac{\bar{V}V}{G\Omega} + \frac{\bar{M}M}{EI} \right) ds + \Sigma \int \left(\alpha_t \bar{F} t_M + \alpha_t \bar{M} \frac{\Delta t}{h} \right) ds \quad [15]$$

en la que \bar{C} , \bar{M} , \bar{V} , \bar{F} , son respectivamente las reacciones de vínculo y los parámetros de reducción de la carga virtual; el término $-\Sigma \bar{C}c$ marca la influencia en δ del corrimiento de apoyos; el se-

gundo término la influencia de la deformación elástica, y el último el del efecto inelástico.

A veces la deformación que se busca es más complicada: por ejemplo cuando se desea la dilatación de una recta que une dos puntos de la estructura, o la variación del ángulo de dos rectas. En esos casos, de los cuales la figura 21 ilustra algunos, se combina la carga virtual de modo que $\sum \bar{P}\delta$ sea igual al corrimiento buscado.

Así, en la figura 21 (a), el corrimiento de la articulación C se obtiene calculando los desplazamientos de la carga virtual $\bar{P}_1 = 1$ en la dirección CA y $\bar{P}_2 = 1$ en la dirección CB , y sumando vectorialmente los resultados.

En (b) se calcula el aumento de la distancia MN empleando dos cargas virtuales $\bar{P} = 1$ iguales y opuestas.

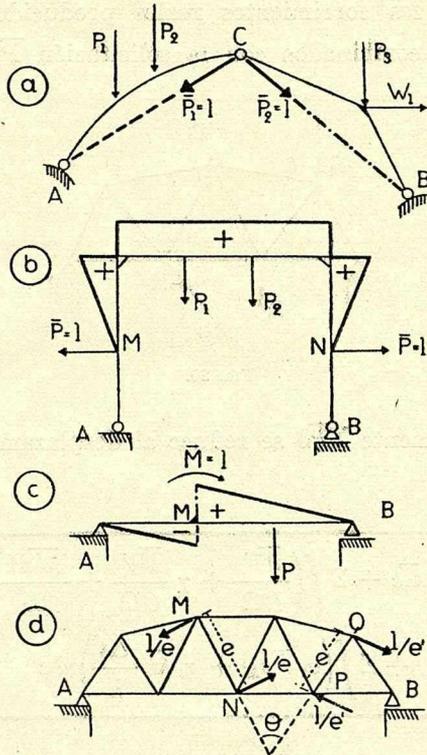


FIG. 21.

En (c) se obtiene el giro de la tangente M cargando con el par $\bar{M} = 1$.

En (d) interesa el aumento del ángulo θ entre las barras MN y PQ , para lo cual se aplican las cargas $\frac{1}{e}$ en los puntos M, N que distan e y las cargas $\frac{1}{e'}$ en los puntos P, Q que distan e' , de modo que $\Sigma \bar{P}\delta = d\theta$.

Los ejemplos indicados se refieren todos a sistemas isostáticos, pues sólo en éstos podemos, por ahora, determinar las reacciones y parámetros correspondientes a las cargas reales y virtuales.

15. **Teorema de Castigliano.** — Este famoso teorema puede demostrarse fácilmente partiendo de las expresiones postuladas en el Art. (2) y que se refieren a la forma lineal y homogénea de las relaciones entre M, V, F y las cargas exteriores $P_1, P_2 \dots P_n$

$M = m_1 P_1 + m_2 P_2 + \dots + m_n P_n$ $V = v_1 P_1 + v_2 P_2 + \dots + v_n P_n$ $F = f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots + f_n P_n$	[1]
---	-----

El fin perseguido es el cálculo del corrimiento producido, en la

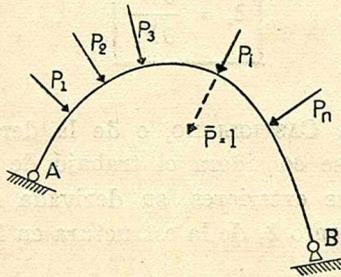


Fig. 22.

estructura cargada por $P_1, P_2 \dots P_n$ según la dirección P_i ;

(fig. 22) para lo cual usamos la carga virtual $\bar{P} = 1$ en la dirección de P_i . Pero para ese caso las ecuaciones [1] dan:

$$\bar{M} = m_i = \frac{\partial M}{\partial P_i}$$

$$\bar{V} = v_i = \frac{\partial V}{\partial P_i}$$

$$\bar{F} = f_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$$

y reemplazando en la ecuación de MAXWELL-MOHR, en el supuesto de vínculos fijos y ausencia de efecto inelástico

$$\delta_i = \Sigma \int \left(\frac{F}{E\Omega} \frac{\partial F}{\partial P_i} + \chi \frac{V}{G\Omega} \frac{\partial V}{\partial P_i} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} \right) ds$$

o sea:

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{1}{2} \Sigma \int \left(\frac{F^2}{E\Omega} + \chi \frac{V^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

y siendo la expresión bajo el signo de derivación la resiliencia para el estado de cargas considerado se obtiene:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}} \quad [16]$$

que es el *teorema de CASTIGLIANO*, o de la derivada del trabajo, que expresa que, si se considera el trabajo de deformación como función de las cargas exteriores, su derivada con respecto a la carga P_i es el corrimiento δ_i de la estructura en la dirección de P_i .

16. Sistemas hiperestáticos. — Los sistemas hiperestáticos de grado n se resuelven suprimiendo en forma arbitraria n vínculos, que se reemplazan por reacciones adecuadas de valor indeterminado $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$; con lo que se transforma el sistema en uno

isostático, llamado *sistema principal*, sometido a la acción de las cargas exteriores P_0 y a los efectos inelásticos $t_M, \Delta t$, que son datos del problema, y a la acción de las reacciones incógnitas, cuyo cálculo veremos en este artículo.

La elección del *sistema principal* y de las incógnitas es arbitraria; pero representa una etapa muy importante del problema, ya que de su selección atinada depende la mayor o menor dificultad de la resolución aritmética del problema.

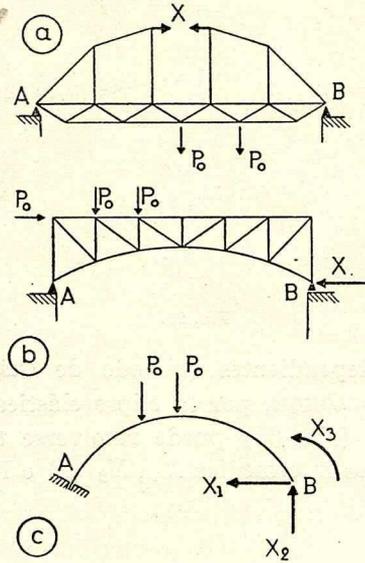


FIG. 23.

La figura 23 muestra tres ejemplos de selección de incógnitas: en (a) la viga de tres cordones con la incógnita X en la barra superior; en (b) el arco de reticulado y dos articulaciones con el empuje X como incógnita; y en (c) el arco de alma llena empotrado en A y B transformado en una ménsula con las tres incógnita X_1 (empuje); X_2 (reacción vertical); X_3 (par de empotramiento) actuando en lugar del empotramiento suprimido.

La figura 24 da un ejemplo de distinta selección de incógnitas en el sistema formado por dos arcos y una pila elástica intermedia. En (a) las incógnitas son los tres parámetros de reducción en las claves de los arcos (método de SKARDON, adoptado por SPOFFORD); en (b) las incógnitas son los parámetros en las ter-

minales del nudo D , que por satisfacer las ecuaciones de la estática

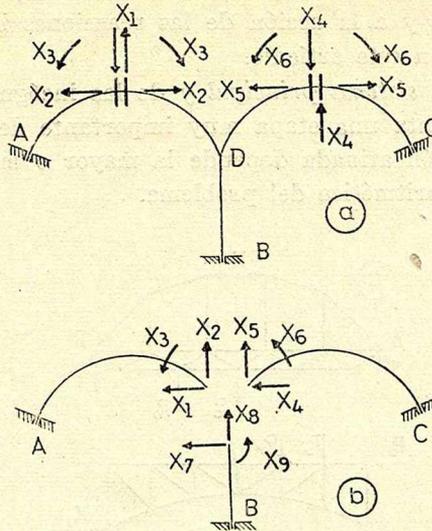


FIG. 24.

se reducen a 6 independientes (método de CROSS, por distribución, y de MAC COULLOUGH, por la elipse elástica).

La viga continua (fig. 25) puede resolverse tomando como incógnitas las reacciones intermedias X_1, X_2 (a) o los momentos sobre

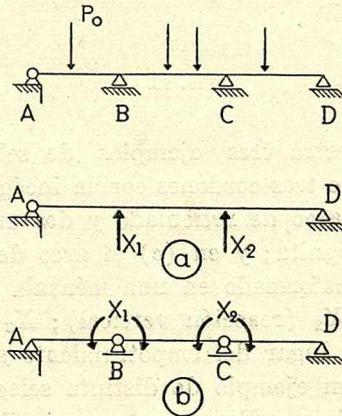


FIG. 25.

apoyo X_1, X_2 (b) en la viga transformada en discontinua por las articulaciones en B, C .

Una vez seleccionado el grupo de incógnitas y el sistema principal es posible representar, de acuerdo con el principio de superposición de los efectos estáticos, los parámetros M , V , F , en un punto cualquiera en la forma dada por las ecuaciones [1], o sea:

$$\begin{cases} F = F_0 + F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots \\ V = V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2 + \dots \\ M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots \end{cases} \quad [17]$$

en las que F_0, V_0, M_0 son los valores de F, V, M , en el sistema principal producidos por las cargas P_0 ; F_1, V_1, M_1 los correspondientes a la carga $X_1=1$ y así sucesivamente. Las incógnitas se resuelven planteando las *ecuaciones de elasticidad*, que nosotros deduciremos de la aplicación de la ecuación de MAXWELL-MOHR a los corrimientos reales del sistema (sometido a los parámetros F, V, M ; efecto inelástico y vínculos móviles) y sucesivamente a las cargas virtuales $X_1=1$; $X_2=1$; ... $X_n=1$, con lo que se obtendrán *tantas ecuaciones como incógnitas*, obteniéndose la solución del problema al resolver el sistema de las ecuaciones de elasticidad.

17. Forma de las ecuaciones de elasticidad. — La ecuación correspondiente a la carga virtual $X_i=1$ (iésima) se escribe así:

$$\begin{aligned} \Sigma C_i c + \delta_i = \Sigma \int \left(\frac{F_i F}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V}{G \Omega} + \frac{M_i M}{EI} \right) ds + \\ + \Sigma \alpha_i \int \left(F_i t_M + M_i \frac{\Delta t}{h} \right) ds \end{aligned} \quad [18]$$

El primer miembro contiene el trabajo virtual de los vínculos para las reacciones C_i correspondientes a $X_i=1$ y los desplazamientos reales de los apoyos c y el término δ_i trabajo virtual desarrollado por la carga virtual $X_i=1$ con el desplazamiento real δ_i según su dirección. Aunque MÜLLER-BRESLAU deja explícito este término en las ecuaciones que plantea en su magnífico tratado sobre la Ciencia de la Construcción nos parece más sencillo

eliminarlo por las siguientes consideraciones: cuando X_i es una reacción vincular externa el δ_i real en la estructura es un desplazamiento de vínculo, y es lógico entonces incluirlo en el término $\Sigma C_i c$ del trabajo vincular; cuando X_i es una reacción interna proveniente del corte de una barra el desplazamiento real, por continuidad, es necesariamente nulo.

El segundo miembro contiene dos términos. El segundo

$$\delta_i = \Sigma \alpha_t \int \left(F_i t_M + M_i \frac{\Delta t}{h} \right) ds$$

es, de acuerdo con el método de MAXWELL-MOHR para calcular desplazamientos (ver el Art. 14, ecuación [15]), el desplazamiento en el sistema isostático principal producido por el efecto inelástico real t_M ; Δt , según la dirección de X_i y por eso se le designa por δ_i .

Por último el primer término del segundo miembro, o sea

$$\Sigma \int \left(\frac{F_i F}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V}{G \Omega} + \frac{M_i M}{EI} \right) ds$$

es el que va a suministrar los términos correspondientes a las incógnitas ya que es necesario sustituir en él los valores de los parámetros reales F , V , M , dados por las ecuaciones [17], con lo que se transforma en

$$\Sigma \int \left[\frac{F_i}{E \Omega} (F_0 + F_1 X_1 + F_2 X_2 + \dots) + \frac{\chi V_i}{G \Omega} (V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2 + \dots) + \frac{M_i}{EI} (M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots) \right] ds$$

y desplazando las incógnitas fuera de los signos de \int y Σ

$$\begin{aligned} & \Sigma \int \left(\frac{F_i F_0}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V_0}{G \Omega} + \frac{M_i M_0}{EI} \right) ds + \\ & + X_1 \Sigma \int \left(\frac{F_i F_1}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V_1}{G \Omega} + \frac{M_i M_1}{EI} \right) ds + \\ & + X_2 \Sigma \int \left(\frac{F_i F_2}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V_2}{G \Omega} + \frac{M_i M_2}{EI} \right) ds + \dots \end{aligned}$$

Las sumatorias pueden, de acuerdo con las fórmulas de MAXWELL para los desplazamientos, y con la ley de BETTI, sustituirse en la forma siguiente:

$$\Sigma \int \left(\frac{F_i F_0}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V_0}{G \Omega} + \frac{M_i M_0}{EI} \right) ds = \delta'_0 = \Sigma P_m \delta'_m$$

en donde δ'_0 es el desplazamiento según X_i , producido por las cargas P_0 en el sistema isostático; o, lo que resulta más cómodo, el trabajo virtual producido por las cargas P_0 en la deformación del sistema principal debida a $X_i=1$, pues estos dos términos son iguales por la ley de BETTI. En esta última forma es usual el empleo de la expresión $\Sigma P_m \delta'_m$, en la que P_m representa una carga exterior cualquiera y δ'_m el desplazamiento según ella producido en el sistema principal por $X_i=1$. La figura 26 aclara el doble significado de este término.

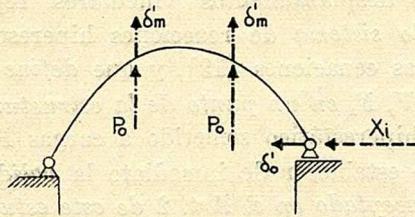


FIG. 26.

En cuanto a los términos que son coeficientes de las incógnitas, como

$$\Sigma \int \left(\frac{F_i F_1}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V_1}{G \Omega} + \frac{M_i M_1}{EI} \right) ds$$

son, por idéntica razón, iguales al desplazamiento producido en el sistema principal por $X_1=1$ según la dirección de X_i o por $X_i=1$ según la dirección de X_1 . Dentro de estos coeficientes aparece, en cada ecuación, el correspondiente a $X_i=1$ según su propia dirección, es decir

$$\delta'_i = \Sigma \int \left(\frac{F_i^2}{E \Omega} + \chi \frac{V_i^2}{G \Omega} + \frac{M_i^2}{EI} \right) ds$$

que afecta, en la ecuación i ésima, a la incógnita X_i .

que demuestra que el principio se cumple para las reacciones hiperestáticas, y por lo tanto, vale también para los parámetros de reducción de la estructura. Las fórmulas [1] y el principio aceptado en el Art. 2 son pues generales, y en consecuencia todas las deducciones que se han hecho en este estudio son válidas.

18. Principio de Menabrea. — La ecuación [18] de MAXWELL-MOHR para la incógnita X_i da, suponiendo nulo el trabajo vincular y el efecto inelástico:

$$0 = \Sigma \int \left(\frac{F_i F}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V}{G \Omega} + \frac{M_i M}{EI} \right) ds$$

pero de acuerdo con las ecuaciones [17]:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial X_i} \quad ; \quad V_i = \frac{\partial V}{\partial X_i} \quad ; \quad M_i = \frac{\partial M}{\partial X_i}$$

y razonando en la misma forma que para el teorema de CASTIGLIANO:

$$0 = \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{1}{2} \Sigma \int \left(\frac{F^2}{E \Omega} + \chi \frac{V^2}{G \Omega} + \frac{M^2}{EI} \right) ds$$

o sea, llamando W al trabajo de deformación:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0} \quad [21]$$

Las demás ecuaciones de elasticidad son similares, lo que demuestra la siguiente regla: *Los valores de las incógnitas hiperestáticas se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de igualar a cero las derivadas del trabajo de deformación con respecto a dichas incógnitas.*

Como además las derivadas segundas del trabajo W son positivas, como se deduce de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial X_i^2} &= \frac{\partial}{\partial X_i} \int \left(\frac{F_i F}{E \Omega} + \chi \frac{V_i V}{G \Omega} + \frac{M_i M}{EI} \right) ds \\ &= \int \left(\frac{F_i}{E \Omega} \frac{\partial F}{\partial X_i} + \chi \frac{V_i}{G \Omega} \frac{\partial V}{\partial X_i} + \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_i} \right) ds \\ &= \int \left(\frac{F_i^2}{E \Omega} + \chi \frac{V_i^2}{G \Omega} + \frac{M_i^2}{EI} \right) ds > 0 \end{aligned}$$

se puede establecer el principio de MENABREA o del trabajo mínimo: los valores de las incógnitas hiperestáticas son los que hacen que el trabajo de deformación sea un mínimo.

19. Resolución de las ecuaciones. — Las ecuaciones de elasticidad [19] pueden escribirse:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_1^1 + X_2 \delta_2^1 + \dots + X_n \delta_n^1 &= a_1 \\ X_1 \delta_1^2 + X_2 \delta_2^2 + \dots + X_n \delta_n^2 &= a_2 \\ \dots &\dots \\ X_1 \delta_1^n + X_2 \delta_2^n + \dots + X_n \delta_n^n &= a_n \end{aligned}$$

en las que las constantes $a_1, a_2 \dots a_n$ representan indistintamente los términos debidos a los vínculos móviles $\Sigma C_i c$; al efecto inelástico δ_i^i y a las cargas aplicadas $\Sigma P_m \delta_m^i$ siendo usual considerar *separadamente* la influencia de cada uno de estos términos en el valor de las X_i . El efecto de las cargas se estudia en forma muy conveniente por medio de las líneas de influencia, considerando en lugar de las sumatorias $\Sigma P_m \delta_m^i$ el término correspondiente a la *carga unidad* que puede ocupar cualquier posición en la estructura manteniéndose paralela a la dirección elegida (generalmente la vertical). Este término será designado por δ_m^i , es decir, desplazamiento del punto M en la dirección elegida, producido por $X_i = 1$ y puede obtenerse trazando la elástica del sistema principal isostático para la carga $X_i = 1$.

La resolución del sistema de las ecuaciones de elasticidad da, para la incógnita i ésima, una expresión lineal y homogénea entre las constantes a_i que puede escribirse así:

$$X_i = \beta^i_1 a_1 + \beta^i_2 a_2 + \dots + \beta^i_i a_i + \dots + \beta^i_n a_n \quad [22]$$

La determinación aritmética de los coeficientes β es engorrosa en los sistemas de grado hiperestático elevado, lo que ha traído como consecuencia el desarrollo de métodos especiales de cálculo que permitan sortear esta dificultad. La ecuación [22] sin embargo puede considerarse como la solución teórica de cualquier problema hiperestático de estructuras planas.

20. Líneas de influencia. — Los coeficientes β de la ecuación [22] tienen una interpretación interesante debida a MÜLLER-BRESLAU. Cuando se considera el trazado de la línea de influencia X_i las constantes a_i son los desplazamientos $-\delta^i_m$ de modo que se tendrá:

$$X_i = -[\beta^i_1 \delta^1_m + \beta^i_2 \delta^2_m + \dots + \beta^i_i \delta^i_m + \dots + \beta^i_n \delta^n_m] \quad [23]$$

pero como $\delta^1_m ; \delta^2_m ; \dots \delta^i_m \dots$ etc., son los desplazamientos de M en la dirección elegida (vertical p. ej.) producidos respectivamente por las cargas $X_1=1 ; X_2=1 \dots X_i=1 \dots$ los productos que forman el segundo miembro de [23] serán los desplazamientos de M producidos por las cargas $-\beta^i_1 ; -\beta^i_2 ; \dots -\beta^i_i \dots$ aplicadas según $X_1 ; X_2 ; \dots X_i \dots$ y su suma será el desplazamiento resultante; de todo lo cual se deduce el siguiente teorema:

La línea de influencia para X_i es la elástica del sistema principal solicitado por las cargas

$$X_1 = -\beta^i_1 ; X_2 = -\beta^i_2 ; \dots X_i = -\beta^i_i \dots$$

Según su autor el método presenta utilidad cuando esta elástica se traza *en conjunto* en lugar de superponer las elásticas individuales; y esto es factible principalmente cuando los diagramas de parámetros que corresponden a las cargas $X_1 ; X_2 ; \dots X_n ;$ en el sistema principal están formados por rectas.

En el tomo III de su « Ciencia de la Construcción », MÜLLER-BRESLAU presenta el ejemplo que se muestra en la figura 27, de

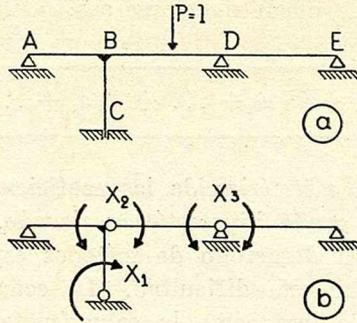


FIG. 27.

un pórtico ABC y una viga continua BDE , estructura de tercer grado hiperestático.

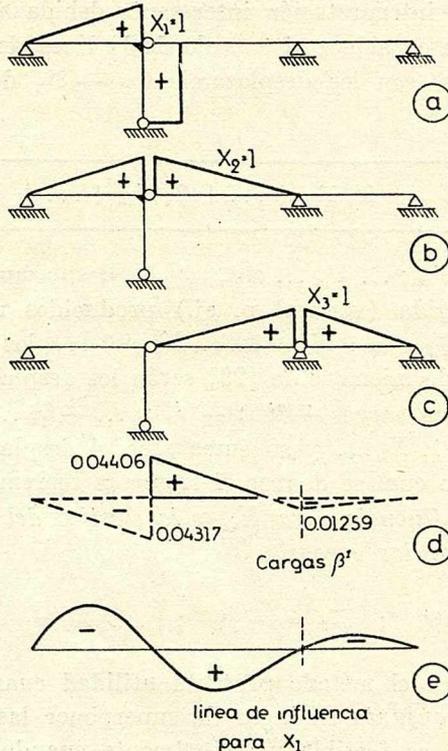


FIG. 28.

Si se eligen las incógnitas en la forma indicada en la parte (b) de dicha figura, es decir los flectores en C ; en B y en D los dia-

gramas del sistema principal para las cargas $X_1=1$; $X_2=1$; $X_3=1$ se indican en (a), (b), (c), de la figura 28 y usando las ecuaciones de MAXWELL —despreciando la influencia de V y F , o sea considerando solamente efectos deformatrices de flexión— se pueden obtener los valores de los coeficientes δ^1_1 ; δ^1_2 ; δ^1_3 ; δ^2_2 ; δ^2_3 ; δ^3_3 (nótese que por la forma de los diagramas de momentos $\delta^1_3=0$). Resolviendo el sistema se encuentran los valores β pudiendo verse en (d) de la figura 28 el diagrama de momentos para las cargas β^1 que determinan X_1 y en (C) el trazado de la correspondiente elástica que es, según el teorema de MÜLLER-BRESLAU, la línea de influencia para X_1 . Los valores que figuran en los diagramas se han tomado de un ejemplo numérico de dicho autor, y las líneas para X_2 ; X_3 se deducirían en forma similar.

21. Selección de incógnitas. — Se ha hecho ya mención de la dificultad que se encuentra al resolver los sistemas de ecuaciones de elasticidad, que ha hecho necesario el estudio de métodos que reduzcan en lo posible la laboriosidad inherente a los pesados cálculos aritméticos que resultan. Una de las armas más poderosas de simplificación de las ecuaciones fundamentales es la *atinada selección de incógnitas*, cuyo criterio es el de anular, dentro de lo posible, y de acuerdo con las consecuencias de las leyes de reciprocidad, el mayor número de coeficientes del tipo δ^i_k , que podríamos llamar de flexibilidad indirecta, por ser los corrimientos que la carga $X_k=1$ produce en la dirección de X_j y recíprocamente.

Si fuera posible, p. ej. en un sistema de 3º grado, eliminar *todos* esos términos, o sea δ^1_2 ; δ^1_3 ; δ^2_3 ; las ecuaciones de elasticidad se reducirían a

$$X_1 \delta^1_1 = a_1$$

$$X_2 \delta^2_2 = a_2$$

$$X_3 \delta^3_3 = a_3$$

y la resolución sería inmediata.

Un ejemplo de buena selección de incógnitas lo da la conocida ecuación de CLAPEYRON o de los tres momentos, que se utiliza para

resolver el problema de la viga continua sobre apoyos nivelados.

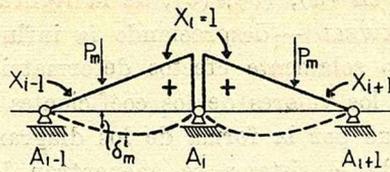


FIG. 29.

Si se toman como incógnitas X los pares flectores correspondientes a los apoyos se ve (fig. 29) que cada carga $X_i = 1$ produce desplazamientos solo en las secciones de aplicación de las cargas X_{i-1} ; X_{i+1} ; (apoyo anterior y posterior); con lo que la ecuación de elasticidad iésima se reduce a

$$X_{i-1} \delta_{i-1}^i + X_i \delta_i^i + X_{i+1} \delta_{i+1}^i = - \delta_m^i \quad [24]$$

en la que δ_{i-1}^i ; δ_{i+1}^i son los ángulos girados según X_{i-1} ; X_{i+1} para la carga $X_i = 1$; δ_i^i es el ángulo formado después de la deformación por las terminales de los dos tramos cortados en A_i , y δ_m^i es el descenso según P_m en dicha deformación; pudiéndose, de acuerdo con la ley de BERTI, reemplazarse ese término por el ángulo formado según X_i por la deformación producida por las P_m .

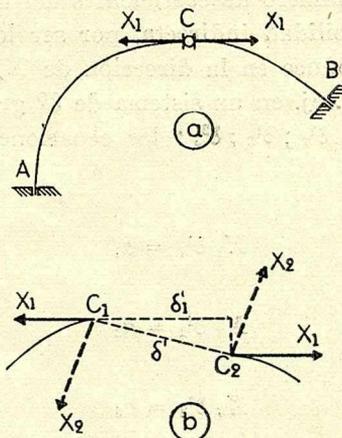


FIG. 30.

La figura 30, que se refiere a un arco de doble empotramiento con articulación intermedia, da otro ejemplo. Suprimiendo el

vínculo C se toman como incógnitas dos componentes de la fuerza transmitida por la articulación, pero elegidas de modo que X_2 sea normal al corrimiento δ' que separa los puntos C_1, C_2 , de las dos terminales en la deformación producida por $X_1 = 1$. De ese modo $\delta^1_2 = \delta^2_1 = 0$ y las ecuaciones se simplifican de modo que la solución es inmediata.

Pero el ejemplo más típico de esta selección de incógnitas lo da el método de la *elipse de elasticidad* tan adecuado a la resolución de arcos y pórticos de doble empotramiento.

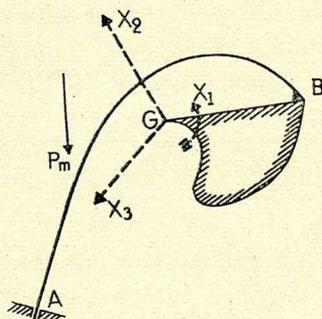


FIG. 31.

En estos problemas (fig. 31) el sistema principal es una ménsula, obtenida al suprimir uno de los dos empotramientos (el B en la figura) y las incógnitas se eligen de modo que X_2, X_3 , pasen por el punto G , rígidamente conectado a la terminal, determinado de modo que el giro de B producido por X_1 tenga como centro G , lo que desde ya anula los términos

$$\delta^1_2 = \delta^2_1 ; \delta^1_3 = \delta^3_1$$

y eligiendo posteriormente las direcciones de X_2 y X_3 de modo que se cumpla, como en el ejemplo anterior, la condición $\delta^2_3 = 0$. La determinación de G puede obtenerse por métodos proyectivos a partir de la ley de BETTI (procedimientos de K. CULMANN, RITTER y CREMONA) o por consideraciones cinemáticas sobre las deformaciones flexionales (procedimiento que expuse en el Boletín N° 3 de la Facultad de Ingeniería de Montevideo); pero el resultado es precisamente la reducción del sistema de 3 ecuaciones de elasticidad de 3 términos a 3 ecuaciones a un término de resolución inmediata.

SEGUNDA PARTE

CAP. I. ANALOGIA DE LA COLUMNA

CAP. II. APLICACIONES DE LA ANALOGIA

**CAP. III. VIGA RECTA CON EMPOTRAMIENTOS ELAS-
TICOS**

CAP. IV. SISTEMAS RIGIDOS

CAPITULO I

ANALOGIA DE LA COLUMNA

1. **Tensiones en una columna corta.** — La figura 1 es la sección de una columna corta, referida a sus ejes principales y y Gx ; y el punto P de coordenadas u, v , es el punto de aplicación de una fuerza normal excéntrica de intensidad \mathcal{P} . Asumiendo como

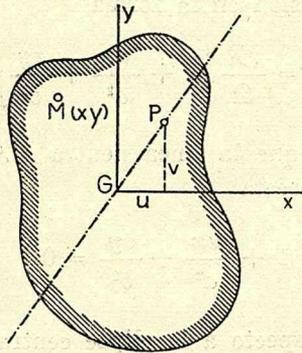


FIG. 1.

positivas las tensiones de compresión se obtiene para la tensión σ en el punto M de coordenadas x, y , la expresión

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} + \frac{\mathcal{P}ux}{\Omega a^2} + \frac{\mathcal{P}vy}{\Omega b^2}$$

en la que Ω es el área de la sección; a, b , los semiejes de la elipse central (fig. 2).

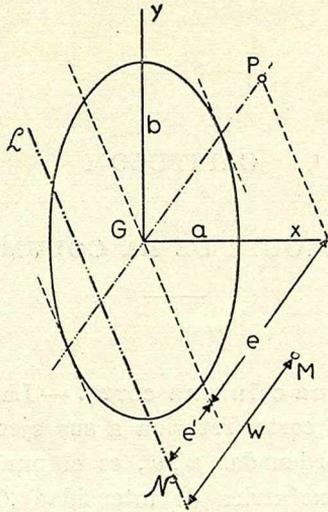


FIG. 2.

Si se expresa la tensión en la forma

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left[1 + \frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} \right]$$

se pone en evidencia que la línea neutra \mathcal{LN} o lugar de puntos de tensión nula es la recta

$$1 + \frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 0$$

antipolar de P con respecto a la elipse central, y también que la tensión en M es proporcional a la distancia w de M a \mathcal{LN} medida en cualquier dirección, aunque es usual elegir la dirección de GP como se indica en la figura. Será así $\sigma = Kw$ determinándose K al establecer que el sistema de las tensiones normales equivale a la carga \mathcal{P} , o sea

$$\mathcal{P} = \int \sigma d\Omega = K \int w d\Omega = K \Omega e'$$

nuestro que $\int w d\Omega$ es el momento estático de la sección sobre \mathcal{LN} .

La expresión de la tensión es así

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{w}{e'} \quad [1]$$

El diagrama de tensiones que responde a [1] puede verse en la figura 3; interesando particularmente los valores de las tensiones

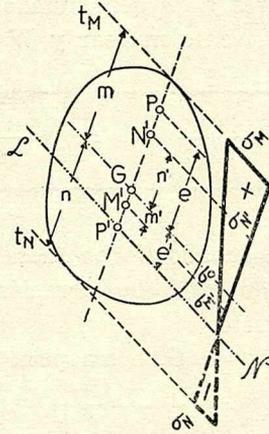


FIG. 3.

para los extremos de w , definidos por las distancias m, n de G a las tangentes t_M, t_N al contorno de la sección paralelas a la línea neutra.

Los antipolos M', N' de esas tangentes son los *puntos nucleares* para la dirección GP y observando que P, P' son también conjugados en la antipolaridad sobre esa recta se tendrá

$$mm' = nn' = ee'$$

Aplicando [1] se tiene

$$\sigma_M = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(\frac{m + e'}{e'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 + \frac{m}{e'} \right)$$

y como $\frac{m}{e'} = \frac{e}{m'}$:

$$\sigma_M = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 + \frac{e}{m'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(\frac{m' + e}{m'} \right)$$

Del mismo modo se obtiene

$$\sigma_N = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(\frac{e' - n}{e'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 - \frac{n}{e'} \right)$$

$$\sigma_N = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 - \frac{e}{n'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(\frac{n' - e}{n'} \right).$$

Los numeradores $\mathcal{P}(m' + e)$; $\mathcal{P}(n' - e)$ son los momentos de \mathcal{P} sobre los puntos nucleares y los denominadores son módulos $\Omega m'$; $\Omega n'$: llamando M al momento nuclear y W al módulo se tiene:

$$\boxed{\sigma_M = \frac{M_{M'}}{W_{M'}} \quad ; \quad \sigma_N = \frac{M_{N'}}{W_{N'}}} \quad [2]$$

Cuando $n' < e$, o sea cuando \mathcal{P} cae fuera del núcleo, la tensión σ_N es tracción, bastando esta consideración para atribuir a las tensiones su signo correcto.

La tensión en el centroide G , o sea para $w = e'$ se reduce a

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{\mathcal{P}}{\Omega}} \quad [3]$$

Por último las tensiones en los *puntos nucleares* M', N' se calculan en forma similar a las tensiones extremas: así

$$\sigma_{M'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(e' - m')}{e'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 - \frac{m'}{e'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 - \frac{e}{m} \right)$$

pues
$$\frac{m'}{e'} = \frac{e}{m}$$

$$\sigma_{M'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(m - e)}{m}$$

$$\sigma_{N'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(e' + n')}{e'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 + \frac{n'}{e'} \right) = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \left(1 + \frac{e}{n} \right)$$

$$\sigma_{N'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(n + e)}{n}$$

Se tiene, pues:

$$\sigma_{M'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(m - e)}{m} \quad ; \quad \sigma_{N'} = \frac{\mathcal{P}}{\Omega} \frac{(n + e)}{n} \quad [4]$$

que son expresiones análogas a las anteriores, y expresan que la tensión en un punto nuclear M' se obtiene dividiendo el momento de \mathcal{P} sobre la antipolar t_M por el producto Ωm del área por la distancia de G a t_M .

2. **Analogía de la columna.** — Imaginemos primero (fig. 4 a) una barra plana de eje curvo AB , en las condiciones usuales de las estructuras a fibra media; esto es, con dimensiones longitudinales, y radio de curvatura grandes comparados con las dimensiones transversales, sensible solo a las deformaciones flexionales, y cuya rigidez EI se conoce para cada punto N del eje; y supongámosla referida a los ejes yBx .

Construyamos ahora (fig. 4 b) lo que CROSS llama *columna análoga* de la barra AB , que es un prisma corto cuya sección recta

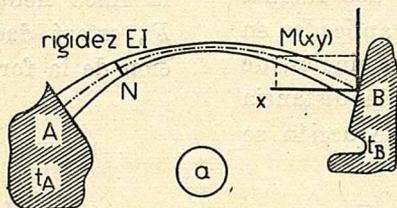


FIG. 4, a. — Barra AB.

tiene la misma línea media AB que la barra y un espesor que es,

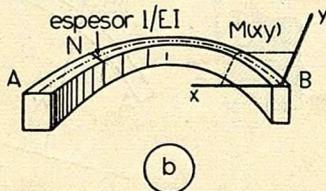


FIG. 4, b. — Columna análoga.

en cada punto N , igual a la inversa de la rigidez EI en el punto homólogo de la barra.

Este espesor se supone muy pequeño, de modo que el elemento de área en la sección de la columna es, llamando ds al elemento infinitésimo de la línea media:

$$dg = \frac{ds}{EI}$$

Consideremos ahora estos dos problemas de desarrollos paralelos:

¿Qué condiciones debe cumplir un momento indeterminado m_i definido para cada punto $M(xy)$ para que el movimiento relativo de las secciones terminales t_A, t_B de la barra sea el giro Φ alrededor de $F(u.v.)$?

Se impone al momento indeterminado m_i la condición de ser producido por dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas en cada una de las terminales, de modo que si w es la distancia de M a la línea de acción se tendrá (fig. 5)

$$m_i = \mathcal{F}_A \cdot w$$

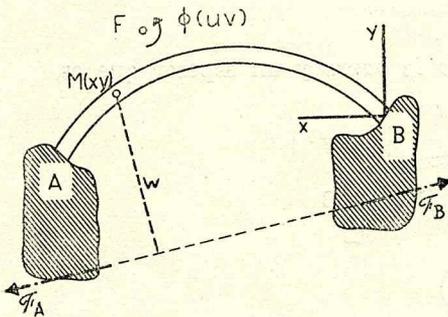


FIG. 5.

y por lo tanto m_i será la función lineal

$$m_i = Ax + By + C$$

¿Qué condiciones debe cumplir una tensión indeterminada σ definida para cada punto $M(x,y)$ para que el sistema de tensiones esté en equilibrio con una compresión de la columna producida por la fuerza Φ en $F(u.v.)$?

La tensión σ que es proporcional a la distancia w de M a la línea neutra, antipolar de F , estará dada por una relación de la forma (fig. 6)

$$\sigma = ax + by + c$$

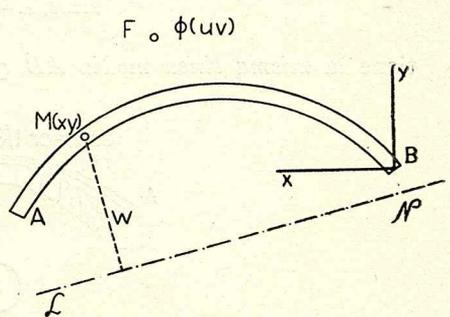


FIG. 6.

La rotación elemental que el flector m_i produce en el elemento de barra del punto M es

$$d\Phi = m_i \frac{ds}{EI}$$

y el movimiento resultante que todas esas rotaciones producen en B tiene estas características:

rotación total $\Phi = \int d\Phi$

traslación según Bx

$$\delta_x^A = - \int y d\Phi$$

traslación según By

$$\delta_y^B = \int x d\Phi$$

Como hemos supuesto el espesor de la sección en la columna muy pequeño la compresión elemental será simplemente σdg y las condiciones para el equilibrio de Φ serán, refiriéndonos al sistema $y Bx$:

$$\Phi = \int \sigma dg$$

$$\Phi u = \int \sigma x dg$$

$$\Phi v = \int \sigma y dg$$

Reemplazando valores:

$$\Phi = \int (ax + by + c) \frac{ds}{EI}$$

$$\Phi u = \int (ax + by + c) \frac{x ds}{EI}$$

$$\Phi v = \int (ax + by + c) \frac{y ds}{EI}$$

Imponiendo ahora que el movimiento que los m_i producen entre t_A y t_B sea precisamente la rotación Φ alrededor de F , y expresando m_i en su forma lineal:

$$\Phi = \int (Ax + By + C) \frac{ds}{EI}$$

$$\delta_y^B = \Phi u = \int (Ax + By + C) \frac{x ds}{EI}$$

$$\delta_x^A = \Phi v = \int (Ax + By + C) \frac{y ds}{EI}$$

La absoluta identidad de los sistemas de ecuaciones que sirven

para definir A, B, C , en la barra flexible y a, b, c , en su columna análoga demuestran el *teorema de CROSS*:

El momento indeterminado m_i que corresponde en una barra a la rotación Φ alrededor de sus terminales producida por dos fuerzas iguales y opuestas es igual a la tensión σ que produce en la columna análoga la compresión Φ aplicada en F .

Como corolario inmediato de esta analogía se deduce que la línea neutra que en la columna es el lugar de los puntos de tensión nula corresponde en la barra a los puntos de momento nulo, es decir a la *línea de acción de las fuerzas $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$* , aplicadas a las terminales, y cuya magnitud se deduce de la ecuación:

$$\boxed{m_i = \mathcal{F}_A \cdot w} \quad [5]$$

en la que se conocen m_i y la distancia w para cualquier punto.

3. Influencia de la posición del centro de rotación. — La figura 7 se refiere a la columna análoga de la barra AB , en la que hemos trazado la elipse central.

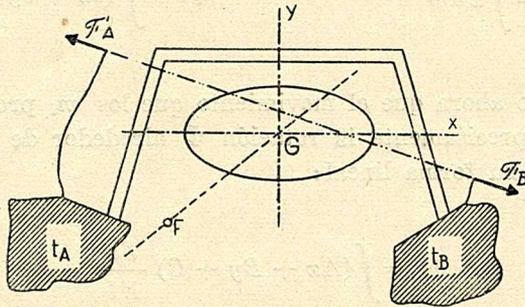


FIG. 7.

Dado un punto F como centro de rotación, la línea de acción de \mathcal{F} será su *antipolar*.

Si F pertenece a uno de los ejes, la dirección de \mathcal{F} será paralela al otro; si F se mueve sobre un diámetro, \mathcal{F} será paralela a su conjugado, reconociéndose en estas propiedades las que caracterizan a la elipse de elasticidad.

En particular, cuando F coincide con el centro G de la elipse la compresión será uniforme; y el momento indeterminado también, siendo su valor constante:

$$\boxed{m_i = \frac{\Phi}{\mathcal{G}}} \quad [6]$$

expresión en la que \mathcal{G} , área de la columna, es

$$\mathcal{G} = \int dg = \int \frac{ds}{EI}$$

En este caso la línea de acción es la recta impropia, y la barra está sometida a *flexión uniforme*.

Si en cambio F se desplaza indefinidamente sobre el diámetro GF_∞ (fig. 8) pero conservando la rotación — que tiende a cero — un momento constante sobre G que llamaremos Δ , la sollicitación

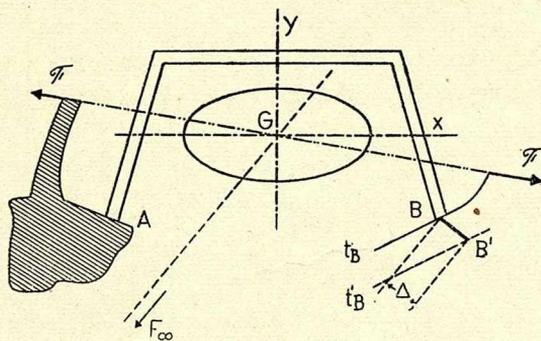


FIG. 8.

de la columna es *flexión pura*, y la línea neutra o línea de acción de las fuerzas en las terminales es el *diámetro conjugado* de GF_∞ .

Este caso, rotación infinitésima sobre un centro impropio es la *traslación* Δ normal a GF_∞ ; y las consideraciones anteriores demuestran que los momentos indeterminados se calculan como las tensiones producidas en la columna análoga por el flector Δ contenido en el plano de flexión GF_∞ . Salvo el caso de las traslaciones según los ejes de la elipse el problema será de *flexión oblicua*, por lo que no habrá, en general, coincidencia entre las direcciones de \mathcal{F} y de Δ . Se observa que los razonamientos anteriores demuestran las notables propiedades de la elipse de elasticidad de una barra flexible.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or title.



Second block of faint, illegible text, appearing as several lines of a paragraph.



Large block of faint, illegible text at the bottom of the page, consisting of multiple lines of text.

CAPITULO II

APLICACIONES DE LA ANALOGIA

4. **Resolución de sistemas doblemente empotrados.** — La columna análoga suministra un método simple para resolver los sistemas de doble empotramiento, que explicaremos tomando como ejemplo el pórtico de la figura 9.

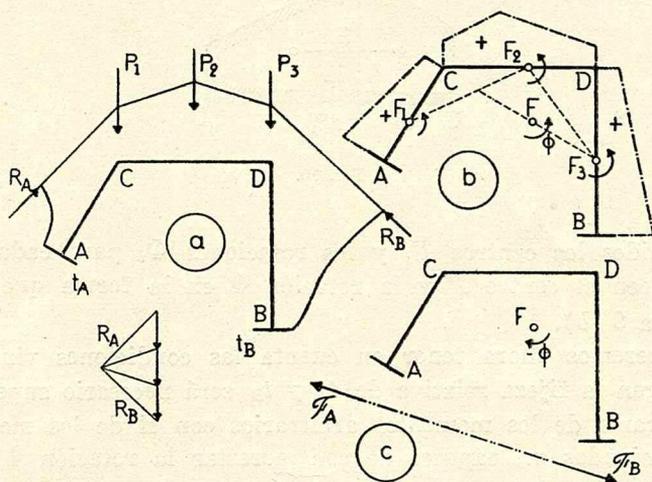


FIG. 9.

Se imagina primero el pórtico con sus terminales t_A, t_B y sometido a las cargas P como una barra libre. Se asume ahora, de manera completamente arbitraria, un sistema de dos fuerzas aplicadas a las terminales, que llamo R_A, R_B y que mantenga en equilibrio las cargas P . En la figura 9 (a), se ha conseguido ese sistema trazando una funicular de las cargas P que considerada como

línea de presiones produce en la barra un diagrama de *momentos arbitrarios* m_a , que Cross llama diagrama *consistente con la estática*, pues la única condición que se le impone es la de ser inducido por un sistema de cargas equilibrado.

Las propiedades elásticas de la barra, es decir su flexibilidad $\frac{ds}{EI}$ en cada punto permiten calcular y fijar la posición de la *rotación* Φ que los momentos arbitrarios producen entre las terminales t_A, t_B . Es necesario para eso avaluar las áreas de los diagramas $\frac{m_a}{EI}$ y ubicar su centroide G (fig. 10) que se proyectará luego sobre el eje de la barra CD en el punto F_i que es en realidad el centro de la rotación relativa entre t_D y t_C producida por el diagrama de flectores m_a .

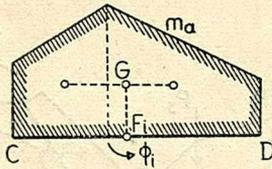


FIG. 10.

Obtenidos los centros F_i y las rotaciones Φ_i para cada barra se deducen el centro F y la rotación Φ en la forma que indica la figura 9 (b).

Si queremos ahora tener en cuenta las condiciones vinculares que exigen la fijeza relativa de t_A y t_B será necesario superponer el diagrama de los momentos arbitrarios con el de los momentos indeterminados m_i capaces de contrarrestar la rotación Φ y este problema se resuelve simplemente calculando la tensión σ que en la columna análoga produce la compresión $-\Phi$ alrededor de F .

Los momentos reales son, en cada punto, la suma

$$m_r = m_a + m_i \quad [7]$$

y como es posible deducir de la columna el valor y posición de las fuerzas F_A, F_B (fig. 9 c) que inducen el momento determina-

do se obtendrán las reacciones reales de los empotramientos sumando, para A , la reacción arbitraria R_A y la indeterminada \mathcal{F}_A y para B , la arbitraria R_B y la indeterminada \mathcal{F}_B . El funicular de las cargas trazado con las reacciones reales es la verdadera línea de presiones.

La gran ventaja de este método está en las simplificaciones que pueden obtenerse seleccionando en forma acertada el diagrama de momentos arbitrarios.

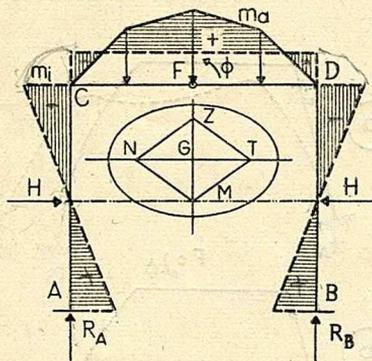


FIG. 11.

La figura 11 se refiere a un pórtico simétrico cargado en la viga CD . Se eligen como reacciones R_A, R_B las de la viga apoyada, y en consecuencia, los momentos arbitrarios serán los de la viga CD simplemente apoyada.

Ubicada y calculada la rotación Φ se determinan los momentos indeterminados en A, B, C y D usando el núcleo $ZMTN$ de la columna análoga; y con esos valores queda resuelto el problema ya que la posición y magnitud del empuje H que sumado a las reacciones R_A, R_B da las reacciones finales de los apoyos se fijan de inmediato con ayuda de la ecuación [5] y de la condición de ser la línea de acción de las H antipolar del centro de rotación.

5. Efecto inelástico y corrimiento de apoyos. — El efecto inelástico y los corrimientos de apoyos producen en los sistemas de doble empotramiento momentos indeterminados que se calculan en la misma forma que los producidos por las cargas. Siempre con referencia al pórtico de la fig. 9 se ha representado en

(a) de la figura 12 la rotación Φ alrededor de F' que se produce entre t_A y t_B como consecuencia de un efecto inelástico (térnico, de frague, etc.).

Como las condiciones de vínculo exigen la fijeza de t_A y t_B será necesaria la presencia de las fuerzas \mathcal{F}_A , \mathcal{F}_B (b, fig. 12) que contrarresten ese giro y cuya posición, magnitud y momentos indeterminados se deducen de la carga de la columna análoga por la compresión igual a $-\Phi$.

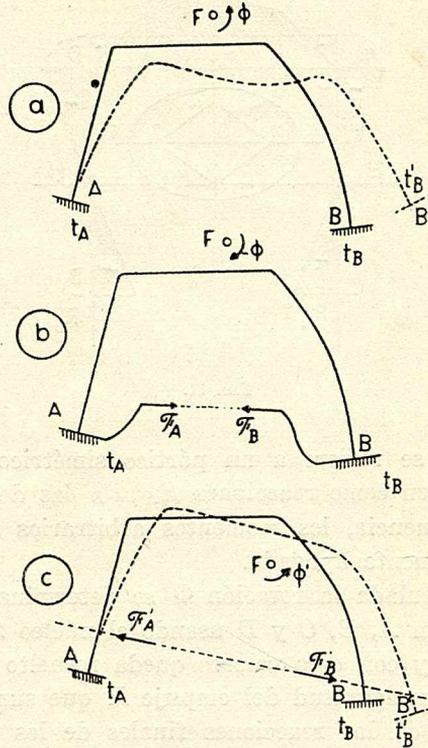


FIG. 12.

En el caso (c, fig. 12) de movimientos de los apoyos — en ausencia de efecto inelástico o de cargas — la rotación de t_B sobre t_A de valor Φ' alrededor de F' es efectivamente cierta; y las fuerzas \mathcal{F}_A , \mathcal{F}_B y momentos indeterminados m' ; corresponderán a la compresión $+\Phi'$ en la columna análoga. Nótese que la única diferencia con el caso anterior está en el signo de la compresión Φ .

El efecto combinado de cargas, efecto inelástico, y corrimiento de apoyos se obtiene superponiendo los estados parciales.

6. Acortamiento elástico en los arcos. — La columna análoga considera que la barra flexible es *rígida* tanto para el cortante como para la fuerza directa, ya que en muchos casos la influencia de estos términos puede despreciarse. Sin embargo en el *cálculo de arcos* es deseable tener en cuenta las deformaciones producidas por la fuerza directa, lo que puede hacerse aplicando un método simplificado que muchos textos americanos recomiendan, que consiste en calcular el arco *sin tener en cuenta el efecto normal*; y luego considerar la deformación que esa fuerza normal produce como un *efecto inelástico* — que llaman « rib-shortening » — y que modifica las reacciones y momentos al introducir los valores indeterminados correspondientes, que se calculan fácilmente por el método expuesto en el artículo anterior.

Como generalmente la nueva distribución de esfuerzos modifica *muy poco* el acortamiento en la mayoría de los casos es suficiente una sola corrección; si fuera apreciable la diferencia, no habría dificultad en hacer otra corrección que sería definitiva.

7. Sistemas cerrados. — Los sistemas cerrados sometidos a cargas exteriores equilibradas se resuelven en la misma forma que los sistemas de doble empotramiento, con la única diferencia que siendo las secciones inicial y final de la barra t_A y t_B coincidentes las fuerzas arbitrarias R_A, R_B deberán ser iguales y opuestas para no alterar el equilibrio de las P (fig. 13 a).

En la figura 13 (b) el corte se realizó en un punto tal que las fuerzas R_A, R_B son nulas; en la figura 13 (c) en cambio las fuerzas R_A, R_B son dos pares iguales y opuestos.

Los momentos arbitrarios producen el giro Φ relativo entre t_A, t_B , que al ser anulado por el correspondiente a los momentos indeterminados calculados como las tensiones σ en la columna análoga producidas por $-\Phi$ deja satisfechas las condiciones y vinculares y resuelto por lo tanto el problema. La suma

$$m_r = m_a + m_i$$

de los momentos arbitrarios y los indeterminados dá los momentos reales; y, como en el caso anterior la antipolar de Φ con res-

pecto a la elipse central es la línea de acción de la reacción interna que se trasmite de t_A a t_B para asegurar el contacto de las terminales.

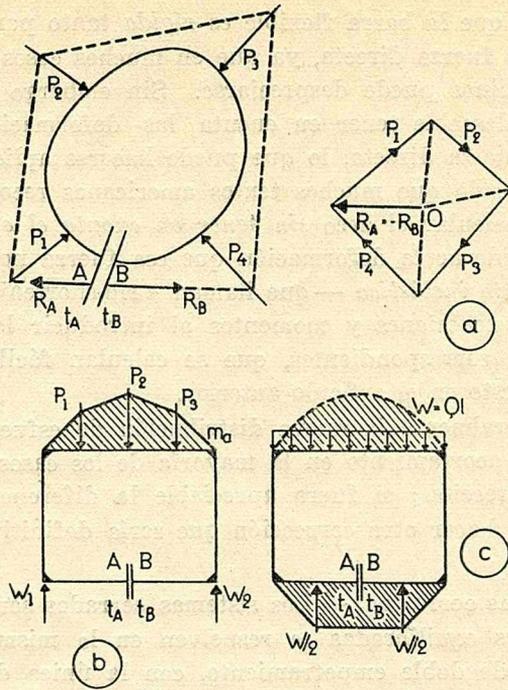


FIG. 13.

El efecto inelástico se tiene en cuenta como en los sistemas doblemente empotrados; siendo de mencionar solamente que una dilatación uniforme de la línea media, al no producir corrimientos en las terminales no da origen a ningún esfuerzo en el sistema. En cambio habrá momentos indeterminados siempre que se produzcan dilataciones desiguales en distintos puntos del eje o en distintos puntos de la altura de la sección (p. ej. diferencia térmica Δt entre el interior y el exterior, que produce el giro elemental

$$\Delta\theta_t = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds$$

en la que α_t es el coeficiente de dilatación térmica, h la altura de

la barra, ds el elemento longitudinal, suponiéndose que t varía linealmente entre t_0 y t_u).

8. Teorema de Winckler. — HARDY CROSS aplica su método de cálculo a la demostración del teorema que WINCKLER enunció en 1879 sobre la teoría de arcos, y que se expresa diciendo que la *línea de presiones del arco cargado debe ser la funicular de las cargas que se adapte en forma más aproximada a su línea media.*

La teoría que estamos exponiendo permite la sencilla demostración de CROSS, pues si se toman como momentos arbitrarios los correspondientes a la funicular adaptada a la línea media aquellos resultarán muy pequeños, como consecuencia de la condición de WINCKLER; la rotación resultante Φ será así, cuando no nula, muy pequeña, de modo que la corrección por los momentos indeterminados también lo será. Si la adaptación de la funicular a la línea media fuera perfecta no habría corrección, y la *línea media sería la verdadera línea de presiones.*

Como consecuencia un arco parabólico debe soportar sin flexión una carga uniforme en proyección horizontal; un arco en catenaria lo hará si la carga es uniforme por unidad de longitud de arco, etc.

9. Articulaciones. — Las articulaciones se tienen en cuenta en el método de CROSS considerando que son infinitamente flexibles, ya que giran libremente al recibir el efecto de un par. El área de la columna análoga en correspondencia con la articulación será, pues, infinita, y por lo tanto lo será el área total de la columna. El centro será la propia articulación; pero a los efectos de cálculo de momentos de inercia se asume que con respecto a los ejes que pasan por la articulación el momento primario o secundario del área equivalente a ésta es nulo. Algunos ejemplos aclararán más adelante esta generalización.

10. Constantes de rigidez. — En los métodos de cálculo de sistemas rígidos — ya sea en el de distribución de momentos de CROSS o en el de los puntos fijos — es necesario el cálculo de ciertas constantes que caracterizan la rigidez o resistencia al desplazamiento de la terminal t_B de una barra en determinadas condiciones de vínculo.

a) RIGIDEZ A LAS TRASLACIONES. — Sea la barra AB empotrada en A y libre en B (fig. 14). La rigidez a la traslación es la fuerza que es necesario aplicar en ambas terminales para que el movimiento relativo sea una traslación unitaria. Si se recuerda que las traslaciones se consideraban como flectores actuando en la co-

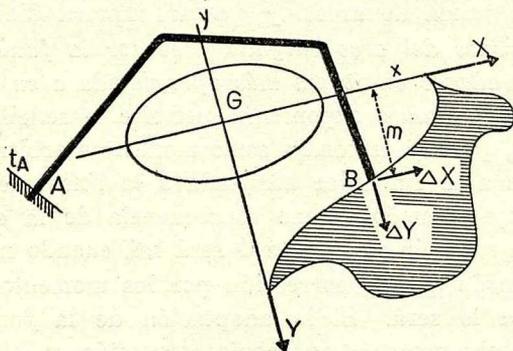


FIG. 14.

lumna análoga, y que la línea neutra o de acción de cargas era centroidal, la solución del problema aparece inmediata. Para mayor sencillez conviene elegir las direcciones principales de la columna con objeto de aplicar las fórmulas de la flexión simple (no oblicua). Si interesara con todo, un desplazamiento desviado (fuera de los ejes) la solución más simple sería usando el núcleo o diagrama de módulos.

En la figura 14 se tiene, para el momento indeterminado correspondiente a la traslación Δ_x paralela a Gx cuya línea neutra es precisamente Gx :

$$\sigma = M_B = \frac{\Delta_x}{I_x} \cdot m$$

Como el momento es también $M_B = X \cdot m$ resulta:

$$\boxed{X = \frac{\Delta_x}{I_x}} \quad [8]$$

y la rigidez a la traslación según Gx , que es la fuerza para $\Delta_x = 1$, será:

$$\boxed{\chi_x = \frac{1}{I_x}} \quad [9]$$

Similarmente se obtendría la rigidez para la traslación según Gy :

$$\chi_y = \frac{1}{I_y} \quad [10]$$

b) RIGIDEZ A LAS ROTACIONES. — Si se desea conocer (fig. 15 a) la rigidez a la rotación de B alrededor de G nos encontramos en la columna análoga con la compresión Φ céntrica, y con una tensión o momento indeterminado uniforme. Por lo tanto, el par M_B será :

$$M_B = \frac{\Phi}{G} \quad [11]$$

siendo G el área total de la columna, y la rigidez, o sea el valor del par para $\Phi = 1$ será :

$$\chi = \frac{1}{G} \quad [12]$$

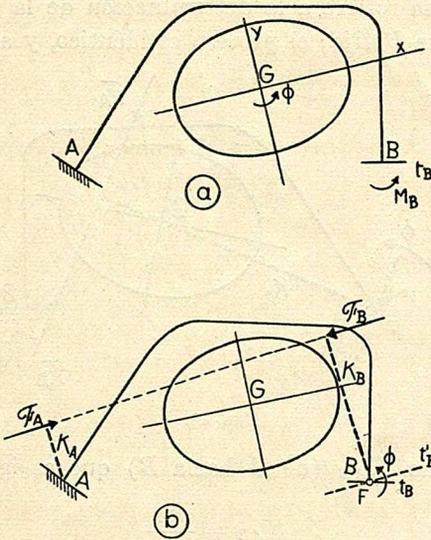


FIG. 15.

De mucho mayor aplicación resulta sin embargo la rigidez relativa al giro Φ de B alrededor de G , ya que las deformaciones de

los sistemas rígidos son casi todas producidas por giros alrededor de los nudos *que se mantienen fijos*.

La solución que da la columna análoga es simple (fig. 15, b). La línea de acción de las fuerzas es la *antipolar de B* sobre la elipse; y el momento en B, o sea la rigidez buscada, es la tensión de la columna en B producida por $\Phi = 1$ aplicada en B. La determinación de esta tensión — que se aclarará con algún ejemplo — se facilita usando el núcleo.

Un elemento interesante que se deduce en este problema es el momento inducido en A cuando t_B gira sobre B. Si se llaman k_B , k_A las distancias de B y A a la línea neutra (con sus signos) será evidente que:

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{k_A}{k_B} = K_{B.A}$$

$$\boxed{M_A = K_{BA} M_B} \quad [13]$$

El factor K_{BA} se llama *factor de traslado* o de *momento inducido de B hacia A* y permite el cálculo inmediato de M_A en función de M_B .

La figura 16 se refiere a la determinación de la rigidez del giro en A si se supone B fijo; el proceso es idéntico, y aparece el nuevo

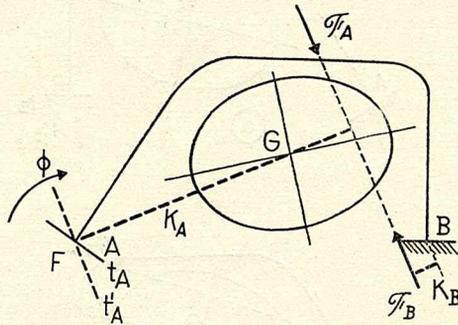


FIG. 16.

factor de traslado K_{AB} (de A hacia B) que es igual a

$$K_{AB} = \frac{k_B}{k_A}$$

La *magnitud* de las fuerzas \mathcal{F}_A , \mathcal{F}_B correspondientes a los giros $\Phi_A = 1$; $\Phi_B = 1$ se deducen de inmediato al conocerse los momentos M_A , M_B , y las distancias k_A , k_B , en cada caso.

11. **Viga recta doblemente empotrada.** — Aunque en el capítulo siguiente este tema se tratará con toda generalidad, es decir con sección variable en la viga y empotramientos elásticos en las puntas es conveniente, por su sencillez, iniciar los ejemplos con la viga recta, de sección constante, y de doble empotramiento.

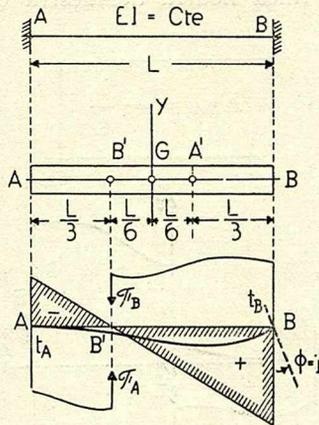


FIG. 17.

La columna análoga (fig. 17) se reduce a un *rectángulo*; los puntos nucleares son las tercias B' , A' , y el módulo es

$$G \frac{l}{6} = W_y$$

El área G de la columna es $\frac{l}{EI}$ de modo que

$$W_y = \frac{l^2}{6 EI}$$

La rigidez rotacional en B se calcula con la rotación $\Phi = 1$ en B que produce en el mismo punto la tensión o momento indeterminado M_B

$$M_B = \frac{\Phi \times BB'}{W_y} = \frac{\frac{2}{3} l}{\frac{l^2}{6 EI}}$$

calculado tomando el momento nuclear sobre B' y dividiendo por el módulo.

Simplificando se obtiene

$$M_B = \chi_{\Phi B} = 4 \frac{EI}{l} \quad [14]$$

La posición de la línea neutra demuestra de inmediato que el factor de traslado es

$$K_{BA} = -\frac{1}{2} \quad [15]$$

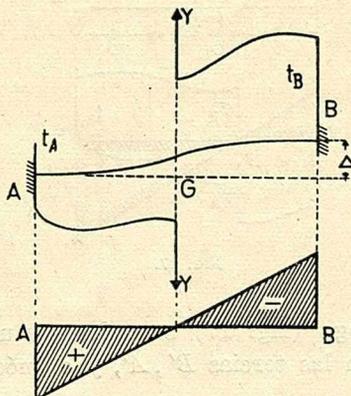


FIG. 18.

La rigidez vertical en \$B\$ se obtiene sometiendo la columna al flector \$\Delta\$ igual a la traslación. La línea neutra es el eje \$GY\$ y las tensiones en \$A\$ y \$B\$ iguales pero de signo contrario, resultan (fig. 18)

$$M_A = -M_B = \frac{6 EI \Delta}{l^2}$$

Las fuerzas \$Y\$ que dan la rigidez para \$\Delta = 1\$ resultan ser

$$Y = 12 \frac{EI}{l^3} \quad [16]$$

puesto que

$$Y \cdot \frac{l}{2} = \frac{6 EI}{l^2}$$

La carga uniforme con su diagrama simétrico, obtenido tomando como momentos arbitrarios los de la viga simplemente apoyada,

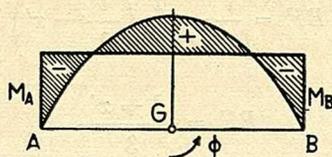


FIG. 19.

dá (fig. 19) en la columna análoga una compresión céntrica de valor

$$\Phi = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{l}{EI} = \frac{pl^3}{12EI}$$

y un momento indeterminado constante igual a

$$M_A = M_B = m_i = -\frac{\Phi}{G} = -\frac{pl^2}{12}$$

El efecto de la carga concentrada P en el punto x, x' (fig. 20) se estudia ubicando el centro de rotación F del diagrama de momentos arbitrarios de la viga de simple apoyo AB .

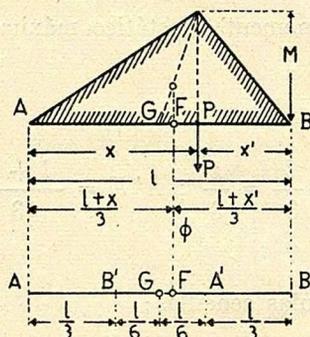


FIG. 20.

Se tiene:

$$AF = \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$$AF = \frac{l+x}{3}$$

Similarmente

$$BF = \frac{l}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - x' \right)$$

$$BF = \frac{l + x'}{3}$$

y calculando los momentos M_B , M_A , con auxilio de los puntos nucleares y el módulo:

$$M_B = - \frac{\frac{1}{2} \frac{Ml}{EI} \cdot B'F}{\frac{l^2}{6EI}} = -3 \frac{M}{l} \cdot B'F$$

Análogamente resulta

$$M_A = -3 \frac{M}{l} A'F,$$

en las que M es el momento isostático máximo igual a $\frac{Pxx'}{l}$.

Como

$$B'F = \frac{l+x}{3} - \frac{l}{3} = \frac{x}{3}; \quad A'F = \frac{l+x'}{3} - \frac{l}{3} = \frac{x'}{3},$$

se obtienen las fórmulas sencillas:

$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= -M \frac{x'}{l} = -P \frac{xx'^2}{l^2} \\ M_B &= -M \frac{x}{l} = -P \frac{x^2 x'}{l^2} \end{aligned}}$$

[17]

El trazado de las líneas de influencia para M_A , M_B , es de acuerdo con las fórmulas [17] inmediato. La figura 21 da la inter-

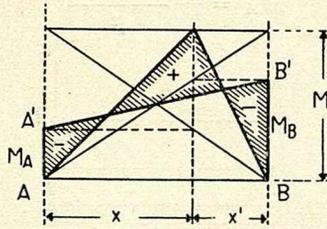


FIG. 21.

pretación gráfica de las fórmulas que justifican la sencilla construcción que se indica en la figura.

12. **Viga recta empotrada y apoyada.** — El centro de la columna coincide con la articulación B (fig. 22) y la columna análoga de la viga es el rectángulo de altura constante $\frac{1}{EI}$. La línea neutra será el eje By ; el momento de inercia

$$I_y = \frac{l^3}{3 EI}$$

y el módulo para el punto A :

$$W_y = \frac{I_y}{l} = \frac{l^2}{3 EI}$$

Para la carga uniforme, como

$$\Phi = \frac{pl^3}{12 EI}$$

se tendrá, tomando el momento de la rotación sobre By :

$$M_A = - \frac{\Phi \times \frac{l}{2}}{W_y}$$

$$M_A = - \frac{pl^4}{24 EI} \cdot \frac{3 EI}{l^2} = - \frac{pl^2}{8}$$

Para el descenso Δ de B se calcula la tensión en A producida por el flector Δ :

$$M_A = - \frac{3 EI \Delta}{l^2}$$

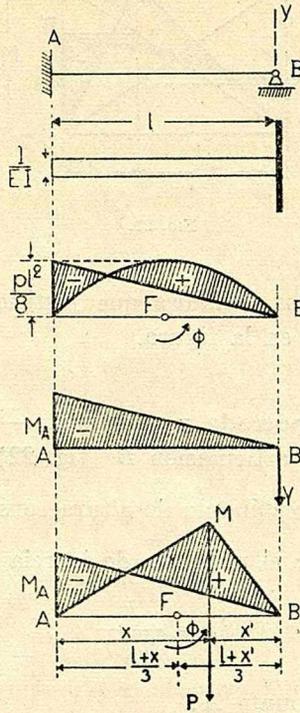


FIG. 22.

Para la carga concentrada P en x, x' , que produce en P el momento $M = \frac{P x x' }{l}$ en el diagrama arbitrario, con rotación $\phi = \frac{1}{2} M l$ aplicada en F :

$$M_A = - \frac{M l}{2 EI} \times \frac{l + x'}{3} \times \frac{3 EI}{l^2} = - \frac{1}{2} M \frac{l + x'}{l}$$

Sustituyendo M por su valor:

$$M_A = - \frac{P x x'}{2 l^2} (l + x') \quad [18]$$

ecuación que como la [17] permite el fácil trazado de la línea de influencia.

13. **Pórtico de dos articulaciones.** — Aquí (fig. 23) por existir dos articulaciones el área de la columna es infinita; y solo es finito el momento de inercia sobre la recta AB . Llamándolo I_x se tiene:

$$I_x = \int y^2 \frac{ds}{EI}$$

pues $\frac{ds}{EI}$ es el área del elemento de la columna análoga en M ; e y^2 el cuadrado de su distancia al eje. La línea neutra será siem-

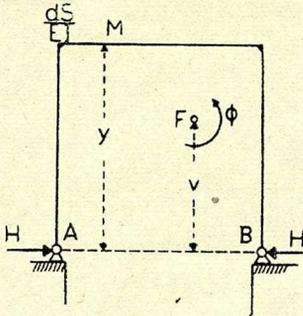


FIG. 23.

pre AB ; y la reacción indeterminada es el empuje H que produce el momento indeterminado $m_i = -Hy$.

Si ahora la rotación resultante de los momentos arbitrarios es Φ alrededor de F^0 el criterio de Cross da, para m_i en el punto M :

$$m_i = -\frac{\Phi v y}{I_x} = -Hy$$

o sea

$$H = \Phi \frac{v}{I_x}$$

[19]

que es una fórmula bien conocida.

Si en lugar de Φ el desplazamiento fuera la traslación Δ según AB se tendría $m_i = -\frac{\Delta y}{I_x}$; o sea

$$\boxed{H = \frac{\Delta}{I_x}} \quad [20]$$

Se obtienen así, en [19] y [20], los mismos resultados que con los métodos clásicos del trabajo virtual.

CAPITULO III

VIGA RECTA CON EMPOTRAMIENTOS ELASTICOS

14. Flexibilidad y grado de empotramiento. — La ménsula de la figura 24 solicitada por el par M gira en su terminal t_B el ángulo característico de su *flexibilidad propia* siempre que la sección inicial t_A o empotramiento se mantenga fijo.

Puede suceder sin embargo que entre la sección fija t_A y la inicial de la viga t'_A se interponga un elemento flexible, como los

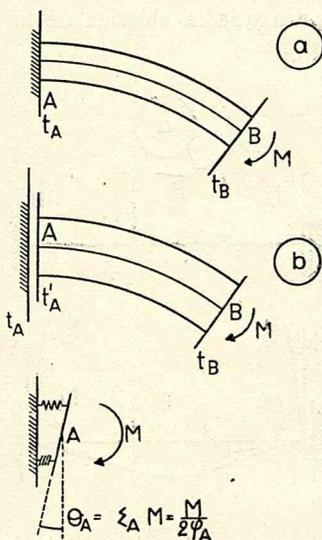


FIG. 24.

dos resortes que se ven en (b), y que se produzca, como consecuencia, un giro suplementario de t'_A con su repercusión en t_B de ido exclusivamente a la flexibilidad del empotramiento. Se supondrá

siempre que esta flexibilidad es elástica, por lo que habrá, entre el ángulo θ_A de giro y el par M la relación

$$\theta_A = \varepsilon_A M = \frac{M}{2 \varphi_A} \quad [1]$$

La constante directa ε_A es la *flexibilidad*; la inversa $2 \varphi_A$ (el coeficiente 2 se introduce para luego simplificar los trazados) es la *rigidez* o *grado de empotramiento*. Cuando el empotramiento es perfecto se tiene $\varepsilon_A = 0$; $\varphi_A = \infty$; cuando no hay empotramiento (articulación de apoyo) será

$$\varepsilon_A = \infty \quad ; \quad \varphi_A = 0.$$

15. Columna análoga de una viga con empotramientos elásticos.—La figura 25 explica el modo de actuar de una viga con empotramientos elásticos en sus dos extremos A y B . Cuando hay cargas en el tramo se desarrollan los momentos de empotramiento M_A, M_B necesarios para que la elástica de la viga cumpla con las condiciones de vínculo.

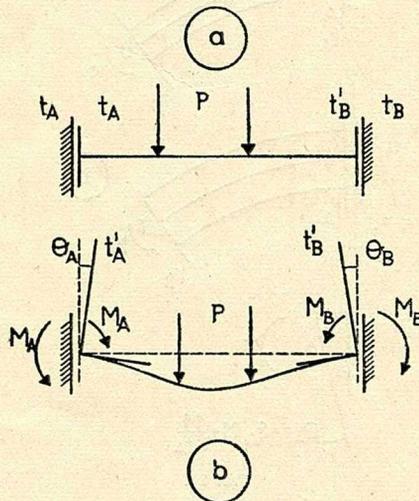


FIG. 25.

Pero éstas son precisamente que las secciones terminales t'_A, t'_B

de la viga experimenten los giros θ_A, θ_B , *proporcionales* a los momentos transmitidos a los empotramientos, es decir (fig. 25, b)

$$\theta_A = \varepsilon_A M_A \quad ; \quad \theta_B = \varepsilon_B M_B .$$

Pero si ahora suponemos que la viga se prolonga en A hacia la izquierda con un elemento elástico ε_A interpuesto entre la terminal de la viga t'_A y una terminal nueva t_A la presencia de ε_A tiene como consecuencia que la posición final de t_A sea vertical, coincidiendo con su posición inicial.

Un razonamiento similar permite introducir en B el elemento flexible ε_B concentrado en B , que permite que la terminal t'_B de la viga gire el ángulo θ_B proporcional a M_B , mientras la nueva terminal t_B no cambia de posición. Se comprende así que agregando los elementos $\varepsilon_A, \varepsilon_B$, a las puntas de la viga de empotramientos elásticos las condiciones vinculares para el sistema virtual que podríamos designar como $\varepsilon_A + \text{VIGA} + \varepsilon_B$ son las mismas que las de un sistema doblemente empotrado, es decir, la fijeza de las terminales t_A, t_B . En estas condiciones el procedimiento de cálculo del momento indeterminado es el mismo que se desarrolla para aquellos sistemas, siendo necesario únicamente determinar los elementos de la columna análoga del sistema $\varepsilon_A + \text{VIGA} + \varepsilon_B$.

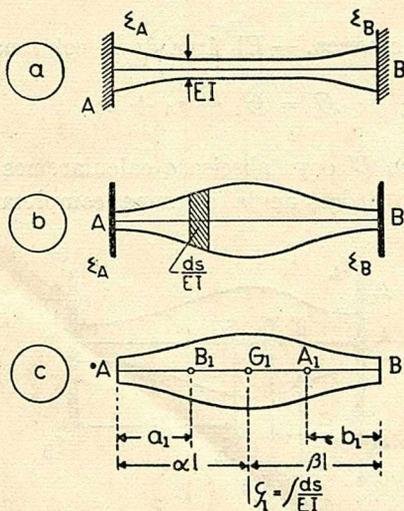


FIG. 26.

La figura 26 se refiere a una viga cuya rigidez variable se representa en (a), y cuya columna análoga de elementos $\frac{ds}{EI}$ está en (b).

Esta parte de la columna es en cierto modo, *el alma*, ya que la presencia de las flexibilidades ϵ_A, ϵ_B , completa la sección con dos *alas*, de áreas iguales a ϵ_A y ϵ_B , concentradas en *A* y *B*, que, se comprende, deberán ser del mismo orden que el área del alma para tener influencia en la estática de la viga.

En la figura 26 (c) se da la notación de los elementos de la columna análoga *del alma*, o sea de la referente a la flexibilidad propia de la viga.

Si ésta se supone de sección variable y no simétrica el centro de la columna G_1 se definirá por sus abscisas a_l ; βl a los extremos; y su área será

$$\mathcal{G}_1 = \int \frac{ds}{EI}$$

Los puntos nucleares propios A_1, B_1 antipolos de las verticales de apoyo AA_0, BB_0 con respecto al alma, se definen por sus abscisas b_1, a_1 .

La determinación de los nuevos elementos que corresponden a la sección completa de la columna, formada por el alma \mathcal{G}_1 y las alas ϵ_A, ϵ_B , es un problema de centros de primer y segundo orden, cuyos resultados se exponen en los artículos siguientes.

16. **Puntos nucleares.** — El área de la columna es

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \epsilon_A + \epsilon_B.$$

El punto nuclear B' cuya abscisa a calcularemos es el antipolo o centro de segundo orden de la columna completa con respecto a

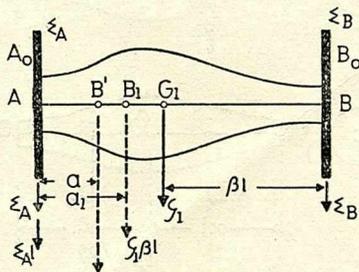


FIG. 27.

BB_0 , y se tendrá con referencia a la figura 27 que los momentos primarios serán: el de ϵ_B nulo; el de \mathcal{G}_1 , el producto $\mathcal{G}_1 \beta l$ apli-

cado en el centro del alma relativo a BB_0 , o sea en B_1 ; y el de ε_A es el producto $\varepsilon_A l$ aplicado en A . Si se dividen ambos momentos por l el problema se reduce a hallar el centro de las fuerzas ε_A y $\mathcal{G}_1 \beta$ aplicadas en A y en B_1 .

Las siguientes fórmulas que se deducen de esa propiedad se aplicarán más adelante.

$$a = \frac{a_1 \beta \mathcal{G}_1}{\varepsilon_A + \beta \mathcal{G}_1} \parallel \frac{a}{a_1} = \frac{\beta \mathcal{G}_1}{\varepsilon_A + \beta \mathcal{G}_1} \parallel \frac{a_1 - a}{a} = \frac{\varepsilon_A}{\beta \mathcal{G}_1} \quad [2]$$

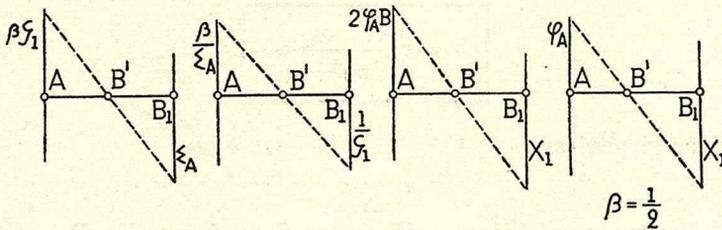


FIG. 28.

La figura 28 da varias construcciones gráficas para hallar B' deducidas de la regla del centro de dos fuerzas. Son útiles las que parten de los valores inversos

$$2 \varphi_A = \frac{1}{\varepsilon_A} \parallel \chi_1 = \frac{1}{\mathcal{G}_1}$$

el primero es el grado de empotramiento en A ; y el segundo es la *rigidez propia de la viga*. La construcción (d) se refiere al caso muy común de vigas simétricas, en las que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ por lo que basta unir en cruz los extremos de los segmentos iguales a φ_A sobre el apoyo A y a χ_1 sobre la vertical de B_1 .

Las fórmulas que corresponden al uso de φ_A , χ_1 son:

$$a = a_1 \frac{2 \varphi_A \beta}{2 \varphi_A \beta + \chi_1} \quad [3]$$

para la viga disimétrica y

$$a = a_1 \frac{\varphi_A}{\varphi_A + \chi_1} \quad [4]$$

para la viga simétrica.

El punto nuclear A' se define por la abscisa b , calculada en la misma forma que α y cuyo valor se deduce de las expresiones anteriores cambiando a_1 por b_1 ; φ_A por φ_B ; β por α . Será así

$$b = b_1 \frac{\alpha \mathcal{G}_1}{\varepsilon_B + \alpha \mathcal{G}_1} = b_1 \frac{2 \alpha \varphi_B}{2 \alpha \varphi_B + \chi_1} \quad [5]$$

en vigas disimétricas; y

$$b = b_1 \frac{\varphi_B}{\varphi_B + \chi_1} \quad [6]$$

en vigas simétricas.

17. Centro y módulos. — El centro G en el que se aplica el área total $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \varepsilon_A + \varepsilon_B$ se obtiene fácilmente una vez conocidos los puntos nucleares A', B' , ya que, refiriéndonos a la figura 29, en la que m, n , son las abscisas de G se cumplirá, por las propiedades

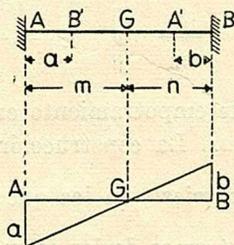


FIG. 29.

involutorias de los pares de conjugados B, B' ; A, A' , la siguiente relación

$$\overline{GB} \cdot \overline{GB'} = \overline{GA} \cdot \overline{GA'}$$

$$n(m - a) = m(n - b)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Esta fórmula justifica la construcción de la figura 29 y las expresiones siguientes:

$$\boxed{m = \frac{al}{a+b} \quad ; \quad n = \frac{bl}{a+b}} \quad [7]$$

Los módulos para las tensiones o momentos en los puntos A, B , son para A :

$$W_A = \mathcal{G} \cdot GA' ;$$

para B :

$$W_B = \mathcal{G} \cdot GB' .$$

Calculando los segmentos GA', GB' se obtiene:

$$GA' = n - b = \frac{bl}{a+b} - b = \frac{l-a-b}{a+b} \cdot b$$

y poniendo $l-a-b = l'$ (distancia entre los dos puntos nucleares)

$$GA' = \frac{bl'}{a+b}$$

Análogamente resulta

$$GB' = \frac{al'}{a+b}$$

con lo que los módulos son:

$$\boxed{W_A = \frac{\mathcal{G}bl'}{a+b} \quad || \quad W_B = \frac{\mathcal{G}al'}{a+b}} \quad [8]$$

Fijados de este modo los elementos de la columna el cálculo de momentos hiperestáticos, rigideces, etc., puede seguirse con el mismo criterio con que se han desarrollado los ejemplos de la exposición previa sobre el uso de la analogía (capítulo II).

En lo que sigue nos concretaremos a exponer cómo puede deducirse del procedimiento expuesto el *método de STRASSNER* (o de los puntos fijos) para el cálculo de sistemas rígidos, cuya aplicación a ciertos tipos de estructuras (vigas y pórticos continuos) es particularmente ventajosa.

18. **Método de Strassner.** — El método de STRASSNER, más conocido como método de los *puntos fijos o focos*, se presta a la resolución de sistemas rígidos de toda clase, aunque nosotros nos concretaremos en lo que sigue a exponer solo los fundamentos del proceso cuando se le aplica a sistemas de barras rectas.

Una estructura como la de la figura 30 al ser sometida a cargas se deforma girando los nudos B y C los ángulos θ_B y θ_C de modo

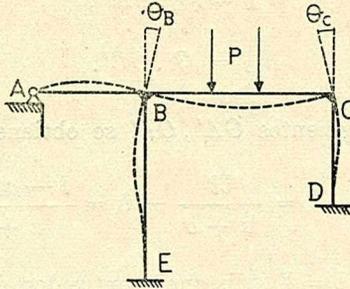


FIG. 30.

que la viga BC está en las condiciones de una viga con empotramientos elásticos. Se plantean los siguientes problemas:

- 1) Cómo determinar los momentos en la viga BC en función de las cargas y de los grados de empotramiento.
- 2) Cómo calcular esos grados de empotramiento.
- 3) Qué sollicitación se produce en el resto de la estructura en correspondencia con las cargas de un tramo.

Además, en el ejemplo de la figura 30 si no se tienen en cuenta las deformaciones por fuerza directa los nudos permanecen fijos, experimentando únicamente rotaciones como las indicadas para B y C . Pero hay otras estructuras en que esa inmovilidad de los nudos no se cumple, siendo necesario entonces estudiar el efecto de las deformaciones posibles, que dependerán de uno o más desplazamientos arbitrarios. La figura 31 (a) es un ejemplo de un sistema con un desplazamiento arbitrario, en este caso el corrimiento horizontal δ común a los extremos de los pilares; y en (b) hay un ejemplo de un sistema de dos desplazamientos arbitrarios.

Muy posiblemente el método de los puntos fijos ofrezca sus mayores ventajas en los problemas de nudos fijos o en los de un solo

desplazamiento arbitrario, sin que sea ésta naturalmente, ninguna conclusión absoluta.

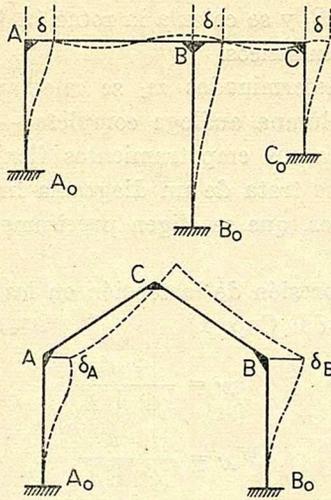


FIG. 31.

Analizaremos sucesivamente los cuatro problemas planteados, y veremos como su solución es simple aplicando el método de la columna análoga.

19. Momentos hiperestáticos debidos a cargas transversales.

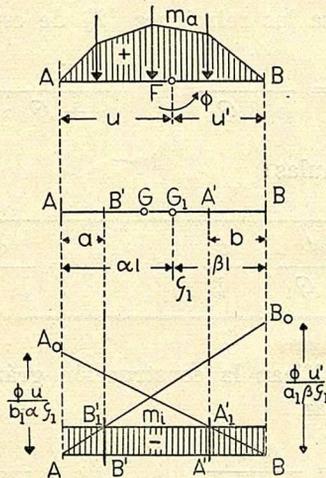


FIG. 32.

— La figura 32 resume el método gráfico que se emplea para de-

terminar el diagrama de los momentos indeterminados m_i . Se toma como diagrama de momentos arbitrarios m_a el de la viga simplemente apoyada AB , y se calcula la rotación Φ de t_B sobre t_A por métodos gráficos o analíticos.

Los momentos indeterminados m_i se calculan como las tensiones producidas en la columna análoga completa — es decir correspondiente a la viga y a sus empotramientos flexibles — por la rotación Φ pero como se trata de un diagrama lineal es suficiente fijarlo para dos puntos, que se eligen precisamente los nucleares B' y A' .

Recordando la expresión de la tensión en los puntos nucleares se tiene: (fórmulas 4 del Cap. I)

$$M_{B'} = \frac{\Phi u'}{\mathcal{G} \cdot \overline{GB}}$$

$$M_{A'} = \frac{\Phi u}{\mathcal{G} \cdot \overline{GA}}$$

resultando cómodo sustituir los momentos totales de la columna $\mathcal{G} \cdot \overline{GA}$, $\mathcal{G} \cdot \overline{GB}$ con respecto a las verticales de apoyo por las expresiones:

$$\mathcal{G} \cdot \overline{GB} = \mathcal{G}_1 \beta l + \varepsilon_A l = (\mathcal{G}_1 \beta + \varepsilon_A) l$$

$$\mathcal{G} \cdot \overline{GA} = \mathcal{G}_1 \alpha l + \varepsilon_B l = (\mathcal{G}_1 \alpha + \varepsilon_B) l$$

y teniendo en cuenta las relaciones [2] de este Cap.:

$$\frac{1}{\varepsilon_A + \mathcal{G}_1 \beta} = \frac{a}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \quad \parallel \quad \frac{1}{\varepsilon_B + \mathcal{G}_1 \alpha} = \frac{b}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1}$$

se obtienen las fórmulas:

$$\boxed{M_{B'} = \frac{\Phi u'}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \cdot \frac{a}{l} \quad \parallel \quad M_{A'} = \frac{\Phi u}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1} \cdot \frac{b}{l}} \quad [9]$$

Estos valores justifican la construcción gráfica de la figura 32 que consiste en tomar

$$BB_0 = \frac{\Phi u'}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \quad \parallel \quad AA_0 = \frac{\Phi u}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1}$$

y trazar A_0B y AB_0 , cuyas intersecciones con las verticales $A'A'_1$;

$B'B_1'$ de los focos fijan en A'_1 ; B'_1 dos puntos del diagrama de los m_i puesto que evidentemente:

$$B'B_1' = \frac{\Phi u'}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \cdot \frac{a}{l} = M_{B'}$$

$$A'A_1' = \frac{\Phi u}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1} \cdot \frac{b}{l} = M_{A'}$$

Los valores a colocarse en BB_0 y AA_0 dependen del diagrama de flectores arbitrarios y de la distribución de EI en la viga, que define los valores de a_1 ; b_1 ; α , β , \mathcal{G}_1 ; calculándose los momentos de la rotación Φu , $\Phi u'$ analíticamente o gráficamente con ayuda de las cruzadas de RITTER.

20. Ejemplo de aplicación del método gráfico. — La figura 33 es un ejemplo del método gráfico aplicado al cálculo de todos los

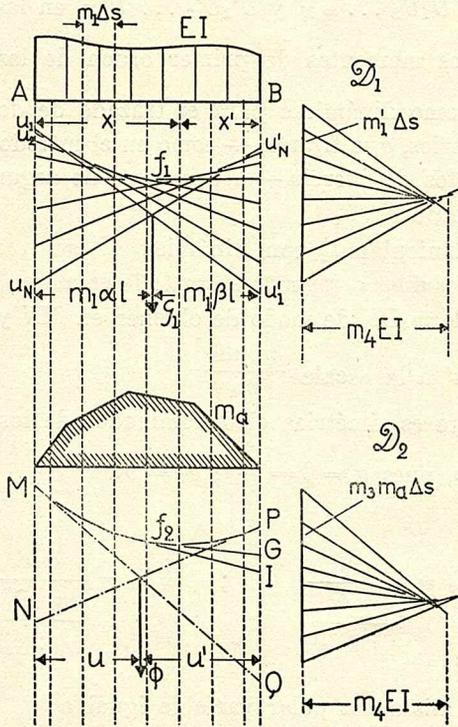


FIG. 33.

elementos que intervienen en la solución del problema. La escala

del dibujo es m_1 ; se dispone del diagrama de la rigidez variable EI de la viga y del diagrama de momentos arbitrarios \mathcal{M}_a . Se traza la primera funicular f_1 con la dinámica \mathcal{D}_1 con cargas iguales a $m'_1 \Delta s$ y distancia polar variable $m_4 EI$.

Un segmento determinado sobre las líneas de apoyo por dos lados consecutivos de la funicular, p. ej. $U'_2 U'_3$, cumplirá la relación

$$U'_2 U'_3 = \frac{m_1 m'_1}{m_4} \cdot \frac{x' \Delta s}{EI}$$

representando, a la escala $\frac{m_1 m'_1}{m^4}$ el momento estático sobre la vertical de B del área elemental de la columna $\frac{\Delta s}{EI}$. Por lo tanto, los segmentos $U_1 U_N$; $U'_1 U'_N$ son los momentos del área total, y servirán para el cálculo de \mathcal{G}_1 ; αl ; βl .

Las puntuales $U_1 U_2 \dots U_N$ y $U'_1 U'_2 \dots U'_N$ en las verticales de apoyo limitan los momentos de primer orden de las áreas $\frac{\Delta s}{EI}$; servirán pues, como dinámicas para el trazado de dos funiculares, con polos arbitrarios, que fijarán — como en el método de CULMANN para los momentos de inercia — los centros de segundo orden A_1 y B_1 y por lo tanto a_1, b_1 .

La segunda funicular f_2 con dinámica \mathcal{D}_2 se traza con cargas $m_3 \mathcal{M}_a \Delta s$ iguales a las áreas momentos (a la escala m_3) y con distancia polar variable $m_4 EI$, de modo de obtener en MN y PQ los valores de $\Phi u, \Phi u'$ a la escala $\frac{m_1 m_3}{m_4}$.

Cuando la viga es simétrica el denominador de los valores AA_0, BB_0 es el mismo, pues $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$; $a_1 = b_1$.

Se tiene así:

$$AA_0 = \frac{\Phi u}{\frac{a_1 \mathcal{G}_1}{2}} \quad ; \quad BB_0 = \frac{\Phi u'}{\frac{a_1 \mathcal{G}_1}{2}}$$

y si se toma la distancia polar variable igual a

$$H = m_4 \frac{1}{2} a_1 \mathcal{G}_1 EI$$

el segmento correspondiente al área $\mathcal{M}_a \Delta s$ en la vertical de B será

$$GI = \frac{m_1 m_3}{m_4} \cdot \frac{\mathcal{M}_a}{\frac{1}{2} a_1 \mathcal{G}_1} \frac{\Delta s}{EI} x'$$

y el segmento total PQ :

$$PQ = \frac{m_1 m_3}{m_4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} a_1 \mathcal{G}_1} \sum \frac{\mathcal{M}_a \Delta s}{EI} x'$$

y como

$$\sum \frac{\mathcal{M}_a \Delta s}{EI} x' = \Phi u'$$

se tendrá

$$PQ = \frac{m_1 m_3}{m_4} \cdot \frac{\Phi u'}{\frac{1}{2} a_1 \mathcal{G}_1}$$

o sea

$$PQ = \frac{m_1 m_3}{m_4} \cdot BB_c$$

Similarmente se obtendría:

$$MN = \frac{m_1 m_3}{m_4} \cdot AA_0$$

y todavía pueden elegirse las escalas de modo que resulte $\frac{m_1 m_3}{m_4}$ igual a la *escala* del diagrama de momentos arbitrarios.

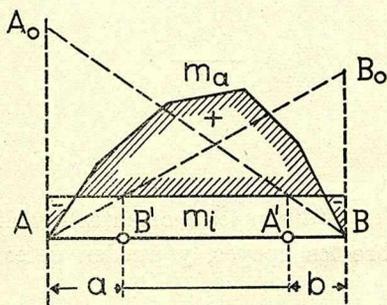


FIG. 34.

La figura 34 muestra como en este caso reproduciendo en AA_0 y BB_0 los segmentos PQ , MN , y repitiendo la construcción final de

la figura 32 para la fijación del diagrama indeterminado en los puntos nucleares se obtiene rápidamente el diagrama de momentos reales.

21. **Simplificación para la viga de sección constante.** — Los elementos del alma de la columna en este caso se simplifican, reduciéndose a

$$\mathcal{G}_1 = \frac{l}{EI} \quad ; \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_1 = b_1 = \frac{l}{3} .$$

Además, en vez de calcular las rotaciones reales

$$d\Phi = \frac{m_a ds}{EI} \quad ; \quad \Phi = \int \frac{m_a ds}{EI}$$

se trabaja simplemente con las áreas momentos $m_a ds$, que producen rotaciones EI veces mayores que llamo $d\Phi'$, Φ' .

Con esta notación los segmentos $AA_0 : BB_0$ se transforman en

$$AA_0 = \frac{\frac{\Phi' u}{EI}}{\frac{l^2}{6EI}} = \frac{\Phi' u}{\frac{l^2}{6}}$$

$$BB_0 = \frac{\Phi' u'}{\frac{l^2}{6}} .$$

Los términos $\Phi' u ; \Phi' u'$ son los momentos del diagrama de flectores arbitrarios sobre los apoyos, y pueden determinarse gráfica o analíticamente.

La construcción gráfica de la figura 35 es bastante simple, y consiste en tomar como cargas de la dinámica \mathcal{D} las áreas ΔS del diagrama de momentos arbitrarios (si es necesario a cierta escala μ); y como distancia polar el área del rectángulo S' construido sobre

lados iguales a la mitad y a la tercera parte de la luz — midiendo todos los elementos *directamente en el dibujo*.

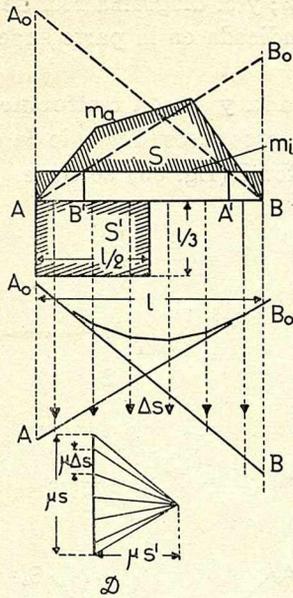


FIG. 35.

La escala de éste es m_1 ; la del diagrama de flectores es m_2 ; tomando como cargas las ΔS (áreas momentos en el diagrama) la escala de los ΔS es $m_1 m_2 \mu$ y la distancia polar es

$$H = m_1^2 \mu \frac{l^2}{6}$$

Los segmentos AA_0 y BB_0 representan los términos $\Phi'u$ y $\Phi'u'$ a la escala

$$\frac{m_1 m_1 m_2 \mu}{m_1^2 \mu \frac{l^2}{6}} = \frac{m_2}{l^2}$$

y se tendrá:

$$BB_0 = m_2 \frac{\Phi' u'}{l^2}$$

$$AA_0 = m_2 \frac{\Phi' u}{l^2}$$

Estando estos segmentos a la escala m_2 del diagrama de flectores lo estarán también los momentos en B' y A' deducidos por la construcción de la figura 32; y el diagrama real de momentos se obtiene entonces en la forma indicada en la parte superior de la figura 35.

22. Carga concentrada y carga uniforme en la viga de sección constante. — En estos casos el cálculo de $\Phi' u'$; $\Phi' u$ es directo. En la carga uniforme total (fig. 36) se tiene

$$\Phi' = \frac{2}{3} \frac{pl^3}{8}$$

$$u = u' = \frac{l}{2}$$

de modo que

$$\Phi' u' = \Phi' u = \frac{pl^4}{24}.$$

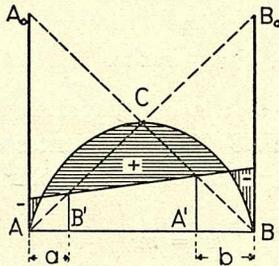


FIG. 36.

Las ordenadas BB_0 , AA_0 serán:

$$AA_0 = BB_0 = \frac{pl^4}{\frac{24}{l^2}} = \frac{pl^2}{4}.$$

$$6$$

Las cruzadas AB_0 y A_0B se cortan en el punto C , máximo del diagrama de flectores arbitrarios, lo que simplifica la construcción de la línea de momentos indeterminados y del diagrama real en la forma que se aprecia en la figura.

La figura 37 se refiere a la carga P concentrada en el punto de abscisas x, x' .

Como las abscisas del centro de rotación F son

$$u = \frac{l+x}{3} \quad ; \quad u' = \frac{l+x'}{3}$$

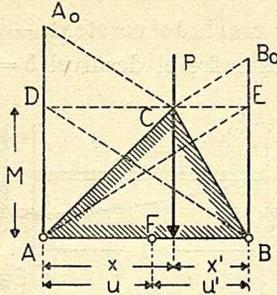


FIG. 37.

y la rotación

$$\Phi' = \frac{1}{2} M l$$

se tendrá, para BB_0 y AA_0 :

$$BB_0 = \frac{\frac{1}{6} M l (l+x')}{\frac{l^2}{6}} = M \frac{l+x'}{l}$$

$$AA_0 = M \frac{l+x}{l}$$

fórmulas que justifican la construcción indicada para deducir del momento máximo M los segmentos AA_0 y BB_0 .

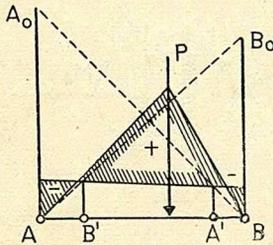


FIG. 38.

La figura 38 da el diagrama real obtenido partiendo de las cruzadas AB_0, A_0B y de los puntos nucleares B', A' .

La facilidad con que se obtienen los diagramas de momentos para una carga concentrada justifican el uso de este método tomando varias posiciones de la carga igual a uno, para el trazado de las líneas de influencia de los momentos y cortantes en cualquier punto de la viga.

23. Rigidez para el traslado vertical. — Cuando una viga con empotramientos flexibles sufre el desnivel $\delta = BB'$ entre las termi-

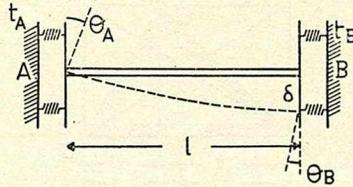


FIG. 39.

nales (fig. 39) el movimiento relativo será una *traslación*, aunque es evidente que por la presencia de los empotramientos elásticos las terminales de la *viga* se desvían los ángulos θ_A , θ_B proporcionales a los momentos M_A , M_B tal como indica la figura.

Es oportuno insistir sobre esto; el empotramiento elástico (fig. 40) de una viga implica en la terminal de ésta t_A' el giro θ_A proporcional al par M_A , esto es $\theta_A = \epsilon_A M_A$; si agregamos ahora a la viga el elemento elástico ϵ_A que en la figura se representa por los dos resortes la nueva terminal t_A girará sobre la anterior el mismo ángulo θ_A , con lo que su posición final coincidirá con la inicial. Agregando como se ha hecho los dos elementos elásticos ϵ_A , ϵ_B a la viga el conjunto queda en condiciones similares a las de una pieza con dos empotramientos perfectos.

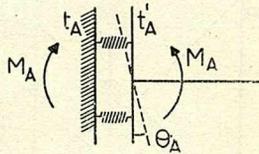


FIG. 40.

Volviendo al problema de la traslación δ , para calcular los momentos en B' , A' se emplean las mismas fórmulas que en el artículo 19 reemplazando los términos Φu , $\Phi u'$ de las fórmulas [9] por la

traslación δ y teniendo en cuenta que las tensiones o momentos indeterminados son ahora de distinto signo, por ser la sollicitación de la columna flexión pura. Tomando como positivo el *descenso* de *B* con relación a *A* las expresiones de $M_{B'}$, $M_{A'}$ con sus signos son:

$$\boxed{M_{B'} = - \frac{\delta}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \cdot \frac{a}{l} \quad \parallel \quad M_{A'} = + \frac{\delta}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1} \cdot \frac{b}{l}} \quad [9']$$

y los valores de los segmentos BB_0 y AA_0 que servirán, en la forma indicada en la figura 41, para trazar el diagrama de momentos indeterminados estarán dados por

$$\boxed{BB_0 = - \frac{\delta}{a_1 \beta \mathcal{G}_1} \quad \parallel \quad AA_0 = + \frac{\delta}{b_1 \alpha \mathcal{G}_1}} \quad [10]$$

Cuando la viga es simétrica los segmentos BB_0 y AA_0 son iguales. Si la viga es de sección constante como

$$a_1 \beta \mathcal{G}_1 = b_1 \alpha \mathcal{G}_1 = \frac{l^2}{6 EI}$$

los segmentos BB_0 , AA_0 valen

$$AA_0 = + \frac{6 EI \delta}{l^2} \quad \parallel \quad BB_0 = - \frac{6 EI \delta}{l^2}$$

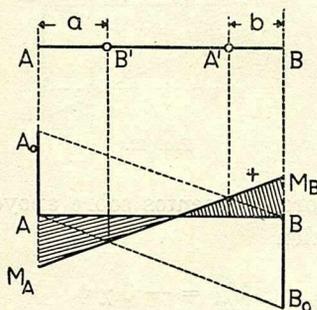


FIG. 41.

de modo que introduciendo la notación

$$\chi = \frac{EI}{l} \quad ; \quad \psi = \frac{\delta}{l}$$

En la figura se han trazado las líneas neutras, o líneas de acción de la fuerza F aplicada a las terminales para producir la traslación δ .

La figura 43 explica la acción de estas fuerzas, y también el modo de calcularlas, si se tiene en cuenta que

$$M_A = -F m$$

$$M_B = +F n$$

de modo que

$$M_B - M_A = F(m + n) = Fl$$

de donde

$$\boxed{F = \frac{M_B - M_A}{l}} \quad [11']$$

reconociéndose en esta fórmula la clásica expresión del esfuerzo cortante de una viga cargada con flectores en las puntas.

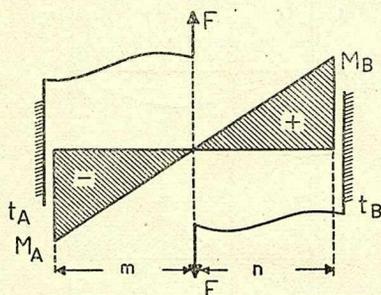


FIG. 43.

El valor de F que corresponde a $\delta = 1$ se llama *rigidez para el traslado vertical*. Llamándolo χ_{vert} ; tendremos para el descenso δ correspondiente a una fuerza F :

$$\boxed{\delta = \frac{F}{\chi_{vert}}} \quad [12]$$

La fórmula [11'] permite el cálculo de χ_{vert} ; si p. ej. se trata de

una viga de sección constante y con dos empotramientos perfectos será

$$\chi_{vert} = \frac{12 EI}{l^3} = \frac{12 \chi}{l^2} \quad [13]$$

Si en cambio una de las puntas es articulada:

$$\chi_{vert} = \frac{3 EI}{l^3} = \frac{3 \chi}{l^2} \quad [14]$$

En las vigas con empotramientos elásticos el valor de χ_{vert} depende de la ubicación de los puntos nucleares A' , B' , ya que son éstos los que definen los valores de M_A, M_B una vez dado el descenso δ .

24. Rigidez para la rotación de una punta. — La viga AB

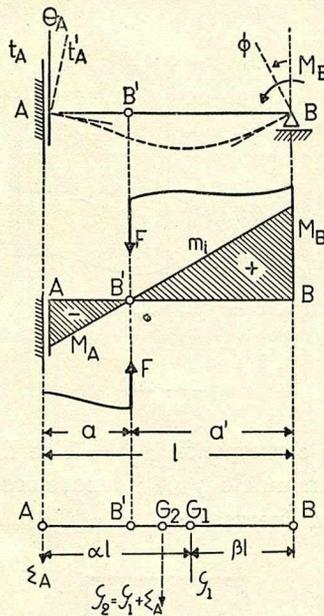


FIG. 44.

(fig. 44) está empotrada elásticamente en A conociéndose por lo tanto el punto nuclear B' y los elementos \mathcal{G}_1 ; αl ; βl de la viga.

La columna análoga permite resolver de inmediato la distribución del momento indeterminado que corresponde a la rotación de la terminal t_B alrededor de B para lo cual se carga la columna con la compresión igual a la rotación Φ aplicada en el punto B . La tensión o momento en B será

$$M_B = \frac{\Phi a'}{\mathcal{G}_2 \overline{G_2 B'}}$$

es decir, momento sobre el punto nuclear B' dividido por el módulo

$$\mathcal{G}_2 \overline{G_2 B'}$$

Resulta más cómodo reemplazar el momento de la columna sobre B' por el de sus dos componentes, \mathcal{G}_1 de la viga, y ϵ_A del empostramiento, lo que da

$$\mathcal{G}_2 \cdot \overline{G_2 B'} = \mathcal{G}_1 (\alpha l - a) - \epsilon_A a$$

obteniéndose así

$$M_B = \frac{\Phi a'}{\mathcal{G}_1 (\alpha l - a) - \epsilon_A a} \quad [15]$$

Como la línea neutra es la antipolar de B será la vertical de B' y el momento en A será

$$M_A = - \frac{a}{a'} M_B \quad [16]$$

La relación [15] entre Φ y M_B es lineal; conviene evidenciarla escribiendo:

$$\frac{M_B}{\Phi} = 2 \varphi'_B = \frac{a'}{\mathcal{G}_1 (\alpha l - a) - \epsilon_A a} \quad [17]$$

definiéndose la constante $2 \varphi'_B$ como la rigidez de AB para la rotación alrededor de B .

El ángulo de giro Φ para el momento M_B será así

$$\boxed{\Phi = \frac{M_B}{2 \phi'_B}} \quad [18]$$

Lo que hemos expuesto demuestra que si la viga AB empotrada elásticamente en A recibe el par M_B en la punta B , libre solo de girar sobre B , el diagrama de momentos es el indicado en la figura 45.

El momento M_A es siempre la misma fracción $K = -\frac{a}{a'}$ del momento M_B y el diagrama pasa por el punto nuclear B' , propiedad que justifica el nombre que se le da en la teoría de STRASSNER: *foco*, o *punto fijo*.

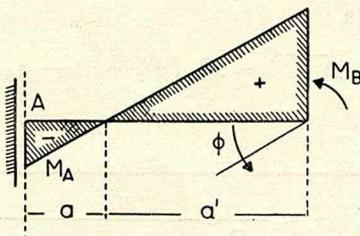


FIG. 45.

El coeficiente K de reducción de momentos por analogía con el método de Cross puede ser llamado *factor de traslado* (*carriover*), pues permite avaluar la parte de M_B que se trasmite o induce en el empotramiento A .

Si el empotramiento A fuera rígido y la viga de sección constante ese factor valdría

$$K = -\frac{\frac{l}{3}}{\frac{2l}{3}} = -\frac{1}{2}$$

número bien conocido por los que usan el método de Cross.

Como el ángulo Φ de giro de B depende de la rigidez $2 \phi'_B$ es conveniente hallar una expresión más simple o una construcción sencilla para el valor que hemos hallado en la ecuación [17].

Esta última recta define el punto D tal que

$$DG_1 = \Delta = \alpha l - a - \beta (a_1 - a)$$

Se tiene en efecto, por semejanza de triángulos:

$$\frac{B' D}{B' B_1} = \frac{\beta l}{l} = \beta \quad || \quad B' D = \beta \cdot B' B_1 = \beta (a_1 - a)$$

y resulta evidente que

$$DG_1 = \alpha l - a - \beta (a_1 - a) = \Delta$$

25. Valor de φ' para la viga de sección constante. — Teniendo en cuenta que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y que $a_1 = \frac{l}{3}$ se obtiene

$$2 \varphi'_B = \frac{\chi_1 a'}{\frac{l}{2} - a - \frac{l}{6} + \frac{a}{2}} = \frac{\chi_1 a'}{\frac{l}{3} - \frac{a}{2}}$$

y el valor de φ'_B es:

$$\varphi'_B = \frac{\chi_1 a'}{\frac{2}{3} l - a}$$

[20]

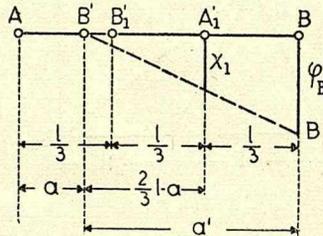


FIG. 47.

La figura 47 da la correspondiente construcción geométrica, cuya sencillez exime de mayores comentarios.

CAPITULO IV

SISTEMAS RIGIDOS

26. **Teorema del nudo.** — Cuando varias vigas A_0B ; A_1B ; A_2B empotradas elásticamente en A_0 , A_1 , A_2 y conectadas en el nudo B que se supone de traslación impedida, reciben la acción de un par exterior M se produce la deformación indicada en la figura 48, o sea el giro del nudo, y por lo tanto de las terminales de las vigas, del ángulo θ Llamando M_0 , M_1 , M_2 los pares que se transmiten a cada una de las vigas habrá las siguientes ecuaciones: estática

$$M = M_0 + M_1 + M_2$$

elásticas, deducidas de la relación entre el ángulo de giro θ ; el momento aplicado, y la rigidez $2\varphi'$ que se determinó en el artículo anterior :

$$\theta = \frac{M_0}{2\varphi'_0} = \frac{M_1}{2\varphi'_1} = \frac{M_2}{2\varphi'_2}$$

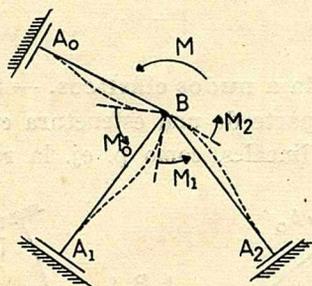


FIG. 48.

Combinando estas ecuaciones con la ecuación estática resulta:

$$\theta = \frac{M_0 + M_1 + M_2}{2 \Sigma \varphi'} = \frac{M}{2 \Sigma \varphi'} \quad [21]$$

relación que permite definir la *rigidez del nudo* como la suma de las *rigideces de las barras que lo forman*.

Las ecuaciones elásticas se escriben también :

$$\boxed{\frac{M_0}{\varphi'_0} = \frac{M_1}{\varphi'_1} = \frac{M_2}{\varphi'_2} = \frac{M}{\Sigma \varphi'}} \quad [22]$$

de las que se deduce el procedimiento para calcular los momentos que corresponden a cada barra, por medio de la distribución de M en partes proporcionales a las rigideces φ' .

Obtenidos los momentos parciales en el nudo los diagramas se completan en cada barra, ya sea por medio de la propiedad de los focos o usando los factores de momento inducido.

La figura 49 se refiere a la distribución del par M estudiada en la figura 48.

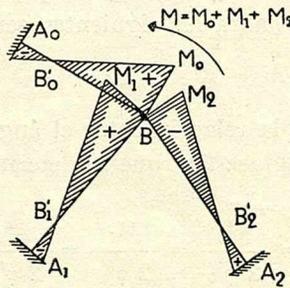


FIG. 49.

27. **Viga conectada a nudos elásticos.** — Se supone ahora una viga BC que forma parte de una estructura cuyos nudos no admiten desplazamientos lineales, como p. ej. la representada en la fi-

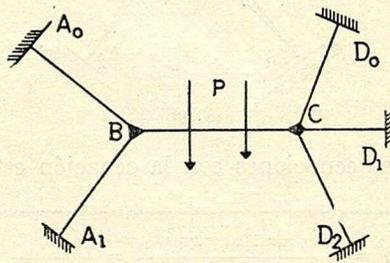


FIG. 50.

gura 50, que, si se suponen las barras rígidas para la fuerza directa, determina perfectamente la posición de los puntos B y C .

Las condiciones de la viga BC cuando recibe cargas, o cuando su eje se desvía, son precisamente las de una viga de *empotramiento elástico*, ya que los momentos de continuidad M_B, M_C al trasmitirse en B y C a las demás barras del sistema producen los giros

$$\theta_B = \frac{M_B}{2 \sum \phi'_B} \quad ; \quad \theta_C = \frac{M_C}{2 \sum \phi'_C}$$

en donde $\sum \phi'_B$ y $\sum \phi'_C$ son las sumas de las rigideces en B y C de las barras que forman los nudos *con excepción de BC* .

Pero si tenemos en cuenta ahora la expresión [1] del Cap. III que liga la deformación angular del empotramiento flexible con el par, se tendrá, para los grados de empotramiento y flexibilidades de BC en B y C :

$$\theta_B = \epsilon_B M_B = \frac{M_B}{2 \phi_B} \quad ; \quad \theta_C = \epsilon_C M_C = \frac{M_C}{2 \phi_C}$$

y combinando con las anteriores :

$$\boxed{\phi_B = \sum \phi'_B \quad ; \quad \phi_C = \sum \phi'_C} \quad [23]$$

Estas relaciones son fundamentales en la teoría de los puntos fijos, pues al demostrar que *en cada nudo, el grado de empotramiento de una barra es igual a la suma de las rigideces con respecto al nudo de las demás barras*, fija el criterio para calcular los grados de empotramiento y por consiguiente ubicar los focos de todas las barras.

28. Método de los focos. — Para que la determinación de los focos por los métodos indicados en los artículos 16 y 24 sea posible es necesario que la estructura no tenga *barras que cierren polígonos*, de las que hay varios ejemplos en la figura 51. Se comprende que en cualquiera de los casos presentados la ubicación de los focos se obtiene partiendo de las puntas, articuladas o empotradas, y calculando las rigideces al primer nudo, siguiéndose luego por el método de recurrencia. Las figuras 52 y 53 muestran el procedimiento seguido en el caso de una viga continua y de un pórtico continuo, supuestos de sección constante en cada tramo.

Fijados los focos en todas las barras de la estructura se puede, aplicando el método expuesto en los artículos 19, 20, 21 y 22 trazar

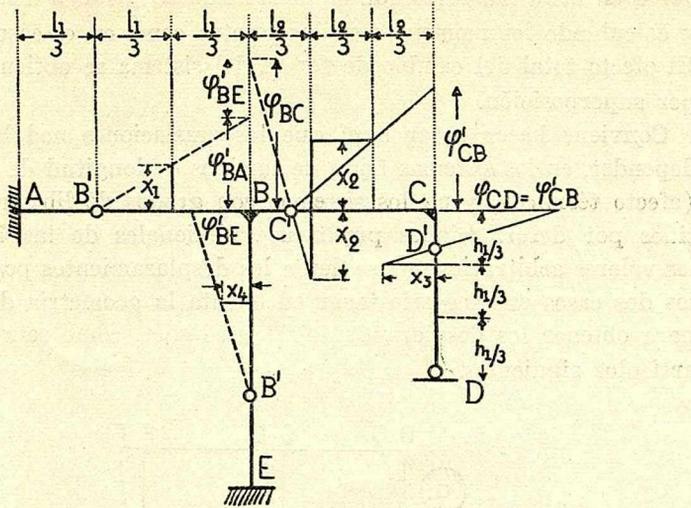


FIG. 53.

el diagrama de flectores correspondiente a cargas actuando en *una sola barra del sistema* distribuyendo y transmitiendo los momentos producidos en las puntas del elemento cargado entre todos los demás elementos por la aplicación repetida del teorema del nudo y de las propiedades de los puntos fijos.

La figura 54 se refiere a una viga continua con una carga uniforme en el tramo central, problema muy simple, pues no hay que distribuir momentos.

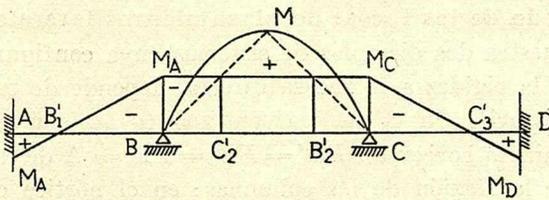


FIG. 54.

El efecto de cargas en varias barras se obtiene por la superposición de los diagramas que corresponden a los tramos cargados separadamente.

Las líneas de influencia se construyen trazando los diagramas correspondientes a cada posición de la carga y tabulando o llevando al dibujo los datos que interesen. Es un método que podríamos llamar completamente directo.

Las desnivelaciones en las barras que corresponden a eventuales traslaciones de los nudos se estudian considerando el efecto en cada barra en la forma explicada en el artículo 23 y luego distribuyendo y calculando los momentos en las puntas como en el caso anterior. El efecto total del cambio de forma del sistema se obtiene también por superposición.

Conviene hacer notar aquí que las traslaciones nodales pueden depender, en los sistemas fijos, de cambios de longitud de las barras (efecto térmico), y en los sistemas con grados de libertad consentidos por deformaciones puramente flexionales de las barras, de los valores arbitrarios que se den a los desplazamientos posibles. En los dos casos es necesario tener en cuenta la geometría del sistema para obtener los desplazamiento de los nudos, como se verá en los artículos siguientes.

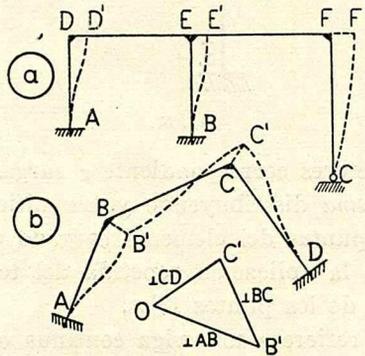


Fig. 55.

29. **Método de los focos: desplazamientos laterales.** — La figura 55 muestra dos ejemplos de sistemas cuya configuración, aún admitiendo la rigidez a la fuerza directa, depende de un desplazamiento arbitrario. En el pórtico continuo (a) este desplazamiento es el corrimiento horizontal $DD' = EE' = FF' = \Delta$ de la viga, consentido por la flexión de las columnas; en el pórtico oblicuo (b) puede ser BB' o CC' estando en este caso relacionadas las desnivelaciones de los tres elementos por el diagrama de WILLIOT, $OB'C'$, trazado, como es natural, para dilataciones nulas de las barras.

El método de los puntos fijos permite, una vez ubicados los focos, determinar los momentos que en cada barra produce la propia desnivelación; y luego repartir y circular momentos a los demás nudos. La superposición de los diagramas da la sollicitación correspondiente al desplazamiento arbitrario asumido. Refiriéndonos al

ejemplo (a) se explican, en la figura 56 las tres etapas necesarias para obtener, por superposición, el estado final.

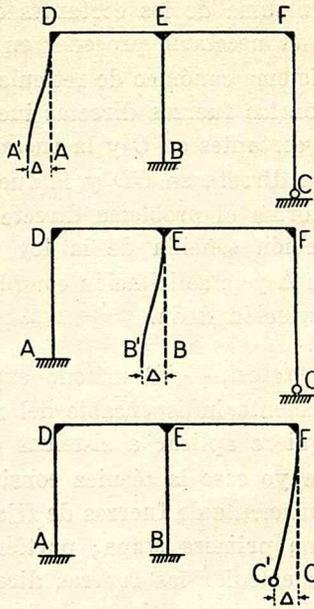


FIG. 56.

Las solicitaciones obtenidas en esta forma no pueden, evidentemente, corresponder a sistemas nulos de fuerzas; y en muchos ca-

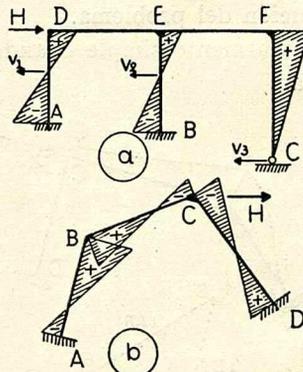


FIG. 57.

sos es posible, con el recurso de la estática, encontrar una fuerza, de dirección elegida arbitrariamente, que corresponda a la deformación asumida para la estructura: esta fuerza se llama *fuerza de desviación*.

En la figura 57 se indican dos procesos para calcularla en el

pórtico continuo (a) y en el oblicuo (b). En ambos casos se determinan los cortantes en las barras; pero mientras en (a) es suficiente escribir que la suma de los cortantes en las columnas debe igualar a H , en (b) es necesario proceder en la misma forma que en el cálculo de un sistema canónico de reticulado: esto es equilibrar en B los cortantes con las fuerzas directas incógnitas en las barras AB y BC ; y con los cortantes en C y la fuerza directa conocida en BC obtener la fuerza directa en CD y la fuerza H .

Resuelto en esta forma el problema directo de avaluar H conociendo Δ una aplicación sencilla de la ley proporcional permite calcular la desviación Δ y la sollicitación completa que corresponden a una fuerza de desviación dada.

30. **Fuerzas de fijación.** — El método expuesto en el artículo anterior es el complemento indispensable del método de los puntos fijos cuando se le quiere aplicar a sistemas cuyos nudos admiten desplazamientos, en cuyo caso la técnica consiste en fijar la estructura con el número suficiente de fuerzas de fijación, calcularla como de nudos fijos en una primera etapa; partiendo del diagrama de cortantes que resulte calcular las fuerzas directas en las barras y las fuerzas de fijación, y por último calcular la sollicitación de la estructura sometida a fuerzas de desviación iguales y contrarias a las de fijación. La sollicitación de este último estado superpuesta con la primera, es decir la correspondiente a la hipótesis de fijeza de los nudos es la solución del problema.

El método es particularmente simple cuando las fuerzas de fijación se reducen a una.

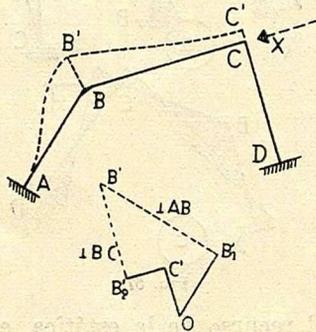


Fig. 58.

La figura 58 se refiere precisamente al cálculo de un pórtico oblicuo sometido a calentamiento uniforme pero desigual en sus tres

barras. La fuerza de fijación X permite obtener previo trazado del Williot que determina las desnivelaciones en las vigas, los fletores y cortantes para el calentamiento del pórtico con el nudo C fijo. De los cortantes se deducen las fuerzas directas y la fuerza de fijación X ; aplicando ahora al pórtico la fuerza de desviación igual y opuesta y siguiendo el método expuesto en el artículo 29 hallaremos los diagramas de flexión, cuya superposición con los encontrados en la primera etapa de cálculo dan la solución del problema.

En forma similar se tratarían las estructuras si los fletores fueran debidos a cargas.

La figura 59 se refiere a un sistema que requiere dos fuerzas de fijación en D y E . Si se desea la sollicitación correspondiente a las fuerzas X, Y , es necesario superponer dos estados; desviación

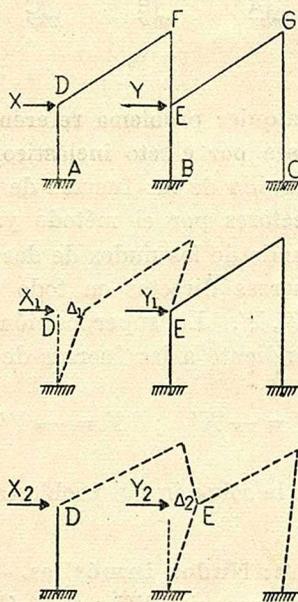


FIG. 59.

de D con el punto E fijo, que se produce con las fuerzas $X_1 ; Y_1$, y desviación de E con D fijo, que requiere las fuerzas $X_2 ; Y_2$. Estas sollicitaciones y fuerzas se calculan como se indicó en el artículo 29.

Si ahora se desean conocer los diagramas para X, Y , es necesario superponer los estados calculados, previa multiplicación por dos constantes m, n , que se calculan estipulando que

$$X = m X_1 + n X_2$$

$$Y = m Y_1 + n Y_2$$

Obtenidos m, n , se obtienen por superposición los diagramas correspondientes al estado real.

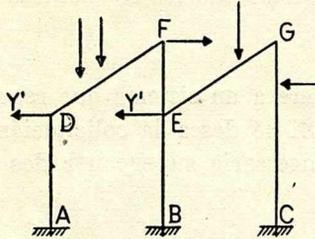


FIG. 60.

La resolución de cualquier problema referente al pórtico, sea sollicitación por cargas, sea por efecto inelástico, se resuelve fijando los nudos D, E , con auxilio de las fuerzas de fijación X', Y' (fig. 60). Obtenidos los flectores por el método ya explicado, los cortantes permiten, partiendo de los nudos de dos barras F y G la determinación de las fuerzas directas en todo el sistema, y de las fuerzas de fijación X', Y' . La superposición de este estado con la sollicitación correspondiente a las fuerzas de desviación:

$$X = -X' \quad ; \quad Y = -Y'$$

aplicadas en D y E da la solución del problema.

31. Método de Cross: Nudos inmóviles. — Cross ideó la *distribución de momentos* para simplificar el cálculo de estructuras. Se supone primero (fig. 61 a) que en la estructura los nudos no admiten ni *traslaciones* ni *rotaciones*, lo que permite considerar a todas las barras, en una primera etapa de cálculo, como *doblemente empotradas* (DE y EF p. ej.) o *empotradas y articuladas* (DG y EH) apareciendo en los nudos, como consecuencia de esta hipótesis, los *momentos iniciales* (fixed end moments) que pueden calcularse

por el método de los focos o por el de la columna análoga de manera muy sencilla.

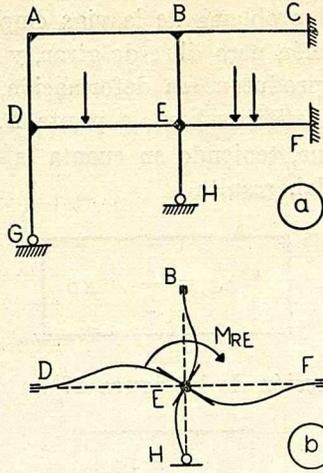


FIG. 61.

Para simplificar los cálculos siguientes conviene introducir aquí la idea de *momento nodal*, que es el momento transmitido por cada barra al nudo, considerado positivo cuando gira en el sentido del

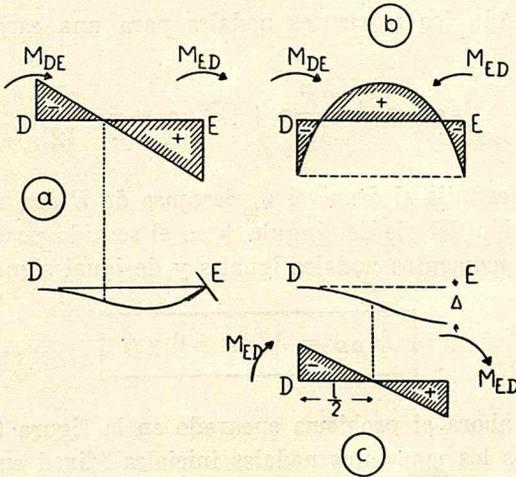


FIG. 62.

reloj y negativo en el caso inverso. Se comprende que de acuerdo con esta convención en una punta derecha el nodal y el flector son iguales en valor y signo; mientras que en una punta izquierda el valor es el mismo pero el signo contrario.

En la figura 62, y como ejemplo, figuran los nodales en una viga

de sección constante, calculados según el método de los focos, para distintas condiciones de carga.

En (a) se tiene el problema de la viga empotrada en D , con el punto E fijo en posición pero libre de girar, y cargada con los momentos nodales que producen esa deformación, que sirve para caracterizar la rigidez (stiffness) en la punta E . El foco E' está en la tercia, de modo que, teniendo en cuenta la convención de signo para el momento nodal, resulta

$$\boxed{M_{DE} = \frac{1}{2} M_{ED}} \quad [24]$$

Además, la construcción de la figura 47 da de inmediato

$$\boxed{\varphi' = 2 \chi_{DE}} \quad [25]$$

fórmula que demuestra que en la viga de sección constante empotrada en una punta la rigidez en la otra punta es el doble de la rigidez propia.

En (b) están los momentos nodales para una carga uniforme, que resultan

$$M_{DE} = + \frac{pl^2}{12} \quad ; \quad M_{ED} = - \frac{pl^2}{12}$$

En (c) se estudia el desnivel ψ , descenso de E con respecto a D , o sea desviación del eje del ángulo ψ en el sentido positivo de giro, que produce momentos nodales iguales y de igual signo:

$$\boxed{M_{DE} = M_{ED} = 6 \chi \psi} \quad [26]$$

Volviendo ahora al problema encarado en la figura 61 y supuestos calculados los momentos nodales iniciales (fixed end moments) nos encontraremos con que en general *no habrá equilibrio en los nudos*, siendo

$$M_R = \Sigma M_n \neq 0$$

en donde ΣM_n es la suma algebraica de los momentos nodales, llamada por Cross *momento resultante*.

Este desequilibrio nodal es consecuencia de la inexactitud de la hipótesis de la fijeza de los nudos a la rotación, admitida para el cálculo de los momentos iniciales. Para corregir este error Cross supone que se liberan los nudos *sucesivamente*, como por ejemplo se ha hecho con el E en (b) de la figura 61. Al quedar E en libertad de ceder a la acción del par resultante M_{RE} se reproduce el teorema del nudo del artículo 26 que indica que M_{RE} debe *distribuirse entre las barras del nudo* proporcionalmente a las rigideces φ' , calculadas en el supuesto de que para cada barra la otra punta esté empotrada perfectamente (salvo el caso de las articulaciones reales como la H en dicha figura). Si las barras son de sección constante se tiene $\varphi' = 2\chi$ si la otra punta es empotrada o $\varphi' = 1.5\chi$ si es articulada, lo que simplifica la distribución, permitiendo hacerla en función de los valores χ solamente.

Como la parte de M_{RE} que corresponde a cada barra en la distribución es *momento transmitido a la barra*, el nodal será de signo contrario, quedando en consecuencia luego de la distribución el nudo perfectamente equilibrado, esto es con

$$\Sigma M_n = 0.$$

Esta operación de distribución de momentos se repite en todos los nudos, formando la segunda etapa del cálculo.

Este naturalmente no ha terminado aún, ya que, tal como se indica en la figura 49 la transmisión de momentos a una punta induce momentos en la otra, deducidos por la aplicación del factor de *carriover*. Este es, en vigas de sección constante (fig. 62 a) igual a $+\frac{1}{2}$, lo que permite realizar el traslado de los momentos en forma casi automática y poco expuesta a errores a partir de los momentos distribuidos.

Anotados en las puntas de las vigas los momentos nodales provenientes del carriover se observará que en general se desequilibra el nudo, haciéndose necesaria una nueva distribución, con su carriover consiguiente, repitiéndose estas operaciones hasta obtener la aproximación deseada.

La técnica operatoria de este procedimiento, que solo se adquiere con la práctica, puede apreciarse en los ejemplos expuestos en CROSS y MORGAN, *Continuous Frames of Reinforced Concrete*; L. GIORGI, *El método de Cross*, «Revista Ingeniería», Marzo y Mayo

1931; J. CASTIÑEIRAS, *Entrepisos sin vigas*; G. MAGNEL, *Stabilité des Constructions*; C. FERNÁNDEZ CASADO, *Estructuras reticulares*; a cuyas exposiciones detalladas remitimos al lector que desee familiarizarse con uno de los métodos más fecundos para el cálculo de los sistemas rígidos.

32. Método de Cross: nudos móviles. — Cuando se conocen los desplazamientos laterales, como sucede en los sistemas reticulares con nudos rígidos (fig. 63) quedan definidos de inmediato los momentos nodales iniciales (fixed end moments) que corresponden a rotaciones nulas en los nudos (fig. 63 b). La desviación ψ de cada

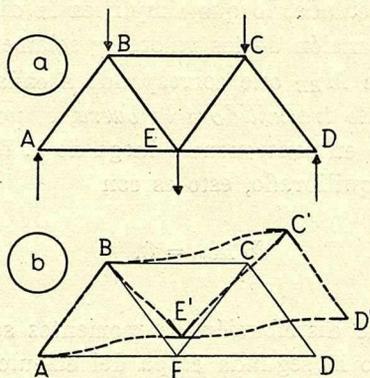


FIG. 63.

barra, que produce momentos nodales en ambas puntas iguales a $+6\chi\psi$ (sección constante) se deduce fácilmente de un diagrama de WILLIOT, en el que ni siquiera es necesaria la corrección rotacional de MOHR, ya que solo interesan los desplazamientos relativos de los nudos producidos por las dilataciones desiguales de las barras.

Los valores finales de los momentos nodales se encuentran distribuyendo los momentos resultantes en cada nudo, trasladando las correcciones a los nudos vecinos, y repitiendo las distribuciones y traslados hasta que la convergencia sea satisfactoria.

Los momentos nodales reales en cada barra definen los diagramas de flectores y cortantes, y de estos últimos se deducen las fuerzas directas secundarias. La tensión final en cada barra es la suma de la tensión inicial debida a las fuerzas directas calculadas en el sistema supuesto con nudos articulados; más la tensión debida a la fuerza directa producida por los cortantes; más la tensión pro-

ducida por los flectores. Corrientemente los valores de las fuerzas directas secundarias son de una magnitud tal que no se requiere una corrección ulterior del diagrama de WILLIOT, por lo que se estima que este procedimiento es, dentro de la aproximación viable, el más rápido y seguro para el cálculo de los llamados esfuerzos secundarios (secondary stresses) de los sistemas triangulados con nudos rígidos.

Cuando los desplazamientos laterales no se conocen, como sucede en los sistemas rígidos con grados de libertad consentidos por las deformaciones flexionales, el procedimiento es similar al explicado en los artículos 29 y 30, difiriendo únicamente en la forma adoptada para el cálculo de la sollicitación correspondiente a una desviación asumida. La figura 64 se refiere al mismo ejemplo de la

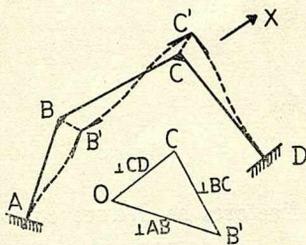


FIG. 64.

figura 55 b, pero el proceso seguido para avaluar X se basa en la *distribución de momentos*. Elegido arbitrariamente el desplazamiento Δ de B p. ej. el diagrama de WILLIOT $OB'C'$ permite fijar las desviaciones ψ_{AB} ; ψ_{BC} ; ψ_{CD} de las tres barras, y los momentos nodales iniciales que corresponden a la hipótesis — representada en la figura — del traslado *sin rotación* de los nudos B y C . Si se suponen las barras de sección constante las fórmulas de las vigas empotradas permiten calcular de inmediato esos momentos, que serán:

$$M_{AB} = M_{BA} = 6 \chi_{AB} \psi_{AB}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = 6 \chi_{BC} \psi_{BC}$$

$$M_{CD} = M_{DC} = 6 \chi_{CD} \psi_{CD}$$

Obsérvese que en este ejemplo, y de acuerdo con los signos adoptados para los momentos nodales, M_{BA} y M_{CD} serán positivos; M_{BC} y M_{CB} negativos.

Fijados los momentos nodales en B y C en esta primera etapa se sigue el cálculo distribuyendo y trasladando los momentos en los únicos nudos a equilibrar del sistema, que son B y C , lo que permite llegar rápidamente a los valores finales. Las diferencias entre esos valores finales y los iniciales son los momentos distribuidos en B y C que deben trasladarse, de acuerdo con el factor de carriover, a las puntas A y D , quedando así determinada completamente la sollicitación de flexión en el pórtico (fig. 65).

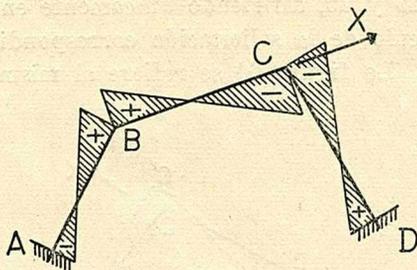


FIG. 65.

Del diagrama de flectores se deduce como en el método seguido en los artículos 29 y 30 el de cortantes; y de los cortantes se pasa a las fuerzas directas y a la de desviación X . La ley proporcional permite obtener luego las sollicitaciones correspondientes a fuerzas de desviación dadas.

El empleo de las fuerzas de fijación sigue la misma técnica que en el método de los puntos fijos: p. ej. en la figura 66 se estudia un pórtico de viga quebrada que requiere la fijeza artificial de los puntos B, D obtenida gracias a las fuerzas X, Y . Dado un sistema de cargas p. ej. las cargas uniformes w_1, w_2 , debidas al viento que se representan en (a) se obtiene el diagrama de flectores (b) por el método de distribución de momentos suponiendo fijos todos los nudos. Del diagrama de cortantes se deducen las fuerzas directas en las barras y las de fijación X, Y .

En (c) y (d) se estudia el efecto de los corrimientos laterales (que Cross llama muy gráficamente *side walks*) de los nudos B y D . Los valores $X_1 ; Y_1$ de las fuerzas de desviación corresponden a D fijo y B desplazado; mientras que $X_2 ; Y_2$ corresponden a B fijo y D desplazado.

Si se pone ahora, como en el artículo 30:

$$X = m X_1 + n X_2$$

$$Y = m Y_1 + n Y_2$$

la determinación de m, n , permite obtener, por superposición, los diagramas de flexión que combinados con el representado en (b) de la figura 66 dan la solución del problema.

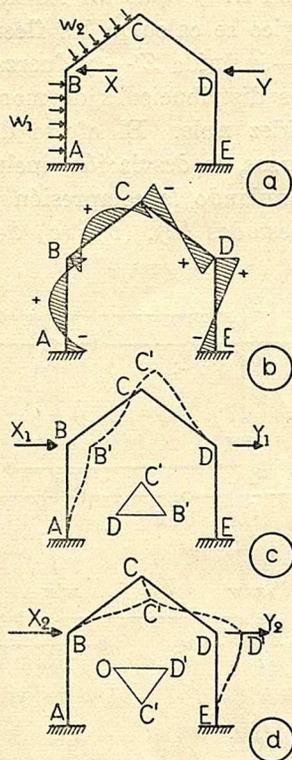


FIG. 66.

En muchos casos puede ser conveniente el empleo de falsos tirantes y falsos puntales, que juegan el mismo rol que las fuerzas de fijación y que se tratan con el mismo criterio, pudiendo aportar simplificaciones apreciables en el cálculo. El profesor Cross pre-

senta el ejemplo de la figura 67, resuelto fijando los nudos C_2 y D_1

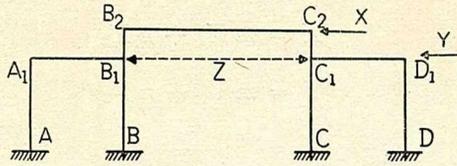


FIG. 67.

con las fuerzas X, Y , y solidarizando B_1 y C_1 con el falso puntal que lleva la compresión Z . Supuestos los nudos fijos y dadas las cargas o efecto inelástico se calculan los flectores iniciales, cortantes, fuerzas directas —incluida Z — y fuerza de fijación.

Naturalmente en las distribuciones de momentos se considera el falso puntal con rigidez nula. El efecto de los desplazamientos laterales para las fuerzas de desviación, incluyendo la tracción en el falso puntal que anulando la compresión Z destruye su efecto, se estudia en los tres estados (a), (b), (c) de la figura 68, que co-

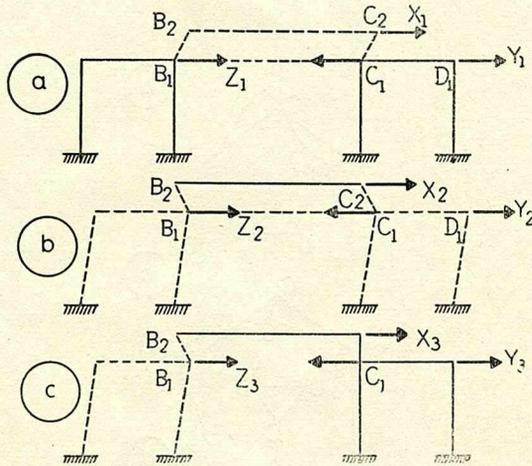


FIG. 68.

responden respectivamente a desplazamiento de C_2 permaneciendo fijo D_1 y en acción el falso puntal; a desplazamiento de D_1 estando C_2 fijo y en acción el falso puntal; y a C_2, D_1 fijos, y el puntal suprimido para permitir la desviación de B_1 producida por la fuerza Z_3 .

Del mismo modo que en los problemas anteriores si se requieren, para mantener fijos los nudos, las fuerzas X , Y , Z , habrá que calcular m , n , p , en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X &= m X_1 + n X_2 + p X_3 \\ Y &= m Y_1 + n Y_2 + p Y_3 \\ Z &= m Z_1 + n Z_2 + p Z_3 \end{aligned}$$

y proceder luego a la superposición de los tres estados correspondientes a las fuerzas de desviación afectadas por las constantes m , n , p . con el estado inicial calculado con los nudos fijos para obtener la solución del problema.

33. Ecuación del cortante en sistemas con barras ortogonales. — El esquema de estructura de la figura 69 se presenta corrientemente en los entramados de edificios; y cuando se tiene en cuenta

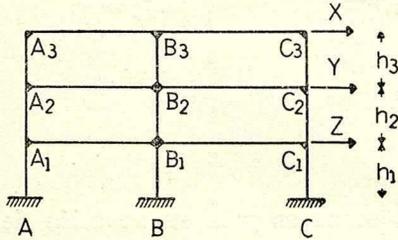


FIG. 69.

el efecto del viento o de las cargas disimétricas es necesario anclar los entresijos con fuerzas de fijación, cuyas contrarias, o de desviación X , Y , Z , se han representado en la figura. El cálculo de la sollicitación por X , Y , Z , puede hacerse en forma directa empleando la ecuación del cortante para cada piso.

Se tienen en cuenta las fórmulas referentes a las rigideces de traslación de las columnas — que se suponen en lo que sigue de sección constante — y con empotramiento doble, o empotradas y articuladas. En el artículo 23 las fórmulas [13] y [14] dan para ambos casos:

$$\chi_{tras} = 12 \frac{EI}{h^3} = \frac{12 \chi}{h^2} \quad \parallel \quad \chi'_{tras} = 3 \frac{\chi}{h^2}$$

La figura 70 (a) recuerda el primer caso y la (b) el segundo.

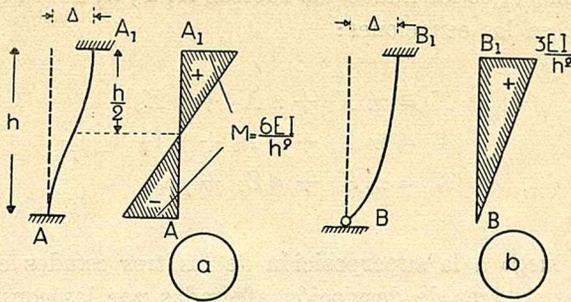


FIG. 70.

Considerando ahora el pórtico de la figura 71 y suponiendo que el entrepiso $A_1B_1C_1$ sea rígido, la igualdad del desplazamiento Δ de

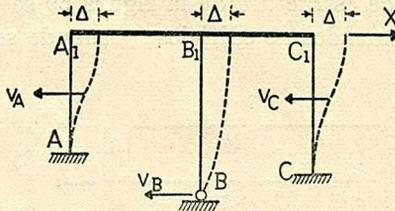


FIG. 71.

las cabezas de las columnas y la conservación de la dirección de las tangentes en ellas exige que los cortantes V_A, V_B, V_C , sean proporcionales a las rigideces; y como por estática se tiene

$$\Sigma V = X \quad (\text{ecuación del cortante})$$

el criterio será distribuir X proporcionalmente a las rigideces de traslación de las columnas. Obtenidos los cortantes se deducen los flectores ya que se conocen los puntos de momento nulo en las columnas: los medios si son doblemente empotradas y las articulaciones si son empotradas y articuladas.

Si el entrepiso es efectivamente muy rígido, como sucede en edificios industriales, puede dejarse el cálculo en esas condiciones, es decir suponer que no hay giros en los nudos $A_1 B_1 C_1$ como consecuencia de los momentos nodales en las columnas; pero si la rigidez

del entrepiso es comparable a la de las columnas es necesario proceder a la distribución de los momentos nodales y a las respectivas traslaciones.

Se observa entonces que en general, cada etapa de distribución y traslación, al modificar los momentos en las columnas, desequilibrará la ecuación del cortante $\Sigma V = X$ por lo que será necesario agregar un eslabón más a cada etapa del proceso de distribución, *corrigiendo* los momentos sobre columnas de modo que la ecuación del cortante se cumpla.

Si se tiene en cuenta que los cortantes iniciales V_A, V_B, V_C , se calcularon de acuerdo con $\Sigma V = X$ resultará que la suma de los cortantes inducidos por los momentos distribuidos y trasladados deberá ser nula, lo que justifica el siguiente criterio:

Una vez terminada la distribución y traslado de momentos de una etapa, se calculan los cortantes en todas las columnas; y su suma, con signo contrario, se distribuye en las columnas proporcionalmente a las rigideces de traslación. Estos cortantes producen los momentos corregidos, que sumados a los trasladados dan los nuevos momentos desequilibrados que se distribuirán como punto inicial de la siguiente etapa.

Cuando la altura del pórtico es constante (fig. 72) y se supone

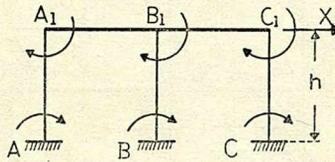


FIG. 72.

el entrepiso rígido, esto es con los nudos A_1, B_1, C_1 , fijos, la ecuación para un estado de carga definido por la fuerza de desviación X y momentos nodales en las puntas de las columnas será, llamando Δ al corrimiento horizontal del entrepiso que produce desviaciones

iguales a $\psi = \frac{\Delta}{h}$

$$\Sigma \left(\frac{M + M_1}{h} + 12 \frac{\chi \psi}{h} \right) = X \quad [27]$$

en la que M ; M_1 son los momentos al pie y en la cabeza de una columna cualquiera.

Si se escribe :

$$\boxed{\Sigma 12 \chi \psi = Xh - \Sigma (M + M_1)} \quad [28]$$

y se considera que $\Sigma 12 \chi \psi = 2 \Sigma 6 \chi \psi$ es la suma de los momentos nodales correspondientes a la desviación ψ se deduce que el momento resultante sobre columnas $M_R = Xh - \Sigma (M + M_1)$ debe repartirse, con su mismo sentido de giro, entre las cabezas de las columnas, proporcionalmente a sus rigideces propias χ .

Como los momentos en la viga doblemente empotrada y en la empotrada y articulada están en la relación 2 a 1 ($6 \chi \psi$ y $3 \chi \psi$ respectivamente) será necesario considerar, para esta distribución, a las

columnas articuladas en la base como de rigidez $\frac{\chi}{2}$ en donde $\chi = \frac{EI}{l}$ es la rigidez propia de la viga de sección constante.

Con esta técnica el cálculo de entramados con pisos de altura constante sometidos a fuerzas de desviación X, Y (fig. 73) es sim-

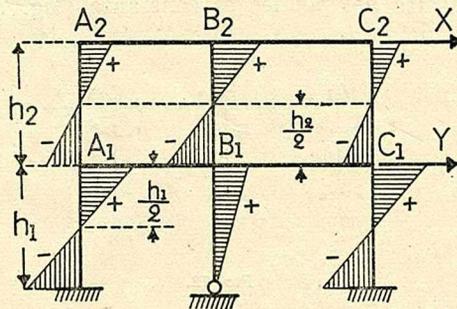


FIG. 73.

ple; ya que partiendo de la hipótesis de la rigidez de los entrepisos y refiriéndonos al ejemplo de dicha figura se empieza por repartir el momento resultante Xh_2 entre las seis puntas de las columnas del segundo piso proporcionalmente a sus rigideces; y el momento resultante $(X + Y)h_1$ entre las cinco puntas de las columnas inferiores (pues B es articulación) en proporción a las χ de AA_1 y CC_1 y a la $\frac{\chi}{2}$ de BB_1 . En esta primera etapa no existen momentos iniciales M, M_1 en las puntas de las columnas.

Si la hipótesis de la rigidez de los entrepisos es aceptable el cálculo de los momentos estaría terminado; si no lo fuera hay que proceder a la distribución y traslado de los momentos resultantes en los nudos, siendo necesario, al terminar cada etapa corregir los momentos sobre columnas empleando la ecuación [28] en la forma siguiente:

$$\Sigma 12 \chi \psi = - \Sigma (M + M_1)$$

ya que X es igual a cero para todas las etapas excepto la primera.

La ecuación anterior se interpreta fácilmente, ya que indica que la suma de los momentos en las columnas provenientes de las distribuciones y traslados debe repartirse, con signo contrario, entre las puntas de columnas en proporción a sus rigideces; o sea que con $-\Sigma(M + M_1)$ se procede ahora como con Xh en la etapa inicial.

Como se hizo presente en el ejemplo anterior esta técnica agrega un eslabón más a cada etapa del proceso de Cross, ya que antes de distribuir momentos se requiere que las columnas estén corregidas. Los eslabones serán pues:

- | | | |
|-------------|---|---|
| 1^a Etapa | { | <ol style="list-style-type: none"> 1) distribuir Xh en columnas 2) distribuir momentos en los nudos 3) trasladar momentos en los nudos. |
| 2^a Etapa | { | <ol style="list-style-type: none"> 1) corregir momentos en columnas 2) distribuir momentos en los nudos 3) trasladar momentos en los nudos. |

y este proceso se repite hasta conseguir la exactitud deseada.

34. Momentos secundarios. — En el método de Cross — como en la resolución de muchos problemas de estructuras — es corriente considerar las barras como si fueran rígidas a la fuerza directa. Sin embargo, la determinación de los esfuerzos provenientes de la flexibilidad directa puede hacerse en forma similar a la indicada en el artículo 6 para el cálculo de arcos y en el artículo 32 para los esfuerzos secundarios en los sistemas triangulados.

La técnica es no considerar, en la etapa inicial, las deformaciones de las barras por fuerza directa; y una vez completado el cálculo en esta hipótesis tener en cuenta las desnivelaciones en las barras

provocadas por aquellas deformaciones, que producen momentos nodales que se distribuyen y trasladan hasta obtener la aproximación deseada.

Los esfuerzos correspondientes a esta sollicitación se llaman por analogía *esfuerzos secundarios*, siendo los de mayor importancia los *momentos secundarios*. La sollicitación total de la estructura se obtiene por superposición de los esfuerzos primarios calculados en el supuesto de barras inextensibles con estos esfuerzos secundarios.

Las fuerzas directas secundarias originan, desde luego, una nueva serie de deformaciones directas, con sus correspondientes desplazamientos nodales y sus esfuerzos que podríamos llamar de tercer orden; pero en general y como ya se dijo en el artículo 32, es suficiente considerar solo la primer corrección.

La figura 74 se refiere a dos ejemplos: en (a) se tiene un pórtico simple, fijado con la fuerza X , y cuyos corrimientos nodales se

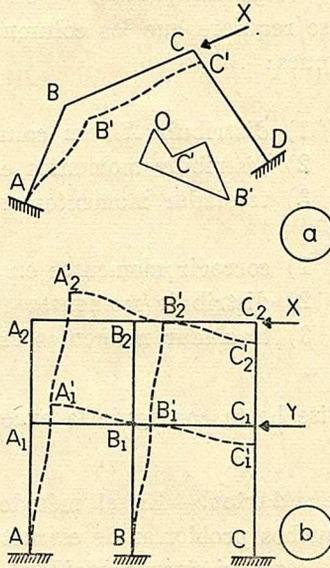


FIG. 74.

determinaron con el Williot $OB'C'$. Estos corrimientos definen una sollicitación que se superpondrá con la debida a la fuerza de desviación igual a $-X$ para dar los esfuerzos secundarios.

Análogamente se procede en el caso (b) de un pórtico continuo, de dos pisos.

Fijados C_1, C_2 con X, Y , las desnivelaciones de vigas y columnas son respectivamente iguales a las dilataciones de columnas y vigas; es decir que el corrimiento de A_2 p. ej. es la suma vectorial del acortamiento horizontal de la viga $A_2B_2C_2$ y del vertical de la columna AA_1A_2 . (Corrientemente, en entramados, los acortamientos de las columnas son mucho más importantes que los de las vigas).

Los desplazamientos nodales producen momentos, cortantes, fuerzas directas en las barras y fuerzas de fijación X, Y ; se necesita, pues, una nueva etapa, que es el cálculo del entramado solicitado por $-X$; $-Y$. Resuelto éste en la forma indicada en el artículo anterior se obtienen por superposición los momentos secundarios producidos por las dilataciones elásticas de las barras.

Esta primera aproximación resulta, como ya se dijo, casi siempre suficiente, pues los acortamientos debidos a los esfuerzos directos secundarios no producen variaciones apreciables en los desplazamientos nodales.

En la práctica corriente de cálculo de estructuras no es frecuente la determinación de estos momentos secundarios; es sin embargo necesaria en el cálculo de entramados y torres cuando el efecto lateral de la presión del viento es importante.

35. Ecuaciones del "slope deflection". — El método del *slope deflection* puede considerarse iniciado por MOHR; aunque se le conoce corrientemente con los nombres de método de GEHLER, de OSTENFELD y de PARCEL y MANEY, por el gran desarrollo que estos autores le han dado.

La deducción de las ecuaciones generales es muy simple partiendo de la analogía de la columna de la viga empotrada; y la técnica de cálculo se simplifica notablemente adoptando la convención de signos usada en el método de CROSS.

La figura 75 servirá de guía al desarrollo, que considera la viga AB — inextensible — sometida a cargas transversales; desnivelación ψ del eje, y giros nodales θ_A, θ_B .

En (a) se indica el signo positivo de los momentos nodales, es decir, los transmitidos al nudo por la barra, iguales al flector en la punta derecha y al flector con signo contrario en la punta izquierda.

En (a), parte inferior, se aprecia la influencia de las cargas transversales que producen en las puntas los momentos originales M_{OA}, M_{OB} , calculados suponiendo la viga con empotramientos per-

fectos, por lo que resultan iguales a los *fixed end moments* del método de CROSS.

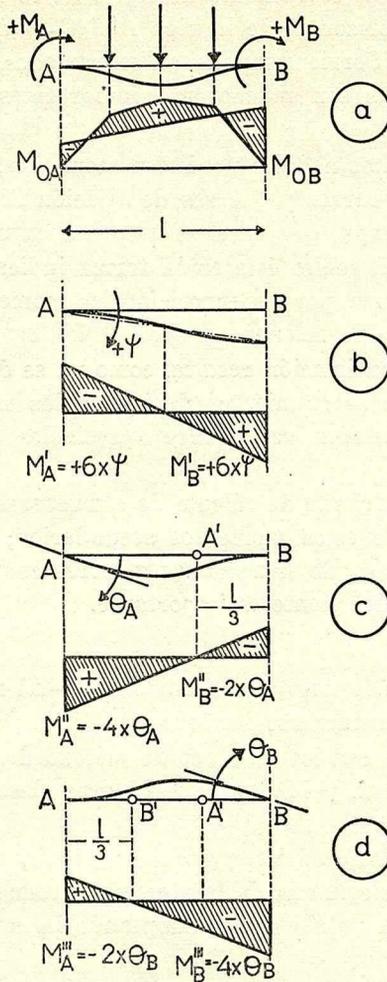


FIG. 75.

Con la misma hipótesis de las puntas perfectamente empotradas se han calculado en (b), (c), (d) los momentos nodales correspondientes a la desviación ψ originada por la traslación Δ de B con respecto a A y a los giros θ_A y θ_B considerando positivos a ψ , θ_A , θ_B , cuando giran como el reloj.

Los valores de la figura 75 corresponden a la viga AB de sección constante, siendo $\chi = \frac{EI}{l}$ la rigidez propia, y han sido determinados en el artículo 11 de la segunda parte de este estudio. Si

la viga fuera de sección variable el procedimiento de la *columna análoga* nos parece el más recomendable para fijar los valores de los momentos originales y de los debidos a los movimientos de los nudos; pero en lo que sigue, para abreviar los desarrollos, se supondrá que la viga es de sección constante, por lo que se aplicarán únicamente las fórmulas de la figura 75.

La figura 76 se refiere a la *superposición* de los estados de la fi-

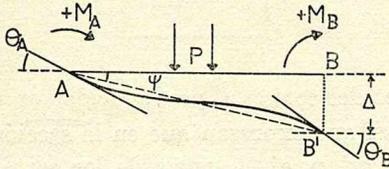


Fig. 76.

gura 75 y corresponde a una viga AB cargada, cuyo eje se ha desviado ψ_{AB} en el sentido positivo, y cuyas puntas han girado θ_A, θ_B también en el sentido positivo. Los momentos nodales se obtendrán sumando los valores de la figura 75, y las fórmulas que resultan son las llamadas ecuaciones del *slope deflection*.

Se tiene:

$M_A = M_{OA} + 2\chi (3\psi_{AB} - 2\theta_A - \theta_B)$ $M_B = M_{OB} + 2\chi (3\psi_{AB} - 2\theta_B - \theta_A)$	[29]
---	------

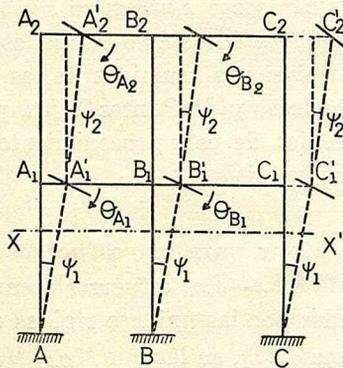


Fig. 77.

Los entramados de barras ortogonales (fig. 77) y los pórticos con-

tinuos se resuelven simplemente con ayuda de las ecuaciones [29], pues los momentos nodales pueden expresarse en función de las rotaciones de los nudos $\theta_{A1}, \theta_{A2}, \theta_{A3}, \dots$ etc. y de las desviaciones comunes ψ_1, ψ_2, \dots de cada entrepiso; disponiéndose para el cálculo de dichas incógnitas de las ecuaciones de los nudos, que expresan que la suma de los momentos nodales transmitidos a cada nudo es cero:

$$\boxed{\Sigma M = 0} \quad [30]$$

y de las ecuaciones del cortante, ya deducidas en el artículo 33 para el método de CROSS, que expresan que en la sección de una hilera de columnas como la xx' , p. ej., la suma de los cortantes iguala al cortante exterior:

$$\boxed{\Sigma V_C = V} \quad [31]$$

Se obtienen así tantas ecuaciones como incógnitas, que permiten, al resolver el sistema, el cálculo de la estructura; estando la principal ventaja en que el número de incógnitas resulta mucho menor que con los métodos clásicos del trabajo virtual, siendo además las ecuaciones incompletas, lo que facilita el trabajo de la resolución. Hay también la posibilidad de reducir incógnitas por consideraciones de simetría fundadas en nuevas organizaciones de cargas (método de ANDRÉ; llamado B. U. que puede consultarse en la ya citada obra de J. CASTIÑEIRAS sobre *Entrepisos sin Vigas*).

Los métodos especiales de cálculo fundados en las fuerzas de fijación, y en las desviaciones asumidas de las barras, estudiados ya por los métodos de CROSS y de Puntos Fijos, pueden adaptarse perfectamente a la técnica de este procedimiento, no siendo necesaria ninguna aclaración especial.

36. Método de Mohr para los esfuerzos secundarios en los sistemas triangulados. — Los esfuerzos secundarios que se producen en los reticulados por las uniones rígidas en los nudos se calculan por las ecuaciones [29], en las que M_{OA}, M_{OB} son nulos, por estar las barras descargadas en el sentido transversal y donde las desviaciones ψ se conocen por un diagrama de WILLIOT dibujado para todo el sistema.

Hay, pues, tantas incógnitas θ como nudos; y las ecuaciones $\Sigma M = 0$ serán suficientes para calcularlas. En un nudo cualquiera, el *i*ésimo p. ej. se tiene:

$$-\Sigma (4 \chi_{ij} \theta_i + 2 \chi_{ij} \theta_j) + \Sigma 6 \chi_{ij} \psi_{ij} = 0$$

o sea:

$$4 \theta_i \Sigma \chi_{ij} + 2 \Sigma \chi_{ij} \theta_j = 6 \Sigma \chi_{ij} \psi_{ij}$$

Se aconseja, cuando el número de incógnitas es grande, resolver el sistema asumiendo para cada ecuación que todos los giros sean iguales al del nudo, obteniéndose así, en la ecuación *i*ésima, con $\theta_j = \theta_i$, la fórmula aproximada:

$$\theta_i = \frac{\Sigma \chi_{ij} \psi_{ij}}{\Sigma \chi_{ij}} \quad [32]$$

Estos valores iniciales de los ángulos se reemplazan luego en las ecuaciones originales y permiten calcular sucesivas aproximaciones de las θ_i . Obtenido el grado de aproximación deseado se calculan en función de los ángulos θ y ψ los momentos nodales, y luego los cortantes y fuerzas directas secundarias en la misma forma explicada al resolver este problema por el método de Cross (artículo 32).

37. Interpretación del método de Cross y generalización de Voodhigula. — En Proceedings of the American Society of Civil Engineers, número de Enero de 1941, el ingeniero A. T. VOODHIGULA propone una generalización del método de Cross que nos parece interesante transcribir.

Si se supone un entramado sometido a cargas transversales y desviaciones conocidas como sucede en el caso corriente de aplicación de las ecuaciones de «slope deflection», las incógnitas que serán solamente las rotaciones nodales θ se calculan resolviendo el sistema de las ecuaciones de equilibrio de nudos $\Sigma M = 0$ que dan, para el nudo *i*ésimo:

$$\Sigma (M_{0i} + 6 \chi_{ij} \psi_{ij}) = 4 \theta_i \Sigma \chi_{ij} + 2 \Sigma \chi_{ij} \theta_j$$

El primer miembro es conocido, y depende de las cargas transversales y de las desviaciones en las barras que concurren al nudo i .

El segundo miembro es una función lineal de las incógnitas θ_i — rotación del nudo i ésimo — y θ_j rotaciones de los nudos conectados al i por medio de barras.

Resolviendo θ_i se tiene:

$$\theta_i = \frac{\sum (M_{0i} + 6 \chi_{ij} \psi_{ij})}{4 \sum \chi_{ij}} - \dots - \theta_j \frac{\chi_{ij}}{2 \sum \chi_{ij}} - \dots$$

que puede escribirse:

$$\boxed{\theta_i = \theta_i^0 - \dots - K_i^j \theta_j - \dots} \quad [33]$$

en la que θ_i^0 es el valor que toma θ_i cuando todas las θ_j son nulas; y la constante K_i^j es el valor que corresponde a θ_i cuando θ_j vale la unidad y las demás θ son nulas.

Esta interpretación sugiere un método de aproximación — el que propone VOODHIGULA — para las ecuaciones; y que consiste en suponer inicialmente nulas todas las θ que no sean la del nudo; y luego, con estos valores primarios calcular los sucesivos valores de θ_i por medio de la aplicación repetida de la ecuación [33]. Se reconoce precisamente en esta técnica el fundamento del método de distribución de CROSS, ya que suponer inicialmente nulas las θ de los nudos adyacentes implica suponer que las barras estén perfectamente empotradas en ellos. Además, los coeficientes — K_i^j son los factores de traslado, ya que dan la influencia de la rotación de un nudo en el adyacente.

VOODHIGULA no propone sustituir con su proceso al clásico de CROSS; sino que por el contrario sugiere que el criterio de resolución por medio de la ecuación [33] se extienda a todos los sistemas hiperestáticos, principalmente a los formados por barras (indeterminate trusses).

Si repetimos las ecuaciones generales de elasticidad de MÜLLER-BRESLAU expuestas en la primera parte de este trabajo, artículo 17,

P_m y efecto inelástico, y *que en cada ecuación sean nulas todas las demás incógnitas*; y los coeficientes K^i , son los factores de traslado o carriover, pues dan la influencia que tiene en X_i la incógnita X_j cuando vale la unidad.

La técnica del proceso es calcular en una primera etapa los valores X^i_0, X^i_1 para todas las incógnitas; y luego por sustitución en las ecuaciones [34], obtener valores más aproximados de las X_i que a su vez, por medio de sustituciones repetidas, darán una sucesión que según el autor converge muy rápidamente, deteniéndose el proceso cuando la diferencia entre dos valores de X_i sea menor que el límite de aproximación prefijado.

Este método puede dar grandes resultados en los sistemas de elevada indeterminación estática, para cuya resolución práctica solo se conocían el método de las reducciones sucesivas debido al talento del Prof. ENRIQUE BUTTY y el de los determinantes de MÜLLER-BRESLAU.

**PUBLICACIONES DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS FISCOMATEMATICAS**

Las publicaciones oficiales de la Facultad se dividen en las tres series siguientes:

SERIE PRIMERA. — *Informaciones generales.* — Esta serie comprende:

- a) el *Anuario*, que se publicará cada dos años, con informaciones relativas a las leyes, decretos, ordenanzas del Consejo superior que afecten a la Facultad y las del Consejo académico de la misma y resoluciones del decano de interés general, organización general de la Facultad, carreras que se cursan en ella, planes de estudio, programas de las materias, autoridades y personal docente, etc.
- b) Informaciones sobre la organización y evolución de sus institutos, de departamentos, laboratorios, gabinetes, etc.
- c) Ampliaciones de sus edificios, publicando planos, fotografías, presupuestos, partidas acordadas en el presupuesto nacional, donaciones, etc.
- d) Movimiento del personal docente y datos sobre el mismo, visitas realizadas por personas destacadas, etc.
- e) Informes sobre elecciones de autoridades y asambleas de profesores. Discursos académicos.
- f) Noticias sintéticas de carácter general sobre actos de facultades similares nacionales y extranjeras.

SERIE SEGUNDA. — *Revista*

Esta serie, que es continuación de las series matemática, física y técnica, publicadas hasta el 31 de diciembre de 1938, con el título principal *Contribución al estudio de las Ciencias físicas y matemáticas*, contiene:

- a) Trabajos y conferencias de índole técnico-científica de los miembros del personal docente de la Facultad y de personas extrañas al mismo que el Consejo académico o la comisión de publicaciones resuelva publicar agrupados en concordancia con la organización general de la Facultad.
- b) Noticias de igual índole y bibliográficas de interés para la Facultad.

SERIE TERCERA. — *Publicaciones especiales.* — Esta serie comprende:

- a) Publicaciones especiales.
- b) Textos generales.
- c) Publicaciones didácticas.

Las publicaciones llevarán una numeración general siguiendo la de las anteriores de la Facultad por orden cronológico, de acuerdo con la fecha en que se termine la impresión.

Además cada serie llevará en el mismo orden la numeración especial que le corresponda. Esta numeración se inicia en el año 1939.

En todos los originales y publicaciones respectivas correspondientes a la segunda serie se hará constar la fecha de entrega a la comisión para ser impresos.

ADVERTENCIA

Con el fin de evitar extravíos en la correspondencia, rogamos que se nos hagan los envíos a la siguiente dirección:

Facultad de Ciencias Físicomatemáticas

Comisión de Publicaciones

Av. 1 esq. 47. — LA PLATA
República Argentina

**Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas
a partir de enero de 1939**

SERIE PRIMERA. — Informaciones generales.

1. Anuario 1938-39, mayo 1939	(Nº 120)	\$ 1.50
2. Inauguración de la ampliación del laboratorio de Ensayo de materiales, agosto 1939	(Nº 124)	—
3. Laboratorio de ensayo de materiales, agosto de 1940	(Nº 131)	—
4. Escuela del Motor	(Nº 132)	—
5. Elección de autoridades y acto de transmisión del decanato	(Nº 135)	—
6. Anuario 1941	(Nº 145)	\$ 2.00
7. Entrega de publicaciones en acto público por el señor Embajador de Gran Bretaña Sir Esmond Ovey, el día 6 de octubre de 1941	(Nº 148)	—
8. Digesto 1941	(Nº 149)	\$ 2.00
9. Disposiciones de interés para los estudiantes, 1942 ..	(Nº 153)	\$ 1.00

SERIE SEGUNDA. — Revista.

1. Trabajos de los ingenieros M. Simonoff y E. A. Arnaboldi. Mayo de 1939	(Nº 121)	\$ 2.40
2. Trabajos de los doctores Ramón G. Loyarte, J. Pláceres, F. Charola, R. F. Recorder, R. P. Cesco y A. E. Sagastume Berra. Enero de 1940	(Nº 127)	\$ 2.40
3. Trabajos del doctor P. Montel y de los ingenieros J. S. Gandolfo y M. Simonoff. Abril de 1940	(Nº 128)	\$ 2.40
4. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia y G. Knie y de los ingenieros J. S. Gandolfo y A. Dorfman	(Nº 136)	\$ 2.00
5. Trabajos de los ingenieros A. Gray y R. Martínez de Vedia y del Dr. E. Sábato	(Nº 139)	\$ 3.00
6. Trabajos de los Dres. R. G. Loyarte, R. Carratalá, D. Vucetich, B. Gross, Godofredo García e Ingeniero Emilio Dickmann	(Nº 143)	\$ 3.00
7. Trabajos de los Dres. Agustín Durañona y Vedia, A. E. Sagastume Berra y R. P. Cesco y de los ingenieros Eduardo A. Arnaboldi y M. Félix F. Langmann	(Nº 150)	\$ 3.00

SERIE TERCERA. — Publicaciones Especiales.

*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua. Cuaderno Nº 4, por el ingeniero E. Artaza. Junio de 1939	(Nº 122)	\$ 3.80
1. Conmemoración de la Independencia nacional. (Julio 1938), julio 1939	(Nº 123)	—
*. Tercera Reunión Anual de Caminos. Conferencias de los ingenieros T. Sánchez de Bustamante, V. Carri, J. Zuker, A. P. Grisi, A. Kashirski, C. K. Preus, N. Alurralde, M. Fornari, E. Arenas, J. Boiso y Dr. A. Zanetta. Septiembre de 1939	(Nº 125)	\$ 10.00
2. Estudio de la evolución fluvial que determina el endicamiento del río San Juan, por el ingeniero José S. Gandolfo. Enero 1940	(Nº 126)	\$ 4.00
3. Conmemoración de la Independencia nacional (Julio 1939), abril 1940	(Nº 129)	—
*. Física General. Tomo IV, segunda edición, por el Doctor Ramón G. Loyarte	(Nº 130)	\$ 20.00
4. Lista de Publicaciones. Agosto 1940	(Nº 133)	—
*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 5. Septiembre 1940	(Nº 134)	\$ 5.00
5. Cuarta Reunión Anual de Caminos (I). Discurso inaugural del Dr. H. Magliano. Conferencias de los ingenieros A. Lodeiro Blanco, A. J. L. Bolognesi, A. M. Podestá, E. F. Tagle, V. Carri y J. L. Carattino	(Nº 137)	\$ 5.00
6. Cuarta Reunión Anual de Caminos (II). Conferencias de los ingenieros P. Palazzo, E. Arenas y A. Kashirski	(Nº 138)	\$ 5.00
7. Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado, por el ingeniero Julio Zuker	(Nº 140)	\$ 6.00
8. Saneamiento urbano en la República Argentina, Tercera parte. Obra domiciliaria. Tomo I, por el ingeniero Evaristo Artaza. Abril de 1941	(Nº 141)	\$ 20.00
9. Física general. Tomo I, cuarta edición, por el Prof. Dr. Ramón G. Loyarte. Abril de 1941	(Nº 142)	\$ 15.00
10. La viga placa, por Julio J. Montú	(Nº 144)	\$ 4.00
11. Determinaciones de detonancia de combustibles y carburantes	(Nº 146)	\$ 3.00
12. La Anisotropía óptica por deformación elástica de los medios transparentes y su aplicación a la Fotoelasticimetría, por el ingeniero Raúl Buich	(Nº 147)	\$ 8.00
13. Sistemas hiperestáticos planos, por el Ing. Félix De Medina	(Nº 151)	\$ 5.00
14. Vigas de hormigón armado con armadura doble simétrica sometidas a flexión compuesta, por el Ing. Julio R. Castiñeiras	(Nº 152)	\$ 1.00
15. Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, por el Ing. Miguel Simonoff	(Nº 154)	\$ —
16. El proyecto económico de estructuras de hormigón armado, por el Ing. Julio R. Castiñeiras	(Nº 155)	\$ 5.00

Se enviará sin cargo, a quien lo solicite, la publicación nº 133 titulada «Lista de Publicaciones», y que contiene la nómina completa de las ediciones de la Facultad.