

Integrales paramétricas e integrales dobles y triples.

Eleonora Catsigeras *

19 de julio de 2006

*Notas para el curso de Cálculo II
de la Facultad de Ingeniería.*

PRÓLOGO:

Este texto es complementario al libro de Burgos sobre funciones de varias variables (referencia [1] de la Bibliografía al final de este texto). Fue escrito para ser estudiado después de los capítulos 1, 2 y 3 del libro de Burgos y antes de su capítulo 4.

Está dirigido a estudiantes universitarios de grado de las carreras de Ingeniería que están cursando Cálculo II.

Se supone conocidos el Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable real (curso de Cálculo I) y el Cálculo Diferencial de funciones reales de varias variables (los primeros tres capítulos del libro de Burgos).

Los objetivos de este texto son:

- Estudiar las integrales simples paramétricas (continuidad y derivabilidad respecto al parámetro).
- Introducir el tema de integrales dobles y triples, como integrales iteradas de funciones continuas, antes de estudiar las mismas como integrales de Riemann.
- Dar ejemplos resueltos de cálculo de integrales dobles y triples, y del cálculo de áreas y volúmenes.

El texto está dividido en seis secciones temáticas que no son independientes, sino que cada una presupone conocido el contenido de las anteriores.

Para seguir el texto es imprescindible dibujar figuras. Pedimos disculpas por no incluir las figuras en estas notas.

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Índice

Prólogo.	1
1. Integrales paramétricas.	3
1.1. Integrales paramétricas con límites de integración independientes.	3
1.2. Integrales paramétricas con límites de integración dependientes	9
2. Integrales iteradas dobles.	12
2.1. Integrales iteradas en dominios simples respecto de x	12
2.2. Intercambio del orden de integración en dominios simples.	17
2.3. Integral doble en dominios descomponibles en simples.	28
2.4. Cálculo de áreas y volúmenes con integrales dobles.	30
2.5. Teorema del valor medio y desigualdad de Cauchy-Schwarz.	33
3. Integrales iteradas triples y múltiples.	36
3.1. Integrales iteradas triples.	36
3.2. Cálculo de volúmenes con integrales triples.	43
3.3. Propiedades.	45
3.4. Integrales múltiples.	47
4. Cambio de variables en integrales dobles y triples.	52
4.1. Teorema de cambio de variables.	52
4.2. Ejemplos de cambio de variables. Coordenadas polares en el plano.	56
4.3. Coordenadas cilíndricas en el espacio.	60
4.4. Coordenadas esféricas en el espacio.	63
4.5. Peso de un sólido dada su densidad puntual.	65
5. Integrales dobles de Riemann.	68
5.1. Sumas de Riemann.	68
5.2. Integral de Riemann de funciones acotadas.	69
5.3. Conjuntos de medida nula.	71
5.4. Teorema de Riemann-Lebesgue.	73
5.5. Teorema de Fubini.	79
5.6. Generalización para integrales múltiples.	81
6. Integrales dobles impropias.	82
6.1. Integrales impropias convergentes y no convergentes.	82
6.2. Ejemplos.	84
6.3. Integrales impropias de funciones no negativas.	94
6.4. Integrales impropias absolutamente convergentes.	97
Bibliografía.	99

1. Integrales paramétricas.

1.1. Integrales paramétricas con límites de integración independientes.

1.1.1. Límites de integración constantes.

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ el rectángulo $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ contenido en $\mathbb{R}^2$, donde $a < b$, $c < d$ son números reales fijos.

Sea $f(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in R$.

Para cada segmento vertical $x = x_0$ fijo, con $x_0 \in [a, b]$ (hacer figura) se considera la integral $\int_c^d f(x_0, y) dy$, de $f(x_0, y)$ respecto de y en el intervalo $[c, d]$, como función de una sola variable y (con x_0 constante). Es un número real, que depende del valor constante x_0 que se haya elegido en $[a, b]$. Llamémosle entonces $F(x_0)$, y definamos:

Definición 1.1.2. Integral paramétrica con límites de integración constantes.

Dada $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ su integral respecto de y en el intervalo $[c, d]$ (tomando, mientras se integra respecto de y , un valor constante para x en el intervalo $[a, b]$) es:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

y se llama *Integral paramétrica de parámetro x (fijo), con límites de integración (c y d) constantes*.

Ejemplo 1.1.3. Sea $f(x, y) = 3(x+y)^2 \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. La integral paramétrica con límites de integración c, d y con parámetro x , es:

$$F(x) = \int_c^d 3(x+y)^2 dy = \int_c^d (3x^2 + 6xy + 3y^2) dy$$

$$F(x) = 3x^2y + 6x\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3} \Big|_{y=c}^{y=d}$$

$$F(x) = 3x^2(d-c) + 3x(d^2 - c^2) + (d^3 - c^3) \quad (1)$$

Teorema 1.1.4. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración constantes.

Sea $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, y sea la integral paramétrica

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Se cumple:

a) $F(x)$ es una función continua de x para todo $x \in [a, b]$.

b) Si además la derivada parcial $\partial f(x, y)/\partial x$ existe y es continua en $(a, b) \times [c, d]$, entonces $F(x)$ es derivable para todo $x \in (a, b)$, su derivada $F'(x)$ existe y es continua, y verifica la siguiente igualdad para todo $x \in (a, b)$:

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

Demostración: Se verá junto a la demostración del teorema 1.1.8.

1.1.5. Límites de integración variables.

Sea como en el párrafo 1.1.1, el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in R$.

Sean dadas dos variables reales independientes ϕ, ψ ambas tomando valores en el intervalo $[c, d]$. Para cada valor fijo de la terna $(x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ consideremos la integral $\int_{\phi}^{\psi} f(x, y) dy$, integrando respecto de y , como función de una sola variable y (con x constante). Esta integral es un número real, que depende del valor constante x que se haya elegido en $[a, b]$, y que depende también de los valores ϕ y ψ dados a los límites de integración¹ dentro del intervalo $[c, d]$. Llamémosle $H(x, \phi, \psi)$, y definamos:

Definición 1.1.6. Integral paramétrica con límites de integración variables.

Dada $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, y dados valores reales ϕ y ψ en el intervalo $[c, d]$, la integral respecto de y (tomando, mientras se integra respecto de y , un valor constante para x en el intervalo $[a, b]$), con límites de integración ϕ y ψ es:

$$H(x, \phi, \psi) = \int_{\phi}^{\psi} f(x, y) dy$$

y se llama *Integral paramétrica de parámetro x y límites de integración ϕ y ψ* .

Ejemplo 1.1.7. Sea $f(x, y) = 3(x + y)^2 \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. La integral paramétrica de f respecto de y con límites de integración ϕ, ψ y con parámetro x , es, aplicando la fórmula (1) del ejemplo 1.1.3:

$$H(x, \phi, \psi) = \int_{\phi}^{\psi} 3(x + y)^2 dy = 3x^2(\psi - \phi) + 3x(\psi^2 - \phi^2) + (\psi^3 - \phi^3) \quad (2)$$

Teorema 1.1.8. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración variables.

Sea $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, y sea la integral paramétrica

$$H(x, \phi, \psi) = \int_{\phi}^{\psi} f(x, y) dy \quad \forall (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$$

Se cumple:

- a) $H(x, \phi, \psi)$ es una función continua $\forall (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$.
- b) Las derivadas parciales de $H(x, \phi, \psi)$ respecto de ϕ y ψ , existen y son continuas para todo $(x, \phi, \psi) \in [a, b] \times (c, d) \times (c, d)$, y verifican las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \psi} = f(x, \psi)$$

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \phi} = -f(x, \phi)$$

¹No es necesario que se cumpla $\phi \leq \psi$.

c) Si además la derivada parcial $\partial f(x, y)/\partial x$ existe y es continua en $(a, b) \times [c, d]$, entonces la derivada parcial de $H(x, \phi, \psi)$ respecto de x , existe y es continua para todo $(x, \phi, \psi) \in (a, b) \times [c, d] \times [c, d]$ y verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial x} = \int_{\phi}^{\psi} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$$

d) En las hipótesis de la parte **c)**, la función $H(x, \phi, \psi)$ es diferenciable $\forall (x, \phi, \psi) \in (a, b) \times (c, d) \times (c, d)$.

Demostración de los teoremas 1.1.4 y 1.1.8: Observemos primero que el teorema 1.1.4 se obtiene de aplicar las partes a) y c) del teorema 1.1.8, usando $\phi = c$, $\psi = d$, como caso particular.

Prueba de la parte a) del teorema 1.1.8: Probaremos que H es uniformemente continua en su dominio, que es el conjunto $M = [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$.

Por la definición de continuidad uniforme, dado $\epsilon > 0$ habrá que probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} (x, \phi, \psi) \in M, (x_0, \phi_0, \psi_0) \in M, \|(x, \phi, \psi) - (x_0, \phi_0, \psi_0)\| < \delta &\Rightarrow \\ \Rightarrow |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| < \epsilon & \text{ (a probar)} \end{aligned} \quad (1)$$

Tomemos un valor de $\epsilon^* > 0$, cuya elección se especificará después.

Por ser $f(x, y)$ continua en el rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d]$, es uniformemente compacto en R . Luego, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(x, y) \in R, (x_0, y) \in R, \|(x, y) - (x_0, y)\| = |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon^* \quad (2)$$

Acotemos ahora $H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)$:

$$|H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)| = \left| \int_{\phi}^{\psi} f(x, y) - f(x_0, y) dy \right| \leq \left| \int_{\phi}^{\psi} |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \right| \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) se obtiene:

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)| \leq \left| \int_{\phi}^{\psi} \epsilon^* dy \right| = \epsilon^* \cdot |\psi - \phi| \quad (4)$$

Siendo ψ y ϕ reales del intervalo $[c, d]$, se cumple $|\psi - \phi| \leq (d - c)$, y por lo tanto de (4) se deduce:

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)| \leq \epsilon^* \cdot (d - c) \quad (5)$$

Por otro lado, llamando M al máximo de $|f(x, y)|$ en el rectángulo compacto R (tal M existe porque por hipótesis f es una función continua en el compacto R), se obtiene:

$$\begin{aligned} |H(x_0, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| &= \left| \int_{\phi}^{\psi} f(x_0, y) dy - \int_{\phi_0}^{\psi_0} f(x_0, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\phi}^{\phi_0} f(x_0, y) dy + \int_{\psi_0}^{\psi} f(x_0, y) dy \right| \leq M \cdot |\phi - \phi_0| + M \cdot |\psi - \psi_0| \end{aligned} \quad (6)$$

En la igualdad del medio de (6) hemos usado que la integral de una función entre ϕ y ψ es igual a la integral de la misma función entre ϕ y ϕ_0 , más la integral entre ϕ_0 y ψ_0 , más la integral entre ψ_0 y ψ .

Eligiendo $\delta_2 = \epsilon^*/(2M)$, se deduce de (6):

$$|\phi - \phi_0| < \delta_2, \quad |\psi - \psi_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |H(x_0, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| \leq 2M\delta_2 = \epsilon^* \quad (7)$$

Aplicando la propiedad triangular del valor absoluto, y las desigualdades (5) y (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| &\leq |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)| + |H(x_0, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| \leq \\ &\leq \epsilon^*(d - c) + \epsilon^* = \epsilon^*(1 + d - c) < \epsilon \quad (8) \end{aligned}$$

donde, dado $\epsilon > 0$ se eligió cualquier $\epsilon^* > 0$ menor que $\epsilon/(1 + d - c)$.

La desigualdad (8) vale para toda pareja de puntos (x, ϕ, ψ) y (x_0, ϕ_0, ψ_0) en M tales que $|x - x_0| < \delta_1$, $|\phi - \phi_0| < \delta_2$ y $|\psi - \psi_0| < \delta_2$.

Si se llama $\delta > 0$ al menor entre los números positivos δ_1 y δ_2 se deduce de (8) lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x, \phi, \psi) \in M, \quad (x_0, \phi_0, \psi_0) \in M, \quad ||(x, \phi, \psi) - (x_0, \phi_0, \psi_0)|| < \delta \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad |H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi_0, \psi_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

Esta última es la afirmación (1) que queríamos probar.

Prueba de la parte b) del teorema 1.1.8:

Sea, para $x \in [a, b]$ fijo, y para $\phi \in [c, d]$ también fijo, la función:

$$F(Y) = \int_{\phi}^Y f(x, y) dy$$

donde el extremo de integración superior Y es variable en el intervalo (c, d) . Por el teorema fundamental del cálculo integral en una variable real y , se sabe que $F(Y)$ es una primitiva de $f(x, Y)$ respecto de la variable Y . (Recordar que aquí x es una constante.) Es decir, $F(Y)$ es derivable respecto de Y , y su derivada es

$$F'(Y) = f(x, Y) \quad \forall Y \in (c, d) \quad (9)$$

Observemos que, por construcción de la función $H(x, \phi, \psi)$, se cumple lo siguiente:

$$F(Y) = H(x, \phi, Y) \quad \forall Y \in (c, d) \quad \Rightarrow \quad F'(Y) = \frac{\partial H(x, \phi, Y)}{\partial Y} \quad \forall Y \in (c, d) \quad (10)$$

Por lo tanto, reuniendo (9) y (10), y usando $Y = \psi$ se obtiene:

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \psi} = f(x, \psi) \quad \forall (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times [c, d] \times (c, d)$$

Esta última es la primera de las igualdades que queríamos probar. La igualdad anterior implica que existe la derivada parcial de H respecto de ψ y es continua, porque f es por hipótesis una función continua.

Sea ahora, para $x \in [a, b]$ fijo, y para $\psi \in [c, d]$ también fijo, la función:

$$G(Y) = \int_Y^\psi f(x, y) dy = - \int_\psi^Y f(x, y) dy =$$

$$G(Y) = \int_\psi^Y -f(x, y) dy$$

donde el extremo de integración Y es variable en el intervalo (c, d) .

Por el teorema fundamental del cálculo integral en una variable real y , se sabe que $G(Y)$ es una primitiva de $-f(x, Y)$ respecto de la variable Y . (Recordar que aquí x es una constante.) Es decir, $G(Y)$ es derivable respecto de Y , y su derivada es

$$G'(Y) = -f(x, Y) \quad \forall Y \in (c, d) \quad (11)$$

Observemos que, por construcción de la función $H(x, \phi, \psi)$, se cumple lo siguiente:

$$G(Y) = H(x, Y, \psi) \quad \forall Y \in (c, d) \Rightarrow G'(Y) = \frac{\partial H(x, Y, \psi)}{\partial Y} \quad \forall Y \in (c, d) \quad (12)$$

Por lo tanto, reuniendo (11) y (12), y usando $Y = \phi$ se obtiene:

$$\frac{\partial H(x, \phi, \psi)}{\partial \phi} = -f(x, \psi) \quad \forall (x, \phi, \psi) \in [a, b] \times (c, d) \times [c, d]$$

Esta última es la segunda de las igualdades que queríamos probar. La igualdad anterior implica que existe la derivada parcial de H respecto de ϕ y es continua, porque f es por hipótesis una función continua.

Prueba de la parte c) del teorema 1.1.8:

Basta demostrar que para todo $x_0 \in (a, b)$ fijo, y para todo $(\phi, \psi) \in [c, d] \times [c, d]$ fijos, se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{H(x, \phi, \psi) - H(x_0, \phi, \psi)}{x - x_0} = \int_\phi^\psi \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} dy \quad (13)$$

En efecto, si probamos la igualdad (13), por definición de derivada parcial como límite de cociente incremental, deducimos que existe la derivada parcial $\partial H / \partial x$ de H respecto de x , en $x = x_0$; y que cumple la igualdad de la tesis c) que queríamos probar. Además, como es $\partial H / \partial x$ igual a la integral paramétrica de una función continua (en este caso $\partial f(x, y) / \partial x$, entonces, por la parte a) ya probada, es $\partial H / \partial x$ continua.

Ahora probemos (13). Sabiendo que $H(x, \phi, \psi) = \int_\phi^\psi f(x, y) dy$, sustituyendo en (13) deducimos que basta probar lo siguiente:

Dado $\epsilon > 0$ probar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\int_\phi^\psi (f(x, y) - f(x_0, y)) dy}{x - x_0} - \int_\phi^\psi \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} dy \right| < \epsilon \quad (\text{a probar}) \quad (14)$$

En efecto:

$$\left| \frac{\int_{\phi}^{\psi} (f(x, y) - f(x_0, y)) dy}{x - x_0} - \int_{\phi}^{\psi} \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} dy \right| \leq \int_{\phi}^{\psi} \left| \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} \right| dy \quad (15)$$

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial para funciones de dos variables, existe un punto intermedio ξ entre x_0 y x tal que:

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} = \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x}, \quad \xi = x_0 + t(x - x_0), \quad t \in [0, 1]$$

Luego, sustituyendo en el segundo miembro de la desigualdad (15):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_{\phi}^{\psi} (f(x, y) - f(x_0, y)) dy}{x - x_0} - \int_{\phi}^{\psi} \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} dy \right| \leq \\ & \leq \int_{\phi}^{\psi} \left| \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} \right| dy, \quad \xi = x_0 + t(x - x_0), \quad t \in [0, 1] \quad (16) \end{aligned}$$

Tomemos un intervalo cerrado $[a', b']$, tal que $x_0 \in [a', b'] \subset (a, b)$. Como por hipótesis la función $\partial f(x, y)/\partial x$ es continua en el compacto $R' = [a', b'] \times [c, d]$, es uniformemente continua en él. Por lo tanto, para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ (independiente de x, y), tal que:

$$(\xi, y) \in R', \quad (x_0, y) \in R', \quad |\xi - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f(\xi, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} \right| < \epsilon^* \quad (17)$$

Si elegimos x tal que $|x - x_0| < \delta$, entonces para $\xi = x_0 + t(x - x_0)$, $t \in [0, 1]$, se cumple:

$$|x - x_0| < \delta; \quad \Rightarrow \quad |\xi - x_0| = |t(x - x_0)| = |t||x - x_0| < 1 \cdot \delta = \delta$$

Por lo tanto se puede aplicar (17). Sustituyendo (17) en el segundo miembro de la desigualdad (16), se deduce:

$$\begin{aligned} & |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \\ & \left| \frac{\int_{\phi}^{\psi} (f(x, y) - f(x_0, y)) dy}{x - x_0} - \int_{\phi}^{\psi} \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x} dy \right| \leq \int_{\phi}^{\psi} \epsilon^* dy \leq \epsilon^* |\psi - \phi| \leq \epsilon^* \cdot (d - c) < \epsilon \quad (18) \end{aligned}$$

Al final de la desigualdad (18) se usó que ϕ y ψ están en el intervalo $[c, d]$, y por lo tanto distan menos que la longitud $d - c$ de ese intervalo. También se eligió, dado $\epsilon > 0$, un valor de $\epsilon^* > 0$ menor que $\epsilon/(d - c)$.

Se observa que la afirmación (18) es la misma (14) que queríamos probar.

Prueba de la parte d) del teorema 1.1.8: Según lo probado en las partes b) y c) las tres derivadas parciales de H existen y son continuas para todo $(x, \phi, \psi) \in (a, b) \times (c, d) \times (c, d)$. Si una función real de tres variables tiene sus tres derivadas parciales continuas en un abierto, entonces es diferenciable en todos los puntos de ese abierto. Por lo tanto H es diferenciable en $(a, b) \times (c, d) \times (c, d)$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 1.1.9. Retomando la igualdad (2) del ejemplo 1.1.7, con $f(x, y) = 3(x^2 + y^2)$, teníamos:

$$H(x, \phi, \psi) = 3x^2(\psi - \phi) + 3x(\psi^2 - \phi^2) + (\psi^3 - \phi^3) \quad (2)$$

Denotando con H_x, H_ϕ, H_ψ a las tres derivadas parciales de $H(x, \phi, \psi)$, respecto de x , de ϕ y de ψ respectivamente, resulta de (2):

$$H_x = 6x(\psi - \phi) + 3(\psi^2 - \phi^2) \quad (3)$$

Por otro lado, usando la parte b) del teorema 1.1.8 se obtiene:

$$\begin{aligned} H_x &= \int_{\phi}^{\psi} \frac{\partial 3(x+y)^2}{\partial x} dy = \\ &= \int_{\phi}^{\psi} 6(x+y) dy = 6xy + 6\frac{y^2}{2} \Big|_{y=\phi}^{y=\psi} = 6x(\psi - \phi) + 3(\psi^2 - \phi^2) \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el encontrado en (3).

Por un lado usando la igualdad (2) se obtiene

$$H_\psi = 3x^2 + 6x\psi + 3\psi^2 = 3(x + \psi)^2, \quad H_\phi = -3x^2 - 6x\phi + 3\phi^2 = -3(x + \phi)^2 \quad (4)$$

Por otro lado, usando la parte b) del teorema 1.1.8 se obtiene:

$$H_\psi = 3(x+y)^2 \Big|_{y=\psi} = 3(x+\psi)^2, \quad H_\phi = -3(x+y)^2 \Big|_{y=\phi} = -3(x+\phi)^2 \quad (5)$$

los resultados de (5) son los mismos encontrados en (4).

1.2. Integrales paramétricas con límites de integración dependientes del parámetro.

Ahora consideraremos los límites de integración dependientes del parámetro x :

Sea como en los párrafos 1.1.1 y 1.1.5, el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

Sean dadas dos funciones reales continuas $\phi, \psi : [a, b] \mapsto [c, d]$ y usemos los resultados vistos hasta ahora usando $\phi = \phi(x)$, $\psi = \psi(x)$ como límites de integración. (Tomaremos para fijar ideas $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a, b]$).

Consideremos el dominio D contenido en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ dado por la siguiente condición:

$$D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Hacer figura: En el plano (x, y) dibujar el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, y en él las gráficas de las funciones $y = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$ cuando $x \in [a, b]$, cumpliendo $\phi(x) \leq \psi(x)$. Entonces D es la región comprendida entre esas gráficas, que se proyecta en el eje de las x sobre el intervalo $[a, b]$. Está formada por la unión de “bastones” verticales (es decir segmentos de recta verticales), con abscisa x constante, con extremo inferior de ordenada $\phi(x)$ y extremo superior de ordenada $\psi(x)$. Al variar x en el intervalo $[a, b]$ este segmento vertical barre el dominio D .

Sea dada una función $f(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in D$.

Para cada valor fijo de $x \in [a, b]$ tomemos la terna $(x, \phi(x), \psi(x)) \in [a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ Ahora no son las tres variables (x, ϕ, ψ) independientes entre sí, sino que las dos últimas dependen de la primera. Consideremos la integral $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$, integrando respecto de y , como función de una sola variable y (con x constante). Esta integral es un número real. Llamémosle $F(x)$, y definamos:

Definición 1.2.1. Integral paramétrica con límites de integración variables dependientes del parámetro.

Sean dadas dos funciones continuas² $\phi = \phi(x)$ y $\psi = \psi(x)$ del intervalo $[a, b]$ al intervalo $[c, d]$, y sea dada $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in D = \{x \in [a, b], y \in I(x)\}$, donde $I(x)$ es el segmento vertical de extremos $(x, \phi(x))$, $(x, \psi(x))$.

Consideremos la integral de $f(x, y)$ respecto de y (tomando, mientras se integra respecto de y , un valor constante para x en el intervalo $[a, b]$), con límites de integración $\phi(x)$ y $\psi(x)$:

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

A $F(x)$, definida por la fórmula anterior, se le llama *integral paramétrica de parámetro x y límites de integración $\phi(x)$ y $\psi(x)$* .

(Observación: En esta definición, la función H es la definida en 1.1.6.)

Observación: Un caso particular es cuando las funciones ϕ y ψ son constantes $\phi(x) = c$, $\psi(x) = d$ para todo $x \in [a, b]$. En ese caso la función $F(x)$ definida en 1.2.1 coincide con la función $F(x)$ definida en 1.1.2.

Ejemplo 1.2.2. Sea $f(x, y) = 3(x + y)^2 \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. La integral paramétrica de f respecto de y con límites de integración $\phi = 2x$, $\psi = x^3$ es, aplicando la fórmula (2) del ejemplo 1.1.7:

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} 3(x + y)^2 dy = 3x^2(x^3 - 2x) + 3x(x^6 - 4x^2) + (x^9 - 8x^3) = x^9 + 3x^7 + 3x^5 - 26x^3 \quad (6)$$

Teorema 1.2.3. Continuidad y derivabilidad de la integral paramétrica con límites de integración dependientes del parámetro.

Sean dadas dos funciones continuas $\phi = \phi(x)$ y $\psi = \psi(x)$ del intervalo $[a, b]$ al intervalo $[c, d]$, y sea dada $f(x, y)$ continua $\forall (x, y) \in D = \{x \in [a, b], y \in I(x)\}$, donde $I(x)$ es el segmento vertical de extremos $(x, \phi(x))$, $(x, \psi(x))$.

Sea la integral paramétrica

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b]$$

Se cumple:

a) $F(x)$ es una función continua $\forall x \in [a, b]$.

b) Si además la derivada parcial $\partial f(x, y)/\partial x$ existe y es continua³ en D , y las derivadas $\phi'(x)$ y $\psi'(x)$ existen y son continuas⁴ en $[a, b]$; entonces $F(x)$ es derivable $\forall x \in (a, b)$, su derivada

²No es necesario que $\phi(x) \leq \psi(x)$

³Quiere decir que existe en el interior de D y tiene una extensión continua al borde de D

⁴Quiere decir que existen en el interior del intervalo $[a, b]$ y que tienen extensiones continuas a los extremos de ese intervalo.

$F'(x)$ es continua y verifica la siguiente igualdad:

$$F'(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \phi(x))\phi'(x)$$

Demostración: La función $F(x)$ es la composición siguiente:

$$F(x) = H(x, \phi(x), \psi(x)) \quad \forall x \in [a, b]$$

donde $H(x, \phi, \psi)$ es la función definida en el teorema 1.1.8.

Por el resultado de la parte d) del teorema 1.1.8, la función H es diferenciable, con derivadas parciales continuas, y por hipótesis $\phi(x)$ y $\psi(x)$ también lo son. Luego, por la regla de la cadena $F'(x)$ existe, es continua y cumple:

$$F'(x) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \phi'(x) + \frac{\partial H}{\partial \psi} \psi'(x) \quad (1)$$

Usando las fórmulas de las partes b) y c) del teorema 1.1.8, se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = -f(x, \phi), \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = f(x, \psi)$$

Sustituyendo en (1) se concluye la tesis del teorema. $\square$

Ejemplo 1.2.4. Hallar la derivada de la siguiente función $F(x)$ (sin hallar la función $F(x)$):

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} 3(x+y)^2 dy$$

Llamando

$$H(x, \phi, \psi) = \int_{\phi}^{\psi} 3(x+y)^2 dx$$

se cumple, para $\phi = x$ y para $\psi = x^2$ la siguiente igualdad:

$$F(x) = H(x, 2x, x^3)$$

Por la regla de la cadena (llamando H_x, H_ϕ, H_ψ a las tres derivadas parciales de H respecto de x , de ϕ y de ψ respectivamente):

$$F'(x) = H_x + H_\phi \phi'(x) + H_\psi \psi'(x) = H_x + 2H_\phi + 3x^2 H_\psi \quad (7)$$

Usando las igualdades al final de la parte b) del teorema 1.1.8 se encuentran los resultados (3) y (4) del ejemplo 1.1.9:

$$H_x = 6x(\psi - \phi) + 3(\psi^2 - \phi^2), \quad H_\psi = 3(x + \psi)^2, \quad H_\phi = -3(x + \phi)^2 \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7), y recordando que $\phi = 2x$, $\psi = x^3$, resulta:

$$F'(x) = 9x^8 + 21x^6 + 15x^4 - 78x^2. \quad \square$$

2. Integrales iteradas dobles.

2.1. Integrales iteradas en dominios simples respecto de x .

Sea como en la subsección 1.2, el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y dos funciones reales continuas $\phi, \psi : [a, b] \mapsto [c, d]$ tales que $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a, b]$; y el dominio D contenido en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ definido como:

$$D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (1)$$

(Recordar la figura hecha en la subsección 1.2, barriendo D con bastones verticales⁵ $J(x)$ de extremo inferior $(x, \phi(x))$ y extremo superior $(x, \psi(x))$.)

Definición 2.1.1. El dominio D definido en (1) se llama *dominio simple respecto de x* .

Consideremos la integral paramétrica de $f(x, y)$ de parámetro x y límites de integración $\phi(x)$ y $\psi(x)$, definida en 1.2.1:

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \quad (2)$$

Por lo visto en el teorema 1.2.3 la función $F(x)$ es continua para todo $x \in [a, b]$, luego es integrable respecto de x en el intervalo $[a, b]$; y podemos considerar el número $I = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$, dando lugar a la siguiente definición:

Definición 2.1.2. Integral doble iterada en dominio simple respecto de x . Sea $D \subset [a, b] \times [c, d]$ un dominio simple respecto de x (como en la definición 2.1.1), y sea $f(x, y)$ continua en D . Se llama *Integral doble iterada de f en el dominio D* al número:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

que se denota

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Observación: El símbolo $dx dy$ NO indica producto de diferenciales. Solo indica que hay que integrar primero respecto de y , y luego (al resultado antes obtenido) integrar respecto de x . **Las integrales iteradas se calculan de derecha a izquierda**, considerando constante la variable x al calcular la integral de la derecha.

Ejemplo 2.1.3. Calcular $\iint_D xy dx dy$ en el triángulo D del plano x, y que tiene vértices

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (1, 1)$$

Dibujemos primero el triángulo D . Es un triángulo rectángulo.

⁵De ahora en más será necesario considerar siempre $\phi(x) \leq \psi(x)$.

Veamos que D es un dominio simple respecto de x ; es decir, hallaremos el intervalo $[a, b]$ en el eje de las abscisas y las funciones $y = \phi(x)$, e $y = \psi(x)$, bordes inferior y superior de D respectivamente, tales que:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Se recorre D con bastones verticales, que son los segmentos que se obtienen de intersectar D con la recta x constante. Esta constante, como se ve haciendo la figura, toma como mínimo el valor 0 y como máximo el valor 1. Entonces el intervalo $[a, b]$ es el intervalo $[0, 1]$.

El borde de abajo del triángulo D es el eje de las x , que es la gráfica de la función $y = 0$. Es decir, la función $y = \phi(x)$ es $\phi(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

El borde de arriba del triángulo es la recta de ecuación $y = x$ (que es la recta AC , que contiene a la hipotenusa del triángulo). Es decir, la función $y = \psi(x)$ es $\psi(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Por lo tanto, D se puede escribir como el dominio simple respecto de x , que tiene la siguiente caracterización:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

Por lo tanto la integral pedida es:

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy =$$

Calculemos la integral doble comenzando por la integral de la extrema derecha, respecto de y , con x constante:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} \quad \square$$

Ejemplo 2.1.4. Calcular $\iint_Q 4x^3 + 8xy + 6y^2 \, dx \, dy$ en el cuadrilátero Q del plano x, y que tiene vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (2, 1)$, $D = (1, 3)$.

Primero dibujemos el cuadrilátero en el plano x, y , tomando x en el eje de abscisas horizontal, e y en el eje de ordenadas vertical. Observamos que x varía entre un mínimo $x = 0$ y un máximo $x = 2$ en el eje de abscisas. El intervalo $[a, b]$, proyección vertical sobre el eje horizontal del cuadrilátero $Q = ABCD$ es: $[a, b] = [0, 2]$.

Para cada valor de x fijo en $[0, 2]$ consideremos los bastones verticales de extremos $\phi(x) \leq \psi(x)$. Estos bastones son la intersección del cuadrilátero Q (incluido su interior), con la recta vertical x constante. Entonces, las gráficas de las funciones $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$, son, para cada x constante, los dos puntos de intersección del borde inferior de Q , y superior de Q respectivamente, con la recta vertical x constante.

Encontremos estas funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$:

Cuando $0 \leq x \leq 1$, la función $y = \phi(x)$ es la ecuación del segmento de recta AB ; y cuando $1 \leq x \leq 2$ la función $y = \phi(x)$ es la ecuación del segmento de recta BC . Ambos segmentos de rectas forman el borde del cuadrilátero Q por abajo. Esto es:

$$\phi(x) : y = -x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

$$\phi(x) : y = 2x - 3 \quad \text{si } 1 \leq x \leq 2 \quad (2)$$

Para encontrar la ecuación del segmento de recta no vertical PQ donde $P = (x_P, y_P)$ y $S = (x_S, y_S)$, se usó la fórmula de la ecuación de una recta, restringida al intervalo de abscisas donde se proyecta el segmento; es decir: $y = y_S + \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S} \cdot (x - x_S)$.

Las fórmulas (1) y (2) son las que corresponden a una única función $\phi(x)$, definida en el intervalo $[0, 2]$ de la variable independiente x . Esto es porque (1) vale en el intervalo $[0, 1]$, y (2) en $[1, 2]$. Ambas son tales que en la intersección de los dos intervalos, (que es $x = 1$), dan el mismo punto $x = 1, y = -1$ (que es el vértice $B = (1, -1)$ del cuadrilátero Q). Por lo tanto la función $\phi(x)$, dada por las ecuaciones (1) y (2), está bien definida, y además es continua en su dominio $[0, 2]$.

Ahora, para $0 \leq x \leq 1$, busquemos la(s) fórmula(s) de la función $y = \psi(x)$. Su gráfica son los segmentos de recta AD y DC , que forman el borde del cuadrilátero Q por arriba. Esto es:

$$\psi(x) : y = 3x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

$$\psi(x) : y = -2x + 5 \quad \text{si } 1 \leq x \leq 2 \quad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) son las que corresponden a una única función $\psi(x)$, definida en el intervalo $[0, 2]$ de la variable independiente x . La fórmula (1) vale en el intervalo $[0, 1]$, y la fórmula (2) en $[1, 2]$. Son tales que en la intersección de ambos intervalos, (que es $x = 1$), ambas dan el mismo punto $x = 1, y = 3$ (que es el vértice $D = (1, 3)$ del cuadrilátero). Por lo tanto la función $\psi(x)$, dada por las ecuaciones (1) y (2), está bien definida, y además es continua en su dominio $[0, 2]$.

Calculemos ahora la integral pedida:

$$I = \iint_Q (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx dy = \int_0^2 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy \quad (5)$$

Para poder sustituir las fórmulas (1), (2), (3) y (4), de $\phi(x)$ y $\psi(x)$, en la igualdad (5), hay que separar el intervalo de integración $[0, 2]$ de las x , en dos partes, escribiendo la integral en $[0, 2]$ respecto de x (que es la última a calcularse), como la suma de la integral en $[0, 1]$ más la integral en $[1, 2]$:

$$I = \int_0^1 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy + \int_1^2 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy \quad (6)$$

Ahora calculemos cada una de las integrales dobles en el segundo miembro de (6):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \\ I_1 &= \int_0^1 dx \int_{-x}^{3x} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \int_0^1 \left(4x^3 y + 4xy^2 + 2y^3 \Big|_{y=-x}^{y=3x} \right) dx = \\ I_1 &= \int_0^1 (12x^4 + 36x^3 + 54x^3) - (-4x^4 + 4x^3 - 2x^3) dx = \\ I_1 &= \int_0^1 (16x^4 + 88x^3) dx = \frac{16x^5}{5} + \frac{88x^4}{4} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{5} + 22 = \frac{126}{5} \end{aligned}$$

En definitiva:

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \frac{126}{5} \quad (7)$$

Ahora calculemos la última integral doble en el segundo miembro de (6):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \\ I_2 &= \int_1^2 dx \int_{2x-3}^{-2x+5} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \int_1^2 \left(4x^3y + 4xy^2 + 2y^3 \Big|_{y=2x-3}^{y=-2x+5} \right) dx = \\ I_2 &= \int_1^2 (4x^3(-2x+5) + 4x(-2x+5)^2 + 2(-2x+5)^3) - (4x^3(2x-3) + 4x(2x-3)^2 + 2(2x-3)^3) dx = \\ I_2 &= \int_1^2 (-16x^4 + 200x^2 - 324x + 304) dx = -\frac{16x^5}{5} + \frac{200x^3}{3} - 162x^2 + 304x \Big|_{x=1}^{x=2} = \\ I_2 &= -\frac{16 \times 2^5}{5} + \frac{200 \times 2^3}{3} - 162 \times 2^2 + 608 + \frac{16}{5} - \frac{200}{3} + 162 - 304 = \frac{2842}{15} \end{aligned}$$

En definitiva:

$$I_2 = \int_1^2 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dy = \frac{2842}{15} \quad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6) se deduce:

$$I = \frac{126}{5} + \frac{2842}{15} = \frac{3320}{15} = \frac{664}{3} \quad \square$$

2.1.5. Propiedades de la integral iterada.

Es inmediato verificar que se cumplen las siguientes propiedades, a partir de que valen las mismas para las integrales de funciones de una sola variable en un intervalo, y usando las definiciones 2.1.2 y 1.1.2:

1. Linealidad: Si f y g son continuas en el dominio D , y λ y μ son constantes reales, entonces:

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy + \mu \iint_D g(x, y) dx dy$$

2. Monotonía: Si f y g son continuas en el dominio D , entonces:

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

Usando la propiedad (2) se deduce inmediatamente la siguiente:

3. Acotación: Si f es continua en el dominio D y si M es su máximo y m su mínimo, entonces:

$$m \iint_D dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \iint_D dx dy$$

En particular la propiedad (2) aplicada a la desigualdad $-|f| \leq f \leq |f|$ implica:

$$-\iint_D |f(x, y)| dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

Por lo tanto se deduce la propiedad siguiente:

4. Acotación en valor absoluto: Si f es continua en el dominio D y si K es una cota superior de $|f|$ en D , entonces:

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy \leq K \iint_D dx dy$$

2.1.6. Integral doble iterada como límite iterado de sumas de Riemann.

Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ en el eje de las x en n subintervalos: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, con longitudes $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Llamemos $\Delta x = \max \Delta x_i : 1 \leq i \leq n$ (Por ejemplo puede considerarse la partición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales todos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$.) Hágase un dibujo.

Tomemos $\bar{x}_i$ un punto cualquiera en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Siendo $F(x)$ la función definida en (2), apliquemos la definición de integral de Riemann de $F(x)$ respecto a $x \in [a, b]$, como límite de las sumas de Riemann en particiones del intervalo $[a, b]$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ (del curso de Cálculo 1). Se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy = \int_a^b F(x) \, dx = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\phi(\bar{x}_i)}^{\psi(\bar{x}_i)} f(\bar{x}_i, y) \, dy \right) \Delta x_i \quad (3) \end{aligned}$$

Ahora, para cada $\bar{x}_i$ fijo constante, apliquemos la definición de integral de Riemann de $f(\bar{x}_i, y)$ integrando respecto de $y \in [\phi(\bar{x}_i), \psi(\bar{x}_i)]$.

Consideremos, por convención: $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$; es decir, consideramos fuera del dominio D una extensión (no continua) de la función f tomándola igual a cero en los puntos que no están en D .

Integremos esta función extendida $f(x, y)$ respecto de $y \in [c, d]$ con x fijo constante. Se observa que la función $f(x, y)$ para x fijo, resulta ser continua a trozos en el intervalo $[c, d]$; siendo nula para y fuera del intervalo $[\phi(x), \psi(x)]$ y continua dentro de ese intervalo. Entonces es integrable Riemann en el intervalo $[c, d]$.

Se obtiene:

$$\int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^{\phi(x)} 0 \, dy + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy + \int_{\psi(x)}^d 0 \, dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \quad (4)$$

Para cada $\bar{x}_i$ fijo constante, apliquemos la definición de integral de Riemann de $f(\bar{x}_i, y)$ integrando respecto de $y \in [\phi(\bar{x}_i), \psi(\bar{x}_i)]$ y usando (4), resulta:

$$\int_{\phi(\bar{x}_i)}^{\psi(\bar{x}_i)} f(\bar{x}_i, y) \, dy = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta y_j \quad (5)$$

donde consideramos particiones del intervalo $[c, d]$ en el eje de las y en m subintervalos: $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_{m-1} < y_m = d$, con longitudes $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Llamamos $\Delta y = \max \Delta y_j : 1 \leq j \leq m$. (Por ejemplo puede considerarse la partición de $[c, d]$ en m subintervalos iguales todos de longitud $\Delta y = (d - c)/m$.) Tomamos $\bar{y}_j$ un punto cualquiera en el subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ de la partición, para cada $j = 1, 2, \dots, m$.

Sustituyendo (5) en (3) se deduce la siguiente proposición:

Proposición 2.1.7. Integral doble iterada como límite iterado de sumas de Riemann.

Sea $f(x, y)$ es continua en el dominio $D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \subset [a, b] \times [c, d]$ (siendo D simple respecto de x según la definición 2.1.1).

La integral iterada doble (definida en 2.1.2) cumple:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

donde se conviene en definir $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$; donde $\bar{x}_i, \bar{y}_j \in R_{i,j}$ siendo $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, que resulta de tomar particiones:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d$$

de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente; y donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \Delta x = \max\{\Delta x_i, 1 \leq i \leq n\}, \quad \Delta y = \max\{\Delta y_j, 1 \leq j \leq m\}$$

Demostración: Está expuesta en el párrafo 2.1.6. Para deducir la tesis de la proposición se debe sustituir la igualdad (5) en la igualdad (3), y luego usar que el límite de una sumatoria finita es igual a la suma de los límites. $\square$

2.2. Intercambio del orden de integración en dominios simples.

2.2.1. Integrales iteradas en dominios simples respecto de y .

En la subsección 2.1, definimos la integral doble iterada en un dominio simple respecto de x , integrando $f(x, y)$ primero respecto de y con x constante, e y variando en el intervalo $[\phi(x), \psi(x)]$; y luego al resultado obtenido, que dependía del valor constante x elegido, integrándolo respecto de x en el intervalo $[a, b]$. (Ver definición 2.1.2.)

Se puede intercambiar los roles de las variables x e y , en toda la exposición de la subsección 2.1. En efecto:

Sea

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\} \subset [a, b] \times [c, d] \quad (1)$$

donde η y ξ son dos funciones continuas del intervalo $[c, d]$ al intervalo $[a, b]$ tales que $\eta(y) \leq \xi(y)$ para todo $y \in [c, d]$.

Hacer una figura del siguiente modo: en el plano x, y con x en abscisas (eje horizontal) e y en ordenadas (eje vertical), dibujar el rectángulo $[a, b] \times [c, d] = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Dibujar, dentro de ese rectángulo, las curvas gráficas de las funciones $x = \eta(y)$, $x = \xi(y)$ tomando como variable independiente $y \in [c, d]$ en el eje vertical y como variable dependiente x en el eje horizontal. Dibujarlas considerando que $a \leq \eta(y) \leq \xi(y) \leq b$. El dominio D es la región que queda entre ambas gráficas, y que se proyecta sobre el eje vertical en el intervalo $[c, d]$. Se obtiene D barriendo con “bastones” horizontales (segmentos de rectas horizontales) $I(y)$ contenidos en la recta y constante, de extremo izquierdo $(\eta(y), y)$ y extremo derecho $(\xi(y), y)$.

Definición 2.2.2. El dominio D definido en (1) se llama *dominio simple respecto de y* .

Consideremos la integral paramétrica de $f(x, y)$ de parámetro y , integrando f respecto de x , con y constante en el intervalo $[c, d]$ mientras se integra respecto de x , y límites de integración $\eta(y)$ y $\xi(y)$:

$$G(y) = \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx \quad (2)$$

Por lo visto en el teorema 1.2.3 (intercambiando en el enunciado de ese teorema los roles de las variables x e y entre sí) la función $G(y)$ es continua para todo $y \in [c, d]$, luego es integrable respecto de y en el intervalo $[c, d]$; y podemos considerar el número $J = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx \right) dy$, dando lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2.3. Integral doble iterada en dominio simple respecto de y . Sea $D \subset [a, b] \times [c, d]$ un dominio simple respecto de y (como en la definición 2.2.2), y sea $f(x, y)$ continua en D . Se llama *Integral doble iterada de f en el dominio D* al número:

$$\int_c^d \left(\int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

que se denota

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx$$

Observación: El símbolo $dx dy$ NO indica producto de diferenciales. Solo indica en este caso⁶, que hay que integrar primero respecto de x , y luego (al resultado antes obtenido) integrarlo respecto de y . **Las integrales iteradas se calculan de derecha a izquierda**, y para calcular la primera integral (la de la derecha), se integra en la variable x tomando y cualquiera, pero constante.

2.2.4. Propiedades de la integral iterada. Usando exactamente los mismos argumentos, pero con los roles de las variables x e y intercambiados entre sí, se deduce que valen las mismas propiedades de linealidad, monotonía y acotación expuestas en el párrafo 2.1.5.

Análogamente a la proposición 2.1.7, se obtiene, intercambiando los roles de x e y entre sí, la siguiente:

Proposición 2.2.5. Integral doble iterada como límite iterado de sumas de Riemann.

Sea $f(x, y)$ es continua en el dominio $D = \{c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\} \subset [a, b] \times [c, d]$ (siendo D simple respecto de y según la definición 2.2.2).

⁶Se usa el mismo símbolo

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

para indicar la integral iterada de la definición 2.2.3 que para indicar la integral iterada de la definición 2.1.2 con la siguiente convención: si el dominio D es simple respecto de x indica integrar primero respecto de y con x constante, y luego respecto de x ; si el dominio D es simple respecto de y indica que hay que integrar primero respecto de x con y constante, y luego respecto de y . Y si el dominio D fuera simple respecto de x y también respecto de y a la vez, entonces indica cualquiera de las dos integrales dobles iteradas, que como veremos en el teorema 2.2.12, resultan ser iguales.

La integral iterada doble (definida en 2.2.3) cumple:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

donde se conviene en definir $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$; donde $\bar{x}_i, \bar{y}_j \in R_{i,j}$ siendo $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, que resulta de tomar particiones:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d$$

de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente; y donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \Delta x = \max\{\Delta x_i, 1 \leq i \leq n\}, \quad \Delta y = \max\{\Delta y_j, 1 \leq j \leq m\}$$

Demostración: Es la misma que la de la proposición 2.1.7, intercambiando los roles de x e y entre sí, y observando que $\Delta x_i \Delta y_j = \Delta y_j \Delta x_i$, debido a la propiedad conmutativa del producto de números reales, y que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n A_{i,j}$, debido a la propiedad conmutativa de la suma de números reales. $\square$

Nota 2.2.6. Llamando σ a la suma de Riemann:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

apliquemos las proposiciones 2.1.7 y 2.2.5, cuando el mismo dominio D es un dominio simple respecto de x y respecto de y a la vez.

Por las proposiciones 2.1.7 y 2.2.5 sabemos que las integrales dobles iteradas $\iint_D f(x, y) dx dy$ y $\iint_D f(x, y) dy dx$ son iguales a los límites $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sigma$ y $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma$ respectivamente.

A priori no se puede deducir que esos límites iterados sean iguales, ya que el primero de ellos toma antes $\Delta y \rightarrow 0$, con Δx constante⁷ y luego $\Delta x \rightarrow 0$; y el segundo de ellos los toma alrevés. Falta ver que se puede intercambiar el orden en que se toman esos límites, para demostrar que las dos integrales dobles iteradas toman el mismo valor.

Ejemplo 2.2.7. Calcular, $\iint_D xy dx dy$ en el triángulo D del plano x, y que tiene vértices

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (1, 1)$$

tomando D como dominio simple respecto de y .

Comparar con la integral que se calculó, tomando D como dominio simple respecto de x , en el ejemplo 2.1.3.

Dibujemos de nuevo el triángulo D . Es un triángulo rectángulo.

⁷No solo Δx es constante (mientras se calcula el $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sigma$), sino también es constante la partición $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ del intervalo $[a, b]$, y la elección de los puntos intermedios $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Veamos que D es un dominio simple respecto de y ; es decir, hallaremos el intervalo $[c, d]$ en el eje de las ordenadas y las funciones $x = \eta(y)$, y $x = \xi(y)$, bordes izquierdo y derecho de D respectivamente, tales que:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\}$$

Se recorre D con bastones horizontales, que son los segmentos que se obtienen de intersectar D con las rectas y constante. Esta constante, como se ve haciendo la figura, toma como mínimo el valor 0 y como máximo el valor 1. Entonces el intervalo $[c, d]$ es el intervalo $[0, 1]$.

El borde izquierdo del triángulo D es la recta $x = y$ (que es la recta AC , que contiene a la hipotenusa del triángulo). Es decir, la función $x = \eta(y)$ es $\eta(y) = y$ para todo $y \in [0, 1]$.

El borde derecho del triángulo es la recta de ecuación $x = 1$, que es la gráfica de la función $x = 1$. Es decir, la función $x = \xi(y)$ es $\xi(y) = 1$ para todo $y \in [0, 1]$.

Por lo tanto, D se puede escribir como el dominio simple respecto de y , que tiene la siguiente caracterización:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

Por lo tanto la integral pedida es:

$$I = \iint_D xy \, dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 xy \, dx =$$

Calculemos la integral doble comenzando por la integral de la extrema derecha, respecto de y , con x constante:

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 xy \, dx = \int_0^1 \left(y \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=y}^{x=1} \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{8} \quad \square$$

Nota 2.2.8. Se obtuvo en el ejercicio 2.2.7, el mismo resultado que en el ejemplo 2.1.3. Esto se debe al teorema de Fubini que veremos próximamente (teorema 2.2.12):

Las integrales iteradas dobles dan el mismo resultado si se intercambia el orden de integración de las variables x e y entre sí, cuando el dominio D es simple respecto de x y simple respecto de y a la vez.

Hay que tener cuidado en lo siguiente:

Cuando se intercambia el orden de integración de las variables, suelen cambiar totalmente las funciones ($\phi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(y)$, $\xi(y)$) y las constantes (a , b , c , d), que deben aparecer como límites de integración en cada variable. Comparar, por ejemplo, los límites de integración en x e y obtenidos para calcular la integral doble I en los ejemplos 2.1.3 y 2.2.7.

Para encontrar los límites de integración, suele ser necesario hacer la figura del dominio D , estudiar el intervalo $[a, b]$ en el eje de las abscisas (proyección del dominio D sobre el eje de las abscisas), y el intervalo $[c, d]$ en el eje de las ordenadas (proyección del dominio D sobre el eje de las ordenadas).

Finalmente, habrá que encontrar las funciones cuyas gráficas son los bordes de la figura D .

Las curvas gráficas de las funciones $y = \psi(x)$ e $y = \phi(x)$ son los bordes superior e inferior del dominio D . Las curvas gráficas de las funciones $x = \eta(y)$, $x = \xi(y)$, en cambio, son los bordes izquierdo y derecho del mismo dominio D .

Ejemplo 2.2.9. Primero integrando respecto a x con y constante, y luego respecto a y , hallar los límites de integración y desarrollar la integral doble iterada $\iint_Q 4x^3 + 8xy + 6y^2 dx dy$ en el cuadrilátero Q del plano x, y que tiene vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (2, 1)$, $D = (1, 3)$. (El resultado final de esta integral es el mismo resultado que el del ejemplo 2.1.4).

Se pretende encontrar los límites de integración siguientes:

$$I = \iint_Q (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx$$

Dibujemos el cuadrilátero Q que es el mismo del ejemplo 2.1.4. El mismo se proyecta sobre el eje de las y en el segmento $-1 \leq y \leq 3$.

Al fijar y constante en el intervalo $[-1, 3]$ la x varía en un intervalo $\eta(y) \leq x \leq \xi(y)$ que habrá que determinar. El segmento o bastón horizontal que tiene por extremos $(y, \eta(y))$ y $(y, \xi(y))$, barre el cuadrilátero Q de abajo hacia arriba al aumentar el valor de la constante y . Obtenemos:

$$I = \int_{-1}^3 dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx \quad (0)$$

Encontremos la función $x = \eta(y)$, cuya gráfica es el borde izquierdo del cuadrilátero Q formado por los lados BA y AD . En el ejercicio 2.1.4 hallamos las ecuaciones de los segmentos BA y AD (Corresponden respectivamente a las igualdades (1) y (3) del ejemplo 2.1.4.) Despejando ahora x en función de y de esas ecuaciones, se obtiene:

$$\eta(y) : \quad x = -y \quad \text{si } y \in [-1, 0] \quad (1)$$

$$\eta(y) : \quad x = \frac{y}{3} \quad \text{si } y \in [0, 3] \quad (3)$$

Análogamente, la función $x = \xi(y)$ tiene como gráfica el borde derecho del cuadrilátero Q , formado por los lados BC y CD . Despejando x en función de y de las ecuaciones de los segmentos BC y CD , obtenidas respectivamente en las igualdades (2) y (4) del ejemplo 2.1.4, se deduce:

$$\xi(y) : \quad x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{si } y \in [-1, 1] \quad (2)$$

$$\xi(y) : \quad x = -\frac{y}{2} + \frac{5}{2} \quad \text{si } y \in [1, 3] \quad (4)$$

Por lo tanto para poder sustituir estas fórmulas (1) (2) (3) y (4) en (0), habrá que partir el intervalo $[-1, 3]$ de variación de la y , como unión de tres intervalos sucesivos: $y \in [-1, 0]$, $y \in [0, 1]$, $y \in [1, 3]$. Esto es porque en el intervalo $y \in [-1, 0]$ valen las fórmulas (1) y (2); en el intervalo $y \in [0, 1]$ valen las fórmulas (3) y (2); y en el intervalo $y \in [1, 3]$ valen las fórmulas (3) y (4).

De (0) resulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^3 dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx = \int_{-1}^0 dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx + \int_1^3 dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo $\eta(y)$ y $\xi(y)$ por las respectivas fórmulas (1), (2), (3) y (4), se obtiene:

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{(y/2)+(3/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx + \\ + \int_0^1 dy \int_{y/3}^{(y/2)+(3/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx + \int_1^3 dy \int_{y/3}^{(-y/2)+(5/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx \quad (5)$$

Ahora plantearemos cada una de las integrales a la derecha de la igualdad (5):

$$I_1 = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{(y/2)+(3/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx = \int_{-1}^0 \left(x^4 + 4x^2y + 6y^2x \Big|_{x=-y}^{x=(y/2)+(3/2)} \right) dy \\ = \int_{-1}^0 \left(\left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right)^4 + 4y \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 + 6y^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right) \right) - (y^4 + 4y^3 - 6y^3) dy \\ I_2 = \int_0^1 dy \int_{y/3}^{(y/2)+(3/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx = \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2y + 6y^2x \Big|_{x=y/3}^{x=(y/2)+(3/2)} \right) dy \\ = \int_0^1 \left(\left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right)^4 + 4y \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right)^2 + 6y^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{2} \right) \right) - \left(\left(\frac{y}{3} \right)^4 + 4y \left(\frac{y}{3} \right)^2 + 6y^2 \left(\frac{y}{3} \right) \right) dy \\ I_3 = \int_1^3 dy \int_{y/3}^{(-y/2)+(5/2)} (4x^3 + 8xy + 6y^2) dx = \int_1^3 \left(x^4 + 4x^2y + 6y^2x \Big|_{x=y/3}^{x=(-y/2)+(5/2)} \right) dy \\ = \int_1^3 \left(\left(\frac{-y}{2} + \frac{5}{2} \right)^4 + 4y \left(\frac{-y}{2} + \frac{5}{2} \right)^2 + 6y^2 \left(\frac{-y}{2} + \frac{5}{2} \right) \right) - \left(\left(\frac{y}{3} \right)^4 + 4y \left(\frac{y}{3} \right)^2 + 6y^2 \left(\frac{y}{3} \right) \right) dy$$

El resultado final es la suma

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

2.2.10. Integrales iteradas en dominios simples respecto de x y de y .

Dado un conjunto $D \subset [a, b] \times [c, d]$, supongamos que D resulta ser a la vez un dominio simple respecto de x y un dominio simple respecto de y (hacer una figura de un tal dominio D , por ejemplo el cuadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$). Tenemos (debido a las definiciones 2.1.2 y 2.2.3), dos integrales dobles iteradas: una integrando respecto de y primero y después respecto de x ; y otra integrando respecto de x primero y después respecto de y . En el teorema 2.2.12 que enunciamos más adelante, se prueba que ambas integrales iteradas toman el mismo valor, y por lo tanto cuando decimos “Integral doble iterada”, no tenemos por qué especificar el orden de integración. La escribimos siempre como $\iint_D f(x, y) dx dy$, no importa el orden de x e y en que se integre.

Definición 2.2.11. Dominio simple y dominio simple en cualquier orden.

Un conjunto D del plano x, y se llama *dominio simple*, si es simple respecto de x o es simple respecto de y .

Un conjunto D del plano x, y se llama *dominio simple en cualquier orden*, si es a la vez simple respecto de x y simple respecto de y .

Aplicando las definiciones 2.1.1 y 2.2.2, un dominio simple en cualquier orden resulta:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\} \subset [a, b] \times [c, d]$$

donde $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son continuas para todo $x \in [a, b]$ y cumplen $c \leq \phi(x) \leq \psi(x) \leq d$, y $\eta(y)$ y $\xi(y)$ son continuas para todo $y \in [c, d]$ y cumplen $a \leq \eta(y) \leq \xi(y) \leq b$.

Teorema 2.2.12. Teorema de Fubini para integrales dobles iteradas (intercambio del orden de integración).

Sea $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\} \subset [a, b] \times [c, d]$ un dominio simple en cualquier orden (según la definición 2.2.11).

Sea $f(x, y)$ una función continua para todo $(x, y) \in D$.

Entonces las integrales dobles iteradas de f en D son iguales:

$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx$$

Observación: En la sección 5, se expone el teorema de Fubini para integrales de Riemann (ver 5.5.1). Es consecuencia de aplicar el teorema de Riemann-Lebesgue (ver 5.4.2), y las proposiciones 2.1.7 y 2.2.5 ya vistas. En efecto, el teorema de Riemann asegura que existe

$$A = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sigma$$

donde σ es la suma de Riemann definida en 2.2.6. Ese límite A es lo que se llama *integral de Riemann de f en el dominio D* .

Entonces, los límites iterados de las sumas de Riemann, expuestos en las proposiciones 2.1.7 y 2.2.5, son iguales a A . Por lo tanto ambas integrales dobles iteradas son iguales a A , y resultan ser iguales entre sí como queremos demostrar en el teorema de Fubini.

Esto prueba una versión más fuerte del teorema de Fubini:

Las integrales iteradas dobles de f continua en el dominio simple D , no solo son iguales entre sí, sino que además son iguales a la integral de Riemann de f en D .

En forma independiente al teorema de Riemann, también se puede demostrar el teorema 2.2.12 de Fubini, usando los resultados de la sección 1 como sigue:

Demostración del teorema 2.2.12.

Esta demostración puede omitirse si se la sustituye por la demostración de los teoremas 5.4.1, 5.4.2 y 5.5.1.

1er. caso: D es un rectángulo. Sea $D = [a, b] \times [c, d]$ y sea $f(x, y)$ continua en D . Definamos, para (X, Y) y (x, y) fijos en D , las siguientes funciones:

$$I(X, Y) = \int_a^X dx \int_c^Y f(x, y) dy, \quad J(X, Y) = \int_c^Y dy \int_a^X f(x, y) dx$$

$$F(x, Y) = \int_c^Y f(x, y) dy, \quad G(X, y) = \int_a^X f(x, y) dx$$

Aplicando el teorema 1.1.8, resulta:

$$\frac{\partial I(X, Y)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \int_a^X F(x, Y) dx = \int_a^X \frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} dx = \int_a^X f(x, Y) dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial Y}(a, Y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial I(X, Y)}{\partial Y} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \int_a^X f(x, Y) dx = f(X, Y)$$

Luego, podemos sustituir $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right)$ en la definición de la función G . Resulta:

$$G(X, y) = \int_a^X \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right) dx = \left. \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right|_{x=a}^{x=X} = \frac{\partial I(X, y)}{\partial y}$$

Sustituyendo este último resultado en la definición de la función $J(X, Y)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} J(X, Y) &= \int_c^Y dy \int_a^X f(x, y) dx = \int_c^Y G(X, y) dy = \\ &= \int_c^Y \frac{\partial I(X, y)}{\partial y} dy = I(X, y) \Big|_{y=c}^{y=Y} = I(X, Y) - I(X, c) = I(X, Y) \end{aligned}$$

Deducimos que $J(X, Y) = I(X, Y)$ para todo $(X, Y) \in [a, b] \times [c, d]$. En particular se verifica para $X = b, Y = d$, concluyendo que:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad \square$$

2do. caso: D es un dominio cualquiera simple en cualquier orden.

Definamos una extensión de la función $f(x, y)$ a todo el plano x, y conviniendo en definir $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$. Nuestra nueva función f está definida en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y es continua excepto en los puntos del borde ∂D del dominio D .

Se observa que

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

pues $f(x, y) = 0$ si $y \in [c, d] \setminus [\phi(x), \psi(x)]$. Análogamente

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_{\eta(y)}^{\xi(y)} f(x, y) dx$$

Luego, para demostrar el teorema, basta demostrar que

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (\text{a probar}) \quad (1)$$

No podemos aplicar directamente el resultado de la primera parte de esta demostración, porque en el primer caso f era continua en el rectángulo R y en este caso f es continua excepto en el borde de D .

Sin embargo, si $f(x, y)$ fuera nula en ∂D , entonces f sería continua en R y por el resultado obtenido en el primer caso se deduce la igualdad (1).

Si $f(x, y)$ no es nula en ∂D definiremos una función auxiliar $g(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in D$, que sea nula en ∂D y que difiera de f en un conjunto muy pequeño. Es aplicable el resultado del primer caso a g . Probaremos que, como el lugar donde g difiere de f es muy pequeño, las integrales iteradas de f difieren de las de g menos que $\epsilon > 0$ y por lo tanto están muy próximas entre sí. Como la diferencia entre ellas ($2\epsilon > 0$) es arbitrariamente pequeña, esto implica que son iguales.

Veamos ahora los detalles:

Sea dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

En lo que sigue es imprescindible hacer una figura en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ e ir agregándole los dibujos que corresponden a cada párrafo.

Por hipótesis

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} = \\ &= \{(x, y) : c \leq y \leq d, \eta(y) \leq x \leq \xi(y)\} \subset [a, b] \times [c, d] \end{aligned}$$

Sea en el rectángulo $[a + \epsilon, b - \epsilon] \times [c + \epsilon, d - \epsilon]$ un dominio simple D_1 (respecto de x y respecto de y), contenido en el interior de D y tal que todo punto de su borde ∂D_1 dista del borde de D menos que ϵ . Más precisamente:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : a + \epsilon \leq x \leq b - \epsilon, \phi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\} = \\ &= \{(x, y) : c + \epsilon \leq y \leq d - \epsilon, \eta_1(y) \leq x \leq \xi_1(y)\} \subset [a + \epsilon, b - \epsilon] \times [c + \epsilon, d - \epsilon] \text{ tal que:} \\ &c \leq \phi(x) < \phi_1(x) < \phi(x) + \epsilon < \psi_1(x) < \psi(x) - \epsilon < \psi(x) \leq d \quad \forall x \in [a + \epsilon, b - \epsilon] \quad \text{(I)} \\ &a \leq \eta(y) < \eta_1(y) < \eta(y) + \epsilon < \xi_1(y) < \xi(y) - \epsilon < \xi(y) \leq b \quad \forall y \in [c + \epsilon, d - \epsilon] \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

Sea $g(x, y)$ una función continua tal que:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 0 = f(x, y) \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R} \setminus D \\ g(x, y) &= f(x, y) \text{ si } (x, y) \in D_1 \\ |g(x, y)| &\leq |f(x, y)| \text{ para todo } (x, y) \end{aligned}$$

Existe alguna función $g(x, y)$ con esas propiedades: En efecto, tal como se probará en el lema 2.2.13, (independientemente del resultado del teorema 2.2.12 que estamos demostrando), existe una función “chichón” $\varphi(x, y)$ que cumple la tesis del lema 2.2.13 (usando en las hipótesis de dicho lema: el abierto V igual al interior del dominio D , y el compacto $K = D_1$). Definiendo $g(x, y) = \varphi(x, y)f(x, y)$, se obtiene la función auxiliar buscada.

Como g es continua, puede aplicarse el resultado obtenido en el primer caso:

$$\int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b g(x, y) dx \quad (2)$$

Ahora acotemos superiormente la diferencia en valor absoluto de las integrales iteradas de f comparándolas con las de g :

$$\left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy \right| + \\ &+ \left| \int_c^d dy \int_a^b g(x, y) dx - \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \right| \quad (3) \end{aligned}$$

Para obtener la desigualdad (3) hemos aplicado la propiedad triangular del valor absoluto y la igualdad (2).

Ahora acotemos superiormente cada una de las dos diferencias en el segundo miembro de (3):

$$\left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy \right| \leq \int_a^b dx \left| \int_c^d (f - g) dy \right| \leq \int_a^b dx \int_c^d |f - g| dy \quad (4)$$

Calculemos la última integral de (4):

Si $x \in [a, a + \epsilon] \cup [b - \epsilon, b]$ entonces:

$$\int_c^d |f - g| dy = \int_c^{\phi(x)} |f - g| dy + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} |f - g| dy + \int_{\psi(x)}^d |f - g| dy$$

La función $f(x, y) - g(x, y)$ es nula fuera de D y dentro de D_1 ; entonces es nula cuando x es constante, $x \in [a, a + \epsilon] \cup [b - \epsilon, b]$ e $y \notin [\phi(x), \psi(x)]$. Además, aún donde no es nula, se cumple $|f - g| \leq |f| + |g| \leq 2|f| \leq 2K$ donde K es una cota superior de $|f|$. (En efecto, $|f|$ es continua en el compacto D , luego en D tiene un máximo $K \geq 0$; y fuera de D es nula, luego el mismo máximo $K \geq 0$ acota superiormente $|f|$ en todo el plano.) Por lo tanto resulta:

$$\int_c^d |f - g| dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} |f - g| dy \leq K(\psi(x) - \phi(x)) \leq KM_1 \text{ si } x \in [a, a + \epsilon] \cup [b - \epsilon, b] \quad (5A)$$

Al final de la desigualdad (5A) hemos llamado M_1 al máximo en $[a, b]$ de la función continua no negativa $\psi(x) - \phi(x)$.

Si $x \in [a + \epsilon, b - \epsilon]$ entonces:

$$\int_c^d |f - g| dy = \int_c^{\phi(x)} |f - g| dy + \int_{\phi(x)}^{\phi_1(x)} |f - g| dy + \int_{\phi_1(x)}^{\psi_1(x)} |f - g| dy + \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} |f - g| dy + \int_{\psi(x)}^d |f - g| dy$$

La función $f(x, y) - g(x, y)$ es nula fuera de D y dentro de D_1 ; entonces es nula cuando x es constante, $x \in [a + \epsilon, b - \epsilon]$ e $y \notin [\phi(x), \phi_1(x)] \cup [\psi_1(x), \psi(x)]$. Por lo tanto resulta:

$$\begin{aligned} \int_c^d |f - g| dy &= \int_{\phi(x)}^{\phi_1(x)} |f - g| dy + \int_{\psi_1(x)}^{\psi(x)} |f - g| dy \leq K(\phi_1(x) - \phi(x) + \psi(x) - \psi_1(x)) \leq 2K\epsilon \\ &\text{si } x \in [a + \epsilon, b - \epsilon] \quad (5B) \end{aligned}$$

En la última desigualdad de (5B) hemos usado las condiciones (I) que aseguran:

$$0 < \phi_1 - \phi < \epsilon, \quad 0 < \psi - \psi_1 < \epsilon.$$

Sustituyendo las cotas de (5A) y (5B) al final de la desigualdad (4) resulta:

$$\left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_a^b dx \int_c^d g(x, y) dy \right| \leq \int_a^{a+\epsilon} KM_1 dx + \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} 2K\epsilon dx + \int_{b-\epsilon}^b KM_1 dx \leq$$

$$\leq 2M_1K\epsilon + 2K(b-a)\epsilon = K_1\epsilon \quad (6)$$

donde $K_1 = 2(M_1 + b - a)K$ es una constante independiente de ϵ .

Hemos terminado de acotar en (6) a la primera de las diferencias del segundo miembro de (3). Para acotar a la última de las diferencias en (3), procedemos de igual modo, pero integrando primero respecto de x en el intervalo $[a, b]$, usando las funciones η, η_1, ξ_1 y ξ en lugar de ϕ, ϕ_1, ψ_1 y ψ , y recordando las condiciones (II). Se obtiene:

$$\left| \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx - \int_c^d dy \int_a^b g(x, y) dx \right| \leq K_2\epsilon \quad (7)$$

donde $K_2 = 2(M_2 + d - c)K$ es una constante independiente de ϵ , con M_2 igual al máximo en $[c, d]$ de la función no negativa $\xi(y) - \eta(y)$. Sustituyendo (6) y (7) en (3) se deduce:

$$\left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \right| \leq (K_1 + K_2)\epsilon \quad (8)$$

El primer miembro de la desigualdad (8) es independiente de ϵ , y vale para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Tomando límite en (8) cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se deduce:

$$\left| \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \right| = 0$$

Esta igualdad es equivalente a la igualdad (1) que queríamos probar. $\square$

Lema 2.2.13. Función chichón. *Dado un compacto K y un abierto acotado V de $\mathbb{R}^q$ tal que $K \subset V$, existe una función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)$ (llamada función “chichón”) definida y continua para todo $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$, que es nula fuera del abierto V , que es constante igual a 1 dentro del compacto K , y que toma valores estrictamente positivos y menores que 1 en⁸ $V \setminus K$.*

Nota: Se llama función chichón porque, en el caso bidimensional ($\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^2$) la superficie gráfica en el espacio de coordenadas cartesianas (x, y, z) de la función $z = \varphi(x, y)$ (hacer un dibujo) tiene forma de chichón, en el caso que se elija por ejemplo V como el disco abierto de centro $(0, 0)$ y radio 1, K el compacto formado por solo el origen, y $\varphi(x, y)$ decreciente al aumentar cuando aumenta la distancia de (x, y) al origen, pasando de un máximo igual a 1 en el origen (centro del chichón), a un mínimo igual a cero fuera de V (fuera del chichón).

Demostración del lema 2.2.13: Denotemos p a un punto de $\mathbb{R}^q$, es decir $p = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$.

Sea $d_2(p_0)$ la distancia del punto p_0 al borde ∂V de V ; es decir, para cualquier $p_0 \in \mathbb{R}^q$ fijo:

$$d_2(p_0) = \min_{p \in \partial V} \|p - p_0\|$$

El mínimo anterior existe porque ∂V es compacto, y la función $\|p - p_0\|$ es continua como función de p con p_0 fijo.

Observamos que $d_2(p_0)$ es continua respecto de p_0 para todo $p_0 \in \mathbb{R}^q$; es no negativa, y se anula si y solo si $p_0 \in \partial V$.

⁸Se denota con $V \setminus K$ al conjunto de puntos que están en V pero no están en K .

Análogamente, sea $d_1(p_0)$ la distancia del punto p_0 al compacto K ; es decir, para cualquier $p_0 \in \mathbb{R}^q$ fijo:

$$d_1(p_0) = \min_{p \in K} \|p - p_0\|$$

Observamos que $d_1(p_0)$ es continua respecto de p_0 para todo $p_0 \in \mathbb{R}^q$; es no negativa, y se anula si y solo si $p_0 \in K$.

Como $K \subset V$, V es abierto y K compacto, entonces K no intersecta al borde de V . Entonces las funciones d_1 y d_2 no se anulan nunca a la vez. Por lo tanto $d_1(p_0) + d_2(p_0) > 0$ para todo $p_0 \in \mathbb{R}^q$.

Definimos la función:

$$\varphi(p_0) = \frac{d_2(p_0)}{d_1(p_0) + d_2(p_0)} \text{ si } p_0 \in \overline{V}$$

$$\varphi(p_0) = 0 \text{ si } p_0 \notin \overline{V}$$

La función φ es continua porque:

Por un lado las dos fórmulas de la definición anterior son continuas (la segunda porque es idénticamente nula, y la primera porque d_1 y d_2 son continuas, y $d_1 + d_2$ no se anula nunca).

Por otro lado, donde las fórmulas de la definición anterior cambian, es decir en ∂V , se anula d_2 ; luego se anula la primera de las fórmulas y por lo tanto coincide con la segunda.

Por construcción se tiene $\varphi = 0$ fuera de V . Además como $d_1 = 0$ en $K \subset V$, se cumple $\varphi(p_0) = d_2(p_0)/(d_1(p_0) + d_2(p_0)) = 1$ para todo $p_0 \in K$.

Finalmente, como $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$ en $V \setminus K$ entonces $\varphi = d_2/(d_1 + d_2)$ es estrictamente positiva y menor que 1 en $V \setminus K$. $\square$

2.3. Integral doble en dominios descomponibles en simples.

Definición 2.3.1. Un conjunto D del plano x, y se llama *dominio descomponible en simples*, si es unión finita de dominios simples (respecto de x o respecto de y cada uno de ellos, no necesariamente todos respecto de x ni todos respecto de y), con interiores disjuntos dos a dos. Es decir:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int} D_i \cap \text{int} D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

Se observa que D es compacto porque es unión finita de compactos D_i .

En particular un dominio D descomponible en simples, puede ser él mismo simple. Puede verificarse que en ese caso vale la siguiente propiedad, llamada de ADITIVIDAD EN EL DOMINIO:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) \, dx dy \quad (1)$$

para toda función f continua en D .

Y si el dominio D descomponible en simples, no es simple él mismo, definimos la integral iterada doble en D de la función $f(x, y)$ continua en D , mediante la fórmula (1).

Definición 2.3.2. Si D es descomponible en simples:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple } \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int}D_i \cap \text{int}D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y si f es una función continua en D , se llama integral doble iterada de f en D a

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) \, dx dy$$

donde $\iint_{D_i} f(x, y) \, dx dy$ para cada dominio simple D_i es la integral definida en 2.1.2 o en 2.2.3.

Habría que verificar, para que la definición anterior esté bien planteada, que si un dominio D es descomponible en simples de dos formas diferentes (es decir como dos uniones diferentes, ambas finitas de dominios simples con interiores disjuntos dos a dos), entonces la integral iterada doble definida antes es la misma. Esta verificación es engorrosa, y la omitiremos.

Ejemplo 2.3.3. Calcular la integral doble de $f(x, y) = 6y$ en el dominio D que queda encerrado por las curvas gráficas de las funciones $y = x^2$, $\forall x \in [0, 1]$; $x = 1$, $\forall y \in [1, 2]$; $x = 5 - y^2$, $\forall y \in [-2, 2]$; $y = -2x$, $\forall x \in [0, 1]$.

Dibujando cada una de las 4 curvas dadas que forman el borde del dominio D , se observa que D es la unión de dos dominios simples D_1 y D_2 con interiores disjuntos:

$$D_1 = \{0 \leq x \leq 1, -2x \leq y \leq x^2\}$$

$$D_2 = \{-2 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 5 - 2y^2\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 6y \, dx dy = \iint_{D_1} 6y \, dx dy + \iint_{D_2} 6y \, dx dy = \\ I &= \int_0^1 dx \int_{-2x}^{x^2} 6y \, dy + \int_{-2}^2 dy \int_1^{5-2y^2} 6y \, dx \end{aligned}$$

Calculemos cada una de las dos integrales del segundo miembro:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \int_{-2x}^{x^2} 6y \, dy = \int_0^1 \left(3y^2 \Big|_{y=-2x}^{y=x^2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 (3x^4 - 12x^2) dx = \frac{3x^5}{5} - 4x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5} \\ I_2 &= \int_{-2}^2 dy \int_1^{5-2y^2} 6y \, dx = \int_{-2}^2 \left(6yx \Big|_{x=1}^{x=5-2y^2} \right) dy = \\ &= \int_{-2}^2 (6y(5 - 2y^2) - 6y) dy = \int_{-2}^2 (-12y^3 + 24y) dy = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{17}{5}$$

2.4. Cálculo de áreas y volúmenes con integrales dobles.

Primero justifiquemos por qué la integral doble de la función 1 en un dominio D descomponible en simples, es por definición el área de D , o medida bidimensional del conjunto D .

Observar que según la definición 2.1.2 de integral iterada doble en un dominio D simple respecto de x :

$$I = \iint_D 1 \, dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} 1 \, dy = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) \, dx = \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \phi(x) \, dx$$

La integral doble I de la función 1 en D es entonces la diferencia de las integrales respecto de x de las funciones $\psi(x)$ y $\phi(x)$. Si esas funciones fueran ambas no negativas, recordemos que la integral respecto de x de cada una de ellas es el área de la región abajo de su gráfica. Por lo tanto la diferencia de las integrales es el área abajo de la gráfica de $y = \psi(x)$ menos el área abajo de la gráfica de $y = \phi(x)$. Luego I es el área entre ambas gráficas, o sea el área de D .

Análogamente, intercambiando los roles de x e y entre sí, observamos que si D es simple respecto de y , la integral iterada definida en 2.2.3 es el área comprendida entre las gráficas de las funciones $x = \eta(y)$ y $x = \xi(y)$.

Por otro lado, si un dominio D es descomponible en unión finita de dominios D_i simples, cuyos interiores son disjuntos dos a dos, es razonable definir el área de D como la suma de las áreas de los D_i respectivos. Como justificamos anteriormente y aplicando la definición 2.3.2, el área de D es la suma de las integrales dobles de la función 1 en cada uno de los dominios simples D_i que forman D , lo cual es la integral de la función 1 en D . Esto justifica la siguiente definición:

Definición 2.4.1. Área de un dominio descomponible en simples.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio descomponible en simples.

Se llama *área del dominio D* , o también *medida bidimensional del dominio D* , a

$$\text{área } D = \iint_D dx dy$$

(es decir la integral doble iterada de la función idénticamente igual a 1 en el dominio D).

Se observa que, como $1 \geq 0$, por la propiedad de monotonía de la integral (propiedad 3 del párrafo 2.1.5), *el área de cualquier dominio D descomponible en simples es siempre no negativa.* (No se definen áreas negativas.)

Ejemplo 2.4.2. Calcular el área de la región D comprendida entre las gráficas de las funciones $y = x^3$ e $y = -x^3$ para $x \in [-2, 1]$.

Primero habrá que dibujar D . La gráfica de $y = x^3$ es una curva monótona creciente, con punto de inflexión y derivada 0 en el origen, positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$.

La gráfica de $y = -x^3$ es una curva monótona decreciente, simétrica de la anterior respecto al eje de las x , positiva si $x < 0$ y negativa si $x > 0$.

Para ver el dominio D discutamos dos casos: Si $x \leq 0$ el borde de abajo de D es la gráfica de la función $y = \phi(x) = x^3$, $-2 \leq x \leq 0$, que es negativa. El borde de arriba es la gráfica de la función $y = \psi(x) = -x^3$, $-1 \leq x \leq 0$, que es positiva.

Por otro lado, si $x \geq 0$, el borde de abajo de D es la gráfica de la función $y = \phi(x) = -x^3$, $0 \leq x \leq 1$, que es negativa. El borde de arriba es la gráfica de la función $y = \psi(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, que es positiva.

En resumen:

$$D = \{-2 \leq x \leq 1 : \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x^3 \quad \text{si } -2 \leq x \leq 0, \quad \phi(x) = -x^3 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \psi(x) &= -x^3 \quad \text{si } -2 \leq x \leq 0, \quad \psi(x) = x^3 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Área}(D) = \iint_D dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy = \int_{-2}^0 dx \int_{x^3}^{-x^3} dy + \int_0^1 dx \int_{-x^3}^{x^3} dy \quad (1)$$

Hay que observar que para calcular las integrales en D , el límite inferior de integración $\phi(x)$ debe ser menor o igual que el límite superior de integración $\psi(x)$.

Calculemos

$$F(x) = \int_{-x^3}^{x^3} dy = y \Big|_{y=-x^3}^{y=x^3} = 2x^3 \quad (2)$$

Por (1) y (2) resulta:

$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \int_{-2}^0 (-F(x)) dx + \int_0^1 F(x) dx = -2 \int_{-2}^0 x^3 dx + 2 \int_0^1 x^3 dx = \\ &= -\frac{x^4}{2} \Big|_{x=-2}^{x=0} + \frac{x^4}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.4.3. Sólido abajo de la superficie gráfica de $z = f(x, y)$.

Sea $z = f(x, y)$ una función real no negativa definida en el dominio D descomponible en simples. Se llama *sólido abajo de la gráfica de f* al sólido V_f del espacio tridimensional x, y, z comprendido abajo de la superficie gráfica de $z = f(x, y)$, arriba del plano $z = 0$, y que se proyecta (ortogonalmente) sobre su base que es el conjunto D del plano $z = 0$. Es decir:

$$V_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Ahora justifiquemos por qué la integral doble de la función continua $f(x, y)$ en un dominio D descomponible en simples, es igual por definición de volumen, al volumen del sólido V_f abajo de su superficie gráfica.

Consideremos el caso en que D es simple y $f(x, y)$ es continua y positiva en D .

Por lo visto en las proposiciones 2.1.7 y 2.2.5:

En cada dominio simple la integral iterada de f es el límite iterado cuando Δx y Δy tienden a cero de las sumas de Riemann:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

en particiones de D (en realidad particiones de un rectángulo que contiene a D conviniendo que $f(x, y) = 0$ fuera de D), formada por rectangulitos $R_{i,j}$ de ancho $\Delta x_i \leq \Delta x$ y alto $\Delta y_j \leq \Delta y$, y eligiendo el punto $(x_i, y_j) \in R_{i,j}$.

En lo que sigue hacer un dibujo en perspectiva del espacio con tres ejes coordenados x, y, z tomando el semieje de las $z > 0$ en vertical orientado hacia arriba, y llamando $x0y$ o plano x, y al plano $z = 0$. Dibujar el plano $z = 0$ en perspectiva, y en él un dominio simple D , por ejemplo un círculo (es decir el interior del círculo y su circunferencia borde). Dibujar la superficie gráfica de alguna función $z = f(x, y)$ definida y continua en D . (Esto es una superficie, preferentemente inclinada, por ejemplo un plano no horizontal, o mejor una superficie inclinada y levemente curvada, y que se proyecta verticalmente sobre el dominio D del plano $x0y$. La gráfica de la función $z = f(x, y)$ para los puntos $(x, y) \notin D$ es la parte del plano $z = 0$ que está fuera de D . (La función f se define por convención como 0 fuera de D y resulta en general discontinua en el borde de D .) Seguir la siguiente construcción con la figura.

Cada sumando $f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta y_j$ de la suma de Riemann σ es el producto de dos factores. Uno es $f(x_i, y_j)$ y otro es $\Delta x_i\Delta y_j$. Este último factor es el área del rectangulito $R_{i,j}$ del plano $x0y$ ($z = 0$). El primer factor es la altura $f(x_i, y_j)$ de la superficie gráfica de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(x_i, y_j) \in R_{i,j}$ del plano $x0y$. Luego, cada sumando $f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta y_j$ es el volumen de un prisma rectangular $P_{i,j}$ con base en el rectangulito $R_{i,j}$ y altura $z = f(x_i, y_j)$, que es un punto que está en la superficie gráfica de f . Se concluye la siguiente observación:

El volumen de la unión de los prismas $P_{i,j}$ (que tienen interiores dos a dos disjuntos) es la suma de Riemann σ .

Pero por otra parte la unión de estos prismas $P_{i,j}$ es un conjunto que se aproxima al sólido V_f , y no es el mismo sólido porque la tapa superior de $P_{i,j}$ es un pequeño rectángulo plano horizontal (que corta a la superficie gráfica de f en $z = f(x_i, y_j)$), en vez de seguir la inclinación y curvatura de la superficie gráfica de f . Pero cuando los rectangulitos $R_{i,j}$ de la partición en el plano $x0y$ tienen lados que tienden a cero, los prismas $P_{i,j}$ se vuelven más y más delgados (y más y más numerosos) aproximándose al caso límite en que degenerarían en bastones verticales (si Δx y Δy fueran cero) que van desde el plano $z = 0$ hasta la superficie gráfica $z = f(x, y)$. Estos bastones verticales forman el sólido V_f . Se concluye la siguiente observación empírica:

La unión de los prismas $P_{i,j}$ se aproxima al sólido V_f cuando Δx y Δy tienden a cero.

La explicación anterior permite justificar la siguiente definición:

Definición 2.4.4. Volumen del sólido abajo de la superficie gráfica de $z = f(x, y) \geq 0$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio descomponible en simples. Sea $f(x, y)$ una función continua no negativa en D . Se llama *volumen del sólido V_f abajo de la superficie gráfica de f* , (ver definición 2.4.3), o también *medida tridimensional del sólido V_f* , a

$$\text{vol } V_f = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Se observa que como $f \geq 0$, por la propiedad 4 del párrafo 2.1.5, *el volumen del sólido V_f es no negativo*. No se definen volúmenes negativos.

Ejemplo 2.4.5. Verificar que la siguiente función $z = f(x, y)$ toma valores mayores o iguales que cero para todo (x, y) en el dominio de la función.

$$z = -2y \text{ para } 0 \leq x \leq 2, \quad (x-1)^2 - 1 \leq y \leq 0.$$

Dibujar en perspectiva en el espacio x, y, z , tomando el semieje de las $z > 0$ en vertical hacia arriba, el sólido V_f comprendido abajo de la gráfica de la función $z = -2y$, y arriba del plano $z = 0$.

Calcular el volumen del sólido V_f .

Si $0 \leq x \leq 2$ entonces $-1 \leq x-1 \leq 1$. Luego $0 \leq (x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 0$. Por lo tanto existe, para cada x fijo en el intervalo $[0, 2]$, un segmento $(x-1)^2 - 1 \leq y \leq 0$. Como $y \leq 0$ entonces $z = -2y \geq 0$.

Para dibujar el sólido V_f primero dibujemos su proyección sobre el plano x, y que es:

$$D: \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (x-1)^2 - 1 \leq y \leq 0$$

Esta es la región plana (del plano $z = 0$) que queda comprendida entre el eje de las x (que corresponde a $y = 0, z = 0$), y la curva parábola $y = (x-1)^2 - 1; z = 0$, que pasa por los puntos $x = 0, y = 0, z = 0$, $x = 1, y = -1, z = 0$, $x = 2, y = 0, z = 0$, en el semiplano $y \leq 0, z = 0$, y con concavidad hacia la semieje de las y positivas.

La superficie gráfica en el espacio de $z = -2y$ es la de un plano, que corta a cualquier plano vertical x cte. (planos paralelos al plano y, z) en la recta $z = -2y, x = \text{cte.}$ de pendiente -2 que pasa por los puntos $x = \text{cte.}, y = 0, z = 0$ y $x = \text{cte.}, y = -1, z = 2$.

El sólido V_f tiene como tapa inferior el dominio plano D del plano x, y (plano $z = 0$) y como tapa superior la porción del plano $z = -2y$ que se proyecta verticalmente sobre D .

El volumen del sólido V_f es:

$$\begin{aligned} \text{vol.}(V_f) &= \iint_D (-2y) \, dx dy = \int_0^2 dx \int_{(x-1)^2-1}^0 (-2y) dy = \int_0^2 \left(-y^2 \Big|_{y=(x-1)^2-1}^{y=0} \right) dx = \\ &= \int_0^2 ((x-1)^2 - 1)^2 dx = \int_0^2 ((x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1) dx = \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{2(x-1)^3}{3} + x \Big|_{x=0}^{x=2} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 2 - \left(\frac{-1}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{15} \quad \square \end{aligned}$$

2.5. Teorema del valor medio y desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Además de las propiedades de linealidad, monotonía y acotación vistas en el párrafo 2.1.5, veamos otras frecuentemente usadas en el cálculo integral:

Proposición 2.5.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea D un dominio descomponible en simples. Si f y g son funciones continuas en D entonces:

$$\left(\iint_D f(x, y)g(x, y) \, dx dy \right)^2 \leq \left(\iint_D (f(x, y))^2 \, dx dy \right) \cdot \left(\iint_D (g(x, y))^2 \, dx dy \right)$$

Demostración: Definamos los siguientes tres números reales fijos:

$$A = \iint_D (f(x, y))^2 dx dy, \quad B = 2 \cdot \iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy \quad C = \iint_D (g(x, y))^2 dx dy, \quad (1)$$

Sea λ una variable independiente que puede tomar cualquier valor real.

Consideremos el siguiente polinomio en λ :

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C \quad (2)$$

Afirmamos que $P(\lambda) \geq 0$ para todo λ real. En efecto, usando la propiedad de linealidad de la integral doble (item 1. del párrafo 2.1.5) y usando la fórmula del cuadrado de una suma, se deduce sustituyendo (1) en (2):

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \iint_D (\lambda f(x, y))^2 dx dy + \iint_D 2\lambda f(x, y)g(x, y) dx dy + \iint_D (g(x, y))^2 dx dy \\ &\Rightarrow P(\lambda) = \iint_D (\lambda f(x, y) + g(x, y))^2 dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

Observamos que $(\lambda f(x, y) + g(x, y))^2 \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$ y para todo λ real, porque es el cuadrado de un número real. Aplicamos a la última integral de (3) la propiedad de monotonía de la integral (propiedad 2 del párrafo 2.1.5). Se obtiene:

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + g(x, y))^2 dx dy \geq 0 \quad \text{para todo } \lambda \text{ real.}$$

Sustituyendo esta última desigualdad en (3) se deduce que

$$P(\lambda) \geq 0 \quad \text{para todo } \lambda \text{ real.}$$

Por lo tanto el polinomio $P(\lambda)$ definido en (2) no puede tener dos raíces reales distintas, sino que debe tener o bien una sola raíz doble real, o bien ninguna raíz real. Eso implica que su discriminante $B^2 - 4AC$ o bien es cero, o bien es negativo. Se obtuvo:

$$B^2 - 4AC \leq 0$$

Reemplazando A, B y C por las igualdades de (1), se concluye:

$$4 \cdot \left(\iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy \right)^2 \leq 4 \cdot \left(\iint_D (f(x, y))^2 dx dy \right) \cdot \left(\iint_D (g(x, y))^2 dx dy \right)$$

Finalmente dividiendo ambos miembros de la desigualdad anterior entre 4 se deduce la tesis. $\square$

Teorema 2.5.2. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Sea D un dominio descomponible en simples y arco-conexo.⁹ (En particular D puede ser simple.)

⁹ D es arco conexo si para cualquier pareja de puntos p y q en D existe algún arco continuo (o curva continua, que puede ser en particular un segmento de recta o también la unión continua de una cantidad finita de segmentos de recta, llamada poligonal), que sale de p y llega a q sin salir de D . Por ejemplo (hacer dibujo) el dominio D formado por la unión de los cuadrados $[0, 1] \times [0, 1]$ y $[1, 2] \times [1, 2]$ es conexo; pero el dominio E formado por la unión de los cuadrados $[0, 1] \times [0, 1]$ y $[1, 2] \times [2, 3]$ no es conexo, ya que los puntos $(1, 1)$ y $(1, 2)$ pertenecen ambos a E y no existe ningún arco que los una y esté contenido en E .

Si f es continua en D entonces existe algún punto $\theta_0 = (x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\theta_0) \cdot \iint_D dx dy = f(\theta_0) \cdot \text{Area}(D)$$

Al punto (o puntos) $\theta_0 = (x_0, y_0) \in D$ del teorema anterior se le llama *punto intermedio*, y al valor de la función f en θ_0 se le llama *valor intermedio*.

Demostración: Como f es continua en el dominio D , entonces tiene un máximo M y un mínimo m . Por la propiedad de monotonía y acotación de la integral doble, (item 3 del párrafo 2.1.5, aplicado a cada dominio simple D_i que forma D . Luego habrá que sumar las integrales en cada D_i para obtener, por la definición 2.3.2, la integral en D), se deduce:

$$m \cdot \iint_D dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot \iint_D dx dy$$

Recordando la definición de área de D (ver definición 2.4.1), se obtiene:

$$m \cdot \text{área}(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot \text{área}(D) \quad (1)$$

Primer caso) Si $\text{área}(D) = 0$, entonces de (1) se deduce que la integral de f en D es cero. Por lo tanto la igualdad de la tesis se cumple eligiendo cualquier punto $\theta_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Segundo caso) Si $\text{área}(D) \neq 0$, entonces llamemos α al número real

$$\alpha = \frac{1}{\text{área}(D)} \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Dividiendo la igualdad (1) entre $\text{área}(D)$, se deduce que

$$m \leq \alpha \leq M$$

El mínimo m de f en D se alcanza por lo menos para un punto $\theta_1 = (x_1, y_1) \in D$, es decir $M = f(\theta_1)$; y análogamente el máximo M se alcanza por lo menos para un punto $\theta_2 = (x_2, y_2) \in D$, es decir $M = f(\theta_2)$.

Como D es arco-conexo, existe una curva $\mathcal{C}$ continua en D que une θ_1 con θ_2 . Siendo f continua en D , y siendo la curva $\mathcal{C}$ continua y contenida en D , los valores de f varían continuamente sobre la curva $\mathcal{C}$, pasando del valor mínimo $m = f(\theta_1)$ al valor máximo $M = f(\theta_2)$.

Por el teorema de Bolzano, los valores de f a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ alcanzan cualquier valor intermedio α comprendido entre m y M .

Se deduce que existe un punto $\theta_0 = (x_0, y_0)$ en la curva $\mathcal{C} \subset D$ tal que

$$f(\theta_0) = \alpha \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) y multiplicando por el área de D , se concluye la tesis del teorema. $\square$

3. Integrales iteradas triples y múltiples.

Seguiremos la misma exposición realizada en la sección 2, pero ahora para las llamadas integrales triples.

3.1. Integrales iteradas triples.

Se llama prisma rectangular o intervalo tridimensional al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq h\}$$

donde $a < b, c < d, e < h$ son números reales fijos.

Sean $\phi, \psi : D_1 \subset [a, b] \times [c, d] \mapsto [e, h]$ dos funciones continuas tales que $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in D_1$, donde D_1 es un dominio simple (respecto de x o respecto de y) en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ del plano x, y .

Hágase un dibujo en el espacio, con tres ejes coordenados x, y, z : el dominio D_1 está en el plano "horizontal" $z = 0$ y proyectándose sobre él, en el espacio, están las gráficas de las funciones $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$.

Consideremos el dominio D (tridimensional) contenido en el prisma rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ definido como:

$$D = \{(x, y) \in D_1, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (1)$$

En el dibujo realizado antes D es el sólido comprendido entre las gráficas de las funciones ϕ y ψ , que se proyecta verticalmente sobre el dominio plano D_1 del plano x, y .

Para cada (x, y) fijos en el dominio plano D_1 , el segmento (bastón) vertical $\phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$ está contenido en el sólido D . Al mover el punto $(x, y) \in D_1$, este bastón vertical "barrea" el sólido D .

Definición 3.1.1. El dominio D que cumple (1) se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de x, y* , si su proyección D_1 sobre el plano $z = 0$ es simple respecto de x ; y se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de y, x* si su proyección D_1 sobre el plano $z = 0$ es simple respecto de y .

El análisis del sólido D a continuación debe seguirse con figuras tridimensionales, como la explicada antes de la definición 3.1.1:

Consideremos primero el dominio (bidimensional) simple D_1 , simple respecto de x . Entonces, por la definición 3.1.1, el dominio D (tridimensional) definido en (1) es simple respecto a x, y y adquiere la forma siguiente:

$$D = \{a \leq x \leq b, \lambda(x) \leq y \leq \mu(x), \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (1b)$$

Se puede mirar a D de la forma que describimos más abajo, en vez de verlo como generado por bastones verticales para cada (x, y) fijo en D_1 , que recorren D cuando (x, y) se mueve en D_1 . Para cada $x = x_0 \in [a, b]$ fijo, la intersección del sólido D con el plano vertical $x = x_0$ (este plano es perpendicular al eje de las x) es un dominio plano, "tajada o feta" del sólido D al cortarlo con un plano vertical, que tiene por ecuación:

$$D \cap \{x = x_0\} = \{(y, z) : \lambda(x_0) \leq y \leq \mu(x_0), \phi(x_0, y) \leq z \leq \psi(x_0, y)\} \quad (1c)$$

Entonces, esta tajada o feta plana vertical $D \cap \{x = x_0\}$ es un dominio simple respecto de y , en las variables y, z del plano $x = x_0$ con x_0 constante (que es paralelo al plano coordenado y, z .) Además esta feta plana cambia, al variar $x_0 \in [a, b]$, “barriendo” el sólido D .

Consideremos ahora el dominio (bidimensional) simple D_1 , simple respecto de y . Entonces, por la definición 3.1.1, el dominio D (tridimensional) definido en (1) es simple respecto a y, x y adquiere la forma siguiente:

$$D = \{c \leq y \leq d, \nu(y) \leq x \leq \chi(y), \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (1d)$$

Se puede mirar a D de la forma que describimos más abajo, en vez de verlo como generado por bastones verticales para cada (x, y) fijo en D_1 , que recorren D cuando (x, y) se mueve en D_1 . Para cada $y = y_0 \in [c, d]$ fijo, la intersección del sólido D con el plano vertical $y = y_0$ (este plano es perpendicular al eje de las y) es un dominio plano, “tajada o feta” del sólido D al cortarlo con ese plano vertical, que tiene por ecuación:

$$D \cap \{y = y_0\} = \{(x, z) : \nu(y_0) \leq x \leq \chi(y_0), \phi(x, y_0) \leq z \leq \psi(x, y_0)\} \quad (1e)$$

Entonces, esta tajada o feta plana vertical $D \cap \{y = y_0\}$ es un dominio simple respecto de x , en las variables x, z del plano $y = y_0$ con y_0 constante (que es paralelo al plano coordenado x, z .) Además esta feta plana cambia, al variar $y_0 \in [c, d]$, “barriendo” el sólido D .

Definición 3.1.2. Integral triple iterada en dominio (tridimensional) simple respecto de x, y o de y, x .

Sea $D \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ un dominio simple respecto de x, y o de y, x (como en la definición 3.1.1), y sea $f(x, y, z)$ continua en D . Se llama *Integral triple iterada de f en el dominio D* al número:

$$\iint_{D_1} \left(\int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

que se denota

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_1} dx dy \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Observación: Las integrales iteradas se calculan **de derecha a izquierda**, tomando, cuando se integra en cierta variable (por ejemplo z) constantes las variables que están en la o las integrales de la izquierda (en este ejemplo x e y).

Así, si D es simple respecto de x, y (como en la igualdad (1b)), la integral triple de f en D definida en 3.1.2 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\lambda(x)}^{\mu(x)} dy \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Las integrales de la igualdad de arriba se calculan de derecha a izquierda: es decir, primero con x, y constantes, se integra $f(x, y, z)$ respecto de z en el intervalo $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ (no olvidarse que x e y son constantes mientras se integra en z).

Al resultado obtenido, que depende sólo de x e y , y es por lo tanto una función de (x, y) , se le integra con x constante, respecto de y variable en el intervalo $\lambda(x), \mu(x)$ (con x constante).

Al resultado obtenido ahora, que depende sólo de x , se le integra finalmente respecto de x en el intervalo $[a, b]$. (Véase el ejemplo más abajo.)

Análogamente, si D es simple respecto de y, x (como en la igualdad (1d)), la integral triple de f en D definida en 3.1.2 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\nu(y)}^{\chi(y)} dx \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$

Las integrales de la igualdad de arriba se calculan de derecha a izquierda: es decir, primero con x, y constantes, se integra $f(x, y, z)$ respecto de z en el intervalo $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ (no olvidarse que x e y son constantes mientras se integra en z).

Al resultado obtenido, que depende sólo de x e y , y es por lo tanto una función de (x, y) , se le integra con y constante, respecto de x variable en el intervalo $\nu(y), \chi(y)$ (con y constante).

Al resultado ahora obtenido, que depende sólo de y , se le integra finalmente respecto de y en el intervalo $[c, d]$. (Véase el ejemplo más abajo.)

Ejemplo 3.1.3. Calcular

$$\iiint_D xyz \, dx dy dz$$

en el dominio sólido D del espacio x, y, z que tiene por ecuaciones:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x, x + y \leq z \leq 2x + y\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D xyz \, dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{x+y}^{2x+y} xyz \, dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=x+y}^{2x+y} \right) dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(xy \cdot \frac{(2x+y)^2 - (x+y)^2}{2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(\frac{3}{2} x^3 y + x^2 y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{4} x^3 y^2 + \frac{1}{3} x^2 y^3 \Big|_{y=-x}^{y=2x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{4} x^3 (2x)^2 + \frac{1}{3} x^2 (2x)^3 - \frac{3}{4} x^3 (-x)^2 - \frac{1}{3} x^2 (-x)^3 \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(3x^5 + \frac{8}{3} x^5 - \frac{3}{4} x^5 + \frac{1}{3} x^5 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{21}{4} x^5 \right) dx = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{8} \quad \square \end{aligned}$$

3.1.4. Dominios tridimensionales simples en otro orden, e integrales triples iteradas en otro orden.

Cambiando los roles de las variables (x, y, z) de cualquier manera entre sí, se obtienen definiciones análogas a 3.1.1 y 3.1.2:

Si el dominio D (tridimensional) contenido en el prisma rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ está definido como:

$$D = \{(x, z) \in D_1, \eta(x, z) \leq y \leq \xi(x, z)\} \quad (2)$$

es el sólido comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \eta(x, z)$ e $y = \xi(x, z)$, que se proyecta horizontalmente (siguiendo la dirección del eje de las y) sobre el dominio plano vertical D_1 del plano x, z . Para cada (x, z) fijos en el dominio plano D_1 , el segmento (bastón) horizontal (paralelo al eje de las y): $\eta(x, z) \leq y \leq \xi(x, z)$ está contenido en el sólido D . Al mover el punto $(x, z) \in D_1$, este bastón horizontal “barre” el sólido D .

Definición 3.1.5. El dominio D que cumple (2) se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de x, z* , si su proyección D_1 sobre el plano $y = 0$ es simple respecto de x ; y se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de z, x* si su proyección D_1 sobre el plano $y = 0$ es simple respecto de z .

Definición 3.1.6. Integral triple iterada en dominio (tridimensional) simple respecto de x, z o respecto de z, x .

Sea $D \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ un dominio simple respecto de x, z o respecto de z, x (como en la definición 3.1.5), y sea $f(x, y, z)$ continua en D . Se llama *Integral triple iterada de f en el dominio D* al número:

$$\iint_{D_1} \left(\int_{\eta(x,z)}^{\xi(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz$$

que se denota

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_1} dx dz \int_{\eta(x,z)}^{\xi(x,z)} f(x, y, z) dy$$

Observación: Las integrales iteradas se calculan de derecha a izquierda.

Así, si D es simple respecto de x, z la integral triple de f en D definida en 3.1.6 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\lambda(x)}^{\mu(x)} dz \int_{\eta(x,z)}^{\xi(x,z)} f(x, y, z) dy \quad (3)$$

Las integrales de la igualdad de arriba se ejecutan de derecha a izquierda.

Análogamente, si D es simple respecto de z, x la integral triple de f en D definida en 3.1.2 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^h dz \int_{\nu(z)}^{\chi(z)} dx \int_{\eta(x,z)}^{\xi(x,z)} f(x, y, z) dy \quad (4)$$

Las integrales de la igualdad de arriba se calculan de derecha a izquierda.

Nota: Las funciones λ, μ, ν, χ usadas en las igualdades (3) y (4) **no** son las mismas que las de las igualdades (1b) y (1d), usadas antes.

Si el dominio D (tridimensional) contenido en el prisma rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ está definido como:

$$D = \{(y, z) \in D_1, \rho(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)\} \quad (5)$$

es el sólido comprendido entre las gráficas de las funciones $x = \rho(y, z)$ y $x = \sigma(y, z)$, que se proyecta horizontalmente (siguiendo la dirección del eje de las x) sobre el dominio plano vertical D_1 del plano y, z . Para cada (y, z) fijo en el dominio plano D_1 , el segmento (bastón) horizontal (paralelo al eje de las x): $\rho(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)$ está contenido en el sólido D . Al mover el punto $(y, z) \in D_1$, este bastón horizontal “barre” el sólido D .

Definición 3.1.7. El dominio D que cumple (5) se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de y, z* , si su proyección D_1 sobre el plano $x = 0$ es simple respecto de y ; y se llama *dominio (tridimensional) simple respecto de z, y* si su proyección D_1 sobre el plano $x = 0$ es simple respecto de z .

Definición 3.1.8. Integral triple iterada en dominio (tridimensional) simple respecto de y, z o de z, y .

Sea $D \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ un dominio simple respecto de y, z o de z, y (como en la definición 3.1.7), y sea $f(x, y, z)$ continua en D . Se llama *Integral triple iterada de f en el dominio D* al número:

$$\iint_{D_1} \left(\int_{\rho(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dydz$$

que se denota

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_1} dy dz \int_{\rho(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x, y, z) dx$$

Observación: Las integrales iteradas se calculan de derecha a izquierda.

Así, si D es simple respecto de y, z la integral triple de f en D definida en 3.1.8 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} dz \int_{\rho(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x, y, z) dy \quad (6)$$

Las integrales de la igualdad de arriba se calculan de derecha a izquierda.

Análogamente, si D es simple respecto de z, y la integral triple de f en D definida en 3.1.8 es:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^h dz \int_{\nu(z)}^{\chi(z)} dy \int_{\rho(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x, y, z) dx \quad (7)$$

Las integrales de la igualdad de arriba se calculan de derecha a izquierda.

Nota: Las funciones λ, μ, ν, χ usadas en las igualdades (6) y (7) **no** son las mismas que las de las igualdades (1b) y (1d), ni que las de las igualdades (3) y (4), usadas antes.

Definición 3.1.9. Dominio simple tridimensional.

Un conjunto D contenido en el prisma rectangular $[a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ de $\mathbb{R}^3$ se llama *dominio simple (tridimensional)* si es simple respecto a algún orden de las variables x, y, z . (Es decir: si D cumple alguna de las definiciones 3.1.1, 3.1.5 o 3.1.7.)

Se llama *simple en dos o más órdenes diferentes* si es simple cumpliendo a la vez dos o más de las definiciones 3.1.1, 3.1.5 o 3.1.7. Es decir, si el mismo dominio D es simple para dos o más órdenes diferentes de las variables x, y, z .

3.1.10. Intercambio del orden de integración de integrales triples en dominios simples.

En forma similar al teorema 2.2.12, y con la misma demostración, que solo requiere adaptación a integrales triples (en vez de dobles), se obtiene el siguiente:

Teorema 3.1.11. Teorema de Fubini para integrales triples iteradas (intercambio del orden de integración).

Sea D contenido en el prisma rectangular $R[a, b] \times [c, d] \times [e, h] \subset \mathbb{R}^3$ un dominio simple en dos o más órdenes diferentes de las variables x, y, z (según la definición 3.1.9).

Sea $f(x, y, z)$ una función continua para todo $(x, y, z) \in D$.

Entonces las integrales triples iteradas de f en D , en los dos o más órdenes diferentes de integración de las variables x, y, z en que D es dominio simple, son iguales entre sí.

Por ejemplo, para fijar ideas, si D es simple respecto de x, y y es también simple respecto de z, x entonces, el teorema de Fubini afirma que:

$$\int_a^b dx \int_{\lambda(x)}^{\mu(x)} dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_e^h dz \int_{\nu(z)}^{\xi(z)} dx \int_{\rho(x,z)}^{\sigma(x,z)} f(x, y, z) dy$$

siendo:

$$\begin{aligned} D &= \{a \leq x \leq b, \lambda(x) \leq y \leq \mu(x), \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} = \\ &= \{e \leq z \leq h, \nu(z) \leq x \leq \xi(z), \rho(x, z) \leq y \leq \sigma(x, z)\} \end{aligned}$$

El teorema de Fubini asegura que las integrales iteradas triples en órdenes diferentes de integración de las variables, son iguales entre sí. Por eso se denotan con el mismo símbolo $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$, sin importar el orden de las variables.

Sin embargo, en el momento de calcularla, hay que darle un orden a las variables, y antes de proceder al cálculo de la integral de derecha a izquierda, definir los límites de integración, (que son en general funciones diferentes si se cambia el orden de las variables), fijando las variables sucesivamente de izquierda a derecha.

Un ejemplo de tal dominio, simple en órdenes diferentes de las variables, es el siguiente:

Ejemplo 3.1.12. Sea el elipsoide sólido (esfera deformada) E de centro $(0, 0, 0)$ y semiejes de longitudes 2, 3 y 4; que tiene por ecuación

$$E : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1 \quad (1)$$

E es simple respecto a cualquier orden de las variables: entonces la integral triple en E de cualquier función continua $f(x, y, z)$ en E , puede calcularse en 6 órdenes diferentes:

$$x, y, z; \quad y, x, z; \quad x, z, y; \quad z, x, y; \quad y, z, x; \quad z, y, x$$

Encontrar los límites de integración en el orden x, y, z y en el orden z, x, y .

Por ejemplo, respecto de x, y :

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-2}^2 dx \int_{-3\sqrt{1-x^2/4}}^{3\sqrt{1-x^2/4}} dy \int_{-4\sqrt{1-(x^2/4)-(y^2/9)}}^{4\sqrt{1-(x^2/4)-(y^2/9)}} f(x, y, z) dz \quad (2)$$

Explicaremos esto a continuación. (En lo que sigue hacer un dibujo.)

El elipsoide sólido E , de ecuación (1), corta al eje de las x en los puntos del segmento $x \in [-2, 2]$, $y = 0$, $z = 0$. Corta al eje de las y en el segmento $x = 0$, $y \in [-3, 3]$, $z = 0$, y corta al eje de las z en el segmento $x = 0$, $y = 0$, $z \in [-4, 4]$.

Además, la proyección del sólido E sobre el eje de las x coincide en este ejemplo, con el segmento $x \in [-2, 2]$. Esto es porque para todo $(x, y, z) \in E$ (aún cuando $y \neq 0$ o cuando $z \neq 0$) la variable x tiene un mínimo -2 y un máximo 2 . (En general, la proyección de una figura sobre uno de los ejes no coincide con la intersección de la misma con este eje, como por ejemplo pasaba, en el plano, con el cuadrilátero del ejemplo 2.1.4.)

Cortemos al elipsoide sólido E , de ecuación (1), con el plano vertical que se obtiene cuando se fija x constante (constante esta que tiene que estar entre -2 y 2 , por lo dicho antes).

El elipsoide sólido E cortado con el plano vertical $x = \text{cte.}$ es una elipse plana E_x (interior incluido), figura plana E_x que llamamos sección (o feta) del sólido E en el plano $x = \text{cte.}$, y que está dada por la ecuación:

$$E_x : \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{4} = r_x^2 \quad \text{constante} \quad (3)$$

Esta sección plana E_x o feta, es el interior y borde de una elipse en el plano $x = \text{cte.}$, perpendicular al eje de las x , y por lo tanto paralelo al plano y, z .

La región plana E_x dada por la ecuación (3) en las variables y, z (la x es constante) tiene segundo miembro que es el cuadrado de $r_x = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Por lo tanto, cada uno de los sumandos del primer miembro de (3) debe ser menor o igual que r_x^2 . En particular $y/3$ no puede variar más allá del intervalo $[-r_x, r_x]$.

Si ahora se fija y constante en E_x , (constante esta entre $-3r_x$ y $+3r_x$, por lo que acabamos de explicar), resulta y constante entre $-3\sqrt{1 - x^2/4}$ y $+3\sqrt{1 - x^2/4}$.

Entonces la variable z , (que será la primera variable de integración, y se escribe a la extrema derecha), varía entre sus extremos, despejados de (3):

$$-4\sqrt{1 - (x^2/4) - (y^2/9)} \quad \text{y} \quad 4\sqrt{1 - (x^2/4) - (y^2/9)}$$

Por lo tanto se obtienen los límites de integración de la integral iterada (2).

Ahora integremos en el mismo elipsoide sólido E , dado por la ecuación (1), pero mirado como dominio simple respecto de z, x . Usando los mismos argumentos que antes, pero intercambiando los roles de las variables, se obtiene:

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-4}^4 dz \int_{-2\sqrt{1 - (z^2/16)}}^{2\sqrt{1 - (z^2/16)}} dx \int_{-3\sqrt{1 - (z^2/16) - (x^2/4)}}^{3\sqrt{1 - (z^2/16) - (x^2/4)}} f(x, y, z) \, dy \quad (4)$$

El teorema de Fubini asegura que las integrales iteradas triples en (2) y (4) son iguales entre sí. Por eso se denotan con el mismo símbolo $\iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, sin importar el orden de las variables.

Hacemos notar que en el caso del elipsoide E , (y dependiendo de la función $f(x, y, z)$ que haya que integrar en él), suele ser conveniente pasar a otro sistema de coordenadas, primero con un cambio de variables afín, y luego con el cambio de coordenadas llamado esférico. La forma de transformar la integral (2) o (4) en las nuevas variables, será vista en la sección 4.

Definición 3.1.13. Dominios descomponibles en simples.

Un conjunto D del espacio x, y, z se llama *dominio (tridimensional) descomponible en simples*, si es unión finita de dominios simples tridimensionales, con interiores disjuntos dos a dos. Es decir:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple } \quad \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int}D_i \cap \text{int}D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

En particular un dominio D descomponible en simples, puede ser él mismo simple. Puede verificarse que en ese caso vale la siguiente propiedad, llamada de ADITIVIDAD EN EL DOMINIO:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

para toda función f continua en D .

Y si el dominio D descomponible en simples, no es simple él mismo, definimos la integral iterada triple en D de la función $f(x, y)$ continua en D , mediante la fórmula (1).

Definición 3.1.14. Integral triple en dominios descomponibles en simples.

Si D es descomponible en simples:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple } \quad \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int}D_i \cap \text{int}D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y si f es una función continua en D , se llama integral triple iterada de f en D a

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz$$

donde $\iiint_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz$ para cada dominio simple D_i es la integral definida en 3.1.2 o en 3.1.6 o en 3.1.8.

Habría que verificar, para que la definición anterior esté bien planteada, que si un dominio D es descomponible en simples de dos formas diferentes (es decir como dos uniones diferentes, ambas finitas de dominios simples con interiores disjuntos dos a dos), entonces la integral iterada doble definida antes es la misma. Esta verificación es engorrosa, y la omitiremos.

3.2. Cálculo de volúmenes con integrales triples.

Primero justifiquemos por qué la integral triple de la función 1 en un dominio sólido tridimensional D descomponible en simples, es por definición el volumen de D , o medida tridimensional del conjunto D .

Observar que, según la definición 3.1.2, la integral iterada triple en un dominio D simple respecto de x, y o respecto de y, x , es:

$$I = \iiint_D 1 dx dy dz = \iint_{D_1} dx dy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1 dz =$$

$$I = \iint_{D_1} (\psi(x, y) - \phi(x, y)) \, dx dy = \iint_{D_1} \psi(x, y) \, dx dy - \iint_{D_1} \phi(x, y) \, dx dy$$

donde D_1 es un dominio plano simple en el plano x, y .

La integral triple I de la función 1 en D es entonces la diferencia de las integrales dobles respecto de x, y en D_1 de las funciones $\psi(x, y)$ y $\phi(x, y)$. Si esas funciones fueran ambas no negativas, recordemos que la integral respecto de x, y de cada una de ellas es el volumen de la región sólida abajo de su superficie gráfica (ver definición 2.4.4).

Por lo tanto la diferencia de las integrales dobles de ψ y ϕ es el volumen abajo de la superficie gráfica de $y = \psi(x, y)$ menos el volumen abajo de la superficie gráfica de $y = \phi(x, y)$. Luego I es el volumen comprendido entre ambas superficies gráficas, o sea el volumen de D .

Análogamente, intercambiando los roles de las variables x, y, z entre sí, observamos que si D es simple (en algún orden de las variables), la integral triple iterada de la función $f(x, y, z) = 1$, como está definida en 3.1.6 o en 3.1.8, es el volumen del sólido comprendido entre las superficies gráficas de las funciones de dos variables que delimitan el sólido D ; es decir: la integral triple iterada de la función 1 en D es el volumen de D .

Por otro lado, si un dominio tridimensional D es descomponible en unión finita de dominios sólidos tridimensionales D_i simples, cuyos interiores son disjuntos dos a dos, es razonable definir el volumen de D como la suma de los volúmenes de los D_i respectivos.

Como justificamos anteriormente y aplicando la definición 3.1.14, el volumen de D es la suma de las integrales triples de la función 1 en cada uno de los dominios simples D_i que forman D , lo cual es la integral de la función 1 en D . Esto justifica la siguiente definición:

Definición 3.2.1. Volumen de un dominio tridimensional descomponible en simples.

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio (tridimensional) descomponible en simples.

Se llama *volumen del dominio D* , o también *medida tridimensional del dominio D* , a

$$\text{vol. } D = \iiint_D dx dy dz$$

(es decir la integral triple iterada de la función idénticamente igual a 1 en el dominio D).

Se observa que, como $1 \geq 0$, por la propiedad de monotonía de la integral (propiedad 3 del párrafo 3.3.1), *el volumen de cualquier dominio tridimensional D descomponible en simples es siempre no negativo.* (No se definen volúmenes negativos.)

Ejemplo 3.2.2. Calcular el volumen del sólido S comprendido entre las gráficas de las funciones $z = -3x^2 - 3y^2$ y $z = -6x - 6y - 12$ para $(x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$.

Primero observemos que la función

$$z = \psi(x, y) = -3x^2 - 3y^2$$

toma valores mayores o iguales que -3 si $(x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$. En efecto:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \geq -3(x^2 + y^2) \geq -3 &\Rightarrow \psi(x, y) \geq -3 \quad \forall (x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1] \quad (1) \end{aligned}$$

Por otra parte, la función

$$z = \phi(x, y) = -6x - 6y - 12$$

toma valores menores o iguales que -12 si $(x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$. En efecto:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq x + y \Rightarrow 0 \geq -6(x + y) \Rightarrow \\ \Rightarrow -12 \geq -6(x + y) - 12 &\Rightarrow \phi(x, y) \leq -12 \quad \forall (x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1] \quad (2) \end{aligned}$$

Como consecuencia de (1) y (2), se cumple:

$$\phi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$$

Por lo tanto, el sólido comprendido entre las superficies gráficas de $z = \phi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$ cuando $(x, y) \in D_1$, es el dominio simple sólido S en el espacio (x, y, z) que tiene por ecuación:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 = [0, 1] \times [0, 1], \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

Nota: Si no se tiene especial cuidado en verificar que el límite inferior de integración en z , en este caso $\phi(x, y)$, sea menor o igual que el límite superior, en este caso $\psi(x, y)$, al integrar entre esos límites de integración no se obtiene el volumen del sólido S , sino (en las partes de D_1 donde $\phi > \psi$), el opuesto de una parte del volumen de S , más (en las partes de D_1 donde $\phi \leq \psi$) el volumen de otra parte de S . El resultado puede quedar negativo, pero no es en general ni siquiera el opuesto del volumen de S buscado, porque incluye generalmente una parte de S cuyo volumen está sumado, y otra parte de S cuyo volumen está restado.

El volumen del sólido S , por la definición 3.2.1, es:

$$\text{Vol.}(S) = \iiint_S dx dy dz = \iint_{D_1} dx dy \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_{-6x-6y-12}^{-3x^2-3y^2} dz$$

Calculando las integrales de derecha a izquierda, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Vol.}(S) &= \int_0^1 dx \int_0^1 (-3x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 12) dy = \\ &= \int_0^1 \left(-3x^2 y - y^3 + 6xy + 3y^2 + 12y \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \end{aligned}$$

Por lo que resulta:

$$\text{Vol.}(S) = \int_0^1 (-3x^2 - 1 + 6x + 3 + 12) dx = -x^3 + 3x^2 + 14x \Big|_{x=0}^{x=1} = -1 + 3 + 14 = 16 \quad \square$$

3.3. Propiedades.

3.3.1. Primeras propiedades de las integrales triples iteradas.

Es inmediato verificar que se cumplen las siguientes propiedades, a partir de que valen las mismas para las integrales de funciones de una sola variable en un intervalo, y para las integrales dobles, usando la definición 3.1.2:

1. Linealidad: Si f y g son continuas en el dominio tridimensional D , y λ y μ son constantes reales, entonces:

$$\iiint_D (\lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)) \, dx dy dz = \lambda \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz + \mu \iiint_D g(x, y, z) \, dx dy dz$$

2. Monotonía: Si f y g son continuas en el dominio D , entonces:

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) \, dx dy dz$$

Usando la propiedad (2) se deduce inmediatamente la siguiente:

3. Acotación: Si f es continua en el dominio D y si M es su máximo y m su mínimo, entonces:

$$m \iiint_D dx dy dz \leq \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \leq M \iiint_D dx dy dz$$

En particular la propiedad (2) aplicada a la desigualdad $-|f| \leq f \leq |f|$ implica:

$$-\iiint_D |f(x, y, z)| \, dx dy dz \leq \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \leq \iiint_D |f(x, y, z)| \, dx dy dz$$

Por lo tanto se deduce la propiedad siguiente:

4. Acotación en valor absoluto: Si f es continua en el dominio D y si K es una cota superior de $|f|$ en D , entonces:

$$\left| \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| \, dx dy dz \leq K \iiint_D dx dy dz$$

3.3.2. Teorema del valor medio y desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Con las mismas demostraciones que las de la proposición 2.5.1 y del teorema 2.5.2, adaptada a integrales triples en vez de dobles, se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 3.3.3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea D un dominio tridimensional descomponible en simples. Si f y g son funciones continuas en D entonces:

$$\left(\iiint_D f(x, y, z)g(x, y, z) \, dx dy dz \right)^2 \leq \left(\iiint_D (f(x, y, z))^2 \, dx dy dz \right) \cdot \left(\iiint_D (g(x, y, z))^2 \, dx dy dz \right)$$

Teorema 3.3.4. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Sea D un dominio tridimensional descomponible en simples y arco-conexo.¹⁰ (En particular D puede ser simple.)

Si f es continua en D entonces existe algún punto $\theta_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ tal que

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = f(\theta_0) \cdot \iiint_D dx dy dz = f(\theta_0) \cdot \text{Vol.}(D)$$

Al punto (o puntos) $\theta_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ del teorema anterior se le llama *punto intermedio*, y al valor de la función f en θ_0 se le llama *valor intermedio*.

¹⁰ D es arco conexo si para cualquier pareja de puntos p y q en D existe algún arco continuo (o curva continua, que puede ser en particular un segmento de recta o también la unión continua de una cantidad finita de segmentos de recta, llamada poligonal), que sale de p y llega a q sin salir de D .

3.4. Integrales múltiples.

Generalizaremos la exposición realizada en las secciones 2 y 3, pero, en vez de para integrales dobles o triples, para las ahora llamadas integrales múltiples, que incluyen las dobles (calculadas en dominios D de $\mathbb{R}^2$), las triples (calculadas en dominios D de $\mathbb{R}^3$), y en general, las integrales q -múltiples (calculadas en dominios D de $\mathbb{R}^q$), para cualquier dimensión $q \geq 1$.

Se llama prisma rectangular q -dimensional o intervalo q -dimensional al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^q$:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_q, b_q] =$$

$$R = \{(x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, a_3 \leq x_3 \leq b_3, \dots, a_q \leq x_q \leq b_q\}$$

donde $a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3, \dots, a_q < b_q$ son números reales fijos.

Definición 3.4.1. Integral iterada q -múltiple en un intervalo q -dimensional R .

Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_q, b_q] \subset \mathbb{R}^q$ un prisma rectangular o intervalo q -dimensional.

Sea $f : R \mapsto \mathbb{R}$ una función real de q variables reales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ definida y continua en R .

Se llama integral iterada q -múltiple de f en R , a

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \dots \int_{a_q}^{b_q} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_q) dx_q$$

donde las integrales se calculan de derecha a izquierda, tomando como variable de integración la indicada en el símbolo dx_i respectivo, con todas las variables que están en las integrales de la izquierda consideradas como constantes, al integrar respecto a x_i .

La integral q -múltiple de f en R se denota como:

$$\underbrace{\int \int \dots \int_R}_{q \text{ veces}} f(x_1, x_2, \dots, x_q) dx_1 dx_2 \dots dx_q = \int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Supongamos que tenemos definidos los dominios simples en $\mathbb{R}^{q-1}$. Por inducción definamos los dominios simples en $\mathbb{R}^q$.

Sea R un prisma rectangular o intervalo q dimensional como antes. Sea D_1 un dominio simple $(q-1)$ -dimensional. Sean $\phi, \psi : D_1 \mapsto [a_q, b_q] \subset \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $\phi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \leq \psi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})$ para todo $(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \in D_1$.

Consideremos el dominio D (q -dimensional) contenido en el prisma rectangular R definido como:

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \in D_1, \phi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \leq x_q \leq \psi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})\} \quad (1)$$

Definición 3.4.2. Dominio simple q -dimensional.

Se llama *dominio simple simple q -dimensional* a un dominio que es de la forma (1) donde D_1 es un dominio simple $(q-1)$ -dimensional, y ψ y ϕ son funciones reales continuas definidas en D_1 (de $q-1$ variables reales).

Definición 3.4.3. Integral múltiple iterada en dominio q -dimensional simple

Sea D un dominio simple q -dimensional (como en la definición 3.4.2), y sea $f(x_1, x_2, \dots, x_q)f(\mathbf{x})$ una función real de q variables reales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ definida y continua en D .

Se llama *Integral q -múltiple iterada de f en el dominio D* al número:

$$\underbrace{\int \int \dots \int_{D_1}}_{(q-1) \text{ veces}} \left(\int_{\phi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})}^{\psi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_q) dx_q \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{q-1}$$

que se denota

$$\underbrace{\int \int \dots \int_D}_{q \text{ veces}} f(x_1, x_2, \dots, x_q) dx_1 dx_2 \dots dx_q$$

o también como

$$\underbrace{\int \int \dots \int_{D_1}}_{(q-1) \text{ veces}} dx_1 dx_2 \dots dx_{q-1} \int_{\phi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})}^{\psi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_q) dx_q = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Observación: Las integrales iteradas se calculan de derecha a izquierda, tomando como constantes las variables que están en las integrales de la izquierda de la que se integra.

3.4.4. Intercambio del orden de integración de integrales múltiples en dominios simples.

En forma similar a los teoremas 3.1.11 y 2.2.12, y con similar demostración, que solo requiere adaptación a integrales múltiples (en vez de dobles o triples), se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4.5. Teorema de Fubini para integrales múltiples iteradas (intercambio del orden de integración).

Sea $D \subset \mathbb{R}^q$ un prisma rectangular q dimensional, o un dominio simple q -dimensional en dos o más órdenes diferentes de las variables $x_1, x_2, \dots, x_q$.

Sea $f(\mathbf{x})$ una función continua para todo $\mathbf{x} \in D$ (donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$).

Entonces el valor de la integral múltiple iterada de f en D , no cambia si se permuta el orden de las variables $x_1, x_2, \dots, x_q$.

Definición 3.4.6. Dominios q - dimensionales descomponibles en simples.

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^q$ se llama *dominio (q -dimensional) descomponible en simples*, si es unión finita de dominios simples q -dimensionales, con interiores disjuntos dos a dos. Es decir:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int} D_i \cap \text{int} D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

En particular un dominio D descomponible en simples, puede ser él mismo simple. Puede verificarse que en ese caso vale la siguiente propiedad, llamada de ADITIVIDAD EN EL DOMINIO:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^k \int \int \int_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

para toda función f continua en D .

Y si el dominio D descomponible en simples, no es simple él mismo, definimos la integral iterada múltiple en D de la función $f(x, y)$ continua en D , mediante la fórmula (1).

Definición 3.4.7. Integral múltiple en dominios descomponibles en simples.

Si D es descomponible en simples:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \text{ tales que:}$$

$$D_i \text{ simple } \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{int} D_i \cap \text{int} D_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y si f es una función continua en D , se llama integral múltiple iterada de f en D a

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

donde $\int_{D_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ para cada dominio simple D_i es la integral definida en 3.4.1 o en 3.4.3.

3.4.8. Propiedades de las integrales múltiples iteradas.

Análogamente que para las integrales dobles y triples, se cumplen las siguientes propiedades para las integrales q -múltiples: **1. Linealidad:** Si f y g son continuas en el dominio q -dimensional D , y λ y μ son constantes reales, entonces:

$$\int_D (\lambda f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \lambda \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mu \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

2. Monotonía: Si f y g son continuas en el dominio D , entonces:

$$f \leq g \Rightarrow \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Usando la propiedad (2) se deduce inmediatamente la siguiente:

3. Acotación: Si f es continua en el dominio D y si M es su máximo y m su mínimo, entonces:

$$m \int_D d\mathbf{x} \leq \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq M \int_D d\mathbf{x}$$

En particular la propiedad (2) aplicada a la desigualdad $-|f| \leq f \leq |f|$ implica la siguiente:

4. Acotación en valor absoluto: Si f es continua en el dominio D y si K es una cota superior de $|f|$ en D , entonces:

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq K \int_D d\mathbf{x}$$

Con las mismas demostraciones que las de la proposición 2.5.1 y del teorema 2.5.2, adaptada a integrales múltiples en vez de dobles, se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 3.4.9. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea D un dominio q -dimensional descomponible en simples. Si f y g son funciones continuas en D entonces:

$$\left(\int_D f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2 \leq \left(\int_D (f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right) \cdot \left(\int_D (g(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right)$$

Teorema 3.4.10. Teorema del valor medio del cálculo integral.

Sea D un dominio tridimensional descomponible en simples y arco-conexo.¹¹ (En particular D puede ser simple.)

Si f es continua en D entonces existe algún punto $\theta_0 = \mathbf{x}_0 \in D$ tal que

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\theta_0) \cdot \int_D d\mathbf{x}$$

Al punto (o puntos) $\theta_0 = \mathbf{x}_0 \in D$ del teorema anterior se le llama *punto intermedio*, y al valor de la función f en θ_0 se le llama *valor intermedio*.

Generalizando a las definiciones 2.4.1 y 3.2.1 de área de dominios bidimensionales, y volumen de dominios tridimensionales, dados como la integral (doble o triple) en el dominio de la función idénticamente igual a 1 en él, se define lo siguiente:

Definición 3.4.11. Medida q -dimensional de conjuntos $D \subset \mathbb{R}^q$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^q$ un dominio q -dimensional descomponible en simples.

Se llama *medida (q -dimensional)* de D al número:

$$\text{medida}(D) = \int_D d\mathbf{x} = \underbrace{\int \int \dots \int_D}_{q \text{ veces}} dx_1 dx_2 \dots dx_q$$

donde $\int_D d\mathbf{x}$ es la integral q -múltiple en D de la función $f(\mathbf{x}) = 1$, idénticamente igual a 1 en D , y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ denota un punto de D en $\mathbb{R}^q$.

Se observa que siendo $1 > 0$, por la propiedad de monotonía de la integral múltiple, la medida de D es no negativa. No se definen medidas negativas en este curso.

En particular, si $D = R$ es el prisma rectangular o intervalo q -dimensional

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_q, b_q]$$

donde $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_q < b_q$ son reales fijos, entonces la medida de R es:

$$\text{medida}(R) = \underbrace{\int \int \dots \int_D}_{q \text{ veces}} dx_1 dx_2 \dots dx_q = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \dots \int_{a_q}^{b_q} dx_q$$

donde las integrales se calculan de derecha a izquierda (hemos aplicado la definición 3.4.1).

Resulta:

$$\begin{aligned} \text{medida}(R) &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \dots \int_{a_{q-1}}^{b_{q-1}} (b_q - a_q) dx_{q-1} = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \dots \int_{a_{q-2}}^{b_{q-2}} (b_{q-1} - a_{q-1}) \cdot (b_q - a_q) dx_{q-2} = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} (b_4 - a_4) \dots (b_{q-2} - a_{q-2}) \cdot (b_{q-1} - a_{q-1}) \cdot (b_q - a_q) dx_3 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} (b_3 - a_3) \cdot (b_4 - a_4) \dots (b_{q-2} - a_{q-2}) \cdot (b_{q-1} - a_{q-1}) \cdot (b_q - a_q) dx_2 = \end{aligned}$$

¹¹ D es arco conexo si para cualquier pareja de puntos p y q en D existe algún arco continuo (o curva continua, que puede ser en particular un segmento de recta o también la unión continua de una cantidad finita de segmentos de recta, llamada poligonal), que sale de p y llega a q sin salir de D .

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a_1}^{b_1} (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3) \cdot (b_4 - a_4) \dots (b_{q-2} - a_{q-2}) \cdot (b_{q-1} - a_{q-1}) \cdot (b_q - a_q) dx_1 = \\
 &= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3) \cdot (b_4 - a_4) \dots (b_{q-2} - a_{q-2}) \cdot (b_{q-1} - a_{q-1}) \cdot (b_q - a_q).
 \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\text{medida}(R) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

En particular el volumen de un prisma rectangular tridimensional es el producto de las longitudes de sus tres lados perpendiculares; y el área de un rectángulo plano es el producto de las longitudes de sus dos lados perpendiculares. En general, la medida q -dimensional de un prisma rectangular o intervalo q -dimensional, es el producto de las longitudes $b_i - a_i$ de sus q “lados perpendiculares” $[a_i, b_i]$.

4. Cambio de variables en integrales dobles y triples.

4.1. Teorema de cambio de variables.

4.1.1. Cambios de variables en dominios de $\mathbb{R}^2$.

En lo que sigue el conjunto E , contenido en el plano de variables (u, v) , es un dominio descomponible en dominios simples respecto de u o respecto de v .

Se dice que una función $\alpha : E \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^1 si es continua en E , diferenciable, con derivadas parciales continuas para todo (u, v) en el interior de E , y tal que las derivadas parciales se extienden en forma continua al borde de E .

Sea $\Phi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$, tal que $\Phi : E \mapsto \mathbb{R}^2$. Se dice que de clase C^1 si α y β lo son.

Se dice que $\Phi : E \mapsto D$ es un cambio de variables de clase C^1 si, además de todo lo anterior, se cumple:

$$D = \Phi(E) \text{ y}$$

Φ es inyectiva (y por lo tanto invertible) del interior de E al interior de D .¹²

Teorema 4.1.2. Cambio de variables en integrales dobles.

Sea $(x, y) = \Phi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$ un cambio de variables de clase C^1 que transforma $(u, v) \in E$ en $(x, y) \in D = \Phi(E)$.

Si el Jacobiano¹³

$$J(u, v) \neq 0$$

en el interior de E , entonces, para toda función continua f en D , se cumple:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{E=\Phi^{-1}(D)} f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \cdot |J(u, v)| dudv$$

Demostración: En la siguiente prueba hay varios detalles técnicos, que especificamos como llamadas al pie, cuya demostración rigurosa es engorrosa y omitimos.

Se presupone en el enunciado que E y D son descomponibles en simples; de lo contrario (hasta ahora) no tendríamos definida las integrales dobles iteradas en E o en D . No es restrictivo suponer que E es simple, ya que la integral en los dominios descomponibles en simples, por la definición 2.3.2, es la suma de las integrales en los dominios simples que lo componen; si probamos la igualdad de la tesis para todo conjunto simple E , sumando esas igualdades, se cumple para todo conjunto descomponible en simples. Consideremos $E \subset [a, b] \times [c, d]$ en el plano (u, v) , suponiendo para fijar ideas que E es simple respecto de u ; si fuera simple respecto de v los argumentos son los mismos intercambiando los roles de las variables u y v entre sí.

Sea

$$I = \iint_{E=\Phi^{-1}(D)} f(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \cdot |J(u, v)| dudv \quad (1)$$

¹²Se puede probar que, con dominio en el interior de D e imagen en el interior de E , existe y es continua la función inversa $(u, v) = (\Phi)^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

¹³Se define el Jacobiano $J(u, v)$ de la función $(x, y) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$ como el determinante de la matriz cuadrada 2×2 que tiene como primera fila (α_u, α_v) y como segunda fila (β_u, β_v) , donde α_u, α_v indica las derivadas parciales de α respecto de u y de v (y análogamente β_u y β_v). Es decir :

$$J(u, v) = \alpha_u \cdot \beta_v - \alpha_v \cdot \beta_u$$

Aplicaremos la proposición 2.1.7 que iguala la integral doble iterada I a un límite iterado de sumas de Riemann. Se cumple:

$$I = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\alpha(u_i, v_j), \beta(u_i, v_j)) \cdot |J(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \quad (2)$$

donde para cada pareja de naturales n y m mayores que uno, se eligió la partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales de longitud $\Delta u = (b - a)/n$ y la partición del intervalo $[c, d]$ en m subintervalos iguales, $\Delta v = (d - c)/m$; con respectivos puntos intermedios:

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_{i-1} < u_i < \dots < u_n = b \text{ tales que } u_{i+1} - u_i = \Delta u \text{ en el intervalo } [a, b] \quad (3)$$

$$c = v_0 < v_1 < \dots < v_{j-1} < v_j < \dots < v_m = d \text{ tales que } v_{j+1} - v_j = \Delta v \text{ en el intervalo } [c, d] \quad (4)$$

Además por convención en la igualdad (2), es $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D = \Phi(E)$; es decir, el sumando de la suma de Riemann a la derecha de la igualdad (2) es nulo si $(u_i, v_j) \notin E$.

Llamaremos $R_{i,j}$ al rectángulito en el plano u, v determinado por las particiones anteriores de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$; es decir: $R_{i,j} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$.

Aplicando el cambio de variables¹⁴ $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y)$, se obtiene $\Phi(R_{i,j})$ que es un “cuadrilátero curvo” en el plano (x, y) , con lados que no son necesariamente segmentos de recta¹⁵, sino que son las curvas imagen por Φ de los lados del rectángulo $R_{i,j}$; y con vértices que son la imagen por Φ de los cuatro vértices de $R_{i,j}$:

$$A = \Phi(u_i, v_i), \quad B = \Phi(u_{i+1}, v_j), \quad C = \Phi(u_i, v_{j+1}), \quad \text{y} \quad D = \Phi(u_{i+1}, v_{j+1}) \quad (5)$$

Aproximaremos¹⁶ el cuadrilátero curvo $\Phi(R_{i,j})$ por el paralelogramo $P_{i,j}$ de vértices A, B, C y D ; donde A, B y C son los tres primeros vértices de $\Phi(R_{i,j})$ dados en (5). Esta aproximación la denotamos con

$$\text{área } \Phi(R_{i,j}) \simeq \text{área } P_{i,j} \quad (6)$$

Por otra parte, observemos que el área de un paralelogramo $P_{i,j}$ con vértices A, B, C y D es igual a

$$\text{área } P_{i,j} = \|B - A\| \cdot \|C - A\| \cdot \sin \theta \quad (7)$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $B - A$ y $C - A$ entre sí.

¹⁴Hay previamente que extender en forma C^1 la función Φ al rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ que contiene a E en el plano u, v .

¹⁵De la hipótesis $J(u, v) \neq 0$ se puede probar que para Δu y Δv suficientemente pequeños, el cuadrilátero curvo $\Phi(R_{i,j})$ es descomponible en simples, y por lo tanto tiene definida un área y por lo tanto D (que es unión de los dominios $\Phi(R_{i,j})$) también es descomponible en simples. Las integrales dobles en D entonces son iguales a la suma de las integrales dobles en $\Phi(R_{i,j})$.

¹⁶La aproximación de $\Phi(R_{i,j})$ con $P_{i,j}$ significa que

$$\frac{\text{área } \Phi(R_{i,j}) - \text{área } P_{i,j}}{\text{área } R_{i,j}} = \frac{\text{área } \Phi(R_{i,j}) - \text{área } P_{i,j}}{\Delta u \Delta v} \xrightarrow{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow 0} 0$$

Omitimos la prueba de esta última afirmación. Observamos que ella implica que, si sustituimos el área de $\Phi(R_{i,j})$ por el área de $P_{i,j}$ en una suma de Riemann, al tomar después los límites cuando Δu y Δv tienden a cero, el error cometido tiende a cero.

Pero por otro lado, apliquemos la definición y propiedades del producto vectorial vistas en el curso de Álgebra Lineal. Si $\vec{b} \wedge \vec{c}$ es el producto vectorial de dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en $\mathbb{R}^2$, que forman ángulo θ entre sí, entonces se cumple:

$$\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \theta$$

$$\vec{b} = (x_b, y_b), \quad \vec{c} = (x_c, y_c) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \wedge \vec{c} = (0, 0, x_b y_c - y_b x_c) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = |x_b y_c - y_b x_c|$$

Luego:

$$\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \theta = |x_b y_c - y_b x_c| \quad (8)$$

Sustituimos $\vec{b} = B - A$ y $\vec{c} = C - A$ en la igualdad (8), usamos las igualdades (7) y (5), y además $\Phi(u, v) = (x, y) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$. Resulta:

$$\text{área } P_{i,j} = |x_b y_c - y_b x_c| \quad (9a)$$

donde

$$x_b = x_{B-A} = \alpha(u_{i+1}, v_j) - \alpha(u_i, v_j), \quad y_b = y_{B-A} = \beta(u_{i+1}, v_j) - \beta(u_i, v_j) \quad (9b)$$

$$x_c = x_{C-A} = \alpha(u_i, v_{j+1}) - \alpha(u_i, v_j), \quad y_c = y_{C-A} = \beta(u_i, v_{j+1}) - \beta(u_i, v_j) \quad (9c)$$

Usando el teorema del valor medio del cálculo diferencial para la función α en las igualdades (9b) y (9c), se deduce:

$$x_b = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\xi_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), \quad x_c = \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_i, \eta_j)(v_{j+1} - v_j) \quad (9d)$$

donde $\xi_i \in [u_i, u_{i+1}]$, $\eta_j \in [v_j, v_{j+1}]$. Recordando que $u_{i+1} - u_i = \Delta u$, $v_{j+1} - v_j = \Delta v$, considerando que $\Delta u, \Delta v$ se harán tender a cero dentro de las sumas de Riemann, aproximamos las igualdades en (9d) por las siguientes:

$$x_b \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), \quad x_c \simeq \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j) \quad (10a)$$

Análogamente, usando y en vez de x y usando β en vez de α se obtiene:

$$y_b \simeq \frac{\partial \beta}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), \quad y_c \simeq \frac{\partial \beta}{\partial v}(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j) \quad (10b)$$

Reemplazando las afirmaciones (10a) y (10b) en (9a) se obtiene:

$$\text{área } P_{i,j} \simeq \left| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right|_{(u_i, v_j)} \cdot \Delta u \Delta v = |J(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \quad (11)$$

Reuniendo (6) y (11) se deduce:

$$\text{área } \Phi(R_{i,j}) \simeq |J(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (2), y llamando $(x, y) = \Phi(u, v)$ se obtiene:

$$I = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \cdot \text{área } \Phi(R_{i,j})$$

Observamos que el área de $\Phi(R_{i,j})$ es igual a la integral doble¹⁷ en $\Phi(R_{i,j})$ de la función 1, luego:

$$I = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{\Phi(R_{i,j})} f(x_i, y_j) dx dy \quad (13)$$

Pero por otro lado, por la continuidad uniforme de $f \circ \Phi$ en E , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\Delta u < \delta$ y $\Delta v < \delta$, entonces¹⁸

$$|f(x_i, y_j) - f(x, y)| < \epsilon \quad \forall (x, y) \in \Phi(R_{i,j}) \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13) se concluye:

$$I = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{\Phi(R_{i,j})} f(x, y) dx dy \quad (15)$$

Observando que los dominios $\Phi(R_{i,j})$ tienen interiores dos a dos disjuntos, (porque lo tienen los rectángulos $R_{i,j}$ y Φ es un cambio de variables), podemos aplicar la propiedad de aditividad en el dominio de las integrales dobles:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{\Phi(R_{i,j})} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (16)$$

En esta última igualdad hemos usado que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$.

Luego, sustituyendo (16) en (15) y observando que la integral doble en D de la función f no depende de Δu ni Δv , se concluye:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Esta última igualdad, recordando la definición del número I en la igualdad (1), es la tesis que queríamos probar. $\square$

4.1.3. Cambios de variables en dominios de $\mathbb{R}^3$.

En lo que sigue el conjunto E , contenido en $\mathbb{R}^3$ de variables (u, v, w) , es un dominio descomponible (en dominios simples respecto a algún orden de las variables).

Se dice que una función $\phi : E \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^1 si es continua en E , diferenciable, con derivadas parciales continuas para todo (u, v, w) en el interior de E , y tal que las derivadas parciales se extienden en forma continua al borde de E .

Sea $\Phi(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$, tal que $\Phi : E \mapsto \mathbb{R}^3$. Se dice que de clase C^1 si α , β y γ lo son.

Se dice que $\Phi : E \mapsto D$ es un cambio de variables de clase C^1 si, además de todo lo anterior, se cumple:

¹⁷Como se dijo antes en otra llamada al pie, el dominio $\Phi(R_{i,j})$ es descomponible en simples.

¹⁸La desigualdad (14) vale solo si $\Phi(R_{i,j})$ no corta al borde de D porque f es continua en D e idénticamente nula fuera de D , pero quizás discontinua en el borde de D . Habría que probar que la sumas para i, j tal que $R_{i,j}$ corta al borde de D tienden a cero cuando Δu y Δv tienden a cero.

$D = \Phi(E)$ y

Φ es inyectiva (y por lo tanto invertible) del interior de E al interior de D .¹⁹

Con argumentos parecidos a los usados en el teorema 4.1.2, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.1.4. Cambio de variables en integrales triples.

Sea $(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$ un cambio de variables de clase C^1 que transforma $(u, v, w) \in E$ en $(x, y, z) \in D = \Phi(E)$.

Si el Jacobiano²⁰

$$J(u, v, w) \neq 0$$

en el interior de E , entonces, para toda función continua f en D , se cumple:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E=\Phi^{-1}(D)} f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| du dv dw$$

4.2. Ejemplos de cambio de variables. Coordenadas polares en el plano.

Ver sección 71 sub 2 del libro de Burgos, en la bibliografía al final de este texto.

Consideremos en el plano x, y , para cada punto $P = (x, y)$ distinto del origen $O = (0, 0)$, las siguientes coordenadas ρ, φ , **no cartesianas**, llamadas *coordenadas polares*, que están dadas por las siguientes definiciones (hacer dibujo):

La distancia $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ del punto $P = (x, y)$ al origen $O = (0, 0)$.

El ángulo $\varphi \in [0, 2\pi)$, medido en radianes, que forma la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ con el semieje horizontal $x \geq 0$ de las abscisas positivas.

Se cumple:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1)$$

que son las ecuaciones del cambio de variables a coordenadas polares, y valen para todos los puntos, incluso el origen. En efecto, para obtener $(x, y) = (0, 0)$, usamos $\rho = 0$ y a φ le podemos dar cualquier valor en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Para obtener las ecuaciones (1), consideramos el triángulo rectángulo OPP' , donde P' es la proyección ortogonal del punto P sobre el eje de las abscisas. Cuando el ángulo φ es agudo ($0 < \varphi < \pi/2$), observemos que el cateto adyacente al ángulo φ en el triángulo rectángulo OPP' tiene longitud x , y el cateto opuesto tiene longitud y , mientras que la hipotenusa tiene longitud ρ . Luego, por definición de coseno y seno, se tiene $\cos \varphi = x/\rho$, $\sin \varphi = y/\rho$. Estas son las igualdades (1). Para $\varphi \geq \pi/2$ hay que discutir según el cuadrante en el que se encuentra el punto P , obteniéndose que el signo de $\cos \varphi$ coincide con el signo de x ; y el signo de $\sin \varphi$ con el signo de y .

El Jacobiano $J(\rho, \varphi)$ del cambio de variables (1) es:

$$J(\rho, \varphi) = \det \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{pmatrix} \quad (2)$$

¹⁹Se puede probar que, con dominio en el interior de D e imagen en el interior de E , existe y es continua la función inversa Φ^{-1} .

²⁰Se define el Jacobiano $J(u, v, w)$ de la función $(x, y, z) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$ como el determinante de la matriz cuadrada 3×3 que tiene como primera fila $(\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w)$, como segunda fila $(\beta_u, \beta_v, \beta_w)$, y como tercera fila $(\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w)$, donde $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w$ indica las derivadas parciales de α respecto de u , de v y de w respectivamente (análogamente para las funciones β y γ).

donde x_ρ , x_φ indican las derivadas parciales respecto de ρ y de φ respectivamente, de la función $x = x(\rho, \varphi)$ dada en (1). Análogamente y_ρ e y_φ .

Desarrollando (2) se obtiene:

$$J(\rho, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \rho(\cos \varphi)^2 + \rho(\sin \varphi)^2 = \rho \geq 0$$

Por lo tanto, el Jacobiano del cambio de coordenadas a polares, excepto para el origen que corresponde a $\rho = 0$, es positivo e igual a ρ para todo punto del plano. Luego,

$$|J(\rho, \varphi)| = \rho$$

Ejemplo 4.2.1. Área de un sector circular.

Halla el área del sector de círculo de radio r comprendido entre dos semirrectas que pasan por el centro y forman ángulo α entre sí. En particular, cuando $\alpha = 2\pi$, hallar el área del círculo.

Sea S el sector de círculo señalado en el enunciado. El área de S es la integral doble siguiente:

$$\text{área}(S) = \iint_S dx dy$$

Pasando a coordenadas polares en el plano $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, se observa que

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha$$

donde r y α están fijos, y ρ y φ son las variables del sistema de coordenadas polares. Luego:

$$\text{área}(S) = \iint_S dx dy = \int_0^\alpha d\varphi \int_0^r |J(\rho, \varphi)| d\rho = \int_0^\alpha d\varphi \int_0^r \rho d\rho = \int_0^\alpha \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{\alpha r^2}{2}$$

En particular, si $\alpha = 2\pi$ obtenemos el área del círculo de radio r que es πr^2 .

Ejemplo 4.2.2. Área de la elipse.

Calcular el área encerrada por la elipse de semiejes a, b positivos. Es decir, la región D :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

El área de D es:

$$\text{área}(D) = \iint_D dx dy$$

Hacemos el cambio de variables:

$$x = au, \quad y = bv$$

Se obtiene:

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (u, v) \in E : u^2 + v^2 \leq 1$$

Por lo tanto E es un círculo en el plano u, v , incluido su interior, de radio 1.

Calculemos el Jacobiano del cambio de variables:

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab > 0$$

El Jacobiano, en este caso, es constante. Por el teorema de cambio de variables, se tiene:

$$\text{área}(D) = \iint_D dx dy = \iint_E |J(u, v)| du dv = (ab) \iint_E du dv$$

Observamos que la última integral a la derecha de la igualdad anterior es el área de E en el plano u, v ; es decir el área del círculo de radio 1, que es π , según lo visto en el ejercicio anterior. Por lo tanto se deduce:

$$\text{área}(D) = (ab) \iint_E du dv = \pi \cdot ab$$

En el caso particular que $a = b = r > 0$ el elipsoide es un círculo de radio r , cuya área es πr^2 .

Ejemplo 4.2.3. Volumen de la esfera.

Calcular el volumen de la esfera sólida

$$E : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

de centro en el origen $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$.

En el ejemplo 4.4.1, se calculará el volumen de la esfera sólida E de radio r , como integral triple de la función constante igual a 1 en E_r .

En este ejercicio calcularemos el volumen de E como integral doble de una cierta función $f(x, y) \geq 0$ en un dominio plano D . Esta integral doble es, según lo definido en 2.4.4, el volumen del sólido V_f comprendido abajo de la superficie gráfica de la función $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, y arriba del plano $z = 0$. Es decir:

$$V_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$\text{Vol.}(V_f) = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

Calcularemos el volumen de la mitad E^+ de arriba (que corresponde a $z \geq 0$) de la esfera E , y luego multiplicaremos por 2.

La semiesfera E^+ es el sólido comprendido entre el plano $z = 0$ y la gráfica de la función $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ para $(x, y) \in D$, siendo D el círculo en el plano x, y de centro en el origen y radio $r > 0$, que corresponde a la proyección de la semiesfera sobre el plano $z = 0$. Se obtiene:

$$\text{Vol.}(E) = 2\text{Vol.}(E^+) = 2 \iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares, según las ecuaciones (1) observamos (gráficamente) que para recorrer todo el dominio circular D (es un círculo, incluido su interior, del plano x, y centrado en el origen y de radio r), debemos hacer variar las coordenadas polares ρ, φ en el dominio:

$$(x, y) \in E \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Por lo tanto usando el teorema de cambio de variables (donde en vez de u, v usamos las coordenadas polares ρ, φ), se deduce:

$$\text{Vol.}(E) = 2 \iint_E \sqrt{r^2 - (\rho \cos \varphi)^2 - (\rho \sin \varphi)^2} \cdot |J(\rho, \varphi)| \, d\rho d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \cdot \rho \, d\rho \quad (3)$$

Por un lado la integral de la extrema derecha se puede resolver con el cambio $s = r^2 - \rho^2$, $ds = -2\rho d\rho$, $s = r^2$ si $\rho = 0$, y $s = 0$ si $\rho = r$. Resulta:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_{r^2}^0 \sqrt{s} ds = -\frac{1}{3} (\sqrt{s})^3 \Big|_{s=r^2}^{s=0} = \frac{r^3}{3}.$$

Sustituyendo en (3) resulta:

$$\text{Vol.}(E) = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = 2 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} d\varphi = 2 \cdot \frac{r^3}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ejemplo 4.2.4. Volumen del elipsoide.

Calcular el volumen del elipsoide sólido de semiejes a, b, c positivos, que tiene por ecuación:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

El volumen de E es

$$\text{Vol.}(E) = \iiint_E dx dy dz$$

Haciendo el cambio de variables:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$$

se obtiene:

$$(x, y, z) \in E \Leftrightarrow u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

Por lo tanto (u, v, w) varían en la esfera $\tilde{E}$ de centro en el origen del sistema de coordenadas en el espacio (u, v, w) y radio 1.

El Jacobiano del cambio de variables es

$$J(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc > 0$$

Usando el teorema de cambio de variables:

$$\text{Vol.}(E) = \iiint_E dx dy dz = \iiint_{\tilde{E}} |J(u, v, w)| du dv dw = abc \iiint_{\tilde{E}} |J(u, v, w)| du dv dw \quad (5)$$

Observamos que la integral de la derecha en (5) es el volumen del sólido $\tilde{E}$ en el espacio de coordenadas u, v, w . Pero este sólido $\tilde{E}$, vimos que es una esfera de radio 1. Entonces, por lo calculado en el ejemplo anterior, el volumen de $\tilde{E}$ es $4/3\pi$.

Se concluye:

$$\text{Vol.}(E) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot abc \quad \square$$

4.3. Coordenadas cilíndricas en el espacio.

Ver sección 71 sub 3 del libro de Burgos, en la bibliografía al final de este texto.

En lo que sigue, hacer un dibujo.

Consideremos en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ un punto $P = (x, y, z)$, y su proyección ortogonal P' sobre el plano x, y , es decir sobre el plano $z = 0$. La altura $z_{P'}$ del punto P' es cero, pero sus abscisa y ordenada son las mismas que la del punto P . Es decir: $P' = (x, y, 0)$.

Excepto cuando el punto $P = (x, y, z)$ se encuentra en el eje de las z (es decir, excepto cuando $(x, y) = (0, 0)$), el punto $P' = (x, y, 0)$ es diferente del origen. Llamemos φ al ángulo, medido en radianes entre 0 y 2π que forma la semirrecta OP' con el semieje de las x positivo. Es decir, escribimos el punto $P' = (x, y, 0)$ en coordenadas polares en el plano x, y . (Ver coordenadas polares en el plano, en la sección anterior.)

Se tiene, para el punto $P' = (x, y, 0)$: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Luego, para el punto $P = (x, y, z)$ se obtiene:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (1)$$

donde las nuevas variables son (ρ, φ, z) con $0 \leq \rho$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. La última de las nuevas variables (ρ, φ, z) es z , y coincide con la última de las viejas variables (x, y, z) . Observamos que las ecuaciones (1), valen también cuando $(x, y) = (0, 0)$ tomando $\rho = 0$ y φ cualquiera entre 0 y 2π .

Geoméricamente en el espacio, el lugar de puntos $P = (x, y, z)$ que se obtiene cuando $\rho = r$ es una constante positiva, es el lugar de puntos tales que sus proyecciones P' en el plano $z = 0$ distan la constante r del origen. Esto es: P' se mueve, al variar φ , en una circunferencia de radio r con centro del origen, del plano $z = 0$. Por lo tanto, el punto $P = (x, y, z)$ se proyecta sobre $P'(x, y, 0)$, tiene altura z real y se encuentra, cuando $\rho = r > 0$ es constante, sobre una superficie cilíndrica de base circular con radio r , superficie cilíndrica esta que es generada por rectas verticales.

Por lo anterior, las coordenadas (ρ, φ, z) , dadas por el cambio de variables (1), se llaman *coordenadas cilíndricas*.

Calculemos el Jacobiano $J(\rho, \varphi, z)$ del cambio de variables (1) a coordenadas cilíndricas en el espacio:

$$J(\rho, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho$$

Ejemplo 4.3.1. Cálculo de volumen de un sector de cilindro circular.

Sea una horma cilíndrica de queso de base circular con radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Se corta un trozo S , haciendo dos cortes verticales desde el centro de la horma hacia su borde, que forman ángulo α entre sí. Calcular el volumen del trozo S .

$$\text{Vol. } S = \iiint_S dx dy dz$$

Tomemos coordenadas cartesianas x, y, z con origen en el centro del círculo de radio r del plano de abajo del queso.

Pasando a coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, se obtiene:

$$(x, y, z) \in S \quad \Leftrightarrow \quad (\rho, \varphi, z) \in E : \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad 0 \leq z \leq h$$

Luego:

$$\begin{aligned}\text{Vol. } S &= \iiint_S dx dy dz = \iiint_E |J(\rho, \varphi, z)| d\rho d\varphi dz = \iiint_E \rho d\rho d\varphi dz = \\ \text{Vol. } S &= \int_0^r d\rho \int_0^\alpha d\varphi \int_0^h \rho dz = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha \rho h d\varphi = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha h \alpha \rho d\varphi = \frac{h\alpha r^2}{2}\end{aligned}$$

Se observa que el volumen de S es el producto de la altura h por el área $\alpha r^2/2$ de la base. (La base es el sector circular de radio r y ángulo α , cuya área es $\alpha r^2/2$, por lo visto en el ejercicio 4.2.1.)

Ejemplo 4.3.2. Cálculo de volumen de un sólido de revolución.

Sea el sólido D en el espacio, obtenido de girar alrededor del eje de las z la región plana:

$$A = \{x = 0, \quad -2 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq z^2\}$$

Dibujar D y calcular su volumen.

Primero dibujemos la región plana A . Está contenida en el plano vertical $x = 0$, o sea en el plano y, z ; limitado por arriba por la recta $x = 0, z = 1$; limitado por abajo por la recta $x = 0, z = -2$; por la izquierda por la recta $x = 0, y = 0$ (eje de las z); y por la derecha por la curva (parábola) $x = 0, y = z^2$. (Esta parábola es simétrica respecto al eje de las y , pasa por el origen y tiene concavidad hacia el semieje de $y > 0$.) Se observa que la región A tiene "vértices" en los puntos $T = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -2)$, $R = (0, 4, -2)$, $S = (0, 1, 1)$, todos del plano $x = 0$. Entre los vértices T y Q , el lado izquierdo de la región A es el segmento de recta TQ (contenido en el eje de las z). Entre los vértices Q y R , el lado de abajo de la región A es el segmento de recta horizontal QR a altura -2 , contenido en el plano $x = 0$ (plano y, z); análogamente, entre los vértices T y S , el lado de arriba de la región A es el segmento de recta horizontal TS a altura $+1$, contenido en el plano $x = 0$. Finalmente la parte de la frontera de la región A que está a la derecha de A es la parábola que va desde el vértice R hasta el vértice S , pasando por el origen, con concavidad hacia afuera de la región A .

Al girar A alrededor del eje de las z se obtiene un sólido D con tapa superior que es un disco horizontal a altura $z = 1$, de radio 1, centrado en el punto T del eje de las z , cuyo borde es la circunferencia que se genera cuando el punto S gira alrededor del eje de las z . Análogamente, la tapa inferior del sólido D es un disco horizontal a altura $z = -2$, de radio 4, centrado en el punto Q del eje de las z , cuyo borde es la circunferencia que se genera cuando el punto R gira alrededor del eje de las z . Por otra parte, las paredes o borde lateral del sólido D , es una superficie alabeada con forma de copa o de corsé, con cintura que se reduce a un punto en el origen, y que se genera cuando la parábola $x = 0, y = z^2$, que une los puntos R y S pasando por el origen, gira alrededor del eje de las z .

Para calcular el volumen de D aplicamos la definición:

$$\text{Vol.}(D) = \iiint_D dx dy dz \quad (1)$$

Encontremos, para calcular esa integral triple, las ecuaciones del sólido D .

Un punto $P = (x, y, z)$ está en el sólido D , si y solo si está en una circunferencia plana $x^2 + y^2 = r^2, z = k$, horizontal, de radio r y centrada en el punto $(0, 0, k)$ del eje de las z , que

pasa por algún punto $P_0 = (0, y_0, z_0)$ de la región plana A . (Esto significa que el punto $P = (x, y, z)$ pertenece al sólido D generado por la región plana A al girar alrededor del eje vertical de las z , pues P se obtiene de algún punto P_0 de A girando P_0 a lo largo de un arco de circunferencia horizontal centrada en el eje de las z .)

Luego, las ecuaciones que debe verificar $P = (x, y, z)$ para estar en el sólido D son:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = k, \quad 0 + y_0^2 = r^2, \quad z_0 = k, \quad -2 \leq z_0 \leq 1, \quad 0 \leq y_0 \leq z_0^2 \quad (2)$$

(Las dos primeras significan que P está en una circunferencia horizontal centrada en el eje de las z ; las dos siguientes significan que $P_0 = (0, y_0, z_0)$ está en la misma circunferencia; las dos últimas significan que P_0 está en la región plana D .)

Combinando las ecuaciones de (2), para eliminar y_0, z_0, r y k , resulta:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^4\} \quad (3)$$

Pasemos a coordenadas cilíndricas: $\Phi : \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$. Observamos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia de $P = (x, y, z)$ al eje de las z , y que φ , en cada circunferencia horizontal con centro en el eje de las z , varía entre 0 y 2π . Obtenemos, pasando (3) a coordenadas cilíndricas, las ecuaciones del conjunto $E = \Phi^{-1}(D)$:

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \varphi, z) \in E = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -2 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \rho^2 \leq z^4\} \quad (4)$$

Usamos el teorema de cambio de variables en (1):

$$\text{Vol.}(D) = \iiint_D dx dy dz = \iiint_{E=\Phi^{-1}(D)} |J(\rho, \varphi, z)| d\rho d\varphi dz = \iiint_{E=\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\varphi dz$$

Usando las ecuaciones del conjunto E dadas en (4), se obtienen los siguientes límites de integración:

$$\text{Vol.}(D) = \iiint_{E=\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-2}^1 dz \int_0^{z^2} \rho d\rho$$

En efecto, para φ y z constantes, los límites de integración de ρ dada por la última desigualdad de (4) son $0 \leq \rho \leq z^2$. (Hemos tomado raíz cuadrada positiva de $\rho^2 \leq z^4$, pues $\rho \geq 0$, debido a la definición de esta coordenada en el cambio a variables cilíndricas.)

Calculando la última integral triple iterada obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Vol.}(D) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-2}^1 dz \int_0^{z^2} \rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_{-2}^1 \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=z^2} dz = \pi \int_{-2}^1 z^4 dz = \pi \cdot \frac{z^5}{5} \Big|_{z=-2}^{z=1} = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{32}{5} \right) = \frac{33}{5} \cdot \pi \quad \square \end{aligned}$$

4.4. Coordenadas esféricas en el espacio.

Ver sección 71 sub 4 del libro de Burgos, en la bibliografía al final de este texto.

Sea $P = (x, y, z)$ un punto del espacio. Llamemos ρ a la distancia de P al origen $O = (0, 0, 0)$. Es decir:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Los puntos con $\rho = r$, donde r es una constante positiva dada, están en la superficie esférica S_r de centro en el origen O y radio r .

Para identificar cada punto $P = (x, y, z)$ de esa superficie esférica S_r , usaremos coordenadas similares a la latitud y longitud en la superficie de la Tierra.

En lo que sigue hacer una figura.

Sea $N = (0, 0, r)$ el punto llamado *polo norte* de la superficie esférica S_r , y sea $S = (0, 0, -r)$ el punto llamado *polo sur*. Sea el *eje vertical* de la superficie esférica S_r la recta que une el polo norte con el polo sur. El eje vertical coincide con el eje de las z .

Sea el *ecuador* de la superficie esférica S_r , la circunferencia que resulta de intersectar S_r con el plano $z = 0$. El plano $z = 0$ se llama *plano del ecuador*. Es el plano de las variables x, y .

Sea $P = (x, y, z)$ un punto de la superficie esférica S_r . Es decir:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

Llamamos *meridiano que pasa por P* a la semicircunferencia que resulta de intersectar la superficie esférica S_r con un semiplano vertical que contiene al punto P y al eje vertical de la superficie. El meridiano que pasa por P está bien definido para todos los puntos P de la superficie esférica S_r , excepto para los polos norte y sur. Por los polos pasan todos los meridianos.

Llamemos *meridiano de referencia*, al meridiano que pasa por el punto $x = r, y = 0, z = 0$.

Dado un punto $P = (x, y, z)$ de la superficie esférica S_r , (tal que P no sea ninguno de los polos), llamemos φ , o *longitud de P* , al ángulo que forma el meridiano que pasa por P con el meridiano de referencia, medido en radianes entre 0 y 2π .

Llamamos $P' = (x, y, 0)$ a la proyección ortogonal de $P = (x, y, z) \in S_r$ sobre el plano x, y del ecuador (plano $z = 0$). Este punto P' en general cae en el interior de la esfera de radio $r = \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y centro en el origen; el punto P' no necesariamente pertenece a la superficie esférica S_r . (Más precisamente: P' no pertenece a la superficie esférica S_r , excepto cuando el punto P está en el ecuador, en cuyo caso $P' = P$.)

Considerando el plano $z = 0$ y en él el punto $P' = (x, y, 0)$, y llamando φ a la longitud del punto $P = (x, y, z)$ definida más arriba, se observa que φ es el ángulo que forma la semirrecta OP' con el semieje positivo de las x . Luego:

$$x = \|P' - O\| \cdot \cos \varphi, \quad y = \|P' - O\| \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) se obtienen de la misma forma que se obtuvieron las ecuaciones de las coordenadas polares en el plano, en la subsección 4.2, considerando que ahora la distancia de P' al origen no se llama ρ , sino $\|P' - O\|$.

Llamemos θ o *complemento de latitud del punto* $P = (x, y, z)$ al ángulo que forma la semirrecta OP con el semieje de las $z > 0$ (semirrecta ON que une el origen con el polo norte N), medido en radianes y variando entre 0 y π .

El ángulo θ es como la latitud en la superficie de la Tierra, pero en vez de tomar como referencia de latitud 0 al ecuador, como se hace en la Tierra, tomamos como referencia de ángulo $\theta = 0$ al polo norte. Además, en vez de medirlo positivamente al movernos hacia el norte y negativamente hacia el sur, como se hace en la Tierra, nuestro ángulo θ aumenta positivamente al descender, desde el polo Norte, hacia el polo Sur. Así, el complemento de la latitud es $\theta = 0$, cuando el punto P coincide con el polo norte N , es $\theta = \pi/2$ si el punto P se encuentra sobre el Ecuador, y es $\theta = \pi$ si el punto P coincide con el polo Sur S .

En resumen:

Dados $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$ se obtiene un único punto de la superficie esférica S_r que tiene longitud φ y complemento de latitud θ .

Considerando el triángulo rectángulo OPP' , donde $P' = (x, y, 0)$ es la proyección ortogonal de $P = (x, y, z)$ sobre el plano $z = 0$, se observa que el ángulo que forman las semirrectas $\vec{OP}$ y $\vec{OP'}$ entre sí, es igual a θ (porque PP' es una recta vertical). Además el cateto PP' , adyacente al ángulo θ en el triángulo rectángulo OPP' , tiene longitud (con signo) igual a z , que es la altura del punto P' . Por otra parte la hipotenusa es la distancia de P al origen, que llamamos $\rho = r > 0$. Por lo tanto $\cos \theta = z/\rho$. El otro cateto OP' del triángulo rectángulo OPP' , que es el cateto opuesto al ángulo θ , tiene longitud $\|P' - O\|$. Por lo tanto, $\sin \theta = \|P' - O\|/\rho$

Se deduce:

$$\|P' - O\| = \rho \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta \quad (2)$$

Reuniendo las ecuaciones (1) con las ecuaciones (2), se obtiene:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (3)$$

Las coordenadas (ρ, θ, φ) se llaman *coordenadas esféricas* en el espacio. El dominio de variación de estas coordenadas es

$$0 \leq \rho, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Las ecuaciones (3) son las ecuaciones del cambio de variables de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas.

Encontremos el Jacobiano del cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando este determinante por la última fila, se obtiene:

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \cos \theta (\rho^2 \sin \theta \cos \theta) + \rho \sin \theta (\rho \sin^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta$$

Se observa que como $\theta \in [0, \pi]$, por la definición de las coordenadas esféricas, entonces $\sin \theta \geq 0$, por lo tanto $J(\rho, \theta, \varphi) \geq 0$ y se cumple:

$$|J(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \sin \theta$$

para todos los puntos del espacio.

Ejemplo 4.4.1. Volumen de un sector sólido de esfera y de la esfera sólida de radio r .

Sea una sandía esférica de radio $r > 0$. Se efectúan dos cortes verticales en la sandía, a los efectos de sacar una tajada D , cortando desde el eje vertical de la sandía hacia afuera, primero en un semiplano hacia adelante, y luego en otro semiplano que forma ángulo α con el anterior.

Calcular el volumen de la tajada D obtenida.

En particular, si el ángulo $\alpha = 2\pi$, la tajada D es toda la sandía. Calcular el volumen de toda la sandía (volumen de la esfera sólida E_r de radio r .)

Tomando el centro de la sandía como origen de un sistema de coordenadas x, y, z ortogonal cartesiano, y el eje de las z en la vertical, se tiene:

$$\text{Vol.}(D) = \iiint_D dx dy dz$$

Pasando a coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) con las ecuaciones (3) del parágrafo anterior, se tiene:

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \varphi, \theta) \in E : \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha$$

Luego, por el teorema de cambio de variables:

$$\begin{aligned} \text{Vol.}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_E |J(\rho, \varphi, \theta)| d\rho d\theta d\varphi \\ \text{Vol.}(D) &= \int_0^r d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^\alpha \rho^2 \sin \theta d\varphi = \int_0^r d\rho \int_0^\pi \alpha \rho^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \alpha \int_0^r \left(-\rho^2 \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) d\rho = 2\alpha \int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot r^3 \end{aligned}$$

Se concluye

$$\text{Vol.}(D) = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot r^3$$

En particular, sustituyendo $\alpha = 2\pi$ en la fórmula anterior, se obtiene el volumen de la esfera sólida E_r de radio r :

$$\text{Vol.} (E_r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Este resultado coincide con el hallado en el ejemplo 4.2.3.

4.5. Peso de un sólido dada su densidad puntual.

La densidad es el cociente del peso sobre el volumen, siempre que el peso de cada pedacito del sólido, por más pequeño que sea este, sea el mismo para pedacitos de igual volumen. En ese caso la densidad es constante en cada punto del sólido.

4.5.1. Peso de un sólido dada su densidad variable con el punto.

Si un sólido S tiene en cada punto (x, y, z) densidad $f(x, y, z)$, variable con el punto, entonces el peso de S es la suma de los pesos de cada trocito $R_{i,j,k}$ infinitamente pequeño, trocitos estos

que parten S . Los trocitos $R_{i,j,k}$ forman una partición de S , siendo $R_{i,j,k}$ un pequeño prisma recto de lados $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Para cada uno de esos trocitos $R_{i,j,k}$, el peso es el producto de la densidad $f(x_i, y_j, z_k)$ (supuesta constante en el trocito, porque es infinitamente pequeño), por el volumen del trocito, que es $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. Luego, se obtiene:

$$\text{Peso}(S) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{(i,j,k)=(1,1,1)}^{n,m,p} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Esta última es una suma de Riemann, como las definidas en 2.1.7. Luego, se obtiene, (adaptando a integrales triples el resultado de la proposición 2.1.7), la siguiente fórmula del peso dada la densidad:

$$\text{Peso}(S) = \iiint_S f(x, y, z) \, dx dy dz \quad \text{donde } f(x, y, z) \text{ es la densidad en el punto } (x, y, z) \in S$$

Ejemplo 4.5.2. Cálculo del peso dada la densidad.

Sea una horma cilíndrica de queso de base circular con radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Se corta un trozo S , haciendo dos cortes verticales desde el centro de la horma hacia su borde, que forman ángulo α entre sí.

El radio $r = 10 \text{ cm.}$, la altura $h = 8 \text{ cm.}$, el ángulo $\alpha = \pi/3$ radianes, y la densidad del queso en el punto (x, y, z) es

$$[0, 9]_{kg/dm^3} \cdot \frac{1}{[180]_{cm^3}} \cdot [\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2)]_{cm^3}.$$

Calcular el peso del trozo S .

Si medimos x, y, z, r, h en centímetros, el volumen quedará en cm^3 . Siendo $1 dm^3 = 10^3 cm^3$, resulta que la densidad $f(x, y, z)$ es:

$$[f(x, y, z)]_{kg./cm^3} = \left[\frac{0, 9}{10^3} \right]_{kg/cm^3} \cdot \frac{1}{[180]_{cm^3}} \cdot [\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2)]_{cm^3}$$

Y el peso de S , por la fórmula del párrafo 4.5.1, será (siempre que x, y, z, h, r se midan en cm.):

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \iiint_S \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2) \, dx dy dz$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

resulta:

$$(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (\rho, \varphi, z) \in E : 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad 0 \leq z \leq h$$

Por lo tanto:

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \iiint_S \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (z^2 - hz + h^2) \, dx dy dz =$$

$$= \iiint_E \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{\rho^2} \cdot (z^2 - hz + h^2) |J(\rho, \varphi, z)| d\rho d\varphi dz = \int_0^r d\rho \int_0^\alpha d\varphi \int_0^h \frac{5}{10^6} \cdot \sqrt{\rho^2} \cdot (z^2 - hz + h^2) \cdot \rho dz$$

Calculando la integral anterior empezando por la extrema derecha, se obtiene:

$$\begin{aligned} [\text{Peso}(S)]_{kg.} &= \frac{5}{10^6} \int_0^r d\rho \int_0^\alpha \rho^2 \cdot \left(\frac{z^3}{3} - h \frac{z^2}{2} + h^2 z \right) \Big|_{z=0}^{z=h} d\varphi = \\ &= \frac{5}{10^6} \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\alpha \left(\frac{h^3}{3} - h \frac{h^2}{2} + h^3 \right) d\varphi = \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5h^3}{6} \int_0^r \rho^2 \cdot d\rho \int_0^\alpha d\varphi = \\ [\text{Peso}(S)]_{kg.} &= \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5h^3}{6} \cdot \frac{r^3}{3} \cdot \alpha \end{aligned}$$

Sustituyendo $\alpha = \pi/3$, $r = 10 \text{ cm.}$, $h = 8 \text{ cm.}$ se obtiene:

$$[\text{Peso}(S)]_{kg.} = \frac{5}{10^6} \cdot \frac{5 \times 8^3}{6} \cdot \frac{10^3}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 0,746 \text{ kg.}$$

5. Integrales dobles de Riemann.

El desarrollo de la teoría de integrales múltiples de Riemann lo haremos con detalle para integrales dobles. Al final se explica cómo generalizar los resultados para integrales triples y múltiples en general.

5.1. Sumas de Riemann.

Sea el rectángulo compacto

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

donde $a < b$ y $c < d$ son números reales fijos.

Sea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Sea $\Delta x = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

Sea $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_m = d$ una partición del intervalo $[c, d]$ en subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de longitud $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Sea

$$\Delta y = \max_{1 \leq j \leq m} \Delta y_j$$

Esas particiones de los segmentos $[a, b]$ y $[c, d]$ en los ejes de las x y de las y respectivamente, definen una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, formada por nm rectángulitos compactos

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad \text{de lados con longitudes } \Delta x_i, \Delta y_j$$

La unión de todos los rectángulitos $R_{i,j}$ es todo R , y tienen interiores dos a dos disjuntos.

Definición 5.1.1. Norma de una partición. Se llama *norma de la partición* $\mathcal{P}$ del rectángulo R en los rectángulitos $R_{i,j}$ (definidos como antes) al número real positivo:

$$\|\mathcal{P}\| = \|(\Delta x, \Delta y)\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \max_{i,j} \{\text{diagonal de } R_{i,j}\}$$

(Hacer un dibujo tomando en horizontal el eje de las x y en vertical el de las y , en ellos los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ (por ejemplo para mayor comodidad tomar $0 < a < b$ en el eje de las x y $0 < c < d$ en el eje de las y). Partir uno de esos intervalos en, por ejemplo, $n = 3$ subintervalos, y el otro en, por ejemplo, $m = 5$ subintervalos. Trazar los segmentos de recta verticales $x = x_i$ constante y que están dentro del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y los segmento de recta horizontales $y = y_j$ constante dentro de R . Queda la partición de R en los nm rectángulitos $R_{i,j}$ descriptos antes.)

Definición 5.1.2. Elección “t” de puntos intermedios subordinada a una partición.

Sea dada una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo R en nm rectángulitos $R_{i,j}$ como fue definida al principio de la sección 5.1. Una *elección de puntos intermedios subordinada a la partición* $\mathcal{P}$, que denotamos²¹ como $\mathbf{t}$, es una colección de mn puntos $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, cada uno perteneciente al rectángulito $R_{i,j}$ respectivo en $R \subset \mathbb{R}^2$. Es decir:

$$\mathbf{t} = \{(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad \text{naturales.}$$

²¹Hay que estar advertido que $\mathbf{t}$ no es un número real.

Se denota con $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ a todas las elecciones posibles de puntos intermedios subordinadas a la partición $\mathcal{P}$.

Cuando se escribe para cierta afirmación A lo siguiente:

$$A \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

estamos indicando que la afirmación A es verdadera para toda elección de puntos intermedios subordinada a la partición $\mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ una partición fija dada de antemano.

Sea $f(x, y)$ una función acotada (no necesariamente continua) en R .

Definición 5.1.3. Sumas de Riemann.

Dadas:

- Una función $f(x, y)$ acotada en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
- Una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo R en nm rectángulos $R_{i,j}$, para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, con lados de longitudes Δx_i y Δy_j .
- Una elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ de puntos intermedios $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{i,j}$.

Se llama *suma de Riemann de f en la partición $\mathcal{P}$ y en los puntos intermedios $\mathbf{t}$* , al número real:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

A veces, en la suma de Riemann a la derecha de la igualdad anterior, se sustituye el producto $\Delta x_i \Delta y_j$ por *área* $R_{i,j}$, ya que el producto de las longitudes de los lados de un rectángulo es igual a su *área*.

Intepretación geométrica de la suma de Riemann. (Hacer una figura tomando en el plano horizontal x, y el rectángulo R con su partición $\mathcal{P}$ en nm rectángulos, y en el eje vertical z . Dibujar la superficie gráfica $z = f(x, y)$ de un función f continua y positiva en R .)

Cada sumando $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$ de la suma de Riemann, cuando $f \geq 0$, es el volumen del prisma rectangular en el espacio x, y, z con base en el rectángulo $R_{i,j}$ del plano $z = 0$ y altura igual a $z_{i,j} = f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$. Este punto $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, z_{i,j})$, que está en la tapa horizontal superior del prisma, se encuentra sobre la (superficie, si f es continua) gráfica de f , y se proyecta verticalmente sobre el punto $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de su base (el rectángulo $R_{i,j}$).

La suma de Riemann es entonces igual al volumen de la unión de todos esos prismas rectangulares. Si f es continua, y los rectángulos $R_{i,j}$ en la base, son pequeños, demostraremos que las sumas de Riemann tienden a un número A . Intepretamos en ese caso que la unión de los prismas rectangulares aproxima en volumen al sólido V_f que se encuentra abajo de la superficie gráfica $z = f(x, y)$, y arriba del plano $z = 0$.

5.2. Integral de Riemann de funciones acotadas.

Definición 5.2.1. Límite de sumas de Riemann.

Dada una función acotada f en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, se llama *límite de las sumas de Riemann de f en R* , a un número A que, si existe, cumple lo siguiente:

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$||\mathcal{P}|| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - A| < \epsilon \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

Cuando existe tal número A se lo denota como:

$$A = \lim_{||\mathcal{P}|| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Definición 5.2.2. Integral de Riemann en un rectángulo.

Dada una función acotada f en el rectángulo compacto R , se dice que f es *integrable Riemann en R* si existe el límite A de las sumas de Riemann como en la definición 5.2.1. A dicho límite A se le llama *integral de Riemann de f en R* y se le denota²² por convención, como:

$$A = \lim_{||\mathcal{P}|| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R f(x, y) dx dy$$

(Obsérvese que la igualdad anterior **no** es un teorema, sino una simple convención de notación.)

Definición 5.2.3. Integral de Riemann en un conjunto acotado.

Dada una función acotada f en un conjunto D contenido en el rectángulo compacto R , se dice que f es *integrable Riemann en D* si es integrable Riemann en R (como en la definición 5.2.2), la función extendida definida como $f(x, y)$ si $(x, y) \in D$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$.

A dicha integral Riemann en R de la función extendida se le llama *integral de Riemann de f en D* y se le denota como:

$$\lim_{||\mathcal{P}|| \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$.

(Obsérvese que la igualdad anterior **no** es un teorema, sino una simple convención de notación.)

Nota 5.2.4. No toda función *acotada* es integrable Riemann. Por ejemplo la función f en el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ dada por $f(x, y) = 1$ si las coordenadas x e y son números racionales; y $f(x, y) = 0$ si las coordenadas x e y son números irracionales; es acotada, pero se puede verificar fácilmente que no es integrable Riemann.

Veremos como consecuencia del teorema de Riemann-Lebesgue, (teorema 5.4.1), que toda función *continua* en un rectángulo compacto R (que es un caso particular de función acotada) es integrable Riemann en el rectángulo; y que toda función *continua en un dominio D descomponible en simples*, es integrable Riemann en D .

Sin embargo, advertimos que no toda función continua en un dominio cualquiera D , aunque este sea compacto y la función resulte ser acotada, es integrable Riemann en D . Eso depende de la forma de D , en especial de la “medida” del borde de D .

²²En esta sección la notación $\iint_R f(x, y) dx dy$ **no** indica integral doble iterada como en la definición 2.1.2. Indica el límite, cuando existe, de las sumas $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})$ de Riemann de f . Este límite cuando existe, es llamado *integral de Riemann de f* .

Al final de esta sección, en el teorema 5.5.1, probaremos que son iguales (cuando existen ambas), la integral de Riemann y la integral doble iterada de f . Por eso usamos la misma notación para ambas.

Nota 5.2.5. En el capítulo 4, párrafo 53, del libro de Burgos (ver referencia en la Bibliografía al final de este texto) se da otra manera de definir integral de Riemann de f en un rectángulo R . La del libro de Burgos es la más usual en los textos.

Se definen primero las sumas superior e inferior de Darboux de f en particiones de R en rectángulitos $R_{i,j}$, en forma similar a nuestra definición 5.1.3, pero sustituyendo $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ por el supremo e ínfimo respectivamente de f en $R_{i,j}$.

Se llama integral superior e inferior de f en R al ínfimo de las sumas superiores y al supremo de las sumas inferiores de Darboux, respectivamente, cuando se toman todas las particiones $\mathcal{P}$ de R .

Se define entonces:

f es integrable Riemann en R si las integrales superior e inferior de f en R coinciden; en ese caso se llama integral de Riemann de f en R al valor común de las integrales superior e inferior.

Esta otra definición de integral de Riemann resulta ser equivalente a la definición 5.2.2 que damos nosotros en este texto, como se demuestra en el párrafo 58 del libro de Burgos.

5.3. Conjuntos de medida nula.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^2$. (A puede ser en particular el conjunto vacío.)

Una colección $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ de N rectángulos R_n de $\mathbb{R}^2$, se dice que es un *cubrimiento finito* por rectángulos de A si

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N R_n$$

Una sucesión $\{R_n\}_{n \geq 1}$ de rectángulos R_n de $\mathbb{R}^2$, se dice que es un *cubrimiento numerable* por rectángulos de A si

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

(La unión en la afirmación de arriba denota, por convención, al conjunto de todos los puntos que pertenece a alguno de los rectángulos R_n , para algún valor natural de $n \geq 1$.)

Por convención, si $\{R_n\}_{1 \leq n \leq N}$ es un *cubrimiento finito*, se dice también que es *numerable*, definiendo $R_n = \emptyset$ para $n > N$, y definiendo $\text{área}(R_n) = \text{área}(\emptyset) = 0$ si $n > N$.

Definición 5.3.1. Conjuntos de medida nula. Se dice que A tiene *medida nula* si para cada $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento numerable por rectángulos $\{R_n\}$ de A tal que la suma de sus áreas es menor que ϵ ; es decir:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \{R_n\}_{n \geq 1} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{área} R_n < \epsilon$$

Es sencillo demostrar la siguiente proposición:

Proposición 5.3.2. Propiedades de los conjuntos de medida nula.

- 1) Si A es un conjunto de medida nula y si $B \subset A$ entonces B también es de medida nula.
- 2) Si A y B son conjuntos de medida nula, entonces $A \cup B$ también lo es.

Ahora damos el ejemplo de conjunto de medida nula que usaremos en la subsección siguiente:

Proposición 5.3.3. Medida nula de las curvas gráficas de funciones continuas.

1) La curva gráfica $\{y = \phi(x), \quad x \in [a, b]\}$, de cualquier función continua $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula.

2) La curva gráfica $\{x = \eta(y), \quad y \in [c, d]\}$, de cualquier función continua $\eta : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ es un conjunto de medida nula.

Demostración: La afirmación 2) es la misma afirmación 1), en la que simplemente se ha permutado el nombre de las variables x y y entre sí. Entonces, basta demostrar 1).

Sea $A = \{y = \phi(x), \quad x \in [a, b]\}$ el conjunto curva gráfica de ϕ .

Como ϕ es continua en el compacto $[a, b]$ entonces es uniformemente continua. Por lo tanto para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \epsilon^* \quad (1)$$

Tomemos una partición fija del intervalo $[a, b]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N = b$$

en N intervalitos $[x_{i-1}, x_i]$ iguales de longitud $\Delta x = (b - a)/N = x_i - x_{i-1}$, tomando fijo un valor natural de N suficientemente grande para que $(b - a)/n < \delta$. Entonces:

$$\Delta x < \delta \quad (2)$$

Consideremos para cada $i = 1, 2, \dots, N$ el rectángulo

$$R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [\phi(x_i) - \epsilon^*, \phi(x_i) + \epsilon^*] \quad (3)$$

Afirmamos que la unión de estos N rectángulos contiene al conjunto A , es decir $\{R_i\}_{1 \leq i \leq N}$ es un cubrimiento finito de A . En efecto, dado $(x, y) \in A$, se cumple

$$y = \phi(x)$$

Además existe algún intervalito $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición donde está la abscisa x dada. Es decir

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4)$$

Entonces la distancia entre x y x_i es menor o igual que la longitud Δx del intervalito $[x_{i-1}, x_i]$; en otras palabras:

$$|x - x_i| < \Delta x \quad (5)$$

Reuniendo (5) con (2) y (1), se deduce:

$$|x - x_i| < \delta, \quad |\phi(x) - \phi(x_i)| < \epsilon^*$$

De lo anterior se deduce que

$$\phi(x) \in [\phi(x_i) - \epsilon^*, \phi(x_i) + \epsilon^*] \quad (6)$$

Reuniendo las afirmaciones (3) (4) y (6) se obtiene:

$$(x, y) = (x, \phi(x)) \in R_i$$

Hemos demostrado que cada punto $(x, y) \in A$ está contenido en alguno de los rectángulos R_i . Se concluye que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N R_i$$

En otras palabras la colección R_i es un cubrimiento finito de A por rectángulos.

Ahora solo falta demostrar que la suma de las áreas de los rectángulos R_i puede hacerse menor que ϵ , para cada valor $\epsilon > 0$ dado, arbitrario.

Calculemos la suma de las áreas de los rectángulos R_i dados en (3).

$$\begin{aligned} \text{área}(R_i) &= (x_i - x_{i-1}) \cdot \epsilon^* = \Delta x \cdot \epsilon^* \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^N \text{área}(R_i) &= \sum_{i=1}^N \Delta x \cdot \epsilon^* = \epsilon^* \sum_{i=1}^N \Delta x = \epsilon^* \cdot \Delta x \cdot \sum_{i=1}^N 1 = \epsilon^* \cdot \frac{b-a}{N} \cdot N = \epsilon^* \cdot (b-a) < \epsilon \end{aligned}$$

donde dado $\epsilon > 0$ se eligió $\epsilon^* > 0$ tal que $\epsilon^* < \epsilon/(b-a)$. Esto es posible porque toda la construcción anterior fue hecha para un valor genérico $\epsilon^* > 0$, cualquiera sea este. $\square$

5.4. Teorema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 5.4.1. Teorema de Riemann-Lebesgue.

Si f es acotada en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y sus puntos de discontinuidad (si existen) están contenidos en un conjunto C de medida nula, entonces existe el límite de las sumas de Riemann (integral de Riemann de f en R).²³

Demostraremos una versión particular del teorema de Riemann-Lebesgue, agregando como hipótesis que el conjunto C que contiene las discontinuidades de f sea compacto. En lo que sigue sólo usaremos el teorema de Riemann-Lebesgue en este caso particular.

Demostración de una versión restringida del teorema 5.4.1, asumiendo que C es compacto:

Para demostrar que existe el límite de las sumas de Riemann, como en la definición 5.2.1, alcanza probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda pareja de particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ en rectángulos de R se cumple la afirmación (1) que está más abajo:

(A probar:)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que:}$$

$$\|\mathcal{P}_1\| < \delta, \|\mathcal{P}_2\| < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon \quad \forall \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \quad (1)$$

En efecto, si probamos (1), entonces en particular para $\epsilon = 1/2$ existe un $\delta_1 > 0$, existe (elegimos) una partición $\mathcal{P}_1$ con norma menor que δ_1 , y existe (elegimos) una familia $\mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1)$ de puntos

²³También es cierto el recíproco. Una función f acotada en el rectángulo R es integrable Riemann en R si y solo si es continua en R excepto a lo sumo en un conjunto C de medida nula.

intermedios subordinada a $\mathcal{P}_1$, tales que, para cualquier otra partición $\mathcal{P}$ con norma también menor que δ , y para cualquier elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ se cumple:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \in [\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - 1/2, \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) + 1/2] = I_1, \text{ con longitud de } I_1 = 1$$

Análogamente, para $\epsilon_n = 1/(2n)$, con $n \geq 2$ natural, todas las particiones $\mathcal{P}$ con diámetro menor que $\delta_n < \delta_{n-1} < \dots < \delta_1$, y toda elección $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$, definen una suma de Riemann $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})$ que está en un intervalo compacto I_n de longitud igual a $2\epsilon_n = 1/n$, y contenido en I_{n-1} . La sucesión de intervalos compactos de reales I_n es una sucesión encajada de intervalos con longitudes que tiende a cero. Entonces, por la completitud de la recta real, la intersección de todos esos intervalos define un único real A que es el límite de las sumas de Riemann buscado.

Ahora probemos (1):

Primer caso: f es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces es uniformemente continua en R (pues R es compacto):

Dado $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon^* \quad (2)$$

Dadas dos particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con norma menor que δ , consideramos la partición producto

$$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$$

formada por las intersecciones (cuando no son vacías) dos a dos de todos los rectángulitos de $\mathcal{P}_1$ con todos los de $\mathcal{P}_2$.

Afirmamos que, dado $\epsilon > 0$, si se elige

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon}{2(b-a)(d-c)}$$

entonces se cumple lo siguiente:

$$\text{A probar: } |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| < \epsilon/2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \quad \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad (3)$$

$$\text{A probar: } |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon/2 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \quad (4)$$

Una vez probadas (3) y (4) aplicando la propiedad triangular se obtiene

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| \leq |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| + |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

con lo cual quedará demostrada la tesis (1) como queremos.

Ahora probemos (3) y (4). Observamos que la afirmación (4) es la misma afirmación (3) sustituyendo $\mathcal{P}_2$ por $\mathcal{P}_1$. Por lo tanto basta demostrar (3).

Por la definición de suma de Riemann en 5.1.3:

$$\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \text{área}(R_{i,j}) \quad (6)$$

donde $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{i,j}$ y $\{R_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = \mathcal{P}_1$

Por otra parte, tenemos la partición $\mathcal{P} = \{S_k\}_{k=1,2,\dots,N}$. (Aquí no nombramos los N rectángulos S_k según dos índices i, j que numeran los intervalos en los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente, sino que indexamos S_k ordenados con un sólo índice natural k que varía desde 1 hasta N en el orden que se desee.) La suma de Riemann correspondiente a $\mathcal{P}$ es:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^N f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \cdot \text{área}(S_k) \quad (7)$$

donde $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in S_k$.

Sabemos que la partición $\mathcal{P}$ se obtuvo de intersectar todos los rectángulos de la partición $\mathcal{P}_1$ con los de otra partición. Entonces cada rectángulo $R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}_1$ es igual a la unión de una cierta cantidad finita de rectángulos $S_k \subset R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}$. Es decir:

$$R_{i,j} = \bigcup_{k: S_k \subset R_{i,j}} S_k, \quad \text{área}(R_{i,j}) = \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} \text{área}(S_k) \quad (8)$$

Entonces, para cada uno de estos rectángulos $S_k \subset R_{i,j}$ la elección de puntos intermedios $\mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$ define

$$(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \in S_k \subset R_{i,j} \quad (9)$$

Reuniendo (6), (7) y (8) se obtiene:

$$\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} (f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)) \cdot \text{área}(S_k)$$

Tomando valor absoluto, y usando la propiedad triangular para el valor absoluto de una suma, se deduce:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)| \cdot \text{área}(S_k) \quad (10)$$

Recordando por (9) que los puntos $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ y $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ están ambos en el mismo rectángulo $R_{i,j}$ de la partición $\mathcal{P}_1$, y que la norma de esta partición es menor que δ , se deduce:

$$\|(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\| < \delta$$

Luego, aplicando la afirmación (2) se deduce que:

$$|f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)| < \epsilon^*$$

Sustituyendo esta última desigualdad en (10) se obtiene:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \epsilon^* \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k: S_k \subset R_{i,j}} \text{área}(S_k)$$

$$|\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \epsilon^* \cdot \text{área}([a, b] \times [c, d]) = \epsilon^* \cdot (b - a)(d - c) = \frac{\epsilon}{2}$$

Esta última desigualdad prueba la afirmación (3) como queríamos demostrar, en el caso de una función f continua en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$.

Segundo caso: f no es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$ estando sus puntos de discontinuidad contenidos en C , donde C es un conjunto compacto y de medida nula.

Reduciremos la demostración de la afirmación (1) a su validez, ya probada, en el primer caso. Para ello construiremos una función auxiliar g que sea continua en R , y que difiera de f solo en un conjunto de área muy pequeña. Aplicaremos el resultado ya probado (1) para la función g continua; y comparando las sumas de Riemann de f con las de g , deduciremos la tesis (1) para f .

Dado $\epsilon > 0$, elegiremos al final un valor de $\epsilon^* > 0$ adecuado, en función de ϵ .

Para todo $\epsilon^* > 0$, por definición de conjunto de medida nula, existe un cubrimiento finito²⁴ de C con N rectángulos compactos $\{S_k\}_{k=1,2,\dots,N}$, cuya unión llamamos S , y cuyas áreas suman menos que ϵ^* . No es restrictivo suponer que C está contenido en el interior²⁵ de S . En otras palabras:

$$C \subset \text{interior}(S) \quad S = \bigcup_{k=1}^N S_k, \quad \sum_{k=1}^N \text{área}(S_k) < \epsilon^* \quad (11)$$

Aplicando el lema 2.2.13, existe una función chichón $\varphi(x, y)$ continua para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi = 0$ fuera del abierto $V = \text{interior } S$, es igual a 1 en el compacto C y está comprendida entre 0 y 1 para los puntos $(x, y) \in V \setminus C$.

Construyamos la función auxiliar

$$g(x, y) = (1 - \varphi(x, y)) \cdot f(x, y) \quad \forall (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$$

Como g se anula en C y es igual al producto de funciones continuas fuera de C (producto que tiende a cero cuando el punto (x, y) tiende a un punto de C , pues el factor $1 - \varphi(x, y)$ así lo hace, y el otro factor $f(x, y)$ es acotado), entonces $g(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$.

Además g cumple:

$$g(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in C, \quad g(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in R \setminus S \quad (12a)$$

$$0 \leq |g(x, y)| \leq |f(x, y)| \quad \forall (x, y) \in R \quad (12b)$$

Siendo g continua en R aplicamos la afirmación (1) probada en el primer caso. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{P}_1\| < \delta, \|\mathcal{P}_2\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(g, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(g, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2) \quad (13)$$

²⁴Siendo C compacto, de todo cubrimiento numerable de C con rectángulos, puede extraerse un cubrimiento finito.

²⁵En efecto si se toman rectángulos $\tilde{S}_k$ alargando cada lado de S_k (para la derecha y para la izquierda los dos lados horizontales, y para arriba y para abajo los dos lados verticales) una cantidad $\tilde{\epsilon} > 0$ tal que $\tilde{\epsilon} < 1$, entonces C queda contenido en el interior de la unión de los rectángulos $\tilde{S}_k$. Además dado $\epsilon > 0$ la suma de los áreas de los rectángulos $\tilde{S}_k$ puede hacerse menor que 2ϵ . En efecto: el área de cada uno de los nuevos rectángulos $\tilde{S}_k$ es igual $\text{área}(S_k) + \text{Perím}(S_k) \cdot \tilde{\epsilon} + 4\tilde{\epsilon}^2 \leq \text{área}(S_k) + \text{Perím}(S_k) \cdot \tilde{\epsilon} + 4\tilde{\epsilon}$. Luego

$$\sum_{k=1}^N \text{área}(\tilde{S}_k) \leq \sum_{k=1}^N \text{área}(S_k) + \tilde{\epsilon} \sum_{k=1}^N (\text{Perím}(S_k) + 4) < \epsilon + \tilde{\epsilon} \sum_{k=1}^N (\text{Perím}(S_k) + 4) = 2\epsilon$$

Para obtener la última igualdad hemos elegido, dado $\epsilon > 0$, el número $\tilde{\epsilon} = \epsilon / \sum_{k=1}^N (\text{Perím}(S_k) + 4)$.

Observamos que si para un valor $\delta_0 > 0$ de δ se cumple la afirmación (13), entonces para todo otro valor positivo menor que δ_0 también se cumple (13). Por lo tanto, en lo sucesivo, podemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño como se necesite.

Para probar la afirmación (1) para f alcanza con probar que:

$$\|\mathcal{P}\| < \delta, \Rightarrow |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P}) \quad (\text{a probar}) \quad (14)$$

En efecto, una vez probada las afirmación (14), por la propiedad triangular del valor absoluto se deduce que

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| &\leq |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(g, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1)| + \\ &+ |\sigma(g, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(g, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| + |\sigma(g, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| \end{aligned}$$

Aplicando (13), y la desigualdad (14) a la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\|\mathcal{P}_1\| < \delta, \|\mathcal{P}_2\| < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathcal{P}_1, \mathbf{t}_1) - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \mathbf{t}_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \forall \mathbf{t}_1 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{t}_2 \in \mathbf{T}(\mathcal{P}_2)$$

Esa es justamente la afirmación (1) que queríamos probar.

Entonces basta probar (14) para finalizar la demostración del teorema.

Por la definición de las sumas de Riemann en 5.1.3, y por la propiedad traingular del valor absoluto se tiene:

$$|\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| = |\sigma(f - g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| \leq \sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) \quad (15)$$

Siendo la partición $\mathcal{P}$ formada por nm rectángulos $R_{i,j}$, la suma de Riemann de $|f - g|$ es:

$$\sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) = \sum_{i,j=1,1}^{n,m} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \text{área} R_{i,j} \quad (16)$$

La partición $\mathcal{P}$ tiene norma menor que $\delta > 0$, entonces cada uno de los rectángulos $R_{i,j}$ tiene su diagonal con longitud menor que δ .

Retomemos ahora los N rectángulos S_k que teníamos al principio, y que cumplen (11) y (12).

Los nm rectángulos $R_{i,j}$ se clasifican en dos categorías:

1) O bien $R_{i,j}$ no intersecta ningún S_k , y por lo tanto no interseca a su unión S ; es decir $R_{i,j}$ está contenido en $R \setminus S$. Llamaremos A al conjunto de índices (i, j) para los cuales ocurre eso. Se cumple, aplicando (12 a):

$$(i, j) \in A \Rightarrow R_{i,j} \subset R \setminus S \quad |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| = 0$$

Sumando entonces:

$$\sum_{(i,j) \in A} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} = 0 \quad (17)$$

2) O bien $R_{i,j}$ intersecta a algún S_k , y por lo tanto todos sus puntos distan menos que δ de algún punto de S_k . (Recordar que $\delta > 0$ es mayor que la norma de la partición $\{\mathcal{P}\}$; por lo tanto es mayor que la diagonal de todos sus rectángulos $R_{i,j}$.)

Entonces $R_{i,j}$ está contenido en un rectángulo $\tilde{S}_k$, un poco más grande que S_k , con el mismo centro que S_k , y lados de longitud igual a la longitud de los lados de S_k más 2δ . (Esto es $\tilde{S}_k$ se obtiene alargando cada lado horizontal de S_k una distancia δ para la izquierda y para la derecha, y lo mismo con cada lado vertical para arriba y para abajo).

Por lo tanto se cumple:

$$\sum_{(i,j) \notin A} \text{área} R_{i,j} \leq \sum_{k=1}^N \text{área} \tilde{S}_k \leq \sum_{k=1}^N \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta^2$$

Si $\delta > 0$ se elige menor que 1 y menor que $\epsilon^* / \sum_{k=1}^N (\text{perím.} S_k + 4)$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \notin A} \text{área}(R_{i,j}) &\leq \sum_{k=1}^N \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta \leq \sum_{k=1}^N \text{área} S_k + \text{perím.} S_k \delta + 4\delta = \\ &= \sum_{k=1}^N \text{área} S_k + \sum_{k=1}^N (\text{perím.} S_k + 4) \delta < \epsilon^* + \sum_{k=1}^N \text{área} S_k \end{aligned}$$

Aplicando (11) a esta última desigualdad, se concluye:

$$\sum_{(i,j) \notin A} \text{área}(R_{i,j}) < 2\epsilon^*$$

Usando esta última desigualdad, aplicando (12b) y eligiendo $K > 0$ que sea una cota superior de $|f|$ en R (por hipótesis f es acotada en R), se deduce:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \notin A} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} &\leq \sum_{(i,j) \notin A} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| + |g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} \leq \\ &\leq \sum_{(i,j) \notin A} 2|f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} \leq 2K \cdot \sum_{(i,j) \notin A} \text{área} R_{i,j} < 4K\epsilon^* \quad (18) \end{aligned}$$

Reuniendo las desigualdades (17) y (18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1,1}^{n,m} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} &= \sum_{(i,j) \in A} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} + \\ &+ \sum_{(i,j) \notin A} |f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) - g(\bar{x}_i, \bar{y}_j)| \cdot \text{área} R_{i,j} < 0 + 4K\epsilon^* \end{aligned}$$

Aplicando (16) y esta última desigualdad:

$$\sigma(|f - g|, \mathcal{P}, \mathbf{t}) < 4K\epsilon^*$$

Luego, por (15):

$$|\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < 4K\epsilon^* = \frac{\epsilon}{3}$$

Para obtener la última desigualdad hemos elegido $\epsilon^* = \epsilon / (12 \cdot K)$. Luego concluimos:

$$\|\mathcal{P}\| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathbf{t}) - \sigma(g, \mathcal{P}, \mathbf{t})| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T}(\mathcal{P})$$

que es la afirmación (14) que queríamos probar. $\square$

Corolario 5.4.2. Corolario del Teorema de Riemann-Lebesgue.

Si f es continua en el dominio D , simple respecto de x o respecto de y , entonces existe el límite de las sumas de Riemann (integral de Riemann de f en el dominio D).

Demostración: Por la definición de integrabilidad Riemann en $D \subset \mathbb{R}$ (definición 5.2.3), hay que demostrar que la función f extendida, definiendo por convención $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$, es integrable Riemann en el rectángulo R .

f es continua en D por hipótesis, y su extensión es continua en el exterior de D porque es idénticamente nula.

Entonces los puntos de discontinuidad de f en R , si existen, están en la parte de la frontera ∂D , que no es borde del rectángulo R . Esta frontera está formada por las gráficas de funciones $y = \phi(x)$ e $y = \psi(x)$ continuas (si D es simple respecto de x , ver definición 2.1.1), o por las gráficas de funciones $x = \eta(y)$ y $x = \xi(y)$ continuas (si D es simple respecto de y , ver definición 2.2.2).

Por la proposición 5.3.3, las gráficas de funciones continuas de una variable, tienen medida nula en el rectángulo bidimensional R .

De lo anterior se deduce que f es continua en R excepto a lo sumo en un conjunto que tiene medida nula (y es compacto).

Luego, por el teorema de Riemann-Lebesgue (teorema 5.4.1), la función f , extendida como la función nula fuera de D , es integrable Riemann en R , y por lo tanto la función f dada es integrable Riemann en D , como queríamos demostrar. $\square$

5.5. Teorema de Fubini.

En la sección 2 vimos el teorema de Fubini para integrales dobles iteradas (teorema 2.2.12). Ese mismo resultado está contenido en el siguiente teorema, y da otra demostración del resultado 2.2.12, probando no solo que las dos integrales iteradas son iguales entre sí, sino además que son iguales a la integral de Riemann.

Por ese motivo se emplea la siguiente notación.

Notación: Se usa el mismo símbolo

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

para referirse a la integral de Riemann, o a cualquiera de las integrales iteradas, sin importar el orden de las variables en que se integra.

Teorema 5.5.1. Teorema de Fubini para integrales de Riemann.

a) *Si f es continua en el dominio D simple respecto de x (o respecto de y), entonces la integral doble iterada de f (definida en 2.1.2 o en 2.2.3), es igual a la integral de Riemann de f en D .*

b) *Si f es continua en el dominio D simple en cualquier orden (es decir respecto de x y respecto de y a la vez), entonces las dos integrales dobles iteradas de f (definidas en 2.1.2 y 2.2.3), son iguales entre sí, (se puede cambiar el orden de integración de las variables), y su valor es la integral de Riemann de f en D .*

Demostración: La parte b) es una consecuencia inmediata de la parte a): en efecto, por la parte a) cada una de las dos integrales iteradas es igual a la integral Riemann. Por lo tanto son iguales entre sí.

Para probar la parte a) consideramos el resultado del Corolario 5.4.2 del teorema de Riemann-Lebesgue: la función f es integrable Riemann en D . Entonces por definición de integrabilidad Riemann (ver definición 5.2.2), existe el límite A de las sumas de Riemann σ de f :

$$A = \lim_{\|(\Delta x, \Delta y)\| \rightarrow 0} \sigma \quad (1)$$

Hemos usado la definición 5.2.2, donde aplicamos la igualdad que define la norma de una partición $\|\mathcal{P}\| = \|(\Delta x, \Delta y)\|$.

Por otro lado, por la proposición 2.1.7 (si el dominio D es simple respecto de x) o por la proposición 2.2.5 (si el dominio D es simple respecto de y) se obtiene que el límite iterado de las sumas de Riemann existe y es igual a la integral doble iterada I de f .

El objetivo es probar que

$$A = I \quad \text{a probar.}$$

Para fijar ideas supongamos que D es simple respecto de x , contenido en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y usemos la proposición 2.1.7:

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sigma$$

Esto quiere decir que para toda partición $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ fija en $[a, b]$, existe el límite

$$F(\{x_i\}) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sigma \quad (2)$$

y que a su vez existe

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\{x_i\}) \quad (3)$$

Por (1), para todo $\epsilon^* > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(\Delta x, \Delta y)\| < \delta \Rightarrow |\sigma - A| < \epsilon^* \quad (4)$$

Tomemos el límite cuando $\Delta y \rightarrow 0$ en la desigualdad (4) con la partición $\{x_i\}$ del intervalo $[a, b]$ fija, cumpliendo $\Delta x < \delta/2$ y la partición del intervalo $[c, d]$ cualquiera cumpliendo $\Delta y < \delta/2$ y $\Delta y \rightarrow 0$. Resulta:

$$\Delta x < \delta/2 \Rightarrow \left| \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sigma - A \right| \leq \epsilon^* < \epsilon$$

En la última desigualdad hemos elegido, dado $\epsilon > 0$, cualquier otro $\epsilon^* > 0$ estrictamente menor que ϵ .

Sustituyendo (2) en la desigualdad anterior, resulta:

$$\Delta x < \delta/2 \Rightarrow |F(\{x_i\}) - A| < \epsilon \quad (5)$$

Resumiendo, la afirmación (5) prueba que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \delta/2$ tal que

$$\Delta x < \delta_1 \Rightarrow |F(\{x_i\}) - A| < \epsilon$$

Lo anterior es por definición de límite, lo mismo que:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\{x_i\}) \quad (6)$$

Reuniendo (3) y (6) se concluye $A = I$ como queríamos demostrar. $\square$

5.6. Generalización para integrales múltiples.

Para integrales triples y para integrales múltiples en general, valen los mismos argumentos, sustituyendo los rectángulos R de $\mathbb{R}^2$ por prismas rectangulares R en $\mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por intervalos q -dimensionales contenidos en $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples en general, con $q \geq 1$ natural).

Hay que sustituir también, donde aparece, el área de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ por el volumen de un prisma rectangular en $\mathbb{R}^3$ (en integrales triples), o por la medida q -dimensional de un intervalo q -dimensional en $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples generales).

También habrá que sustituir en algunos de los enunciados y demostraciones, el conjunto simple bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ por el conjunto simple tridimensional $D \subset \mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por el conjunto simple q -dimensional (para integrales múltiples en general.)

Las gráficas (curvas) de funciones continuas $y = \phi(x)$, $x \in [a, b]$ que forman parte del borde en dominios simples D bidimensionales de $\mathbb{R}^2$, usados para estudiar las integrales Riemann dobles, tendrán que ser sustituidas por las gráficas (superficies) de funciones continuas $z = \phi(x, y)$, que forman parte del borde en dominios simples D de $\mathbb{R}^3$ (para integrales triples), o por las gráficas (hipersuperficies) de funciones continuas $x_q = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})$ que forman parte del borde en dominios simples de $\mathbb{R}^q$ (para integrales múltiples en general).

Las funciones $f(x, y)$ integrables e integradas Riemann en dominios D bidimensionales, en el caso de las integrales dobles, deben sustituirse por funciones $f(x, y, z)$ en las integrales triples, y por $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ en dominios de $\mathbb{R}^q$ para las integrales múltiples en general.

6. Integrales dobles impropias.

6.1. Integrales impropias convergentes y no convergentes.

La teoría de integrales dobles, triples y múltiples en general desarrollada hasta el momento, es aplicable a la integración de funciones acotadas en conjuntos acotados (pues tienen que estar contenidos en rectángulos).

La integración en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^q$ se extiende mediante las llamadas integrales impropias a los siguientes dos casos:

- El dominio D no es acotado. Esto da lugar a las llamadas integrales impropias de primera especie. Por ejemplo:

$$\iint_D \frac{1}{((x^2 + y^2)^5 + 1)} dx dy$$

donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

La función integrando $1/((x^2 + y^2)^5 + 1)$ está acotada y es continua en D , pero D no está contenido en ningún rectángulo, porque no es acotado, ya que D es todo el primer cuadrante del plano x, y .

- El dominio D es acotado, pero la función integrando en un punto (x_0, y_0) del borde de D , no está definida o no está acotada en ningún entorno de ese punto. Esto da lugar a las llamadas integrales impropias de segunda especie. Por ejemplo:

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

donde

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

El dominio D está acotado, pero la función integrando $1/(x^2 + y^2)$ no está acotada en ningún entorno del origen $(0, 0)$, que está en el borde de D .

Nota 6.1.1. La teoría que desarrollaremos a continuación será válida solamente para integrales dobles, triples o q -múltiples con $q \geq 2$. No es válida para integrales impropias de funciones de una sola variable real, que se vieron en el curso de Cálculo 1.

En particular la definición de integral doble o triple impropia convergente que veremos aquí, no es la misma que la se usa para integrales impropias en la recta real para funciones de varias variables, sino que es mucho más exigente, y *no equivale a ella*.

Como consecuencia, uno de los resultados que se obtienen ahora es que toda integral doble, triple o q -múltiple (con $q \geq 2$) impropia,

es convergente si y solo si es absolutamente convergente.

Ese resultado es falso para funciones de una sola variable, como se sabe del curso de cálculo 1. Para funciones de una sola variable, toda integral impropia absolutamente convergente es convergente, pero no vale el recíproco.

Definición 6.1.2. Conjuntos medibles.

Un conjunto acotado D de R^q se dice que es *medible* (según Jordan) si su frontera es un conjunto de medida nula.

Por ejemplo, los conjuntos simples de R^2 y de R^3 y los conjuntos descomponibles en simples, son conjuntos medibles. Esta afirmación, en el caso de dominios planos, resulta inmediatamente de aplicar la definición 2.2.11, y las proposiciones 5.3.2 y 5.3.3.

Haremos el desarrollo de la teoría para integrales dobles. La generalización a integrales triples y q -múltiples se realiza como se explicó en la subsección 5.6.

Definición 6.1.3. Sucesión básica de conjuntos de integración.

Sea D un conjunto no vacío de R^2 , y sea $f(x, y)$ una función definida en D .

Se llama *sucesión básica de conjuntos de integración de f en D* , si existe alguna, a una sucesión creciente de dominios D_n compactos y medibles contenidos en D :

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset D_4 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$$

tales que todo compacto K medible contenido en D está contenido en algún D_n , y además f es integrable Riemann en D_n para todo $n \geq 1$. Es decir existe:

$$I_n = \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

La condición de que todo compacto K medible contenido en D esté contenido en algún D_n se dice abreviadamente: “ D_n aproxima de D ”.

Con esta definición no es difícil demostrar que si existe una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D entonces f es integrable Riemann en todo conjunto compacto y medible K contenido en D . (Usar el teorema 5.4.1 de Riemann-Lebesgue.)

Ejemplo 6.1.4. Sea $f(x, y) = 1/(\sqrt{xy})$ en $D = (0, 1] \times (0, 1]$. Una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D es

$$D_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$$

En efecto, al crecer n el conjunto D_n (que es simple, por lo tanto es compacto y medible) es cada vez más grande, y se aproxima de D . Además como f es continua en D_n (ya que su único punto de discontinuidad es el origen que no pertenece a D_n), y D_n es un dominio simple, entonces f es integrable Riemann en D_n . (Ver corolario 5.4.2.)

Existen infinitas otras elecciones de conjuntos D_n . Por ejemplo, otra elección de una sucesión básica de conjuntos de integración es

$$D_n = \{0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1, xy \geq \frac{1}{n}\}$$

Ejemplo 6.1.5. Sea $f(x, y) = 1/((x^2 + y^2)^5 + 1)$ en $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. El conjunto D es el primer cuadrante. Una sucesión básica de conjuntos de integración de f en D es

$$D_n = [0, n] \times [0, n]$$

Estos D_n son cuadrados de vértices $(0,0)$, $(0,n)$, (n,n) , $(n,0)$. Existen infinitas elecciones para la sucesión básica de conjuntos de integración. Otra elección posible es

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

Estos $\tilde{D}_n$ son las intersecciones con el primer cuadrante de discos compactos de centro en el origen y radio n .

Definición 6.1.6. Integral doble impropia convergente.

Sea D un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$, y sea $f(x, y)$ una función real definida en D .

Se dice que la integral (impropia)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = L$$

es convergente, e igual al número real L si existe alguna y **para toda** sucesión $\{D_n\}$ básica de conjuntos de integración de f en D se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = L$$

(Nota: el número L debe ser el mismo para cualquier sucesión básica de conjuntos de integración de f en D que se elija.)

6.2. Ejemplos.

En esta subsección daremos ejemplos de todos los tipos de integrales dobles, convergentes y no convergentes, de primera y de segunda especie. Los procedimientos de clasificación varían según la función en el integrando sea positiva (esto es ≥ 0) o no lo sea.

Daremos también, intercalados entre los ejemplos, los enunciados de las propiedades básicas que se usan en la clasificación y cálculo de integrales dobles impropias. Las pruebas de estas propiedades estarán en las secciones siguientes.

Ejemplo 6.2.1. Integral impropia convergente de segunda especie, con integrando positivo.

Probar que es convergente y calcular

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy \quad \text{en } D = (0, 1] \times (0, 1]$$

Esta integral impropia de segunda especie se suele escribir como:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy$$

Tomemos por ejemplo, como una sucesión básica de conjuntos de integración particular: $D_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$. Se obtiene lo siguiente:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy = \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{x}|_{x=1/n}^{x=1} \cdot 2\sqrt{y}|_{y=1/n}^{y=1} = 4(1 - 1/\sqrt{n})^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(1 - 1/\sqrt{n})^2 = 4$$

Sin embargo, lo anterior NO es la definición de integral impropia convergente. (Ver definición 6.1.6.) Habría que verificar que **para toda** sucesión básica de conjuntos de integración D_n (y no solo para una elegida en particular), el límite de las integrales I_n existe y además que es el mismo número real L .

En general, vale lo siguiente:

Nota 6.2.2. *La integral impropia de una función f puede ser convergente o no serlo, aún cuando en una cierta sucesión particular de conjuntos básicos de integración el límite exista finito.*

Puede suceder que en otra sucesión particular el límite no exista, o exista y sea infinito, o exista, sea finito pero diferente del anterior. En estos casos la integral impropia de f es no convergente.

Como es imposible verificar de a una, en todas las sucesiones básicas de conjuntos de integración, que el límite existe, es finito y da lo mismo en todas, usaremos condiciones necesarias y suficientes de convergencia.

Veremos en el teorema 6.3.1, que si la función f en el integrando es positiva, como en este ejemplo $f(x, y) = 1/\sqrt{xy} > 0$, entonces, basta con que exista una sucesión particular de conjuntos básicos de integración donde el límite existe y es finito igual a L , para que en todas las demás sucesiones ocurra lo mismo, y el límite sea igual al mismo número L . Pero hay que tener cuidado: esa propiedad no es cierta si la función integrando f no es ≥ 0 . En resumen:

6.2.3. Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias dobles de integrando positivo.

$f \geq 0$ en D , $\exists \{D_n\}$ sucesión básica de integración de f en D tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = L \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_D f \, dx dy &\text{ es convergente e igual a } L \end{aligned}$$

Aplicando este resultado al ejemplo 6.2.1, obtenemos:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy \text{ es convergente e igual a } 4. \quad \square$$

Ejemplo 6.2.4. Integral impropia no convergente de segunda especie, con integrando no positivo.

Probar que **no** es convergente la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{y-x}{xy} \, dx dy \text{ en } D = (0, 1] \times (0, 1]$$

Si elegimos una sucesión básica particular de conjuntos de integración D_n y el límite de las integrales en ellos no existe, o existe y no es finito, entonces por definición la integral impropia no es convergente. (Ver definición 6.1.6.)

Pero, si en la sucesión particular que elegimos el límite existe y es finito, entonces no podemos concluir nada. (Observar que en este caso la función integrando $(y-x)/(xy)$ no es ≥ 0 y por eso no podemos aplicar el criterio 6.2.3.

Si en la primera sucesión básica particular de conjuntos de integración que elegimos, el límite existe y es finito igual a L , pero en una segunda sucesión básica, el límite existe y es finito pero diferente de L , entonces por definición la integral impropia no es convergente. (Ver definición 6.1.6.)

Tomaremos sucesiones básicas de conjuntos de integración de la forma

$$D_{\epsilon,\delta} = \{\epsilon \leq x \leq 1, \delta \leq y \leq 1\}$$

donde ϵ y δ dependerán de n , serán positivos, y tenderán a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$. Así por ejemplo, podremos tomar como una primera sucesión básica de conjuntos de integración $D_n = D_{1/n,1/n}$ eligiendo $\epsilon = 1/n$ y $\delta = 1/n$. Podremos tomar como una segunda sucesión básica por ejemplo $\tilde{D}_n = D_{1/n,2/n}$ eligiendo $\epsilon = 1/n$ y $\delta = 2/n$.

Calculemos la integral doble en $D_{\epsilon,\delta}$ de f :

$$\begin{aligned} I_{\epsilon,\delta} &= \iint_{D(\epsilon,\delta)} \frac{y-x}{xy} dx dy = \int_{\epsilon}^1 dx \int_{\delta}^1 \frac{y-x}{xy} dy = \\ &= \int_{\epsilon}^1 \left(\frac{y}{x} - \text{Log} y \Big|_{y=\delta}^{y=1} \right) dx = \int_{\epsilon}^1 \frac{1-\delta}{x} + \text{Log} \delta dx = (1-\delta) \text{Log} x + (\text{Log} \delta) x \Big|_{x=\epsilon}^{x=1} \\ I_{\epsilon,\delta} &= (1-\epsilon) \text{Log} \delta - (1-\delta) \text{Log} \epsilon \end{aligned}$$

Tomando $D_n = D_{1/n,1/n} = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$, es decir, $\epsilon = 1/n$, $\delta = 1/n$, resulta:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{y-x}{xy} dx dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) = 0$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, tomando $\tilde{D}_n = D_{1/n,2/n} = [1/n, 1] \times [2/n, 1]$, es decir, $\epsilon = 1/n$, $\delta = 2/n$, resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n &= \iint_{\tilde{D}_n} \frac{y-x}{xy} dx dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2/n) - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \text{Log}(1/n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) + \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(1/n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) - \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(n) \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{I}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{Log}(2) - \left(\frac{1}{n}\right) \text{Log}(n) = \text{Log} 2 \quad (2)$$

Se obtuvieron dos sucesiones básicas de conjuntos de integración D_n y $\tilde{D}_n$ tales que los límites de las integrales en ambas existen, son finitos, pero diferentes entre sí. (En la igualdad (1) se llegó a que el límite de las integrales I_n en D_n es 0; en cambio en la igualdad (2) se llegó a que el límite de las integrales $\tilde{I}_n$ en $\tilde{D}_n$ es $\text{Log}(2)$.) Entonces, aplicando la definición 6.1.6, la integral impropia dada no converge. $\square$

Ejemplo 6.2.5. Integral impropia convergente de primera especie, con integrando positivo.

Demostrar que es convergente la integral impropia siguiente:

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dx dy$$

en el primer cuadrante D :

$$D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

Esta integral impropia se suele escribir como:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dy$$

Tomemos como sucesión básica

$$D_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

Calculemos la integral de la función dada en D_n pasando a coordenadas polares ρ, φ ; $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, con Jacobiano $J(\rho, \varphi) = \rho$. Observemos que en coordenadas polares el dominio D_n resulta $\{0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq n\}$. Se obtiene:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^5 + 1} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^n \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^n \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho$$

Luego, tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$, y recordando la definición de integral impropia de primera especie de funciones $F(x)$ de una sola variable:

$$\int_a^{+\infty} F(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b F(x) dx$$

se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho^2)^5 + 1} d\rho \quad (1)$$

Por lo tanto, para saber que ese límite existe, habrá que clasificar la integral impropia en una sola variable

$$J = \int_0^{+\infty} F(\rho) d\rho, \quad \text{donde } F(\rho) = \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} \quad (2)$$

Más abajo explicamos que esta integral impropia J de función $F(\rho)$ en una sola variable real, es convergente.

Por lo tanto, usando (1) se deduce que $\lim I_n = L \in \mathbb{R}$. Hemos probado pues que para cierta elección de la sucesión básica de conjuntos de integración D_n , existe real finito el límite de las integrales de $f(x, y)$ en D_n .

El integrando $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^5 + 1$ es una función ≥ 0 en D . Entonces, podemos aplicar el resultado siguiente, que demostraremos en el teorema 6.3.1, y que ya explicamos en el ejemplo 6.2.1:

$f \geq 0$ en D , $\exists \{D_n\}$ sucesión básica de integración de f en D tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = L \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_D f \, dx dy &\text{ es convergente e igual a } L \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que la integral impropia dada es convergente. No calculamos su valor L ya que no calculamos el límite L de las integrales I_n de la igualdad (1). En este ejemplo solo probamos que existe ese límite, y que por lo tanto la integral impropia dada es convergente. $\square$

Quedó pendiente de probar que la integral impropia J de la igualdad (2) en una sola variable ρ , es convergente. Para ello nos remitimos a algunos conocimientos sobre integrales impropias del curso de Cálculo 1, que repasaremos a continuación.

El integrando $F(\rho) = \rho/(\rho^{10} + 1)$ en la igualdad (2), es positivo. Luego, podemos aplicar el siguiente criterio de convergencia por comparación por límites:

6.2.6. Criterio de comparación por límites de integrales impropias en una sola variable.

Sean $F(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Si λ es real y si $\int_a^{+\infty} G(x) \, dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx$ también converge.

Si $\lambda \neq 0$ y si $\int_a^{+\infty} G(x) \, dx$ no converge entonces $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx$ tampoco.

Para saber con qué función $G(x)$ vamos a comparar, recordemos la siguiente propiedad de las integrales impropias de primera especie en una sola variable:

6.2.7. Integrales impropias de referencia de primera especie en una sola variable.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ converge si y solo si } \alpha > 1$$

Volviendo a nuestra función $F(\rho) = \rho/(\rho^{10} + 1)$, a la que llegamos en el desarrollo del ejemplo 6.2.5, teníamos que clasificar la integral impropia de primera especie

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} \, d\rho$$

en una sola variable ρ .

Aplicaremos el criterio de comparación por límites 6.2.6, con una función $G(\rho)$ adecuada, que se pueda clasificar según la referencia 6.2.7. Veamos entonces a qué función $G(\rho) = \rho^\alpha$ es equivalente el límite de $F(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho^9} = 0$$

Usaremos como función $G(\rho) = 1/\rho^9$. Entonces se cumple:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{F(\rho)}{G(\rho)} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho/(\rho^{10} + 1)}{1/\rho^9} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho^{10}}{\rho^{10} + 1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Por el criterio 6.2.6 la integral $\int_0^{+\infty} F(\rho) d\rho$ converge si converge la de $G(\rho)$. Por la clasificación del párrafo 6.2.7, la integral $\int_0^{+\infty} G(\rho) d\rho$ es convergente porque $G(\rho) = 1/\rho^9$, con exponente $9 > 1$. Entonces

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^{10} + 1} d\rho \quad \text{converge.} \quad \square$$

Ejemplo 6.2.8. Integral impropia convergente de primera especie, con integrando no positivo.

Demostrar que es convergente la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} dx dy \quad \text{donde } D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

No podemos aplicar el mismo procedimiento que en el ejemplo 6.2.5, porque la función en el integrando no es siempre ≥ 0 en D . Aunque demostremos que existe finito el límite L de las integrales en una sucesión básica D_n de conjuntos de integración, este límite no tiene por qué existir en otra sucesión de conjuntos $\tilde{D}_n$, y si existe no tiene por qué ser el mismo, en todas las sucesiones básicas de conjuntos de integración.

Usaremos el siguiente resultado, a probar en el teorema 6.4.1:

6.2.9. Criterio de convergencia absoluta.

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \text{ converge}$$

Notamos que la propiedad anterior es falsa para integrales impropias de funciones de una variable. Para estas últimas, la convergencia en valor absoluto es suficiente pero no necesaria para la convergencia sin el valor absoluto. Sin embargo, para integrales impropias dobles, triples, y múltiples en general (con $q \geq 2$ variables), la convergencia absoluta es equivalente (es decir necesaria y suficiente) para la convergencia sin el valor absoluto.

Aplicando el criterio 6.2.9 de convergencia absoluta, para probar que converge la integral impropia dada en el ejemplo 6.2.8, probaremos que converge la integral impropia:

$$\iint_D \left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| dx dy \quad \text{donde } D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

La función en el integrando ahora es positiva. Por lo tanto podemos usar el mismo procedimiento que en el ejemplo 6.2.5. Sin embargo, para ahorrar expresar esta integral en una sucesión básica de conjuntos de integración, y no tener que reducirla al cálculo de integrales iteradas simples, aplicaremos ahora algunos criterios de convergencia de integrales impropias múltiples, que demostraremos en la próxima subsección.

6.2.10. Criterio de comparación para integrales impropias dobles:

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) dx dy \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \text{ converge.}$$

Dicho en palabras, si f es menor que g y la integral de g converge (ya sea de primera o de segunda especie), entonces la de f también.

Análogamente, exponemos el criterio de no convergencia (que es el contrarrecíproco del anterior):

$$f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dx dy \text{ no converge} \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ no converge.}$$

Observar que aquí la hipótesis se invierte: es f mayor que g . Dicho en palabras, si f es mayor que g y la integral de g no converge entonces la de f tampoco.

Aplicando este criterio de comparación para integrales dobles, a la función $\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right|$ del ejemplo 6.2.8, se obtiene:

$$\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \leq \frac{|y|+|x|}{|x+y+1| \cdot [(x^2+y^2)^5+1]} \quad (1)$$

Siendo $(x, y) \in D$, se tiene $x \geq 0$, $y \geq 0$. Luego $|x+y| = x+y = |x|+|y|$ en D . Por lo tanto, $|x|+|y| < x+y+1 = |x+y+1| \Rightarrow (|x|+|y|)/|x+y+1| < 1$. Sustituyendo en (1) se deduce:

$$\left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1} \quad (2)$$

Por lo visto en el ejemplo 6.2.5 la integral impropia

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1} \, dx dy \quad \text{converge.} \quad (3)$$

Reuniendo (2) y (3), y aplicando el Criterio de Comparación para integrales dobles en 6.2.10, se deduce entonces que

$$\iint_D \left| \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \right| \, dx dy \quad \text{converge.}$$

y por lo tanto, por el criterio de convergencia absoluta en 6.2.9:

$$\iint_D \frac{y-x}{(x+y+1)[(x^2+y^2)^5+1]} \, dx dy \quad \text{converge.} \quad \square$$

Ejemplo 6.2.11. Integral impropia no convergente de segunda especie.

Demostrar que no converge la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 0\}$$

Elegimos como sucesión básica de conjuntos de integración:

$$D_n = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2\}$$

Los conjuntos D_n son los que resultan del cuadrado D al quitar el interior de un círculo de radio $1/n$ centrado en el origen.

Consideremos los dominios sustitutos

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Estos $\tilde{D}_n$ son los dominios D_n a los que hemos quitado el conjunto de puntos E que distan más que 1 del origen. Los conjuntos $\tilde{D}_n$ no forman una sucesión básica de dominios de integración en D , porque su unión no es D , sino que les falta el conjunto E . Sin embargo la integral en D_n es igual a la integral en $\tilde{D}_n$ más la integral en E .

Calculemos la integral I_n de la función dada en el dominio D_n :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\tilde{D}_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy + \iint_E \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy =$$

Llamemos A a la integral en E ; es una integral de Riemann, número real constante independiente de n . Se obtiene, calculando en coordenadas polares la integral en el dominio $\tilde{D}_n$:

$$\begin{aligned} I_n &= A + \iint_{\tilde{D}_n} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = A + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/n}^1 \frac{\rho}{\rho^2} d\rho = \\ &= A + \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\rho) \Big|_{\rho=1/n}^{\rho=1} d\varphi = A + \frac{\pi}{2} \text{Log}(n) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$ resulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = A + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \text{Log}(n) = +\infty$$

Por lo tanto la integral impropia dada no converge. $\square$

Ejemplo 6.2.12. Discusión de convergencia de una integral impropia de segunda especie.

Clasificar (esto es: decidir si es convergente o no lo es), discutiendo según el valor de la constante real α , la siguiente integral impropia:

$$\iint_D \frac{x - y - (1/2)}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

Aplicaremos el criterio de convergencia absoluta en 6.2.9. Por lo tanto la integral impropia dada es convergente o no lo es, según sea la integral de la función en valor absoluto:

$$\iint_D \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{en } D = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$$

Tomemos como dominios D_n que forman una sucesión básica de integración los mismos que los del ejemplo anterior:

$$D_n = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2\}$$

Consideremos los dominios sustitutos

$$\tilde{D}_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Estos $\tilde{D}_n$ son los dominios D_n a los que hemos quitado el conjunto de puntos E que distan más que 1 del origen. Los conjuntos $\tilde{D}_n$ no forman una sucesión básica de dominios de integración en D , porque su unión no es D , sino que les falta el conjunto E . Sin embargo la integral en D_n es igual a la integral en $\tilde{D}_n$ más la integral en E .

Calculemos la integral I_n de la función dada, en valor absoluto, en el dominio D_n :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = \iint_{\tilde{D}_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy + \iint_E \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy =$$

Llamemos A a la integral en E ; es una integral de Riemann, número real constante independiente de n . Se obtiene, calculando en coordenadas polares la integral en el dominio $\tilde{D}_n$:

$$\begin{aligned} I_n &= A + \iint_{\tilde{D}_n} \frac{|x - y - (1/2)|}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = A + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/n}^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha}} \cdot \rho d\rho = \\ &= A + \frac{\pi}{2} \int_{1/n}^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \end{aligned}$$

Tomemos ahora el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ de las integrales I_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = A + \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (1)$$

Por lo tanto el límite anterior existe real o no es real, según sea convergente o no lo sea la integral impropia en una variable real J siguiente:

$$J = \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (2)$$

Discusión:

- Si la integral impropia J de (2) es convergente, entonces por (1) el $\lim I_n$ existe y es real. En ese caso, la integral impropia doble en D de la función $|x - y - (1/2)|/(x^2 + y^2)^\alpha$ es convergente, aplicando el criterio 6.2.3, porque en una sucesión básica particular existe el límite real de las integrales. (Y porque la función en el integrando es positiva). Entonces, por el criterio de convergencia absoluta del párrafo 6.2.9 la integral dada es convergente.
- Si la integral impropia J de (2) no es convergente, entonces por (1) el $\lim I_n$ no es real. En ese caso, la integral impropia doble en D de la función $|x - y - (1/2)|/(x^2 + y^2)^\alpha$ no es convergente, por definición 6.1.6. Entonces, por el criterio de convergencia absoluta del párrafo 6.2.9 la integral dada no es convergente.

Hemos reducido entonces el problema a estudiar una integral impropia de segunda especie en una sola variable real, como las que se estudian en el curso de Cálculo 1.

Para clasificar la integral J usaremos los siguientes criterios vistos en el curso de Cálculo 1:

6.2.13. Criterio de comparación por límites de integrales impropias en una sola variable.

Sean $F(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Si λ es real y si $\int_0^b G(x) dx$ converge, entonces $\int_0^b F(x) dx$ también converge.

Si $\lambda \neq 0$ y si $\int_0^b G(x) dx$ no converge entonces $\int_0^b F(x) dx$ tampoco.

Para saber con qué función $G(x)$ vamos a comparar, recordemos la siguiente propiedad de las integrales impropias de segunda especie en una sola variable:

6.2.14. Integrales impropias de referencia de segunda especie en una sola variable.

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge si y solo si } \alpha < 1$$

Volviendo a la integral J a la que reducimos el problema del ejemplo 6.2.12, teníamos que clasificar la siguiente integral impropia:

$$J = \int_0^1 \frac{|\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \quad (2)$$

Consideremos la función en el integrando

$$F(\rho) = \frac{|\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Para tomar una función de referencia $G(\rho)$ y aplicar el criterio de comparación por límites en 6.2.13, busquemos un equivalente de $F(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) - (1/2)|}{\rho^{2\alpha-1}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1/2}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Entonces usemos como función de referencia:

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Se tiene:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(\rho)}{G(\rho)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} |\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) - (1/2)| = \frac{1}{2}$$

Luego aplicando el criterio de comparación por límites en 6.2.13, se obtiene:

$$\int_0^1 G(\rho) d\rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 F(\rho) d\rho \text{ converge} .$$

Por lo tanto hemos reducido el problema a estudiar la convergencia de la integral impropia:

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} d\rho$$

Usando el criterio de referencia en 6.2.14, se tiene que K es convergente si y solo si el exponente del denominador ρ cumple: $2\alpha - 1 < 1$. Esto es equivalente a $2\alpha < 2$, o lo que es lo mismo: $\alpha < 1$.

Concluimos entonces la siguiente respuesta para el ejercicio propuesto en el ejemplo 6.2.12:

- Si $\alpha < 1$ la integral doble impropia dada es convergente.
- Si $\alpha \geq 1$ la integral doble impropia dada no es convergente. $\square$

6.3. Integrales impropias de funciones no negativas.

Ahora enunciaremos nuevamente y demostraremos los criterios usados para calcular o clasificar las integrales impropias de los ejemplos en la sección anterior.

Teorema 6.3.1. Condición necesaria y suficiente de convergencia de integrales impropias de funciones positivas.

Si $f \geq 0$ en D , y si existe una sucesión básica de conjuntos de integración D_n tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f \, dx dy = L \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\iint_D f \, dx dy \text{ es convergente e igual a } L.$$

y recíprocamente.

Demostración: Basta probar que para dos sucesiones básicas $\{D_n\}$ y $\{\tilde{D}_n\}$ cualesquiera de conjuntos de integración en D , se cumple

$$L = \tilde{L} \quad (\text{a probar}) \quad (1)$$

siendo

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n, \quad I_n = \iint_{D_n} f \, dx dy$$

$$\tilde{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{I}_n, \quad \tilde{I}_n = \iint_{\tilde{D}_n} f \, dx dy$$

Dado $\tilde{D}_m$, como es compacto contenido en D y como $\{D_n\}$ es una sucesión básica de conjuntos de integración en D , entonces existe algún N natural tal que $\tilde{D}_m \subset D_n$ para todo $n \geq N$. (Ver en la definición 6.1.3 que D_n aproxima a D .)

Por lo tanto podemos escribir

$$D_n = \tilde{D}_m \cup H, \quad \text{donde } H = D_n \setminus \tilde{D}_m$$

Por la aditividad de la integral respecto a los conjuntos donde se integra:

$$\iint_{D_n} f \, dxdy = \iint_{\tilde{D}_m} f \, dxdy + \iint_H f \, dxdy \quad (2)$$

Siendo por hipótesis $f \geq 0$, entonces la integral de f en H es mayor o igual que cero. Por lo tanto, sustituyendo en (2), resulta:

$$I_n = \iint_{D_n} f \, dxdy \geq \iint_{\tilde{D}_m} f \, dxdy = \tilde{I}_m$$

En resumen, hemos probado que dado m existe N tal que

$$\tilde{I}_m \leq I_n \quad \forall n \geq N \quad (3)$$

Luego, haciendo $n \rightarrow +\infty$ en (3), con m fijo, se deduce:

$$\tilde{I}_m \leq L = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

Por lo tanto, concluimos que para todo m natural, se cumple: $\tilde{I}_m \leq L$. Haciendo $m \rightarrow +\infty$, como L es fijo, resulta:

$$\tilde{L} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{I}_m \leq L$$

Hemos probado que

$$\tilde{L} \leq L \quad (4)$$

Reproduciendo la prueba, con los roles de D_n y $\tilde{D}_n$ intercambiados, resulta

$$L \leq \tilde{L} \quad (5)$$

Reuniendo (4) y (5) se deduce la igualdad (1) que queríamos probar. $\square$

Teorema 6.3.2. Criterio de comparación para integrales impropias múltiples de integrando positivo.

a)

$$0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dxdy \text{ converge} \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dxdy \text{ converge.}$$

b)

$$f(x, y) \geq g(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

$$\iint_D g(x, y) \, dxdy \text{ no converge} \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dxdy \text{ no converge.}$$

Demostración: La parte b) es el contrarrecíproco de la parte a). En efecto, por absurdo, si la tesis de b) fuese falsa, entonces la integral de f sería convergente. Aplicando la parte a) (con los roles de f y g intercambiados) sería también convergente la integral de g , contradiciendo la hipótesis de b).

Ahora probemos la parte a):

Por el teorema 6.3.1, para probar que la integral de f es convergente, basta demostrar que para cierta sucesión básica $\{D_n\}$ de conjuntos de integración en D , se cumple que la sucesión de integrales I_n tiene límite real, siendo:

$$I_n = \iint_{D_n} f \, dx dy$$

Una sucesión de reales tiene límite real si y solo si es de Cauchy. Entonces hay que probar que I_n es de Cauchy, es decir:

Dado $\epsilon > 0$ hay que probar que existe N tal que:

$$m \geq n > N \quad \Rightarrow \quad |I_m - I_n| < \epsilon \quad (\text{a probar}) \quad (1)$$

Como por hipótesis la integral impropia de g es convergente, entonces la sucesión de integrales J_n es de Cauchy, siendo

$$J_n = \iint_{D_n} g \, dx dy$$

Siendo J_n una sucesión de Cauchy de números reales, se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que:

$$m \geq n > N \quad \Rightarrow \quad |J_m - J_n| < \epsilon \quad (2)$$

Siendo $m \geq n$ se cumple $D_m \supset D_n$, entonces para cualquier función h (en particular para g o f) se cumple:

$$\iint_{D_m} h \, dx dy = \iint_{D_n} h \, dx dy + \iint_H h \, dx dy, \quad \text{donde } H = D_m \setminus D_n$$

Luego, si $h \geq 0$:

$$\iint_{D_m} h \, dx dy - \iint_{D_n} h \, dx dy = \iint_H h \, dx dy \geq 0$$

Como por hipótesis $0 \leq f \leq g$ entonces:

$$\begin{aligned} I_m - I_n &= \iint_{D_m} f \, dx dy - \iint_{D_n} f \, dx dy = \iint_H f \, dx dy \leq \iint_H g \, dx dy = \\ &= \iint_H g \, dx dy = \iint_{D_m} g \, dx dy - \iint_{D_n} g \, dx dy = J_m - J_n \end{aligned} \quad (3)$$

Además como por (3) son todas integrales en H de funciones positivas, se cumple

$$|I_m - I_n| = I_m - I_n \geq 0, \quad |J_m - J_n| = J_m - J_n \geq 0 \quad (4)$$

Por lo tanto usando (3) y (4) se concluye:

$$|I_m - I_n| \leq |J_m - J_n| \quad (5)$$

Reuniendo (2) con (5) se concluye:

$$m \geq n > N \Rightarrow |I_n - I_m| < \epsilon$$

que es la desigualdad (1) que queríamos probar. $\square$

6.4. Integrales impropias absolutamente convergentes.

Teorema 6.4.1. Convergencia absoluta es equivalente a la convergencia.

$$\iint_D |f(x, y)| dx dy \text{ converge} \Leftrightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \text{ converge}$$

Demostración:

Directo: Probemos primero que la convergencia absoluta (convergencia de la integral del valor absoluto de la función) implica la convergencia sin valor absoluto.

Sean la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de f definidas como sigue:

$$f^+ = \max f, 0, \quad f^- = \max -f, 0$$

La parte positiva f^+ de f es nula donde f es negativa y es igual a f donde $f \geq 0$. La parte negativa f^- es nula donde f es positiva, y es igual a $-f$ donde $f \leq 0$. Obsérvese que:

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0, \quad |f| = f^+ + f^- \quad (1)$$

Aplicamos el criterio de comparación demostrado en el teorema 6.3.2. Siendo por hipótesis convergente la integral de la función en valor absoluto, y siendo $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$, entonces son convergentes las integrales impropias de f^+ y de f^- :

Por lo tanto, para cualquier sucesión básica $\{D_n\}$ de conjuntos de integración en D , existen los límites reales L^+ y L^- siguientes, y son siempre los mismos, independientes de la sucesión:

$$L^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f^+ dx dy, \quad L^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f^- dx dy \quad (2)$$

Siendo $f = f^+ - f^-$, de (2) se deduce que existe el límite real $L = L^+ - L^-$, y es por lo tanto independiente de la sucesión básica $\{D_n\}$ elegida, tal que:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\iint_{D_n} f^+ dx dy - \iint_{D_n} f^- dx dy \right) = L^+ - L^-$$

Esto prueba que la integral de f en D es convergente, com queríamos demostrar.

Recíproco: Probemos ahora que la convergencia de la integral impropia de la función sin valor absoluto, implica la convergencia absoluta (convergencia de la integral de la función con valor absoluto). Esta propiedad es falsa para integrales impropias de funciones de una sola variable. Es cierta solamente para integrales múltiples impropias con $q \geq 2$ variables (integrales dobles, triples o q -múltiples).

Como en la parte anterior, igualdades (1), sean f^+ y f^- las partes positiva y negativa de f respectivamente. Si probamos que las integrales impropias en D de f^+ y de f^- son convergentes,

entonces la integral impropia de $|f| = f^+ + f^-$ también será convergente, que es lo que queremos demostrar.

Probaremos que la integral impropia en D de f^+ es convergente. Para probar que la de f^- también es convergente, habrá que aplicar la misma demostración sustituyendo f por $-f$.

Por hipótesis sabemos que la integral de $f = f^+ - f^-$ es convergente. Supongamos por absurdo que la integral de f^+ fuera no convergente. Entonces para cualquier sucesión básica $\{D_n\}$ las integrales

$$I_n^+ = \iint_{D_n} f^+ dx dy$$

formarían una sucesión creciente (porque $D_n \subset D_{n+1}$ y $f \geq 0$) de números reales ≥ 0 no acotada superiormente (porque si fuera acotada sería convergente).

Siendo $\{I_n^+\}$ creciente y no acotada superiormente, existe $n(N)$ creciente, tal que

$$I_{n(N)}^+ - I_{n(N-1)}^+ > 1 \quad (3)$$

Tomemos la siguiente sucesión básica nueva $\tilde{D}_N$ que se obtiene intercalando inmediatamente después del conjunto $D_n = \tilde{D}_{2N-1}$ de la sucesión básica dada²⁶, el conjunto

$$\tilde{D}_{2N} = D_n \cup (D_{n(N)} \cap \{f = f^+\})$$

siguiendo²⁷ con $\tilde{D}_{2N+1} = D_{n(N)}$.

Como por hipótesis la integral de f es convergente a L , entonces las integrales $\tilde{I}_N$ de f en los conjuntos $\tilde{D}_N$ de la nueva sucesión básica, tienden a L . Por lo tanto:

$$\tilde{I}_{2N-1} = \iint_{D_n} f dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L$$

$$\tilde{I}_{2N} = \iint_{\tilde{D}_{2N}} f dx dy = \iint_{D_n} f dx dy + \iint_{D_{n(N)} \setminus D_n} f^+ dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} L$$

donde $n = n(N-1)$.

Restando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se obtiene:

$$\iint_{D_{n(N)} \setminus D_{n(N-1)}} f^+ dx dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (4)$$

Pero por la aditividad de la integral doble respecto al dominio de integración:

$$\iint_{D_{n(N)} \setminus D_{n(N-1)}} f^+ dx dy = \iint_{D_{n(N)}} f^+ dx dy - \iint_{D_{n(N-1)}} f^+ dx dy = \tilde{I}_{n(N)}^+ - \tilde{I}_{n(N-1)}^+ > 1 \quad (5)$$

Al final de la desigualdad (5) se usó la desigualdad (3).

Las afirmaciones (4) y (5) son contradictorias. Con esto se llega a un absurdo, terminando la demostración. $\square$

²⁶ Aquí tendría que ser $n = n(N-1)$

²⁷ Como f es continua excepto en un conjunto de medida nula, previamente definimos $f = 0$ en los puntos de discontinuidad de f . Siendo así, la integral de f no cambia, y los conjuntos $\{f = f^+\}$ y $\{f = f^-\}$ son cerrados. Por lo tanto cortados con D_n son compactos.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] de Burgos, J. : *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables*. Editorial Mc. Graw-Hill, ISBN 84-481-1621-6, Madrid, 1995.

[2] Courant, R. : *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. II* Editorial LIMUSA, ISBN 968-18-0640-9, México, 1996.

[3] Apostol, T. : *Calculus. Vol. II*. Editorial Reverté.

[4] IMERL: *Ejercicios para el curso de Cálculo II*.

Repartidos 1 a 9, Facultad de Ingeniería, UdelaR., Montevideo, 2006. Publicados en:
<http://imerl.fing.edu.uy/calculo2/material.htm>