

Ecuaciones de Maxwell

Eleonora Catsigeras *

Versión original: 21 de julio de 1986. Versión electrónica: 18 de noviembre de 2004

Resumen

Este trabajo incluye cuatro partes. Excepto la primera, que sirve de introducción a las tres restantes, son las partes independientes entre sí.

Parte I. Se introducen las ecuaciones de Maxwell como condición para que una 2-forma en $\mathbb{R}^4$ cerrada tenga un codiferencial dado.

Parte II. Interpretándose las tres primeras coordenadas en $\mathbb{R}^4$ como coordenadas espaciales y la cuarta como coordenada temporal, se integran las ecuaciones de Maxwell en variedades estacionarias de dimensión 3 y compactas, llegándose al teorema de Gauss de flujo magnético y de conservación de cargas eléctricas, ya otras leyes clásicas del electromagnetismo.

Parte III. Definiendo las transformaciones de Lorentz en $\mathbb{R}^4$ se incluyen los teoremas relativistas de las ecuaciones de Maxwell.

Parte IV. Finalmente, fijando un sistema inercial estacionario, se traducirá el problema electromagnético de determinar los campos generados por cargas y corrientes estacionarias en el espacio, al problema matemático de calcular una forma exacta conociendo su codiferencial (ecuación de Poisson), el cual se resolverá mediante integración en una variedad compacta de dimensión 3, conociendo las condiciones de borde.

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

1. Parte I. Ecuaciones de Maxwell.

I.1. Notación.

Fijaremos algunos convenios de notación que serán usados en todo el trabajo:

- i) Cualquier 2-forma en $\mathbb{R}^4$ puede escribirse como $\omega(a, b)$ siendo

$$\omega(a, b) = (a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3) \wedge dx^4 + b_1 dx^2 \wedge dx^3 + b_2 dx^3 \wedge dx_1 + b_3 dx^1 \wedge dx^2$$

donde $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ son ternas de funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$.

- ii) Abreviaremos con la notación $\omega_1^a, \omega_2^b, \omega_3^c$ a las siguientes formas en $\mathbb{R}^4$:

- $\omega_1^a = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$
- $\omega_2^b = b_1 dx^2 \wedge dx^3 + b_2 dx^3 \wedge dx^1 + b_3 dx^1 \wedge dx^2$
- $\omega_3^c = c dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ donde $c \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$.

- iii) **Proposición** Operando se demuestra que:

- $df = \omega_1^{\text{grad} f} + \partial f / \partial x^4 dx^4$
- $d\omega_1^a = \omega_2^{\text{rot} a} + \omega_1^{\partial a / \partial x^4} \wedge dx^4$
- $d\omega_2^a = \omega_3^{\text{div} a} + \omega_2^{\partial a / \partial x^4} \wedge dx^4$

siendo $\partial a / \partial x^4 = (\partial a_1 / \partial x^4, \partial a_2 / \partial x^4, \partial a_3 / \partial x^4)$.

I.2.- Primeras ecuaciones de Maxwell.

Teorema 1 Es condición necesaria y suficiente para que una 2-forma $\omega(a, b)$ en $\mathbb{R}^4$ sea cerrada $d\omega(a, b) = 0$ que se verifiquen las dos primeras ecuaciones de Maxwell siguientes:

- $\text{rot } a + \partial b / \partial x^4 = 0$
- $\text{div } b = 0$

Demostración:

$\omega = \omega_1^a \wedge dx^4 + \omega_2^b$ Luego:

$$d\omega = d\omega_1^a \wedge dx^4 + d\omega_2^b = \omega_2^{\text{rot } a} \wedge dx^4 + \omega_3^{\text{div } b} + \omega_2^{\partial b / \partial x^4} \wedge dx^4 = \omega_2^{\text{rot } a + \partial b / \partial x^4} \wedge dx^4 + \omega_3^{\text{div } b}$$

Por lo tanto hemos probado que $d\omega = 0$ si y solo si $\text{rot } a + \partial b / \partial x^4 = 0$ y $\text{div } b = 0$ como se quería. $\square$

I.3.- Adjunto inercial y codiferencial inercial.

Consideremos el conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^r(\mathbb{R}^4))$ de las r -formas en $\mathbb{R}^4$, con $0 \leq r \leq 4$. Toda $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^r(\mathbb{R}^4))$ se puede escribir como:

$$\omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + \omega_r^b$$

donde a y b son ternas o funciones según corresponda dado r . Se conviene en que $\omega_{-1}^a = 0$.

Sea el isomorfismo $\# : C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^r(\mathbb{R}^4)) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^{4-r}(\mathbb{R}^4))$ definido por

$$\#(\omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + \omega_r^b) = -\omega_{3-r}^b \wedge dx^4 + (-1)^r \omega_{4-r}^a$$

$\#\omega$ se llama adjunto inercial de ω . Si ω es una r - forma entonces $\#\omega$ es un $4 - r$ -forma.

Se define el codiferencial inercial de una r - forma ω en $\mathbb{R}^4$ ($1 \leq r \leq 4$) a la $r - 1$ -forma:

$$\bar{d}\omega = (-1)^{r+1} \#d\#\omega$$

PROPIEDADES:

- 1) $\#\#\omega = (-1)^{r+1}\omega$
- 2) $\bar{d}\#\omega = \#d\omega$
- 3) $\#\bar{d}\omega = d\#\omega$

La demostración es inmediata a partir de las definiciones. Se observa que el diferencial y el adjunto inercial no conmutan.

I.4. Segundas ecuaciones de Maxwell.

Dada una 2-forma $\omega(a, b)$ en $\mathbb{R}^4$, su codiferencial inercial es una 1-forma que de manera gneral podemos escribir como:

$$\eta(g, h) = gdx^4 - \omega_1^h$$

donde $g \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $h = (h_1, h_2, h_3)$, $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$.

Usaremos el convenio de notación $\eta(g, h)$ para distinguir la 1-forma en $\mathbb{R}^4$ anterior, así como usaremos $\omega(a, b)$ para las 2-formas.

Teorema 2 Dadas en $\mathbb{R}^4$ la 2-forma $\omega(a, b)$ y la 1-forma $\eta(g, h)$ es condición necesaria y suficiente para que $\bar{d}\omega(a, b) = \eta(g, h)$ que se verifiquen las segundas ecuaciones de Maxwell:

$$\text{rot } b - \partial a / \partial x^4 = h$$

$$\text{div } a = g$$

Demostración: $\bar{d}\omega(a, b) = -\#d\#(\omega_1^a \wedge dx^4 + \omega_2^b) = -\#d(-\omega_1^b \wedge dx^4 + \omega_2^a) = -\#(-d\omega_1^b \wedge dx^4 + d\omega_2^a) = -\#(-\omega_2^{\text{rot } b} \wedge dx^4 + \omega_3^{\text{div } a} + \omega_2^{\partial a / \partial x^4} \wedge dx^4) = \#(\omega_2^{\text{rot } b - \partial a / \partial x^4} \wedge dx^4 - \omega_3^{\text{div } a}) = (\text{div } a \wedge dx^4 - \omega_1^{\text{rot } b - \partial a / \partial x^4})$.

Luego hemos probado que $\bar{d}\omega(a, b) = \eta(g, h)$ si y solo si $\text{div } a = g$ y $h = \text{rot } b - \partial a / \partial x^4$ como se quería. $\square$

I.5.- Campo electromagnético.

A menos de ciertas constantes físicas, las ternas de funciones a y b que verifican las ecuaciones de Maxwell, se llaman campo eléctrico y campo magnético respectivamente, y las funciones h y g corriente eléctrica y carga eléctrica respectivamente.

La 1-forma $\eta(g, h)$ se llama generadora.

Dada η el problema encarado en la parte IV consiste en hallar ω , respondiendo al problema físico de determinar el campo electromagnético generado por corrientes y cargas en el espacio-tiempo.

Matemáticamente se traduce en hallar una 2-forma cerrada en $\mathbb{R}^4$ conociendo su codiferencial inercial.

2. Parte II- Leyes clásicas del electromagnetismo.

II.1.- Proposición: Cálculo de integrales sobre superficies. Sea V una variedad de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$. Sea $P_0 \in V, (U, m)$ un mapa local tal que $P_0 \in U$. Sea P la función inversa de m , es decir $P : m(U) \mapsto U, P = P(x^1, x^2, x^3, x^4) \in U \subset V, x^i : m(U) \mapsto \mathbb{R}$. Sean (u, v) las coordenadas en $m(U)$, y sea $\{\partial/\partial u, \partial/\partial v\}$ la orientación en U .

Se cumple que

$$\int_U \omega_2^b = \iint_{m(U)} \langle b, P_u \times P_v \rangle du dv$$

siendo $P_u = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u} \right), P_v = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v} \right), P_u \times P_v$ el producto vectorial y $\langle, \rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

Observación: Esta proposición significa que $\int_U \omega_2^b$ se calcula como el flujo de b a través de U , según la normal $N = P_u \times P_v$.

Demostración: $\int_U \omega_2^b = \int_{m(U)} P^*(\omega_2^b) = \int_{m(U)} f du \wedge dv$, donde f se calcula aplicando $P^*(\omega_2^b)$ en el punto (u, v) a la base e_1, e_2 en $\mathbb{R}^2$. Luego $f(u, v) = (P^*\omega_2^b)(u, v)(e_1, e_2) = \omega_2^b(P(u, v))(P_*e_1, P_*e_2)$ siendo $P_* = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial u & \partial x^1/\partial v \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ una matriz 4×2 .

Por otro lado, como

$$\omega_2^b = b_1 dx^2 \wedge dx^3 + b_2 dx^3 \wedge dx^1 + b_3 dx^1 \wedge dx^2$$

se cumple que

$$\omega_2^b(Q)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} b_1(Q) & b_2(Q) & b_3(Q) \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix}$$

lo cual se comprueba operando. Resulta entonces que

$$f(u, v) = \det \begin{pmatrix} b_1(P(u, v)) & b_2(P(u, v)) & b_3(P(u, v)) \\ \partial x^1/\partial u & \partial x^2/\partial u & \partial x^3/\partial u \\ \partial x^1/\partial v & \partial x^2/\partial v & \partial x^3/\partial v \end{pmatrix}$$

y esto por definición es $\langle b(P(U, v)), P_u, P_v \rangle$. $\square$

II.2.- Teorema de Gauss.

Lema

Sea V una variedad en $\mathbb{R}^4$ de dimensión r , $1 \leq r \leq 4$, compacta, orientable, con borde ∂V . Sea ω una $5-r$ forma en $\mathbb{R}^4$. Entonces:

$$\int_V \# \bar{d}\omega = \int_{\partial V} \# \omega$$

Demostración: Sabiendo que $\# \bar{d}\omega = d\# \omega$, es inmediata la tesis del lema. $\square$

Teorema de Gauss

Sea V una variedad de dimensión 3 en $\mathbb{R}^4$, compacta y orientable, con borde ∂V contenida en $x^4 = cte$. Entonces se cumple que

- (1) $\int_{\partial V} \omega_2^b = 0$
- (2) $\int_{\partial V} \omega_2^h = \frac{d}{dx^4} \int_V \omega_3^g$

Observación: (1) significa que en todo instante el flujo magnético es nulo a través de la frontera de un volumen.

(2) significa que el flujo de corriente eléctrica a través de la frontera de un volumen es igual a la variación de carga eléctrica en su interior (conservación de cargas).

Se toma la orientación de ∂V inducida por la orientación en V (“hacia el exterior de V ”).

Demostración:

(1) $d\omega(a, b) = 0 \Rightarrow \int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega(a, b) = 0$ por Stokes. Entonces, sustituyendo $\omega(a, b) = \omega_1^a \wedge dx^4 + \omega_2^b$ resulta $\int_{\partial V} \omega_1^a \wedge dx^4 + \int_{\partial V} \omega_2^b = 0$

(2) $\int_V \# \bar{d}\omega = \int_{\partial V} \# \omega$ por el lema. Luego, por el teorema 2:

$$\int_V \# \eta(g, h) = \int_{\partial V} \# \omega(a, b)$$

Sustituyendo $\# \eta(g, h) = \omega_3^g + \omega_2^h \wedge dx^4$, $\# \omega(a, b) = -\omega_1^b \wedge dx^4 + \omega_2^a$, y sabiendo que en la variedad $dx^4 = 0$, resulta:

$$\int_V \omega_3^g = - \int_{\partial V} \omega_2^a$$

en todo instante x^4 . Derivando respecto de x^4 , como V y por lo tanto ∂V están contenidos en $X^4 = cte$ se obtiene (tomando la misma V para todos los x^4):

$$-\frac{d}{dx^4} \int_V \omega_3^g = \int_{\partial V} \omega_2^{\partial a / \partial x^4}$$

Por las segundas ecuaciones de Maxwell, se tiene:

$$\frac{\partial a}{\partial x^4} = \text{rot } b - h \Rightarrow \omega_2^{\partial a / \partial x^4} = d\omega_1^b - \omega_2^h$$

siendo

$$\int_{\partial V} \omega_2^{\partial a / \partial x^4} = \int_{\partial V} d\omega_1^b - \int_{\partial V} \omega_2^h = \int_V dd\omega_1^b - \int_{\partial V} \omega_2^h$$

donde es cero la primera integral del último miembro de la igualdad anterior. Queda:

$$\frac{d}{dx^4} \int_V \omega_3^g = \int_{\partial V} \omega_2^h \quad \square$$

II.3.- Otras leyes clásicas.

i) De la ecuación $d\omega_1^a + \omega_2^{b/\partial x^4} = 0$, integrándola sobre una variedad S de dimensión 2, estacionaria (es decir $x^4 = cte$), en $\mathbb{R}^4$, orientable y compacta, se obtiene:

LEY DE FARADAY:

$$\int_{\partial S} \omega_1^a = -\frac{d}{dx^4} \int_S \omega_2^b$$

La circulación del campo eléctrico a lo largo del borde de una superficie compacta, estacionaria, es igual a la variación del flujo magnético a través de la superficie.

ii) De la ecuación $d\omega_1^b - \omega_2^{\partial a/\partial x^4} = \omega_2^h$, en forma similar, se obtiene:

LEY DE BIOT-SAVART:

$$\int_{\partial S} \omega_1^b = \int_S \omega_2^{h+\partial a/\partial x^4}$$

que en caso de ser a independiente de x^4 da la:

LEY DE AMPÈRE:

$$\int_{\partial S} \omega_1^b = \int_S \omega_2^h$$

La circulación del campo magnético a lo largo del borde de una superficie compacta, es igual al flujo de corriente a través de la superficie, si el campo eléctrico es estacionario.

3. Parte III- Ecuaciones de Maxwell relativistas.

III.1.- Transformaciones de Lorentz.

Definiciones.

(1) Una transformación lineal $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$, con matriz L , $Y = LX$, es de Lorentz si

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - (y^4)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$$

$\forall X = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4$, $\forall Y = LX$.

(2) Con respecto a un sistema de coordenados dado de referencia, otro sistema se llama inercial si la matriz L de cambio de base tiene determinante positivo y corresponde a una transformación de Lorentz.

Observación: Las transformaciones de Lorentz no conservan la métrica usual de $\mathbb{R}^4$, en general no son ortogonales. El subgrupo de transformaciones de Lorentz que dejan x^4 invariante sí corresponde aun subgrupo de transformaciones ortogonales, y es isomorfo con el grupo de isometrías en $\mathbb{R}^3$.

Teorema

(1) si L es la matriz que corresponde a una transformación de Lorentz, entonces $L^T A L = A$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y recíprocamente.

(2) Si L es la matriz de cambio de base de un sistema inercial al de referencia, entonces $\det L = 1$.

Demostración: Siendo $Y = LX$, L de Lorentz, se cumple $Y^T AY = X^T AX \quad \forall X \in \mathbb{R}^4$. Luego $X^T(L^T AL)X = X^T AX \quad \forall X$. En particular dados X_1, X_2 arbitrarios en $\mathbb{R}^4$, es:

$$(X_1 + X_2)^T(L^T AL)(X_1 + X_2) = (X_1 + X_2)^T A(X_1 + X_2)$$

Operando y cancelando los términos iguales en ambos miembros, resulta:

$$X_2^T(L^T AL)X_1 + X_1^T(L^T AL)X_2 = X_2^T AX_1 + X_1^T AX_2$$

Siendo $X_1^T(L^T AL)X_2 = (X_1^T(L^T AL)X_2)^T$, por ser un número, resulta $X_1^T(L^T AL)X_2 = X_1^T AX_2 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^4$. Eligiendo los vectores X_1 y X_2 de la base en $\mathbb{R}^4$ resulta que todos los términos de las matrices son iguales: $L^T AL = A$.

La misma operación es invertible, de donde si $L^T AL = A$ entonces L es de Lorentz.

(2) $\det A = -1 = (\det L^T) \det A \det L = -(\det L)^2$, luego $\det L = \pm 1$, siendo $\det L > 0$. Entonces $\det L = 1 \quad \square$

III.2.- Primera ecuación de Maxwell relativista.

Sabiendo que $f^* d\omega = df^* \omega$, haciendo cualquier cambio de coordenadas $\mathcal{F}$ (la forma ω se expresa como $\mathcal{F}^* \omega$), la operación de diferenciación queda bien definida (se puede hacer el cambio de coordenadas antes y diferenciar después o viceversa). Eso significa que si para un observador en el sistema de coordenadas (I) la forma ω tiene diferencial η , entonces para otro observador en el sistema de coordenadas (II), cualquiera sea este, la forma $\mathcal{F}^* \omega$ (correspondiente a ω en su sistema) tiene por diferencial $\mathcal{F}^* \eta$ (correspondiente a η en su sistema).

Por lo tanto una forma cerrada en un sistema de coordenadas, lo será en cualquier otro sistema (inercial o no). Idem. para una forma exacta. Estas son propiedades intrínsecas a las formas.

El codiferencial inercial en cambio, depende del sistema. Sin embargo está definido de tal manera que no depende del sistema siempre que éste sea inercial respecto al de referencia. Como en física relativista solo interesan los cambios de coordenadas a sistemas inerciales, resulta que el codiferencial inercial será una operación intrínseca a la forma, en ese sentido.

Teorema.

Dada una 2-forma α en $\mathbb{R}^4$, en un cierto sistema de coordenadas de referencia, la condición necesaria y suficiente para que $d\alpha = 0$ es que se verifique la primera ecuación de Maxwell relativista:

$$\operatorname{div} b = 0$$

en todos los sistemas inerciales respecto al de referencia, siendo $\mathcal{L}^* \alpha = \omega(a, b)$, $\mathcal{L}$ la transformación de Lorentz que corresponde al cambio de base.

Demostración:

La condición necesaria: $d\alpha = 0 \Rightarrow d\mathcal{L}^* \alpha = 0$. Del teorema 1 se tiene $\operatorname{div} b = 0$.

La condición suficiente: Para un sistema inercial, donde las coordenadas son (y^1, y^2, y^3, y^4) , siendo $\mathcal{L}^* \alpha = \omega(a, b)$, se cumple:

$$d\omega = d\omega^1 \wedge dy^4 + \omega_2^{\partial b / \partial y^4} + \omega_3^{\operatorname{div} b}$$

Siendo por hipótesis $\operatorname{div} b = 0$ se cumple

$$\mathcal{L}^*(d\alpha) = d(\mathcal{L}^* \alpha) = \omega_2^M \wedge dy^4$$

En el sistema de referencia, las coordenadas son X^1, x^2, x^3, x^4 , en particular se cumple: $d\alpha = \omega_2^N \wedge dx^4$, $N = (N_1, N_2, N_3)$, $N_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$. Basta demostrar que $N = 0$.

Por absurdo, si $N \neq 0$, entonces alguno de los N_i , por ejemplo N_1 es no nulo: $N_1 \neq 0$. Vamos a encontrar un cierto sistema inercial tal que en él no pueda ser $\text{div } b = 0$.

Sea $\mathcal{L}$ la transformación de Lorentz, con $0 < v < 1$ fijo cualquiera, dada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(y^1 - vy^4), & x^2 &= y^2 \\ X^3 &= y^3, & x^4 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(y^4 - vy^1) \end{aligned}$$

(operando se verifica que $L^T AL = A$, siendo L la matriz de la transformación $\mathcal{L}$, y que $\det L = 1$).

Por lo anterior es

$$\mathcal{L}^*(d\alpha) = \mathcal{L}^*(\omega_2^N \wedge dx^4) = \omega_2^M \wedge dy^4$$

Sustituyendo en $\omega_2^N \wedge dx^4$ las ecuaciones de la transformación $\mathcal{L}$, resulta:

$$\begin{aligned} \omega_2^M \wedge dy^4 &= \mathcal{L}^*(N_1 dx^2 \wedge dx^3 + (N_2 dx^3 - N_3 dx^2) \wedge dx^1) \wedge \mathcal{L}^* dx^4 = \\ &= \omega_2^{M'} \wedge dy^4 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} n_1 \circ \mathcal{L}(dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^1) \end{aligned}$$

de donde $M = M'$ y $N_1 = 0$ contra lo supuesto. $\square$

III.3.- Pseudo producto interno de formas en $\mathbb{R}^4$.

Para llegar a la segunda ecuación de Maxwell relativista, es necesario previamente demostrar que el codiferencial inercial es una operación bien definida, o sea que no depende del sistema inercial de coordenadas. Para ello es necesario definir algunas herramientas matemáticas.

Definición: Dadas dos r -formas ω y ω' en $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = \omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + \omega_3^b$$

$$\omega' = \omega_{r-1}^{a'} \wedge dx^4 + \omega_3^{b'}$$

siendo a, a', b, b' ternas o funciones $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ según corresponda de acuerdo a r , definimos el Pseudo-Producto Interno $\langle \omega, \omega' \rangle$ del modo siguiente:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = - \langle a, a' \rangle + \langle b, b' \rangle$$

siendo $\langle a, a' \rangle = aa'$ si son funciones, o $\langle a, a' \rangle = \sum_{i=1}^3 a_i a'_i$ si son ternas de funciones.

Observaciones:

(1) $\langle, \rangle$ es una función $\langle, \rangle: C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^r(\mathbb{R}^4)) \times C^\infty(\mathbb{R}^4, \Lambda^r(\mathbb{R}^4)) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

(2) Es una función bilineal y simétrica, lo cual es comprobable inmediatamente a partir de la definición.

(3) La definición de $\langle, \rangle$ está ligada al sistema de coordenadas.

Proposición 1. Sean ω y ω' dos r -formas en $\mathbb{R}^4$ tales que:

$$\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r, \quad \omega' = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r$$

donde α_i, β_i son 1-formas en $\mathbb{R}^4$. Entonces se cumple

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \det(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle) \quad [1]$$

Demostración: La base de las r -formas en $\mathbb{R}^4$ está dada por $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq 4$.

Primero se demostrará la tesis [1] para ω y ω' de la base, y luego por linealidad del producto interno y del producto exterior y del determinante, se pasará al caso general.

(1) $\omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, $\omega' = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq 4$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 4$.

Se observa que, en este caso: $\langle \omega, \omega' \rangle = 1$ si $i_1 = j_1, \dots, i_h = j_h, \dots, i_r = j_r < 4$, $\langle \omega, \omega' \rangle = -1$ si $i_1 = j_1, \dots, i_h = j_h, \dots, i_r = j_r = 4$, y $\langle \omega, \omega' \rangle = 0$ en los demás casos.

También es inmediato que si $i_1 \neq j_1$, por ejemplo $i_1 < j_1$ entonces resulta $i_1 < j_k \quad \forall k : 1 \leq k \leq r$. Entonces se cumple $\langle dx^{i_1}, dx^{j_k} \rangle = 0$. La primera fila de la matriz $(\langle dx^{i_h}, dx^{j_k} \rangle)$ es toda nula, y su determinante es cero.

Si es $i_1 = j_1, \dots, i_{h-1} = j_{h-1}, i_h \neq j_h$, por ejemplo $i_h < j_h$ resulta $i_h < j_k \quad \forall h \leq k \leq r$. Además como $i_h > i_k = j_k$ si $1 \leq k < h$, se cumple $i_h \neq j_k$ si $1 \leq k \leq r$, $\langle dx^{i_h}, dx^{j_k} \rangle = 0 \quad \forall k$. La h -ésima fila de la matriz es nula y su determinante es cero.

Concluimos que el determinante de la matriz es cero a menos que sean $i_h = j_h \quad \forall 1 \leq h \leq r$.

Si es $i_h = j_h$ la matriz es diagonal, con todos sus elementos igual a 1, excepto eventualmente el último que será -1 si y solo si $i_r = j_r = 4$.

Luego el determinante de la matriz es igual a $\langle \omega, \omega' \rangle$.

(2) Generalicemos para $\omega = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, $1 \leq i_1 \leq 4, 1 \leq i_h \leq 4, 1 \leq h \leq r$. Si aparecen supraíndices repetidos será $\omega = 0$ y $\langle \omega, \omega' \rangle = 0$. Las filas correspondientes de la matriz serán iguales y por lo tanto su determinante será nulo.

Si no aparecen supraíndices repetidos, pero están desordenadas, permutándolos resulta que ω será una r -forma de la base multiplicada por $(-1)^\sigma$, donde σ es la cantidad de trasposiciones necesarias en la permutación de supraíndices. En la matriz correspondiente, por cada trasposición de supraíndices, se permutan dos filas. Luego su determinante se multiplica también por $(-1)^\sigma$. La demostración en este caso queda reducida a la del caso (1).

(3) Sea ahora ω' como antes y $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \wedge \alpha$ donde $\alpha = \sum_{p=1}^4 a_p dx^p$.

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{p=1}^4 a_p \langle dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^p, \omega' \rangle$$

Por lo demostrado en (2), resulta:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{p=1}^4 a_p \det \begin{pmatrix} \langle dx^{i_1}, dx^{j_1} \rangle & \dots & \langle dx^{i_1}, dx^{j_r} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle dx^p, dx^{j_1} \rangle & \dots & \langle dx^p, dx^{j_r} \rangle \end{pmatrix}$$

Por la linealidad del determinante, podemos multiplicar por a_p la última fila y sumarlas todas. Por la linealidad del producto interno estas operaciones se pueden efectuar dentro de ellos, resultando:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{p=1}^4 a_p \det \begin{pmatrix} \langle dx^{i_1}, dx^{j_1} \rangle & \dots & \langle dx^{i_1}, dx^{j_r} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \alpha, dx^{j_1} \rangle & \dots & \langle \alpha, dx^{j_r} \rangle \end{pmatrix}$$

(4) Por la multilinealidad de $\langle, \rangle$ y del determinante, el procedimiento seguido para demostrar (3) muestra la tesis en general. $\square$

Teorema. El pseudo producto interior no depende del sistema inercial de coordenadas dado respecto a un sistema de referencia. Es decir: $\mathcal{L}^* \langle \omega, \omega' \rangle = \langle \mathcal{L}^* \omega, \mathcal{L}^* \omega' \rangle$ para toda transformación $\mathcal{L}$ de Lorentz con determinante positivo.

Demostración: Sea L la matriz de la transformación $\mathcal{L}$, $X = LY$ con $L^T A L = A$, $\det L = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) En el sistema de referencia, sean las 1-formas $\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3 + a_4 dx^4$, $\omega' = \sum_{i=1}^4 a'_i dx^i$. En el sistema inercial $\mathcal{L}^*(\omega) = \sum_{i=1}^4 b_i dy^i$, $\mathcal{L}^*(\omega') = \sum_{i=1}^4 b'_i dy^i$.

Llamando $a(X) = \begin{pmatrix} a_1(X) \\ \vdots \\ a_4(X) \end{pmatrix}$, $b(Y) = \begin{pmatrix} b_1(Y) \\ \vdots \\ b_4(Y) \end{pmatrix}$ resulta $\langle \omega, \omega' \rangle = [a(X)]^T A [a(X)]$. De donde

$$\mathcal{L}^* \langle \omega, \omega' \rangle = [a(LY)]^T A [a(LY)]$$

Por otro lado

$$\langle \mathcal{L}^* \omega, \mathcal{L}^* \omega' \rangle = [b(Y)]^T A [b(Y)]$$

Además sustituyendo en

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3 + a_4 dx^4$$

las ecuaciones del cambio de base $X = LY$, resulta $\mathcal{L}^* \omega = \sum_{i=1}^4 b_i dy^i$, de donde

$$a(LY) = Lb(Y)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^* \langle \omega, \omega' \rangle = [b(Y)]^T L^T A L [b(Y)]$$

Siendo $L^T A L = A$ queda demostrada la tesis para 1-formas.

(2) Para r -formas, por la proposición anterior se puede reducir al caso de las 1-formas, ya que cualquier r -forma ω se puede escribir como

$$\omega = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \dots \wedge \alpha_{i,r} \quad \alpha_{i,h} \text{ 1-formas}$$

$$\omega' = \sum_{j=1}^q \beta_{j,1} \wedge \beta_{j,2} \wedge \dots \wedge \beta_{j,r} \quad \beta_{j,k} \text{ 1-formas}$$

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \langle \alpha_{i,1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i,r}, \beta_{j,1} \wedge \dots \wedge \beta_{j,r} \rangle$$

por la linealidad del producto interno.

Aplicando la proposición anterior queda:

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \det_{h,k}(\langle \alpha_{i,h}, \beta_{j,k} \rangle)$$

Aplicando el operador $\mathcal{L}^*$, sabiendo que es lineal y que $\mathcal{L}^*(u \wedge v) = \mathcal{L}^*u \wedge \mathcal{L}^*v$, y por la parte (1) y la proposición demostrada antes, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* \langle \omega, \omega' \rangle &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \det_{h,k}(\langle \mathcal{L}^* \alpha_{i,h}, \mathcal{L}^* \beta_{j,k} \rangle) = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \langle \mathcal{L}^* \alpha_{i,1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}^* \alpha_{i,r}, \mathcal{L}^* \beta_{j,1} \wedge \dots \wedge \mathcal{L}^* \beta_{j,r} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \langle \mathcal{L}^*(\alpha_{i,1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i,r}), \mathcal{L}^*(\beta_{j,1} \wedge \dots \wedge \beta_{j,r}) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{L}^*\left(\sum_{i=1}^p \alpha_{i,1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i,r}\right), \mathcal{L}^*\left(\sum_{j=1}^q \beta_{j,1} \wedge \dots \wedge \beta_{j,r}\right) \rangle = \langle \mathcal{L}^*\omega, \mathcal{L}^*\omega' \rangle \quad \square \end{aligned}$$

III.4.- Teorema del Codiferencial Inercial.

Lema. Sea ω una r -forma en $\mathbb{R}^4$ y η una 4 -forma en $\mathbb{R}^4$. Se cumple que

$$\omega \wedge \eta = \langle \# \omega, \eta \rangle dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

$$\text{Demostración: } \omega = \omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + \omega_r^b, \quad \eta = \omega_{3-r}^{a'} \wedge dx^4 + \omega_{4-r}^{b'}, \quad \# \omega = -\omega_{3-r}^b + (-1)^r \omega_{4-r}^a$$

$$\langle \# \omega, \eta \rangle = \langle a', b \rangle + (-1)^r \langle b', a \rangle$$

Por otro lado

$$\omega \wedge \eta = \omega_{r-1}^a \wedge dx^4 \wedge \omega_{4-r}^{b'} + \omega_r^b \wedge \omega_{3-r}^{a'} \wedge dx^4$$

Sustituyendo $\omega_{r-1}^a, \omega_{4-r}^{b'}, \omega_{3-r}^{a'}, \omega_r^b$, resulta:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \langle a, b' \rangle (-1)^{4-r} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \\ &+ \langle b', a \rangle dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \end{aligned}$$

de donde resulta la tesis. $\square$

Teorema.

La codiferenciación inercial es una operación independiente del sistema de coordenadas inerciales respecto al de referencia:

$$\bar{d}\mathcal{L}^*\omega = \mathcal{L}^*\bar{d}\omega \quad \forall \mathcal{L} \text{ transformación de Lorentz con determinante positivo.}$$

Demostración: Sea ω una r -forma y sea η una $4-r$ forma. Por el lema anterior:

$$\mathcal{L}^*(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}^* \langle \# \omega, \eta \rangle = \mathcal{L}^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4)$$

siendo $\mathcal{L}$ dada por las ecuaciones $X = LY$.

$$\mathcal{L}^*(\omega \wedge \eta) = \langle \mathcal{L}^*\# \omega, \mathcal{L}^*\eta \rangle \det L (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4)$$

donde $\det L = 1$. Por ser el pseudo-producto interno bien definido respecto a los sistemas inerciales:

$$\mathcal{L}^*(\omega \wedge \eta) = \langle \mathcal{L}^*\# \omega, \mathcal{L}^*\eta \rangle dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^4$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}^*(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}^*\omega \wedge \text{cal} L^*\eta = \langle \# \mathcal{L}^*\omega, \mathcal{L}^*\eta \rangle dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^4$$

por el lema anterior, de donde:

$$\langle \mathcal{L}^*\# \omega, \mathcal{L}^*\eta \rangle = \langle \# \mathcal{L}^*\omega, \mathcal{L}^*\eta \rangle \quad \forall \text{ r-forma } \omega, \quad \forall \text{ 4-r-forma } \eta$$

Eligiendo $\mathcal{L}^*\eta$ las $4-r$ formas de la base, resulta que todas las coordenadas de $\mathcal{L}^*\# \omega$ y de $\# \mathcal{L}^*\omega$ son iguales, de donde $\mathcal{L}^*\# \omega = \# \mathcal{L}^*\omega$. Por lo tanto el adjunto inercial es una operación bien definida para sistemas inerciales.

$$\bar{d}\omega = (-1)^{r+1} \# d \# \omega$$

$$\mathcal{L}^*\bar{d}\omega = (-1)^{r+1} \mathcal{L}^*\# d \# \omega = (-1)^{r+1} \# d \# \mathcal{L}^*\omega = \bar{d}\mathcal{L}^*\omega \quad \square$$

III. 5.- Segunda ecuación de Maxwell relativista.

Teorema 4.

Dada una 2-forma α y una 1-forma β en $\mathbb{R}^4$, se cumple $\bar{d}\alpha = \beta$ en un cierto sistema de coordenadas de referencia, si y solo si se verifica la siguiente *segunda ecuación de Maxwell relativista*:

$$\text{div } a = g$$

en todos los sistemas inerciales respecto al de referencia, donde $\mathcal{L}^*\alpha = \omega(a, b)$, $\mathcal{L}^*\beta = \eta(g, h)$, $\mathcal{L}$ es la transformación de Lorentz que corresponde al cambio de base del sistema de referencia al inercial.

Demostración:

La condición necesaria: $\bar{d}\alpha = \beta \Rightarrow \mathcal{L}^*\bar{\alpha} = \mathcal{L}^*\beta \Rightarrow \bar{d}(\mathcal{L}^*\alpha) = \mathcal{L}^*\beta \Rightarrow \text{div } a = g$ por el teorema 2.

La condición suficiente:

Para un sistema inercial donde las coordenadas son llamadas y^1, y^2, y^3, y^4 , siendo $\mathcal{L}^*\alpha = \omega(a, b)$, $\mathcal{L}^*\beta = \eta(g, h)$ se cumple

$$\mathcal{L}^*(\bar{d}\alpha - \beta) = \bar{d}(\mathcal{L}^*\alpha) - \mathcal{L}^*\beta = \bar{d}\omega(a, b) - \eta(g, h) = \text{div } a \, dy^4 - \omega_1^{\text{rot}} b - \partial a / \partial y^4 - g dy^4 + \omega_1^h$$

Siendo por hipótesis $\text{div } a = g$ se cumple

$$\bar{d}\alpha - \beta = \omega_1^N, \quad N = (N_1, N_2, N_3), \quad N_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$$

Basta demostrar que $N = 0$.

Por absurdo, si $N \neq 0$, entonces alguno de los N_i , por ejemplo N_1 , es no nulo: $N_1 \neq 0$. Sea la transformación $\mathcal{L}$ de Lorentz con $0 < v < 1$ fijo cualquiera:

$$x^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(y^1 - vy^4), \quad x^2 = y^2,$$

$$x^3 = y^3, \quad x^4 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(y^4 - vy^1)$$

Operando se verifica que $L^T AL = A$ siendo L la matriz de la transformación que cumple $\det L = 1$. Por lo tanto tenemos que:

$$\mathcal{L}^*(\bar{d}\alpha - \beta) = \mathcal{L}^*(\omega_1^N) = \omega_1^M$$

$$\omega_1^M = \mathcal{L}^*(N_1 dx^1 + N_2 dx^2 + N_3 dx^3) = \omega_1^{M'} - \frac{N_1 \circ \mathcal{L}v}{\sqrt{1-v^2}} dy^4$$

de donde $N_1 = 0$ contra lo supuesto. $\square$

4. Parte IV.- Determinación del campo electromagnético.

Se trabajará en sistemas estacionarios, aquellos donde a, b, g, h son independientes de x^4 . En el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que se obtiene con $x^4 = \text{cte}$ resultan las formas diferenciales isomorfas con las formas $C^\infty(\mathbb{R}^3, \Lambda(\mathbb{R}^3))$. En estos sistemas estacionarios, planteadas las ecuaciones de Maxwell, se estudiará el problema de determinar los campos eléctrico y magnético, dadas las corrientes y cargas en el espacio (dada la forma generadora). Para esto habrá que definir algunas herramientas matemáticas:

IV.1.- Adjunto ortogonal y codiferencial ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

Utilizando la misma notación introducida al principio ω_r^a , $0 \leq r \leq 3$ es una r -forma diferencial en $\mathbb{R}^3$ (el sistema es estacionario: a es independiente de x^4). Sea

$$\omega_0^f = f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

Definición. El *Adjunto Ortogonal* de ω_r^a en $\mathbb{R}^3$ es la $3-r$ -forma $*\omega_r^a = \omega_{3-r}^a$

Proposición.

- (1) $*$ es un isomorfismo : $C^\infty(\mathbb{R}^3, \Lambda^r(\mathbb{R}^3)) \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^3, \Lambda^{3-r}(\mathbb{R}^3))$.
- (2) $**\omega_r^a = \omega_r^a$.

(3) $*\psi\omega = \psi * \omega$, $\forall \psi$ 0-forma.

(4) $\omega_1^a \wedge (*\omega_2^b) = \omega_1^b \wedge (*\omega_2^a)$.

Demostración: (1), (2), y (3) son inmediatas de la definición. (4) se obtiene de $\omega_1^a \wedge (*\omega_1^b) = \omega_1^a \wedge \omega_2^b = \omega_1^b \wedge \omega_2^a = \omega_1^b \wedge (*\omega_1^a)$. $\square$

Definición. El *Codiferencial Ortogonal* de ω_1^a en $\mathbb{R}^3$, con $1 \leq r \leq 3$ es la $4-r$ -forma $\tilde{d}\omega = *d*\omega$.

Proposición. Es inmediato que

(1) $\tilde{d}*\omega = *d\omega$.

(2) $*\tilde{\omega} = d*\omega$.

bf Observación. $*$ es la restricción del operador llamado estrella de Hodge en las formas en $\mathbb{R}^3$.

El codiferencial ortogonal en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\tilde{d}\omega = (-1)^{r(n-r)} * d * \omega$$

siendo $*$ el operador estrella de Hodge. Estamos restringiendo estos operadores a las formas en $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^4$ el codiferencial ortogonal $\tilde{d}$ es distinto al codiferencial inercial $\bar{d}$, definido en la parte I de este trabajo. El primero ($\tilde{d}$, codiferencial ortogonal) está bien definido admitiendo cambios de coordenadas ortogonales en $\mathbb{R}^4$. El segundo ($\bar{d}$, codiferencial inercial) está bien definido admitiendo cambios de coordenadas inerciales (transformaciones de Lorentz con determinante positivo), como se vio en la parte III.

Proposición. En sistemas estacionarios, se cumple la siguiente relación:

(1) $\#\omega = -*\omega_r^b \wedge dx^4 + (-1)^r *\omega_{r-1}^a$ para la r -forma ω en $\mathbb{R}^4$, siendo $\omega = \omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + \omega_r^b$.

(2) $\bar{d}\omega = \tilde{d}\omega_{r-1}^a \wedge dx^4 - \tilde{d}\omega_r^b$

Demostración: $d\#\omega = -d*\omega_r^b \wedge dx^4 + (-1)^r d*\omega_{r-1}^a = -*\tilde{d}\omega_r^b \wedge dx^4 + (-1)^r *\tilde{d}\omega_{r-1}^a$ es una $5-r$ -forma en $\mathbb{R}^4$. Aplicando la relación (1): $\#d\#\omega = -(-1)^r \tilde{d}\omega_{r-1}^a \wedge dx^4 + (-1)^{5-r} (-1) \tilde{\omega}_r^b$ y luego $\bar{d}\omega = (-1)^{5-r} \#d\#\omega \Rightarrow \bar{d}\omega = \tilde{d}\omega_{r-1}^a \wedge dx^4 - \tilde{d}\omega_r^b$. $\square$

IV.2.- Problema electromagnético en el caso estacionario.

Proposición. En el caso estacionario las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a

$$\tilde{d}\omega_2^b = \omega_1^h, \quad d\omega_2^b = 0, \quad \tilde{d}\omega_1^a = g, \quad d\omega_1^a = 0$$

Demostración: $d\omega(a, b) = 0 \Leftrightarrow d(\omega_1^a \wedge dx^4 + \omega_2^b) = 0$. En el caso estacionario es $d\omega_1^a \wedge dx^4 + d\omega_2^b = 0 \Leftrightarrow d\omega_1^a = 0, d\omega_2^b = 0$.

Por otra parte $\bar{d}\omega(a, b) = \eta(g, h) \Leftrightarrow$ (en el caso estacionario) $\tilde{d}\omega_1^a \wedge dx^4 - \tilde{d}\omega_2^b = gdx^4 - \omega_1^h$ (por la proposición anterior). Esto se cumple si y solo si $\tilde{d}\omega_1^a = g, \tilde{d}\omega_2^b = \omega_1^h$. $\square$

El problema electromagnético de determinar los campos generados por corrientes y cargas en el espacio, se traduce en el caso estacionario, a encontrar formas cerradas en $\mathbb{R}^3$, ω_2^b y ω_1^a , conociendo su codiferencial ortogonal.

IV.3.- Potencial eléctrico y magnético. Ecuación de Poisson.

Si valen las ecuaciones de Maxwell en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, con forma de estrella, por el lema de Poincaré es

$$\omega_1^a = d\phi, \quad \omega_2^b = d\omega_1^v$$

siendo ϕ una 0-forma llamada potencial eléctrico y v una terna de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ llamada potencial vector magnético.

De las ecuaciones de Maxwell en el caso estacionario se deduce que

$$\tilde{d}d\phi = g, \quad \tilde{d}d\omega_1^v = \omega_1^h$$

Para resolver el problema electromagnético basta encontrar ϕ y v que verifiquen estas ecuaciones.

La ecuación $\tilde{d}d\phi = g$ se llama ecuación de Poisson. Es una ecuación diferencial de segundo orden:

$\tilde{d}d\phi = *d * d\phi = *d * \omega_1^{\text{grad } \phi} = *d\omega_2^{\text{grad } \phi} * \omega_3^{\text{div}(\text{grad } \phi)} = \text{div}(\text{grad } \phi) = \Delta\phi$, Laplaciano de ϕ . La ecuación de Poisson es entonces:

$$\Delta\phi = g \quad \text{donde} \quad \Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$$

Lema. Siendo $v = (v_1, v_2, v_3)$, $v_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se cumple:

$$d\tilde{d}\omega_1^v - \tilde{d}d\omega_1^v = \sum_{i=1}^3 \Delta v_i dx^i$$

Demostración: En primer lugar aplicando la definición de $\text{rot } v$ y operando, se obtiene:

$$\text{rot}(\text{rot } v) = \text{grad}(\text{div } v) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d\tilde{d}\omega_1^v - \tilde{d}d\omega_1^v &= d * d\omega_2^v - *d * \omega_2^{\text{rot } v} = \\ &= d * \omega_3^{\text{div } v} - *d\omega_1^{\text{rot } v} = d(\text{div } v) - \omega_2^{\text{rot}(\text{rot } v)} = \omega_1^{\text{grad}(\text{div } v)} - \omega_1^{\text{rot}(\text{rot } v)} = \\ &= \omega_1^{(\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)} = \sum_{i=1}^3 \Delta v_i dx^i \quad \square \end{aligned}$$

IV.4.- Teorema del potencial magnético.

En un abierto con forma de estrella, por Poincaré, es inmediato verificar que:

$$d\omega_1^v = d\omega_1^{v'} \Leftrightarrow v = v' + \text{grad } \psi$$

Luego, basta determinar un potencial magnético v particular para tenerlos todos. Interesa entonces hallar alguna solución particular de la ecuación $\tilde{d}d\omega_1^v = \omega_1^h$.

Teorema: si $\tilde{d}\omega_1^v = 0$ entonces

$$\tilde{d}d\omega_1^v = \omega_1^h \Leftrightarrow \Delta v_i = h_i$$

Demostración: Es inmediato a partir del lema $d\tilde{d}\omega_1^v - \tilde{d}d\omega_1^v = \sum_{i=1}^3 \Delta v_i dx^i$. $\square$

Conclusión: Para resolver el problema electromagnético alcanza con resolver las ecuaciones de Poisson:

$$\Delta\phi = g, \quad \Delta v_i = h_i$$

IV.5.- Teoremas de integración.

Se llama ecuación de Laplace a la ecuación de Poisson homogénea $\Delta\phi = 0$.

La función $r(P) = d(P, P_0)$ en $\mathbb{R}^3$ siendo P_0 un punto fijo, es $C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{P_0\}, \mathbb{R})$. Operando se comprueba que $1/r$ es una solución de la ecuación de Laplace.

Lema: Si V es una variedad compacta orientable de dimensión r , $1 \leq r \leq 3$ en $\mathbb{R}^3$, con borde ∂V y ω es una $4-r$ -forma en V se cumple que

$$\int_V * \tilde{d}\omega = \int_{\partial V} *\omega$$

Demostración: Es el teorema de Stokes usando que $*\tilde{d}\omega = d*\omega$.

Teorema: Sean ψ, ϕ dos funciones $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Si V es una variedad compacta de dimensión 3 en $\mathbb{R}^3$, orientable, con borde ∂V , se cumple:

$$\int_V *(-\psi \tilde{d}d\phi + \phi \tilde{d}d\psi) = \int_{\partial V} -\psi(*d\phi) + \phi(*d\psi)$$

Demostración: Sea $\omega = \psi d\phi - \phi d\psi$. Es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Por un lado se tiene que $*\omega = \psi*d\phi - \phi*d\psi$. Por otro lado es $*\tilde{d}\omega = d*\omega = d(\psi*d\phi - \phi*d\psi) = d\psi \wedge *d\phi - d\phi \wedge *d\psi + \psi*d\phi - \phi*d\psi$.

Por lo demostrado en la parte (4) de la proposición sobre propiedades del adjunto ortogonal, se naulan los dos primeros sumandos del segundo miembro:

$$*\tilde{d}\omega = \psi * \tilde{d}d\phi - \phi * \tilde{d}d\psi$$

Aplicando el lema anterior resulta la tesis. $\square$

IV.6.- Solución a la ecuación de Poisson.

Vamos a buscar soluciones ϕ a la ecuación de Poisson $\Delta\phi = g$, en variedades compactas orientables de dimensión 3, en $\mathbb{R}^3$, conociendo ciertas condiciones de borde.

Sea $P_0 \in V$, $P_0 \notin \partial V$. Para fijar ideas supondremos que P_0 es el origen $(0, 0, 0)$.

$P_0 \notin \partial V$, P_0 es interior a V . Podemos considerar entonces una esfera E , abierta de radio ϵ y centro P_0 , contenida en V . Sea V' la nueva variedad con borde obtenida haciendo $V \cap E^c$. Su borde $\partial V'$ es el borde de V y la superficie Σ esférica, con la normal orientada hacia P_0 . Aplicando el teorema anterior a la variedad V' , haciendo $\psi = 1/r$ siendo $r(P) = d(P, P_0)$, $\psi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, se obtiene ψ solución de la ecuación de Laplace. Luego:

$$\int_{V'} *(1/r) \tilde{d}d\phi + \int_{\partial V} \phi * d(1/r) - (1/r) * d\phi = \int_{\Sigma} (1/r) * d\phi + \int_{\Sigma} \phi * d(1/r)$$

Estudiaremos las dos integrales del segundo miembro:

(a) $\int_{\Sigma} (1/r) * d\phi = (1/\epsilon) \int_{\Sigma} * d\phi$, siendo ϕ definida en toda la esfera E . Por el teorema de Stokes se puede hacer

$$\int_{\Sigma} * d\phi = - \int_E d * d\phi = - \int_E * \tilde{d} d\phi = - \int_E \Delta \phi dx \wedge dy \wedge dz$$

Como $\Delta \phi$ es continua, porque ϕ es C^∞ en E compacta, será $|\Delta \phi| < M$ en E y resulta:

$$| \int_E * d\phi | < M \int_E dx \wedge dy \wedge dz = \frac{4}{3} \pi M \epsilon^2$$

de donde

$$| \int_{\Sigma} \frac{1}{r} (* d\phi) | < \frac{4}{3} \pi M \epsilon^2$$

(b) Calcularemos ahora $\int_{\Sigma} \phi * d(1/r)$, siendo $r = \sqrt{x^{12} + x^{22} + x^{32}}$.

$$\begin{aligned} d \frac{1}{r} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x^i} dx^i = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i = -\frac{1}{r^2} \omega_1^{\text{grad } r} \\ * d \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2} \omega_2^{\text{grad } r}, \quad \int_{\Sigma} \phi * d \frac{1}{r} = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Sigma} \omega_2^{\phi \text{grad } r} \end{aligned}$$

Por la proposición II.1 en la parte II, esta última integral es el flujo de $\phi \text{ grad } r$ a través de la superficie esférica Σ con la normal orientada hacia el centro.

Parametrizando la superficie $P(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)) : x^1 = \epsilon \cos u \cos v, x^2 = \epsilon \cos u \sin v, x^3 = \epsilon \sin u, P : (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto \Sigma$, resulta:

$$\int_{\Sigma} \omega_2^{\phi \text{grad } r} = \int_{(-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)} \langle \phi \text{ grad } r, P_u \times P_v \rangle du dv$$

Siendo $r = \sqrt{x^{12} + x^{22} + x^{32}}$, $\partial r / \partial x^i = x^i / r$, $\text{grad } r = (x^1/r, x^2/r, x^3/r)$ resulta que sobre la superficie esférica $\text{grad } r = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$. Luego

$$\langle \text{grad } r, P_u \times P_v \rangle = \det \begin{pmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v & \sin u \\ \epsilon \cos u \cos v & \epsilon \cos u \sin v & -\epsilon \sin u \\ -\epsilon \sin u \cos v & \epsilon \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^2 \cos u$$

$$\int_{\Sigma} \omega_2^{\phi \text{grad } r} = -\epsilon^2 \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} \phi dv$$

Luego es

$$\int_{\Sigma} \phi * d \frac{1}{r} = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} \phi dv$$

Por el teorema del valor medio para integrales dobles, existen t_ϵ, v_ϵ tales que

$$\phi(P(t_\epsilon, v_\epsilon)) = \frac{\int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} \phi dv}{\int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} dv} = \frac{\int_{\Sigma} \phi * d(1/r)}{4\pi}$$

Para cada ϵ existirá entonces un punto P_ϵ de la superficie esférica Σ que cumple esta igualdad:

$$\int_{\Sigma} \phi * d(1/r) = 4\pi\phi(P_\epsilon)$$

Sustituyendo lo calculado en (a) y (b) en la igualdad planteada al principio, resulta:

$$0 \leq \left| \int_{V'} *(1/r)\tilde{d}d\phi + \int_{\partial V} (\phi * d(1/r) - (1/r) * d\phi) - \phi(P_\epsilon)4\pi \right| < \frac{4}{3}\pi M\epsilon^2$$

Eso es válido para todo $\epsilon > 0$ tal que $S_\epsilon \subset V$. Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ queda:

$$\int_V *(1/r)\tilde{d}d\phi + \int_{\partial V} (\phi * d(1/r) - (1/r) * d\phi) = \phi(P_0)4\pi$$

de donde:

$$\phi(P_0) = \int_V * \frac{\tilde{d}d\phi}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} (\phi * d(1/r) - (1/r) * d\phi)$$

Siendo $\tilde{d}d\phi = g$ dada (ecuación de Poisson), la expresión de la solución $\phi(P_0)$ en un punto P_0 interior a V , conociendo la función ϕ y su diferencial en el borde ∂V (condiciones de borde), queda:

$$\phi(P_0) = \int_V \frac{g}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} (\phi * d(1/r) - (1/r) * d\phi)$$

REFERENCIAS

- [1] Wendell Fleming: *Functions of several variables*.
- [2] Flanders: *Differential forms with applications to the Physical Sciences*.
- [3] Santaló: *Vectores y tensores*.
- [4] Theodore Frankel: *Maxwell Equations*. Amer. Math. Monthly, 1974.
- [5] Choquet-Bruhatt: *Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs*.

INDICE

RESUMEN, 1

Parte I. ECUACIONES DE MAXWELL, 2

I.1. Notación, 2

I.2. Primeras ecuaciones de Maxwell, 2

I.3. Adjunto inercial y codiferencial inercial, 2

I.4. Segundas ecuaciones de Maxwell, 3

I.5. Campo electromagnético, 3

Parte II. LEYES CLÁSICAS DEL ELECTROMAGNETISMO, 4

II.1. Cálculo de integrales sobre superficies, 4

II.2. Teorema de Gauss, 4

II.3. Otras leyes clásicas, 6

Parte III. ECUACIONES DE MAXWELL RELATIVISTAS, 6

III.1. Transformaciones de Lorentz, 6

III.2. Primera ecuación de Maxwell relativista, 7

III.3. Pseudo producto interno de formas en $\mathbb{R}^4$, 8

III.4. Teorema del codiferencial inercial, 11

III.5. Segunda ecuación de Maxwell relativista, 12

Parte IV. DETERMINACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO, 13

IV.1. Adjunto ortogonal y codiferencial ortogonal en $\mathbb{R}^3$, 13

IV.2. Problema electromagnético en el caso estacionario, 14

IV.3. Potencial eléctrico y magnético. Ecuación de Poisson, 15

IV.4. Teorema del potencial magnético, 15

IV.5. Teoremas de integración, 16

IV.6. Solución a la ecuación de Poisson, 16

REFERENCIAS, 18