Elementos de topología usados en Cálculo

.

Parte I: ESPACIOS MÉTRICOS

Eleonora Catsigeras *

Versión preliminar: 1 de marzo de 2004

Nota: Las partes del texto comprendidas entre dos marcas ✓ son esenciales y las comprendidas entre marcas ⋄ son optativas.

Las demostraciones terminan con la marca □.

1 Definición y ejemplos de Espacios Métricos.

✓ **Definición 1.1** Se llama *Espacio Métrico* (M, dist) a un conjunto no vacío M cualquiera (sus elementos se llamarán *puntos*) provisto de una distancia *dist* entre pares de puntos de M, que cumpla las siguientes tres propiedades:

1) Positividad: Para todos a y b en M, $\text{dist}(a, b)$ es un número real tal que $\text{dist}(a, b) > 0$ si $a \neq b$ y $\text{dist}(a, b) = 0$ si $a = b$.

   (Nota: $a = b$ significa que a y b denotan al mismo elemento del conjunto M.)

2) Simetría: Para todos a y b en M, $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(b, a)$.

3) Triangular: Para todos a, b y c en M, $\text{dist}(a, b) \leq \text{dist}(a, c) + \text{dist}(c, b)$. ✓

⋄ **Nota 1.2** En el ejemplo 1.4 el conjunto M es el de los puntos de un plano. Ese ejemplo concreto es el paradigma de espacio métrico.

De ese ejemplo particular proviene la imagen mental concreta que usualmente uno tiene de un espacio métrico general abstracto: se suele imaginar y dibujar el espacio métrico como si fuera el conjunto de puntos del plano o por lo menos una parte de él, aunque sus elementos en realidad puedan ser objetos muy diferentes[1]. ⋄

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Dirección: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

[1] A veces es necesario imaginar o dibujar algo concreto para comprender y recordar las definiciones y teoremas abstractos. Algunas ideas matemáticas suelen descubrirse, inventarse o inspirarse primero en un ejemplo particular. Son extendidos luego en forma más general a infinidad de otros ejemplos y casos de naturaleza muy diversa. La potencia y aplicabilidad de algunas teorías matemáticas en la innovación científico-tecnológica se debe usualmente a la diversidad de ejemplos particulares que son abarcados por la teoría abstracta.

Sin embargo no es fácil de entrada comprender un concepto abstracto si no se lo "baja a Tierra" primero. Muchas veces conviene usar como ejemplo concreto aquel de donde provinieron históricamente las ideas y hasta los nombres

◇ **Ejercicio 1.3** AUTOCONVENCIMIENTO: Interpretar intuitivamente el significado de la definición 1.1 dibujando o imaginando M como el conjunto de puntos de un plano en vez de un conjunto cualquiera. ◇

✓ **Ejemplo 1.4** EL PLANO y EL ESPACIO EUCLIDEO. Sea M el conjunto de puntos de un plano o del espacio tridimensional. (Considérense todos los axiomas y teoremas de la geometría de Euclides en el plano o en el espacio). Definamos, para cada par de puntos $a, b \in M$ la función real distancia $\operatorname{dist}(a,b) = \overline{ab}$ donde $\overline{ab}$ es la longitud del segmento de recta con extremos a y b. ✓

✓ **Ejercicio 1.5** Demostrar que el ejemplo anterior cumple la definición de espacio métrico. (Sugerencia: para probar la "propiedad triangular" usar el siguiente teorema de la geometría de Euclides: *En todo triángulo la longitud de cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.*) ✓

◇ **Nota 1.6** En el mismo conjunto M del ejemplo 1.4 se pueden definir otras distancias diferentes a la longitud del segmento de recta que une los puntos. (Ver Apéndice 7.1). El conjunto M con alguna de esas otras distancias posibles es un espacio métrico diferente del del ejemplo 1.4. En efecto, el espacio métrico es la *pareja* formada por el conjunto M y la aplicación distancia. Basta que se cambie a uno de los integrantes de la pareja para que el "Espacio Métrico"sea otro. ◇

✓ **Nota 1.7** En el Apéndice 7.1 se observa que en un espacio métrico cualquiera, el concepto de distancia no necesariamente coincide con el de "longitud"de segmentos, o curvas o recorridos que vayan de un punto a otro del conjunto (suponiendo que pueda definirse ese concepto). ✓

◇ **Ejemplo 1.8** RECREATIVO:

Tomemos al pie de la letra la definición 1.1. Ya que M puede ser un conjunto cualquiera no vacío, se me ocurre tomar como M el conjunto de todas las discotecas de la ciudad "Si-Tomaste-No-Camines".

Me divierte definir como candidato a distancia $\operatorname{dist}(a,b)$ entre dos discotecas cualesquiera a y b de M , a la menor longitud posible de todos los recorridos a pie que llevan de a hasta b, o lo que es lo mismo de b hasta a, cuando uno está sobrio.

En el folleto turístico dice que la ciudad tiene nada menos y nada más que cuatro discotecas, llamadas respectivamente "Punto Deuno", "Punto Dedós", "Punto Detrés", y "Punto Decuatro". Dice también que hay un cerro bastante alto en el barrio céntrico, con varios caminos sinuosos de acceso, y en la cima de ese cerro se encuentra la discoteca Punto Decuatro con un mirador. El folleto incluye un mapa de los recorridos a pie y la tabla de distancias siguiente:

MAPA de la ciudad
(rellenar convenientemente)

Tabla de DISTANCIAS.

de los conceptos usados. Recién al final, cuando se formaliza y presenta la teoría, se prescinde de las particularidades del ejemplo concreto para exhibir en las deducciones lógicas solo las características *comunes* a todos los ejemplos particulares.

		$b =$			
		d_1	d_2	d_3	d_4
$a =$	d_1	0	$0.50km$	$1.00km$	$4.00km$
	d_2	$0.5km$	0	$\sqrt{1.25}km$	$4.00km$
	d_3	$1.00km$	$\sqrt{1.25}km$	0	$4.00km$
	d_4	$4.00km$	$4.00km$	$4.00km$	0

$\diamond$

$\diamond$ **Ejercicio 1.9** a)Probar (sin usar el mapa ni la tabla) que el ejemplo anterior es un espacio métrico. Observar que todos los teoremas y resultados que obtengamos sobre espacios métricos abstractos son válidos en particular para este y los otros ejemplos, algunos que parecen a priori ajenos a la matemática.

b) Inventá, para fijar ideas, algún ejemplo de espacio métrico que te interese, se te ocurra o te divierta, y cada vez que leas una definición o teorema, interpretá qué significa el enunciado en TU ejemplo. $\diamond$

$\diamond$ **Ejemplo 1.10** MÉTRICA BINARIA O DISTANCIA CERO-UNO. Sea M un conjunto no vacío cualquiera, con cantidad finita o infinita de elementos. (Para fijar ideas por ejemplo M es el conjunto de personas en el mundo, que son una cantidad finita, aún contando a todos los clones por separado.)

Definimos en M la distancia entre dos puntos cualquiera $a, b \in M$ del siguiente modo:

$$\text{dist}\,(a,b) = \begin{cases} = 0 & \text{si } \ a = b \\ = 1 & \text{si } \ a \neq b \end{cases}$$

Esta forma de definir distancia entre elementos de un conjunto aisla, distingue y separa de la misma manera a cada uno de los individuos de M de todos los demás, sin medir ni comparar cualidades de los individuos. [2] $\diamond$

$\diamond$ **Ejercicio 1.11** a) Demostrar que $(M, \text{dist}\,)$ del ejemplo anterior es un espacio métrico.

b) En las definiciones y teoremas sobre espacios métricos en general de las secciones que siguen, interpretar los enunciados en este ejemplo particular. $\diamond$

✓ **Ejemplo 1.12** TOPOLOGÍA EN LA RECTA REAL (Ejemplo usado a lo largo del curso de CÁLCULO).

Sea $M = \mathbb{R}$ el conjunto de números reales. El conjunto de reales $\mathbb{R}$ se identifica con el conjunto de puntos en una recta. Eso significa que se establece una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos y se denotan con el mismo nombre a los elementos de uno u otro conjunto que sean correspondientes entre sí. [3]

---

[2] En el ejemplo de las personas para calcular la distancia Cero-Uno entre una pareja (a, b) con $a, b \in M$, no importa qué tan cerca o lejos estén geográficamente a y b entre sí, ni tampoco que tan parecidas o diferentes sean otras características de los dos individuos de la pareja, ni siquiera si uno es un clon del otro. Una máquina programada con la distancia binaria, si se construyera por ejemplo para el control de migraciones, solo sabría responder, cuando pasa una persona a, si es o no es a el mismo individuo que el delincuente b buscado por Interpol. Si la máquina responde Üno”son distintos y el punto a pasa el control sin ningún lío, aunque tenga el mismo nombre que b y se le parezca mucho, y si la máquina responde ”Cero”son el mismo individuo y el punto marcha preso.

[3] Para hacer esa identificación se elige un punto llamado origen en la recta identificado con el real 0 y un sentido ”positivo”para recorrer la recta (en general si la recta se dibuja horizontalmente, el sentido positivo se elige hacia

Dados dos números reales a y b definimos $\text{dist}\,(a,b) = |b-a|$, o lo que es lo mismo, si llamamos a y b a los puntos de la recta real, entonces $\text{dist}\,(a,b) = 0$ si $a = b$ y, si $a \neq b$ entonces $\text{dist}\,(a,b)$ es la longitud del segmento de recta con extremos a, b.

La distancia definida anteriormente en $\mathbb{R}$ como $\text{dist}\,(a,b) = |b-a|$ se llama métrica usual en la recta real, o también métrica inducida por el valor absoluto. ✓

✓ **Ejercicio 1.13** Probar que con la métrica usual la recta real es un espacio métrico. (Sugerencia: para probar la propiedad triangular de la distancia, probar primero, aplicando la definición de valor absoluto $|u|$ de un número real cualquiera $u \in \mathbb{R}$, que para toda pareja $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente desigualdad (llamada desigualdad triangular del valor absoluto): $|u+v| \leq |u| + |v|$. Para ello discutir según el signo de u y de v. Después, dados tres números reales cualesquiera a, b, c usar la desigualdad triangular del valor absoluto, sustituyendo $u = a - b$ y $v = b - c$.) ✓

◇ **Ejemplo 1.14** *PULL BACK DE LA MÉTRICA USUAL EN* $\mathbb{R}$.

Sea M un conjunto no vacío cualquiera tal que existe una función real $f : M \mapsto \mathbb{R}$ inyectiva con dominio M (ver definiciones en el apéndice 7.2).

Para fijar ideas supongamos por ejemplo que M es el conjunto, que denotamos como URU, de personas que tienen cédula de identidad uruguaya, y $f = ced : URU \mapsto \mathbb{R}$ es la función inyectiva que a cada persona $a \in URU$ le hace corresponder el número $ced(a)$ de su cédula de identidad.

Definamos la distancia entre cualquier pareja de puntos $a, b \in M$ de la siguiente manera:

$$\text{dist}\,(a,b) = |f(a) - f(b)|$$

Así en el ejemplo concreto de las personas del conjunto URU, la distancia entre dos personas es igual a la diferencia en valor absoluto entre los números de sus cédulas de identidad. ◇

◇ **Ejercicio 1.15** Demostrar que $(M, \text{dist}\,)$ del ejemplo anterior es un espacio métrico. ◇

✓ **Nota 1.16** En cualquier espacio métrico, en particular en la recta real $\mathbb{R}$ con la métrica usual inducida por el valor absoluto: $\text{dist}\,(a,b) = |b-a|$, valen las propiedades topológicas que desarrollaremos en las siguientes secciones.✓

✓ En los conjuntos M de algunos de los ejemplos de espacios métricos expuestos anteriormente hay, además de la estructura métrica topológica (dada por la aplicación distancia entre parejas de puntos de M), alguna otra estructura pero del tipo algebraico (que incluye operaciones de suma y quizás producto entre elementos del conjunto). Por ejemplo cuando $M = \mathbb{R}$, la recta real posee una estructura de cuerpo ordenado. ✓

◇ En otros ejemplos de espacios métricos no hay estructura algebraica definida[4]. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de Espacios Métricos a la Ingeniería, a la Física y también a otros temas de la Matemática como el Cálculo, el Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales, el

la derecha del origen). Se asigna a cada número real $a > 0$ el punto de la recta a la derecha del origen tal que la longitud del segmento que lo une con el origen sea igual al número a; y si $a < 0$ se le asigna el punto de la recta a la izquierda del origen tal que la longitud del segmento que lo une con el origen sea igual al número $-a = |a|$.

No es nada fácil demostrar que esa correspondencia que sirve para identificar los números reales con los puntos de una recta, está bien definida y es biunívoca, a partir de los axiomas de la geometría de Euclides y de los axiomas de número real.

[4]No está definida la suma ni el producto, por lo menos en un contexto natural estrictamente matemático, de por ejemplo las personas $a = alicia$ y $b = bruno$ del conjunto M utilizado en algunos ejemplos expuestos.

conjunto M viene provisto de alguna estructura algebraica además de la estructura de espacio métrico. $\diamond$

Como ejemplos notables de espacios métricos usados permanentemente en la Ingeniería y que poseen estructuras algebraicas además de la estructura métrica, tenemos los siguientes:

✓ **a)** La recta real $\mathbb{R}$ que posee además de la estructura de espacio métrico dada en 1.12 la estructura de cuerpo ordenado dada por los axiomas de cuerpo y de orden. ✓

✓ **b)** El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos a definir en el curso de Cálculo 1, que incluye a los números reales y además a otros números que no son reales.

En $\mathbb{C}$ se define una estructura algebraica de cuerpo (suma y producto de complejos entre sí), pero no una de orden.

Se define además el módulo $|z|$ de cada complejo $z \in \mathbb{C}$, de forma que cuando z es un real, el módulo de z coincide con el valor absoluto.

A partir del módulo se define una distancia entre dos números complejos, usando al módulo de la diferencia de los dos complejos de la misma manera que en el ejemplo 1.12 se usaba al valor absoluto de reales para definir la distancia usual entre dos números reales.

Con esa distancia se estudia al conjunto $\mathbb{C}$ como un espacio métrico, y se le aplican todas las propiedades topológicas que desarrollaremos en las siguientes secciones. ✓

$\diamond$ **c)** El espacio euclídeo real $\mathbb{R}^n$ de dimensión n se estudiará en los cursos de Álgebra Lineal: $\mathbb{R}^n$ está definido como el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales. Posee una estructura algebraica de espacio vectorial que es normado (Ver apéndice 7.3).$\diamond$

$\diamond$ **d)** En $\mathbb{R}^n$ y otros casos en que se disponga en el conjunto M de una estructura algebraica de "espacio vectorial normado" existe una manera natural de definir distancia, que se llama "métrica o distancia inducida por la norma", como se detalla en el apéndice 7.3. Para transformar un espacio vectorial normado en un espacio métrico según nuestra definición 1.1, la norma de un vector juega el mismo rol que el valor absoluto de un número real jugaba para definir la métrica del ejemplo 1.12.

Al tener convertido el espacio vectorial normado en un espacio métrico podrán aplicársele todas las propiedades topológicas que desarrollaremos en las siguientes secciones. $\diamond$

$\diamond$ **e)** Los espacios métricos definidos en conjuntos cuyos elementos son funciones se llaman espacios funcionales[5], incluyendo en particular los formados por sucesiones. En el curso de Cálculo definiremos qué es una función (ver apéndice 7.2), y en particular también qué es una sucesión. Se puede, por ejemplo para las llamadas funciones reales acotadas, definir distancia entre dos funciones, de modo de comparar o medir qué tan distintas son esas funciones entre sí, y trasformar al espacio funcional en un espacio métrico[6].

[5]Una vez que se define lo que es una función, se considera un "hiperconjunto" $\mathcal{C}$ cuyos elementos sean todos funciones. Para armar a ese "hiperconjunto" $\mathcal{C}$, cada función $f : M \mapsto N$ actúa ahora como *elemento* de $\mathcal{C}$, olvidándose que cada f en sí misma, para ser definida, requería tener dados dos conjuntos M y N, que eran su dominio y codominio respectivamente.

Esos viejos conjuntos M y N son de una categoría distinta e incomparable a la del nuevo "hiperconjunto " $\mathcal{C}$. Para no confundir ni mezclar a $\mathcal{C}$ con los conjuntos M y N que uno tenía antes, los matemáticos casi nunca lo nombran a $\mathcal{C}$ como "conjunto", ni siquiera agregando el prefijo "hiper", sino como *espacio funcional* , o como *familia de funciones* (aunque $\mathcal{C}$ sea en verdad un conjunto, usualmente no vacío y con infinitos elementos).

[6]En realidad existen muchas maneras de definir distancia entre funciones reales, que transforman, quizás al

Todos los resultados que veremos en las secciones siguientes serán aplicables entonces a espacios funcionales, y de utilidad por ejemplo en los cursos de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Funcional y Análisis Espectral[7]. $\diamond$

2 Bola o Entorno de un punto.

A lo largo de las siguientes secciones (M, dist) denota un espacio métrico, es decir M es un conjunto no vacío cualquiera y dist es una aplicación distancia entre pares de puntos de M, que cumple con la definición 1.1.

Sea a un punto cualquiera de M y sea $r > 0$ un número real cualquiera positivo.

✓ **Definición 2.1** BOLA O ENTORNO

BOLA de centro $a \in M$ y radio $r > 0$, también llamado ENTORNO de a con radio $r > 0$, y denotado como $B_r(a)$, es el subconjunto de M formado por *todos los puntos* $x \in M$ *(incluido* a*) que distan de* a *menos que* r. Escrito de otra forma:

$$B_r(a) = \{x \in M : \text{dist}(x, a) < r\}$$

Se observa que no se define bola ni entorno con radio negativo o cero[8].✓

$\diamond$ En el ejemplo 1.4 del plano euclídeo el entorno de centro a y radio r es el disco circular de centro a y radio r, sin los puntos de la circunferencia borde del disco. En el espacio euclídeo tridimensional es la bola esférica de centro a y radio r, sin los puntos de la superficie esférica en su borde. $\diamond$

✓ En el ejemplo 1.12 de la recta real $\mathbb{R}$ con la distancia usual, el entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$ con radio $r > 0$ es el segmento de recta, sin sus extremos, centrado en el punto a y que tiene longitud $2r$. Es decir: $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\}$ ✓

---

mismo conjunto de funciones, en espacios métricos diferentes.

[7]La potencia de sus aplicaciones a la Ingeniería ha permitido por ejemplo el desarrollo teórico y tecnológico de los sistemas de trasmisión por radio.

[8]Si se pretendiera aplicar la misma condición de la definición de bola o entorno usando,o en vez de al número real $r > 0$, a un número real negativo o cero, el conjunto de puntos que se obtendría sería vacío si r fuera negativo, o sería el conjunto $\{a\}$ que tiene como único elemento al punto a, si $r = 0$. Por convención, el vacío NO ES BOLA O ENTORNO y $\{a\}$ TAMPOCO, a menos que coincida $\{a\}$ con el conjunto $B_r(a)$ que se obtiene tomando algún valor de r POSITIVO.

3 Puntos interiores, exteriores, y de frontera de un conjunto.

✓ Sea M un espacio métrico cualquiera y sea H un conjunto, quizás vacío, contenido o incluido en M, es decir $H \subset M$ (ver notas al pie [9], [10] [11]). ✓

✓ **Definición 3.1** Punto INTERIOR a H.

Un punto $a \in M$ es interior a H si existe algún entorno de centro a que está contenido en H. ✓

✓ Significado intuitivo: a es un punto interior a H cuando uno se puede mover arbitrariamente dentro de algún entorno alrededor del punto a, incluso pasando por el propio a y hasta una cierta distancia > 0 de él, quizás muy pequeña pero positiva, *sin salir* de H.

Todo punto interior a H pertenece a H pero el recíproco no es necesariamente cierto.

Sea por ejemplo en la recta real $\mathbb{R}$ el segmento $H = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \sqrt{5}\}$ que contiene a su extremo izquierdo 1 pero no al derecho $\sqrt{5}$ y se denota como $H = [1, \sqrt{5})$. El punto $3/2$ pertenece a H y es interior a H. El punto 1 pertenece a H pero no es interior a H. Los puntos que no pertenecen a H nunca pueden ser del interior de H.

Hay conjuntos H para los que no existen puntos interiores.✓

⋄ Por ejemplo *en la recta real $\mathbb{R}$ el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales no tiene puntos interiores.* En efecto, la distancia entre dos naturales diferentes es siempre mayor o igual que 1. Por lo tanto si a es un natural, entonces ninguno de los puntos de la recta diferentes de a y que distan menos que 1 de a, puede ser un natural. Entonces cualquier entorno de centro a y radio $r > 0$ en la recta real contiene puntos que no son números Naturales. Eso significa que ningún entorno de a está contenido en $\mathbb{N}$, o sea a no puede ser punto interior. Luego para el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales en la recta real, no existen puntos interiores.⋄

✓ **Definición 3.2** Punto EXTERIOR a H.

Un punto $a \in M$ es exterior a H si existe algún entorno de centro a que está contenido en el complemento H^c de H. ✓

✓ Significado intuitivo: El punto a es exterior a H cuando uno se puede mover arbitrariamente dentro de algún entorno alrededor del punto a, incluso pasando por a, hasta una cierta distancia $r > 0$, quizás muy pequeña pero positiva, *sin entrar* nunca a H.

Un punto a exterior a H no pertenece nunca a H, pues pertenece a su complemento H^c.

---

[9] Todo elemento a de H (si existe alguno) pertenece también a M. Esto se denota como $H \subset M$ y se dice que H es un subconjunto de M, o una parte de M, o un conjunto incluido o contenido en M. Se tiene entonces $H \subset M$ si y solo si: $x \in H \Rightarrow x \in M$.

Se observa que el propio conjunto M es un subconjunto de él mismo; es decir M es una de las partes posibles de M; M está contenido en M; $M \subset M$. También se observa que por convención el conjunto vacío que se denota como $\emptyset$ o $\{\}$ también es una parte de M o está contenido en M.

[10] El símbolo $H \subset M$ se utiliza solo cuando lo que va a su izquierda H también es un conjunto, y está contenido en el conjunto M (H es una parte de M pero no pertenece a M porque no es elemento de M). En cambio el símbolo $h \in M$ se utiliza solo cuando lo que va a su izquierda h es un elemento del conjunto M, es decir h pertenece a M pero no es una parte de M, sino un elemento de M.

Si queremos referirnos a la parte de M formada solo por el elemento $h \in M$, debemos escribir $\{h\} \subset M$.

[11] Por ejemplo tenemos lo siguiente cuando M es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: $0 \in \mathbb{R}$, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ $\emptyset = \{\} \neq \{0\}$, $\emptyset \subset_{\neq} \{0\} \subset_{\neq} \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \subset \{0\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$. El símbolo $\subset_{\neq}$ significa estrictamente incluido o contenido, es decir incluido pero que no coincide exactamente, en cambio el símbolo $\subset$ significa incluido en sentido amplio, es decir permitiendo la posibilidad de que coincidan exactamente los dos conjuntos (no exigiendo esa posibilidad sino solo permitiéndola, sepamos o no que es posible o imposible que ocurra.)

Sin embargo no todos los puntos del complemento de H son necesariamente exteriores a H.

Sea por ejemplo en la recta real $\mathbb{R}$ el segmento $H = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \sqrt{5}\} = [1, \sqrt{5})$ que contiene a su extremo izquierdo 1 pero no al derecho $\sqrt{5}$. El punto $\sqrt{5}$ está en el complemento de H pero no es exterior a H. En cambio el punto $\pi = 3.141\ldots$ pertenece al complemento de H y es además exterior a H. Los puntos que pertenecen a H nunca pueden ser exteriores a H. ✓

✓ Hay conjuntos H que no tienen puntos exteriores. ✓

✓ Por ejemplo en la recta real $\mathbb{R}$ el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no tiene puntos exteriores (y tampoco interiores). El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los números irracionales tampoco tiene puntos exteriores ni interiores. Estas afirmaciones no son fáciles de demostrar, pero se encuentran en Teorema 5.2. ✓

✓ **Definición 3.3** Punto DE FRONTERA o DE BORDE de H.

Un punto $a \in M$ es de frontera o borde del conjunto H (ya sea cuando $a \in H$ como cuando $a \in H^c$)*si no es interior ni exterior a H.* ✓

✓ Obsérvese que a es punto de frontera o de borde de H si y solo si no existe ningún entorno de a que esté contenido en H ni existe tampoco ningún entorno de a que esté contenido en H^c.

Dicho de otro modo: *todo entorno de a contiene algún punto de H* (quizás solamente el punto a cuando $a \in H$) *y además algún otro punto de H^c* (quizás solamente el punto a cuando $a \notin H$).

Eso significa intuitivamente que a es punto de borde o de frontera de H cuando en todo entorno de a, por más pequeño que sea, uno puede moverse de manera de entrar a H alguna vez y también de salir de H alguna otra vez. ✓

⋄ En el ejemplo $H = [1, \sqrt{5}) \subset \mathbb{R}$ los puntos del borde o frontera de H son 1 y $\sqrt{5}$. Uno de ellos pertenece a H y el otro a H^c.

En el ejemplo $H = (1, \sqrt{5}) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < \sqrt{5}\}$ formado por los puntos del segmento de recta con extremos en 1 y $\sqrt{5}$, excluyendo esos extremos, los puntos del borde o frontera de H son sus extremos, y ninguno pertenece a H.⋄

✓ En el ejemplo $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \sqrt{5}, x \neq 2\}$ formado por los puntos del segmento de recta con extremos en 1 y $\sqrt{5}$ excluyendo el extremo $\sqrt{5}$ y el punto 2, los elementos del borde o frontera de H son 1, 2 y $\sqrt{2}$. El punto 2 no es interior a H ni exterior a él. Uno de sus puntos de frontera pertenece a H y los otros dos no. Hay un punto de frontera de H que no es extremo de H. (Recordar que extremo de un conjunto de reales significa supremo ó ínfimo del conjunto, cuando existe alguno de ellos.)✓

✓ En el ejemplo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, de los números racionales, todos los puntos de la recta real (todo real) es punto de borde o de frontera de $\mathbb{Q}$, ya que ninguno es exterior ni interior a $\mathbb{Q}$. Sin embargo ninguno de esos puntos de borde o frontera es extremo de $\mathbb{Q}$. ✓

✓ El conjunto de los puntos de frontera o de borde de un conjunto H dado en un espacio métrico M, puede ser vacío.✓

✓ Por ejemplo, *en la recta real $\mathbb{R}$, el subconjunto $H = \mathbb{R}$ formado por toda la recta real no tiene puntos de frontera o de borde* . En efecto todos los números reales son puntos interiores a H y por lo tanto ninguno puede ser de frontera o de borde de H. ✓

✓ **Nota 3.4** De las definiciones anteriores se deduce que dado un conjunto H que es parte del espacio métrico M, *todos los puntos del espacio se clasifican en tres clases disjuntas entre sí y que cubren todo el espacio M* :

1)La clase de los puntos que son *interiores a H* (deben estar todos contenidos en H).

2)La clase de los puntos que son *exteriores a* H (no puede estar ninguno contenido en H).

3)La de los puntos *de borde o frontera de* H (pueden estar o no contenidos en H).

Alguna o dos de estas clases puede ser vacía.✓

✓ **Definición 3.5** CLAUSURA O ADHERENCIA de H. *Es la unión del conjunto H con el conjunto de los puntos de borde o frontera de H.*✓

✓ Significado intuitivo: la clausura o adherencia de H se obtiene agregando al conjunto H los puntos, si existen, que no pertenezcan a H pero que estén en la frontera o borde de H. ✓

✓ **Definición 3.6** INTERIOR de H. *Es el subconjunto de H formado por sus puntos interiores.*✓

✓ Significado intuitivo: el interior de H se obtiene retirando del conjunto H los puntos, si existen, que pertenezcan a H pero que estén en la frontera o borde de H. ✓

4 Abiertos y cerrados

✓ **Definición 4.1** CONJUNTO ABIERTO *Un conjunto $H \subset M$ se dice abierto en el espacio métrico M si todos los puntos de H son interiores a H.* ✓

✓ Dicho de otras formas:

H es abierto si y solo si los puntos de frontera o borde de H, o bien no existen, o bien no pertenecen a H.

El conjunto H coincide con su interior. ✓

✓ *Por convención el conjunto vacío se considera abierto.* ✓

✓ **Definición 4.2** CONJUNTO CERRADO *Un conjunto $H \subset M$ se dice cerrado en el espacio métrico M si la clausura o adherencia de H coincide con H*✓

✓ Dicho de otra forma:

H es cerrado si y solo si los puntos de frontera o borde de H, o bien no existen, o bien pertenecen todos a H. ✓

✓ *Por convención el conjunto vacío se considera también cerrado.* ✓

✓ **Nota 4.3** El concepto de conjunto abierto no es lo opuesto al concepto de conjunto cerrado. Un conjunto H en un espacio métrico métrico fijo dado M, puede ser abierto y no cerrado, o ser cerrado y no abierto, o ser abierto y cerrado al mismo tiempo, o no ser ni abierto ni cerrado al mismo tiempo. En efecto, estúdiense los ejemplos del ejercicio siguiente. ✓

✓ **Ejercicio 4.4** Sea en el espacio métrico de los reales $\mathbb{R}$ con la distancia usual, el conjunto $H \subset \mathbb{R}$ descripto en cada parte:

a) $H = [2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$. Probar que H es cerrado y no abierto.

b) $H = (-\infty, 1) = \{x \in R : x < 1\}$. Probar que H es abierto y no cerrado.

c) $H = [1, 2)$. Probar que H no es abierto ni cerrado.

d) $H = \mathbb{R}$. Probar que H es abierto y cerrado. ✓

✓ **Teorema 4.5** *En todo espacio métrico $(M, dist)$ el conjunto M y el conjunto vacío son abiertos y cerrados.* ✓

✓ *Demostración:* Por convención el conjuoto vacío es abierto y cersado.

Sea ahora $H = M$. Toda bola está totalmente contenida en H, porque H es todo M (Observar que en la definición de bola o entorno, la primera condición que se le pide a sus puntos es que pertenezcan a M).

Luego todo punto a es interior a H (Basta verificar a cumple la definición de punto interior a H). Por lo tanto todo el conjunto H está formado por sus puntos interiores. Entonces $H = M$ es abierto.

Como ya sabemos que todo el conjunto H está formado por sus puntos interiores, y H es todo M, entonces el conjunto de puntos de frontera o de borde de H es vacío.

Luego por definición de cerrado, H lo es. $\square$ ✓

✓ **Teorema 4.6** COMPLEMENTO DE ABIERTO *En un espacio métrico* $(M, dist)$ *cualquiera, un conjunto* $H \subset M$ *es cerrado si y solo si su complemento* H^c *es abierto.* ✓

✓ *Demostración:* Sabemos de la definición de cerrado y de adherencia, que el conjunto H es cerrado si y solo si o bien no existen puntos de frontera de H o bien todos ellos pertenecen a H.

Lo anterior se cumple si y solo si o bien no existen puntos de fronteras de H o bien ninguno de ellos pertenece a H^c.

Por la definición de subconjunto abierto, la condición anterior se verifica si y solo si H^c es abierto.✓

⋄ **Nota 4.7** Es útil en los ejemplos prácticos este último teorema para verificar si un conjunto es o no es cerrado, en vez de verificar la definición de cerrado. Suele ser muchas veces más fácil verificar si un conjunto es o no abierto que verificar si es o no cerrado. Dado el conjunto H, en vez de mirar a H, fijamos la atención en su complemento H^c (es decir en el conjunto de todos los puntos de M que no pertenecen a H).

Verificaremos si H^c es o no abierto, observando si se cumple o no la definición de abierto para H^c, o mejor aún en el caso de la recta real, si se cumple o no la condición del teorema 4.10 que se encuentra más abajo. ⋄

✓ **Definición 4.8** INTERVALOS DE REALES

Se llaman *intervalos abiertos* de reales a los segmentos o semirrectas abiertas de la recta real o a toda la recta real $\mathbb{R}$. Se denotan $(a, b); (-\infty, b);\ \ (a, +\infty); (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ respectivamente, donde a y b son números reales y $+\infty$ y $-\infty$ son meramente símbolos de notación.

Se llaman *intervalos cerrados* de reales a los segmentos o semirrectas cerradas de la recta real o a toda la recta real $\mathbb{R}$. Se denotan $[a, b]; (-\infty, b]; [a, +\infty); (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ respectivamente.

Se llaman *intervalos semicerrados* de reales a los segmentos de la recta real $\mathbb{R}$ que no son conjuntos cerrados ni abiertos. Se denotan $[a, b); (b, a]$ respectivamente.

Se llaman *intervalos* de reales a todos los intervalos abiertos, cerrados o semicerrados. Se llaman *intervalos acotados* de reales a los intervalos que sean conjuntos acotados de reales (es decir que sean segmentos, abiertos, cerrados o semicerrados). Finalmente se observa que los intervalos no acotados de reales son las semirrectas abiertas o cerradas, y además toda la recta real.✓

✓ **Ejercicio 4.9** Probar que cualquier unión de intervalos abiertos en la recta real $\mathbb{R}$ es abierto. (Sugerencia: Sea a un punto que pertenece al intervalo abierto I. Sea r la mayor de las distancias al o a los extremos de I. $r > 0$ pues si fuera 0, entonces el punto a coincidiría con uno de los extremos de I y no pertenecería a I pues I es un intervalo abierto. Probar que el entorno $B_r(a)$ está contenido en I. ✓

◇ **Teorema 4.10** CARACTERIZACIÓN DE ABIERTOS EN LA RECTA REAL.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de reales o de puntos en la recta real con la distancia usual inducida por el valor absoluto.

Un conjunto $H \subset \mathbb{R}$ es abierto si y solo si H es unión de una cantidad finita o infinita numerable de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos. ◇

La demostración de este teorema sale fuera de los objetivos y alcance de este curso pero puede encontrarse en .... .

✓ **Ejemplo:** El conjunto $H = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Z}\}$ de los reales que no son números enteros (no pertenecen al conjunto de los enteros denotado con $\mathbb{Z}$) es ABIERTO porque es la unión de los intervalos abiertos $(n, n+1)$ donde $n \in Z$. Usando la notación abreviada:

$$H = \bigcup_{n \in Z} (n, n+1)$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 4.10 el conjunto Z de los números enteros es CERRADO en la recta real. ✓

5 Densidad

✓ **Definición 5.1** CONJUNTO DENSO

El conjunto $H \subset M$ es denso (en el espacio métrico M) *si en toda bola $B_r(a) \subset M$ hay por lo menos algún elemento de H.*✓

✓ Se hace notar que el centro a de la bola $B_r(a)$ en la definición anteriormente no necesariamente pertenece a H.✓

✓ Interpretación intuitiva: El conjunto H se "desparrama tan densamente" por todo el espacio que tiene por lo menos algún elemento en (interseca a) cada bola de todas las posibles en el espacio métrico, y lo hace por más pequeño que sea el diámetro r de cada bola.✓

✓ En el caso particular del espacio métrico real $\mathbb{R}$ con la distancia usual, *un conjunto H de reales es DENSO si y solo si en todo intervalo abierto acotado de reales hay por lo menos algún elemento de H.* En efecto, en la recta real $\mathbb{R}$ las bolas $B_r(c)$ son los intervalos abiertos acotados (a, b) con punto medio c y longitud $2r$, y recíprocamente. ✓

✓ Dicho de otra forma: *En $\mathbb{R}$ un conjunto H es DENSO si y solo si para todos $a < b$ reales, existe algún elemento $h \in H$ tal que $a < h < b$* ✓

✓ **Teorema 5.2** DENSIDAD DE LOS RACIONALES Y DE LOS IRRACIONALES EN LA RECTA REAL

En la recta real $\mathbb{R}$ con la distancia usual:

1) *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los puntos racionales es DENSO en $\mathbb{R}$. Además tiene interior y exterior vacíos y todos los reales son puntos del borde o frontera de $\mathbb{Q}$.*

2) *El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los puntos irracionales (conjunto complemento de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) es también DENSO en $\mathbb{R}$. Además también tiene interior y exterior vacíos y todos los reales son puntos del borde o frontera de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.* ✓

◇ *Demostración:*

1er. paso) Demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Sea $B_r(a)$ una bola cualquiera (intervalo abierto acotado) de reales. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ un natural fijo mayor que el número real $1/r$ (tal natural existe por el principio de Arquímedes: ver ref ....).

Consideremos la familia F de los números racionales m/n donde m es cualquier número entero, y n es el natural fijo elegido antes.

Tenemos, por construcción, lo siguiente: *Dos elementos consecutivos de la familia F, distan exactamente $1/n < r$ entre sí.* (Afirmación (I)).

Entonces como la bola $B_r(a) = (a - r, a + r)$ tiene longitud exactamente $2r$, alguno de los elementos de F tiene que estar en la bola. De lo contrario el mayor de los elementos de F a la izquierda de la bola (cuya existencia puede probarse usando el axioma del supremo para los números reales y la afirmación (I)), y el menor de los elementos de F a la derecha de la bola serían consecutivos y distarían entre sí más que la longitud $2r$ de la bola, contradiciendo la afirmación (I).

Por lo tanto hemos probado que F interseca a la bola $B_r(a)$ y como todo elemento de F es racional, entonces hemos probado que existe algún racional en $B_r(a)$ como queríamos.

2do. paso) Demostrar que el conjunto de los irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Se sabe de la teoría de número real que $\sqrt{2}$ es irracional. Consideremos la misma familia F usada en el 1er. paso de esta demostración. Definamos la nueva familia G formada por todos los números reales que se obtienen al sumar $\sqrt{2}$ más un elemento m/n de la familia F. Afirmamos que $\sqrt{2}+m/n$ es irracional. En efecto, por absurdo, si la suma anterior fuera igual a un racional q entonces, $\sqrt{2} = q-m/n$ y tendríamos que la diferencia de los racionales q y m/n no sería racional, absurdo.

Hemos probado entonces que la familia G está formada toda por números irracionales.

Por construcción tenemos que: *Dos elementos consecutivos de la familia G distan entre sí exactamente $1/n < r$.* (Afirmación II).

Ahora basta repetir la prueba del paso (I), usando la familia G en lugar de la F, la Afirmación II en lugar de la I, y el hecho de G está incluido en los irracionales en lugar de los racionales como estaba F.

3er. paso) Demostrar que todos los reales son puntos de la frontera o borde de $\mathbb{Q}$ y también de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

El complemento de $\mathbb{Q}$ (conjunto de racionales) en el espacio real, es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (conjunto de irracionales).

Sea a un real cualquiera, racional o irracional.

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ también lo es, en toda bola $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ existe algún elemento de $\mathbb{Q}$ y algún otro de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, por definición de punto de frontera de $\mathbb{Q}$ se cumple que a, el centro de la bola, es punto de frontera o de borde de $\mathbb{Q}$.

Como a era un real arbitrario, hemos probado que la frontera de $\mathbb{Q}$ es todo el conjunto de reales.

La prueba para $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es la misma permutando los nombres de los conjuntos.

4to. paso) Probar que el interior y el exterior de $\mathbb{Q}$ son vacíos.

Es una consecuencia inmediata de que todo número real debe estar en la frontera de $\mathbb{Q}$, y que por definición de punto de frontera, no puede ser interior ni exterior a $\mathbb{Q}$. □ ◇

6 CONJUNTOS COMPACTOS EN LA RECTA REAL

✓ **Definición 6.1** CONJUNTOS COMPACTOS EN LA RECTA REAL

Un conjunto H de números reales se llama *compacto* si es cerrado y acotado. ✓

✓ Se recuerda que un conjunto H de reales se dice acotado si es vacío o si existe algún número real K llamado cota superior que es mayor o igual que todos los elementos de H, y si existe algún número real k llamado cota inferior que es menor o igual que todos los elementos de H. ✓

⋄ **Proposición 6.2** *Un conjunto H de la recta real $\mathbb{R}$ es acotado si y solo si H está contenido en alguna bola $B_r(a)$.* ⋄

⋄ *Demostración:* Si H es acotado entonces, llamando $r = K + 1 - k$ y $a = k$ donde $K y k$ son alguna cotas superior e inferior del conjunto H, se tiene que $H \subset B_r(a)$. Recíprocamente, si H está contenido en alguna bola $B_r(a)$ entonces se tiene que $K = a + r$ y $k = a - r$ son respectivamente cotas superior e inferior de H; luego H es acotado. □ ⋄

Basado en la afirmación anterior se define, en espacios métricos generales, lo siguiente:

⋄ **Definición 6.3** CONJUNTOS ACOTADOS.

Un conjunto $H \subset M$ donde M es un espacio métrico cualquiera, se dice *acotado* si está contenido en alguna bola $B_r(a)$ de M. ⋄

⋄ **Nota 6.4** Se observa que en espacios métricos cualesquiera no existe en general una relación de orden como en la recta $\mathbb{R}$. Por lo tanto no tiene sentido definir cota superior, cota inferior de un conjunto, ni definir acotación de ese conjunto de la manera en que se hace en la recta real.

Sin embargo, la definición anterior, sustituye el concepto de acotación mediante desigualdades que cubren todos los elementos del conjunto, por el concepto de acotación mediante la cobertura con una bola de cierto radio $r > 0$ (finito) a todos los elementos del conjunto.

El doble de ese radio r, por ser finito, actúa en el caso de conjuntos acotados en espacios métricos sin relación de orden, con el rol que tenía la diferencia entre una cota superior y una inferior en el caso de conjuntos acotados de la recta real. ⋄

✓ **Nota 6.5** En espacios métricos generales también se define conjunto compacto, pero de otra manera diferente a la vista en la definición 6.1 usada para la recta real. En general los conjuntos compactos en un espacio métrico cualquiera no son necesariamente los conjuntos cerrados y acotados. Pero en la recta real sí: los conjuntos compactos son los cerrados y acotados aún aplicando la definición de compacidad que se usa en espacios métricos abstractos. ✓

⋄ La definición general de compacidad en espacios métricos cualesquiera sale de los objetivos de este curso, pero puede estudiarse en ref: ⋄

⋄ En el espacio métrico real $\mathbb{R}$ así como en los espacios euclídeos n-dimensionales reales R^n, se puede demostrar que con la definición general de compacidad (que no veremos en este curso) los compactos son todos y nada más que los conjuntos cerrados y acotados. Eso justifica la siguiente definición que será útil en los cursos de Cálculo 2, 3 y de Ecuaciones Diferenciales. ⋄

⋄ **Definición 6.6** CONJUNTOS COMPACTOS EN EL PLANO Y EN $\mathbb{R}^n$

Sea (M, dist) el espacio métrico euclídeo real de dimensión 2 (plano) o 3 (espacio) definido en el ejemplo 1.4.

Un conjunto $H \subset M$ se dice COMPACTO, si es cerrado y acotado. ⋄

$\diamond$ **Ejercicio 6.7** Dar ejemplos en el plano de conjuntos compactos (cerrados y acotados), y de no compactos que sean acotados no cerrados, cerrados no acotados, y ni cerrados ni acotados. $\diamond$

✓ Por el axioma del supremo en la recta real $\mathbb{R}$ todo conjunto acotado $H \subset \mathbb{R}$ (en particular los compactos) tiene supremo o extremo superior (la menor de las cotas superiores de H) y tiene también ínfimo o extremo inferior (la mayor de las cotas inferiores de H). Sin embargo puede no existir máximo o mínimo de H aunque H sea acotado. [12] Cuando $H \subset \mathbb{R}$ además de ser acotado es cerrado, se prueba lo siguiente: ✓

✓ **Teorema 6.8** MAXIMO Y MINIMO DE COMPACTOS EN LA RECTA REAL

Todo conjunto compacto de la recta real tiene un elemento máximo y tiene un elemento mínimo.✓

✓ *Demostración:* Sea $H \subset \mathbb{R}$ compacto, es decir, cerrado y acotado. Como H es acotado por el axioma del supremo (y del ínfimo) en $\mathbb{R}$, existe un real s supremo de H, y un real i ínfimo de H. Para probar que s es máximo e i es mínimo basta demostrar que pertenecen a H (ver nota 12 al pie).

Demostremos que $s \in H$. La prueba de que $i \in H$ es la misma, cambiando el sentido de las desigualdades y sustituyendo s por i, supremo por ínfimo, y cota superior por cota inferior.

Supongamos por absurdo que s pertenece al complemento H^c de H. Como sabemos que H es cerrado, entonces usando el teorema 4.6 obtenemos que H^c es abierto. Por definición de abierto todos los puntos de H^c son interiores a H^c. Luego, por la hipótesis de absurdo s es interior a H^c.

Por la definición de punto interior a un conjunto existe una bola $B_r(s)$ contenida en H^c. O sea todo elemento de $B_r(s)$ pertenece a H^c lo que implica que $B_r(s)$ es disjunto con H, o dicho de otro modo, que ningún punto de H pertenece a $B_r(s) = (s - r, s + r)$.

Sabemos que $r > 0$ porque es el radio de una bola, (ver definición 2.1).

El número real s es cota superior de H porque es el supremo de H (la menor de las cotas superiores de H). Entonces todo elemento de H es menor o igual que s.

Además sabemos que ningún elemento de H pertenece al intervalo $(s - r, s + r)$.

De las dos afirmaciones anteriores se deduce que todo elemento de H es menor o igual que $s - r$. Entonces hemos probado que $s - r$ es también cota superior de H.

Pero como $r > 0$ esa cota superior es menor que s. Luego s no era la menor de las cotas superiores de H y por lo tanto s no era el supremo de H. Absurdo. □ ✓

7 Apéndices

[12] Se recuerda la definición de máximo de un conjunto H de reales: cuando existe el supremo o extremo superior de H y además pertenece a H, se llama máximo de H.

Si no existe extremo superior o si existe pero no pertenece a H, el máximo de H no existe.

Por el axioma del supremo: todos los conjuntos acotados tienen supremo o extremo superior, pero aún así si este no pertenece al conjunto, no es máximo.

Análogamente el mínimo de un conjunto es, cuando existe y pertenece a H, el ínfimo o extremo inferior de H.

Por ejemplo el intervalo $(1, 3)$ tiene ínfimo igual a 1 y supremos igual a 3 pero no tiene mínimo ni máximo.

7.1 La distancia del máximo en $\mathbb{R}^2$.

$\diamond$ Sea M el conjunto de puntos de un plano. Se puede tomar un par de ejes coordenados cartesianos ortogonales en el plano, identificar cada punto a con sus coordenadas reales (x, y) en esos ejes, y tomar como distancia $\operatorname{dist}(a, b) = \max\{|x-u|, |y-v|\}$ entre los puntos $a = (x, y)$ y $b = (u, v)$

Notación: $\max\{\cdot, \cdot\}$ denota al máximo (es decir al mayor) de los números reales separados por comas e incluidos entre los corchetes $\{\}$. $\diamond$

$\diamond$ **Ejercicio 7.1** a) Probar que M con la nueva distancia definida en 7.1 es un espacio métrico.

b) Sean $a = (0, 0)$ y $b = (1, 1)$. Probar que la distancia entre a y b es menor que la longitud del segmento de recta que los une.

c) Probar que no existe ningún recorrido poligonal plano que una el punto $a = (0, 0)$ con $b = (1, 1)$ y que tenga longitud igual a la distancia entre a y b. $\diamond$

$\diamond$ **Nota 7.2** En el curso de cálculo 3 se definirá longitud de un recorrido curvo continuo en el plano euclídeo. Se puede demostrar que en el espacio métrico de la subsección 7.1 no existe ningún recorrido curvo continuo que una $a = (0, 0)$ con $b = (1, 1)$ y cuya longitud sea igual a la distancia entre a y b. $\diamond$

$\diamond$ **Moraleja:** No debe confundirse el concepto de distancia dado al principio de la subsección 1.1 con el de longitud de curvas contenidas en M. $\diamond$

$\diamond$ Sin embargo en algunos conjuntos M, (como por ejemplo en algunas superficies del espacio tridimensional y para fijar ideas imagínense que M es una esfera) dada una distancia por un lado y una longitud de curvas contenidas en M por otro, se puede, modificando eventualmente la distancia dada, hacer que para todos $a, b \in M$ la distancia $\operatorname{dist}(a, b)$ coincida con la mínima longitud de los recorridos curvos posibles que unen a y b *sin salirse de* M . $\diamond$

7.2 Elementos de la teoría de funciones

$\checkmark$ Sean M y N conjuntos cualquiera no vacíos, con una cantidad finita o infinita de elementos. $\checkmark$

$\diamond$ Por ejemplo M es el conjunto URU de personas que tienen cédula de identidad uruguaya y $N = \mathbb{R}$ es el conjunto de números reales. $\diamond$

Supongamos que para cada uno y todos los elementos $a \in M$ existe un elemento $f(a) \in N$, único para cada $a \in M$ pero que puede variar con a, asignado a a de alguna manera determinada.

Por ejemplo $f = \mathit{edad} : \mathrm{URU} \mapsto \mathbb{R}$ es la función que a cada persona a del conjunto URU le hace corresponder su edad $\mathit{edad}(a)$, es decir la cantidad entera de años de vida que tiene a.

$\checkmark$ **Definición 7.3** FUNCIONES, APLICACIONES o TRANSFORMACIONES.

La correspondencia $f : M \mapsto N$ es llamada *función con dominio* M *y codominio* N*, o también transformación o aplicación del conjunto* M *al conjunto* N cuando lleva cada elemento $a \in M$ a un elemento y uno solo $f(a) \in N$. [13] $\checkmark$

[13] La flechita en la notación $f : M \mapsto \mathbb{N}$ (no indica límite) indica el sentido de la correspondencia f: arranca de un elemento cualquiera del conjunto "dominio" M y llega a algún elemento del conjunto "codominio" N.

Se suele imaginar a los conjuntos M y N como si fueran dos bolsas dibujadas separadas en el plano y sus elementos cruces dentro de la bolsa M y circulitos dentro de la bolsa N. La función $f : M \mapsto N$ se imagina representada con muchas flechitas, una y una sola que arranca de cada cruz a del dominio M y termina en algún circulito $f(a)$ del codominio N.

✓ Por convención, los siguientes tres objetos tienen que ser dados cuando se da una función, y si se modifica *alguno* de los tres entonces la función cambia:

El conjunto dominio M

El conjunto codominio N

La manera en que se asigna a *todo* elemento a en M *su único* correspondiente $f(a)$ en N. ✓

✓ Una función $f : M \mapsto N$ se dice que es una *función real,* si su codominio N es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ o una parte de él. ✓

⋄ Por ejemplo es real la función $edad : URU \mapsto \mathbb{R}$ definida antes y también la nueva función $edadn : URU \mapsto \mathbb{N}$ tal que $edadn(a) = edad(a)$ para todo $a \in URU$ y donde $\mathbb{N}$ indica el conjunto de los números naturales, que es un subconjunto de los reales.

Las funciones anteriores son ambas por convención funciones diferentes entre sí, porque sus codominios se tomaron diferentes. ⋄

✓ **Definición 7.4** FUNCIONES INYECTIVAS

Sea $f : M \mapsto N$ una función cualquiera.

Supongamos que toda vez que se tomen $a \neq b$ en M (o sea, a y b son elementos distintos del dominio M), entonces los correspondientes $f(a)$ y $f(b)$ en el codominio N también son diferentes entre sí. Cuando se cumple la condición anterior la función f se dice INYECTIVA. ✓

⋄ Para fijar ideas, la función $f = edad : URU \mapsto \mathbb{R}$ usada antes que a cada persona $a \in URU$ le hace corresponder su edad $edad(a)$, es una función real no inyectiva. En cambio la función $f = ced : URU \mapsto \mathbb{R}$ que a cada persona $a \in URU$ le corresponde su número $ced(a)$ de cédula de identidad, es inyectiva. ⋄

✓ **Definición 7.5** FUNCIONES SOBREYECTIVAS

Supongamos ahora que todos los elementos del codominio N son correspondientes por f de alguno o algunos elementos de M, más precisamente, para todo $h \in N$ existe alguno (quizás muchos) elemento $a \in M$ tal que $f(a) = h$.

La función $f : M \mapsto N$ se dice SOBREYECTIVA cuando se cumple la condición anterior. ✓

⋄ Por ejemplo la función $ced : URU \mapsto \mathbb{R}$ no es sobreyectiva, ya que hay números reales (por ejemplo $\sqrt{2}$) que no son cédula de identidad de ninguna persona del conjunto URU. Por otra parte la función $edadn : URU \mapsto \mathbb{N}$ tampoco es sobreyectiva ya que hay números naturales (por ejemplo 10^6) que no son la edad de ninguna persona del conjunto URU. ⋄

⋄ Consideremos ahora el conjunto K de todos los números naturales n, tales que existe alguna persona en el conjunto URU con número de cédula de identidad exactamente igual a n. La nueva función $cedk : URU \mapsto K$ definida como $cedk(a) = ced(a)$ para todo $a \in URU$ es sobreyectiva e inyectiva a la vez. ⋄

⋄ Consideremos también el conjunto NIN de todos los niños de hasta 5 años de edad que tienen cédula de identidad uruguaya. La nueva función $cedenink : NIN \mapsto K$ definida como $cedenink(a) = ced(a)$ para todo $a \in NIN$ es inyectiva pero no es sobreyectiva. ⋄

✓ **Definición 7.6** FUNCIONES BIYECTIVAS, BIUNÍVOCAS o INVERTIBLES.

Una función $f : M \mapsto N$ se dice BIYECTIVA o BIUNÍVOCA o INVERTIBLE si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. ✓

Todas y cada una de las cruces a del dominio tiene una y solo una flechita que arranca en ella.

Sin embargo muchas flechitas pueden terminar en un mismo circulito del codominio N y no todos los circulitos del codominio tienen por qué ser puntas de flecha.

$\diamond$ Por ejemplo la función $cedk : URU \mapsto K$ definida antes es invertible. $\diamond$

✓ **Definición 7.7** FUNCIÓN INVERSA

Para cada función biyectiva (biunívoca o invertible) $f : M \mapsto N$ se define la aplicación $f^{-1} : N \mapsto M$ llamada *función inversa de* f, que hace corresponder a cada elemento $h \in N$ su única "preimagen" por f en M, más precisamente $f^{-1}(h) = a$ si y solo si $f(a) = h$. [14] ✓

$\diamond$ En el ejemplo de la función $cedk : URU \mapsto K$, la función inversa $cedk^{-1} : K \mapsto URU$ es la aplicación que a cada número de cédula de identidad uruguaya existente, le asigna la persona titular de esa cédula. $\diamond$

7.3 Espacios vectoriales normados como ejemplos de espacios métricos. Métrica o distancia inducida por la norma.

$\diamond$ $\nVdash$ $\diamond$

Referencias

[B 1975] Autor: *Título del libro* Editorial **Número** Año

[14] La notación f^{-1} y la palabra "inverso" no tienen nada que ver con el inverso de un número x en el sentido del cociente $1/x$. Cuando se utiliza esas palabras, hay que aclarar su sentido cuando no se desprende del contexto. En el curso de Cálculo 1 usaremos la notación siguiente: p^{-1} indica función inversa, sin necesidad de aclarar nada cuando p es una función, que se presupone invertible, e indica en cambio $1/p$ cuando p es un número real o complejo que se presupone distinto de cero.

Así por ejemplo, dada una función invertible $f : M \mapsto \mathbb{R}$, y dados un elemento $a \in M$, y un número $x \in \mathbb{R}$ el símbolo $f^{-1}(x)$ indica la función inversa de f aplicada al número $x \in \mathbb{R}$ (aunque x sea el número cero). Sin embargo el símbolo $(f(a))^{-1}$ indica al número real $1/(f(a))$ presuponiendo que $f(a)$ no es el número cero.