

**NOTAS COMPLEMENTARIAS DE ANÁLISIS REAL
(TEORÍA DE LA MEDIDA ABSTRACTA)**

Eleonora Catsigeras

2003

Facultades de Ciencias y de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo - URUGUAY

Publicación Electrónica en www.fing.edu.uy

Estas notas se pueden reproducir para uso legal no comercial, incluyendo nombre de autor, institución y datos de publicación original.

Parte 1 - Conjuntos no medibles Lebesgue

Parte 2. - Medidas de Borel finitas en la recta

Parte 3. - Teoremas complementarios de Integración Abstracta

Parte 4. - Integración abstracta y topología débil estrella en el espacio de las medidas de probabilidad

Fé de Erratas de la Parte 4

Parte 5. - Derivación de Medidas

Análisis Real. Curso 2003.

RESUMEN TEÓRICO Y

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS AL PRÁCTICO 1.

26 de marzo de 2003

LOS EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS NO SON OBLIGATORIOS NI PRIORITARIOS.

Resumen de resultados vistos en la clase teórica.

Sea $X = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$, y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ sea $T_\alpha : X \mapsto X$ la "traslación en X ", definida por $T_\alpha(x) = x + \alpha - \text{ent}(x + \alpha) \forall x \in X$. Sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las partes de X .

Se demostró en la clase teórica el siguiente teorema:

Teorema 1. Si $\mu : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty)$ es una medida (finita) definida en todas las partes de $X = [0, 1]$ y tal que es invariante por traslaciones EN x (es decir $\mu(T_\alpha(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subset X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$) entonces $\mu = 0$ (es decir $\mu(A) = 0 \forall A \subset X$).

Demostración: Sea en X la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2$ si $x_1 - x_2$ es racional. Elegir en X (usando el axioma de elección) un representante y uno solo de cada clase de equivalencia, y considerar el conjunto $C \subset X$ de esos representantes elegidos. Se verifica que, para α variando en el conjunto de todos los racionales en $[0, 1]$, la colección numerable de conjuntos $T_\alpha(C)$ es una partición de X (Es decir, los conjuntos de esa colección son disjuntos dos a dos y su unión es X). Se deduce que $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C)$. Se concluye que, por ser μ finita, se debe cumplir que $\mu(C) = 0$, que $\mu(X) = 0$, y por lo tanto $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset X$. $\square$

Sea $\mathcal{L}$ una sigma-álgebra en $X = [0, 1]$. que contiene a todos los sub-intervalos $I \subset X$.

Nota: Se deduce que $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la sigma-álgebra de Borel en $X = [0, 1]$. Sin embargo $\mathcal{L}$ no es necesariamente igual $\mathcal{B}$.

Algunas consecuencias del teorema 1 son:

- **Corolario 1:** Si existe alguna medida m en $([0, 1], \mathcal{L})$ tal que $m(I)$ es igual a la longitud de I , para todo intervalo $I \subset X$, y que m es invariante por las traslaciones (para todo $A \in \mathcal{L}$), entonces $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(X)$.

Nota: Los subconjuntos de X que no pertenecen a $\mathcal{L}$ se llaman "no $\mathcal{L}$ -medibles".

- **Corolario 2:** El conjunto $C \subset [0, 1]$ construido en la demostración del teorema 1 es no $\mathcal{L}$ -medible.
- **Corolario 3:** *Existencia de conjuntos no medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Sea $\mathcal{L}$ una sigma-álgebra en $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos de reales. Si existe una medida m en $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ tal que $m(I)$ es igual a la longitud de I para todo intervalo de reales, y tal que m es invariante por las traslaciones $T_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $T_\alpha(x) = \text{def } x + \alpha \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$, para todos los subconjuntos de $\mathcal{L}$; entonces existe algún conjunto $C \subset \mathbb{R}$ que no está en $\mathcal{L}$. (Tales conjuntos son llamados "no $\mathcal{L}$ -medibles" en $\mathbb{R}$.)

Nota: En próximas clases teóricas se demostrará, construyéndolas, que existen sigma-álgebras $\mathcal{L}$ y medidas m que cumplen las hipótesis del corolario 3. Cuando tal espacio de medida es "completo" (de acuerdo a definición que veremos) m se llama medida de Lebesgue, y los conjuntos de $\mathcal{L}$ se llaman Lebesgue-medibles.

- **Definiciones.**

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea $J \subset S^1$ un arco de S^1 , es decir, $J = \text{def } \{z \in S^1 : z = e^{2\pi i x}, x \in I\}$, donde I es un intervalo de reales; y sea la longitud de J igual a 2π por la longitud de I .

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la "traslación T_α en S^1 " (también llamada rotación en S^1 , racional o irracional según sea el real α) a la transformación $T_\alpha^*(z) = \text{def } ze^{2\pi i \alpha}$ para todo $z \in S^1$.

• **Corolario 4:** *Existencia de conjuntos no medibles Lebesgue en S^1 .*

Si $\mathcal{L}$ es una sigma-álgebra de subconjuntos de S^1 que contiene a todos los arcos $J \subset S^1$, y si m es una medida en $(S^1, \mathcal{L})$ tal que $m(J)$ es igual a la longitud de J para todo arco $J \subset S^1$, y m es invariante por todas las “traslaciones en S^1 ”, entonces existe algún conjunto $C \subset S^1$ que no está en $\mathcal{L}$. (Tales conjuntos son llamados “no $\mathcal{L}$ medibles” en S^1 .)

Ejercicios complementarios al práctico 1.

Ejercicio 10. Demostrar los corolarios 1 a 4.

Sugerencia para probar el corolario 3: Usar el corolario 1 definiendo en $[0,1)$ una sigma-álgebra y una medida adecuadas a partir de la sigma-álgebra $\mathcal{L}$ y de la medida m en R .

Sugerencia para probar el corolario 4: utilizar el corolario 1 y la biyección $h : [0,1) \mapsto S^1$ definida por $h(x) = e^{2\pi ix} \forall x \in [0,1)$.

Ejercicio 11.

Sea $X = [0,1) \times [0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$.

Sean dados α y β reales cualesquiera, y sea la “traslación en X ” $T_{\alpha,\beta} : X \mapsto X$ definida como

$$T_{\alpha,\beta}(x,y) = (x + \alpha, y + \beta) - (\text{ent}(x + \alpha), \text{ent}(y + \beta))$$

11.a Completar la demostración del siguiente teorema:

Teorema 2: Si μ es una medida finita definida en todas las partes de $X = [0,1) \times [0,1)$ tal que μ es invariante por las traslaciones en X , entonces μ es cero.

Sugerencia de demostración:

Sea en X la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ cuando $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ son racionales. Elegir en X (usando el axioma de elección) un representante y uno solo de cada clase de equivalencia, y considerar el conjunto $C \subset X$ de esos representantes elegidos. Verificar que, para (α, β) variando en el conjunto de todas las parejas de racionales en $[0,1)$, la colección numerable de conjuntos $T_{\alpha,\beta}(C)$ es una partición de X (Es decir, los conjuntos de esa colección son disjuntos dos a dos y su unión es X). Deducir que $\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C)$. Concluir que, por ser μ finita, se debe cumplir que $\mu(C) = 0$, que $\mu(X) = 0$, y por lo tanto $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset X$. $\square$

11.b Enunciar y deducir, a partir del teorema 2, **corolarios 2.1; 2.2, 2.3 y 2.4**, análogos a los corolarios 1, 2, 3 y 4 del ejercicio anterior.

Sugerencia: Sustituir en los enunciados de los corolarios 1 a 4 lo siguiente:

- $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^2$,
- intervalo por rectángulo (por definición un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ de dos intervalos $I_1 \subset \mathbb{R}, I_2 \subset \mathbb{R}$),
- longitud de intervalo por área de rectángulo
- (Para el corolario 2.4) sustituir circunferencia S^1 del corolario 4, por el toro bidimensional T^2 . (Se define T^2 como el producto cartesiano $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$.)

Ejercicio 12. Enunciar y demostrar un teorema relativo a la existencia de conjuntos no $\mathcal{L}$ -medibles en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: imitar el enunciado del corolario 3 del ejercicio 10 y el procedimiento sugerido en el ejercicio 11 para pasar de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.

UNICIDAD DE LA MEDIDA DE BOREL FINITA EN LA RECTA DADA LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA.

Eleonora Catsigeras, 4 de abril de 2003

Ejercicio 9 del práctico 1. Demostrar lo siguiente:

TEOREMA

Si μ y ν son dos medidas de Borel finitas en la recta tales que $\mu(-\infty, x] = \nu(-\infty, x]$ para todo x en $\mathbb{R}$, entonces $\mu = \nu$.

Hay varias formas alternativas de probarlo según lo que cada estudiante haya estudiado y tenga demostrado en la teoría, antes de hacer el ejercicio. Aquí van algunas de las alternativas posibles:

ALTERNATIVA 1: Sin usar el teorema de Carathéodory ni sus corolarios (que al 4 de abril todavía no vimos en las clases teóricas).

Usando las propiedades de continuidad y otras de cualquier espacio de medida, y las propiedades de sigma-álgebra generada, se sugiere lo siguiente:

Sea E la familia de los borelianos E tales que $\mu(E) = \nu(E)$.

Probar que todo intervalo $(a, b]$ está en E ; todo intervalo abierto está en E , todo abierto U (en $\mathbb{R}$ todo abierto U es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos) está en E . La familia E es cerrada en complementos, luego contiene a todos los cerrados K .

Dada la medida de Borel finita μ , considerar la familia $M(\mu)$ de todos los borelianos B que cumplen lo siguiente:

Para todo $\epsilon > 0$ existe un cerrado K y un abierto U tales que

K contenido en B contenido en U

$\mu(U \setminus B), \mu(B \setminus K) < \epsilon$

Probar que la familia $M(\mu)$ es una sigma álgebra, y que contiene a todos los intervalos abiertos. (Da un poco de trabajo probar que la familia es cerrada en uniones numerables: para eso recordar que la medida de una unión numerable es el límite de la medida de uniones finitas.)

Probar que si B pertenece a $M(\mu)$ entonces $\mu(B) = \nu(B)$

ALTERNATIVA 2: Usando el directo del siguiente teorema ya enunciado en la clase teórica del 3 de abril (en dicha clase el directo no fue demostrado todavía pero el recíproco sí). Teorema 1.16 del libro de Folland; el directo es un corolario del Teorema de Carathéodory que todavía no vimos en el curso teórico.

TEOREMA: Medidas de Borel Acotadas (MBA) en conjuntos acotados.

Directo: Si F de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una función creciente y semicontinua superiormente, entonces existe una única medida MBA tal

que

$$(*) \quad \mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

para todos reales a y b , con a menor o igual que b .

Recíproco: Si μ es una medida MBA entonces existe y es única a menos de una constante, una función F de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que cumple (*).

Además toda función F que cumpla (*) es semicontinua superiormente y creciente.

ALTERNATIVA 3:

Usando el Teorema de Carathéodory (Teorema 1.11 del libro de Folland), y en particular su Corolario de extensión única de premedida a medida (Teorema 1.14; todavía no lo enunciamos ni demostramos en las clases teóricas).

Definir la familia $\mathcal{A}$ de todas las uniones finitas de intervalos de la forma $(a,b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ y demostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra.

La medida de Borel μ , restringida al álgebra $\mathcal{A}$, es una premedida (definición en la página 30 del libro de Folland).

ALTERNATIVA 4. Usando el Teorema de regularidad de medidas MBA que todavía no enunciamos ni demostramos en el teórico (Teorema 1.18 del Folland; o sino el Lemma 1.17)

Demostrar que $\mu(U) = \nu(U)$ para todo abierto U de la recta.

Introducción al Análisis Real. Curso 2003.

TEOREMAS COMPLEMENTARIOS DE INTEGRACIÓN ABSTRACTA.

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 3.

Eleonora Catsigeras, 6 de mayo de 2003.
Corregido: 27 de mayo de 2003.

Ejercicio 1. Teoremas de inducción.

- **Teorema de inducción a L^+ .**

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible cualquiera y sea $P \subset L^+$ un subconjunto de funciones que cumple:

H1: $\chi_A \in P \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

H2: $af + bg \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ y para todas $f, g \in P$ tales que $fg = 0$.

H3: Si f_n es una sucesión creciente de funciones en P que converge puntualmente a f , entonces $f \in P$.

Probar que $P = L^+$.

- **Teorema de inducción a $L^1(\mu)$.**

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera y sea $P \subset L^1(\mu)$ un subconjunto de funciones complejas integrables que cumple:

H1: $\chi_A \in P \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

H2: $af + bg \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$ y para todas $f, g \in P$ tales que $\operatorname{Re}(fg) = 0$ μ -c.t.p.

H3: Si f_n es una sucesión μ -c.t.p. creciente de funciones reales no negativas en P que converge μ -c.t.p. a f , entonces $f \in P$.

Probar que $P = L^1(\mu)$.

Ejercicio 2. Teorema de cambio de variable en la integral y medidas invariantes.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(Y, \mathcal{N})$ un espacio medible. Dada $T : X \mapsto Y$ transformación medible, se define en $\mathcal{N}$ la medida $T^*\mu$ como $T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{N}$.

a) Probar que para todo $A \in \mathcal{N}$ para toda $f \in L^+(Y)$ y para toda $f \in L^1(Y, T^*\mu)$ se cumple:

$$\int_A f dT^*\mu = \int_{T^{-1}(A)} f \circ T d\mu$$

(Sugerencia: usar teoremas de inducción a L^+ y a L^1 .)

b) Sea ahora $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N})$; $T : X \mapsto X$ medible. Probar que μ es invariante por T (es decir $T^*(\mu) = \mu$) si y solo si

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$$

para toda $f \in L^+$, si y solo si también vale la igualdad anterior para toda $f \in L^1(\mu)$.

c) Encontrar la medida $T^*\mu$ y expresar la igualdad del cambio de variables de la parte a) cuando μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es:

c- i La traslación con $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo: $T(x) = x + \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c-ii La homotecia de razón $\alpha > 0$ real fijo: $T(x) = \alpha x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3. Teorema de la distribución acumulada. Valor esperado de variables aleatorias en espacios de probabilidad.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $f \in L^+(X, \mathcal{M})$. Se define la “Función de distribución $G_f : [0, \infty) \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ acumulada hacia la derecha” como

$$G_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

a) Probar que $G_f \in L^+([0, \infty), \mathcal{L})$ y que

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0, \infty)} G_f \, dm$$

donde $([0, \infty), \mathcal{L}, m)$ es la medida de Lebesgue en la semirrecta de reales no negativos. (Sugerencia: la medibilidad de G_f y la igualdad de las integrales pueden probarse por inducción a L^+).

b) Probar que si μ es finita, entonces G_f es acotada, decreciente y semicontinua por la derecha; por lo tanto G_f es integrable Riemann en cualquier intervalo acotado y la integral de Lebesgue de $G_f \geq 0$ es igual a su integral impropia en la semirrecta positiva (valiendo $+\infty$ si y solo si la integral impropia es divergente).

c) Sea $(\Omega, \mathcal{M}, p)$ un espacio de probabilidad (es decir un espacio de medida tal que $p(\Omega) = 1$). Las funciones $Y : \Omega \mapsto [0, \infty)$ medibles se llaman variables aleatorias reales no negativas. La función $F_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como $F_Y(t) = p(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq t\}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ se llama función de distribución acumulada (hacia la izquierda) de la variable aleatoria Y . La integral $\int Y \, dp$ se llama valor esperado $E(Y)$ de Y . Deducir de las partes a) y b) que

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(t)) \, dt$$

Nota: esta última igualdad se usa frecuentemente en los cursos básicos de probabilidad para definir el valor esperado, ya que no requiere conocimientos previos sobre integración abstracta en espacios medibles.

Ejercicio 4. Teorema de caracterización de Funcionales en L^+ como integrales.

Sea $(X, \mathcal{M})$ espacio medible cualquiera. Sea $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ una aplicación que cumple:

i) $\Lambda(cf) = c\Lambda(f) \quad \forall f \in L^+, c \in \mathbb{R}^+$

ii) $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \quad \forall f, g \in L^+$

iii) Si $f_n \in L^+$ es una sucesión monótona creciente que converge puntualmente a f entonces $\lim \Lambda(f_n) = \Lambda(f)$.

a) Probar que dada μ medida en $(X, \mathcal{M})$ existe y es único $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ que cumple i), ii), iii) y tal que $\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^+$.

b) Probar que dado $\Lambda : L^+ \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ que cumple i), ii), iii) existe y es única μ medida en $(X, \mathcal{M})$ tal que $\Lambda(f) = \int f \, d\mu \quad \forall f \in L^+$.

Ejercicio 5. Linealidad de la integral respecto de la medida. Probar que si μ y ν son dos medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y si a, b son reales no negativos entonces se cumple:

$$\int f d(a\mu + b\nu) = a \int f d\mu + b \int f d\nu$$

para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$.

(Sugerencia: usar los teoremas de inducción a L^+ y a $L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$).

Ejercicio 6. Continuidad absoluta de medidas e integral del Delta de Dirac.

Sean μ y ν medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Se dice que ν es absolutamente continua respecto de μ (y se denota $\nu \ll \mu$) si $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$.

a) Dada $h \in L^+$, sea ν_h la medida definida como $\nu_h(A) = \int_A h d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

- Probar que $\nu_h \ll \mu$
- Probar que $\nu = \nu_h$ si y solo si $\int f d\nu = \int fh d\mu$ para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\nu)$ (Sugerencia: inducción a L^+ y a $L^1(\nu)$).

b) Sea $x_0 \in X$. Sea δ_{x_0} la medida Delta de Dirac concentrada en x_0 , definida para todo $A \in \mathcal{M}$ como $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$.

- Probar que $\delta_{x_0} \ll \mu$ si y solo si $\mu(\{x_0\}) \neq 0$
- Demostrar que $\nu = \delta_{x_0}$ si y solo si $\int f d\nu = f(x_0)$ para toda $f \in L^+$ y para toda $f \in L^1(\nu)$
- Deducir que $L^1(\delta_{x_0})$ es todo el espacio de las funciones complejas medibles.

c) Probar que son equivalentes las siguientes condiciones:

- c 1) $\delta_{x_0} \ll \mu$
- c 2) $\mu(\{x_0\}) \neq 0$
- c 3) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda $f \in L^+$.
- c 4) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda función f compleja medible.
- c 5) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para toda función característica f medible.
- c 6) Existe $h \in L^+$ tal que $f(x_0) = \int fh d\mu$ para las funciones características $f = \chi_A$ de los conjuntos A de alguna familia que genera la sigma-álgebra $\mathcal{M}$.

d) Encontrar una función $h \in L^+$ que cumple todas las igualdades anteriores cuando $\delta_{x_0} \ll \mu$.

e) En el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ de medida de Lebesgue en la recta, sea $h_n = 2n\chi_{(-1/n, 1/n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea δ_0 la medida Delta de Dirac concentrada en 0.

- Verificar que δ_0 no es absolutamente continua respecto de m y por lo tanto no se cumple ninguna de condiciones de la parte c).
- Probar que existe y encontrar $h \in L^+$ que es el límite puntual de h_n .
- Probar que $f(0) = \int f d\delta_0 = \lim_n \int fh_n dm =$ para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua.
- Probar que cualquiera sea $h \in L^+$ las integrales $f(0) = \int f d\delta_0$ y $\int fhd m$ no son iguales para toda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua. (Sugerencia: Demostrar por absurdo, usando la condición c 6). Probar que la función característica de cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es el límite puntual de alguna sucesión monótona creciente f_n de funciones continuas reales no negativas.)

Ejercicio 7. Límite débil estrella de medidas.

Sea X un espacio métrico compacto. **Definición:** Una sucesión de medidas de probabilidad ν_n en el espacio medible Borel $(X, \mathcal{B})$ se dice que *converge- w^* a la medida de Borel ν* (se lee “converge débil estrella”; w viene de “weak”; se denota $\lim^* \nu_n = \nu$) si $\int f d\nu = \lim_n \int f d\nu_n =$ para toda $f : X \mapsto \mathbb{C}$ continua.

- a) Sea μ una medida de Borel en X y sea una sucesión de medidas $\nu_n \ll \mu$ que converge- w^* a la medida ν . Probar que ν no es necesariamente absolutamente continua respecto de μ (Sugerencia: ejemplo de la parte e) del ejercicio 6.)
- b) Probar que $\lim^* \nu_n = \nu$ NO implica que $\lim_n \nu_n(A)$ sea igual a $\nu(A)$ para todo boreliano A .
- c) Sea $T : X \mapsto X$ una transformación continua. Probar que si $\lim^* \nu_n = \nu$ entonces $\lim^* T^*(\nu_n) = T^*(\nu)$ (ver definición del operador T^* en el ejercicio 2).
- d) En el intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue m restringida a los Borelianos, se considera la transformación continua $T : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ definida por $T(x) = x/2$. Para todo n natural T^n denota la composición de T consigo misma n veces. Se considera la sucesión de medidas $\nu_n = (T^n)^*m$ (ver la definición del operador T^* en el ejercicio 2).

- Probar que ν_n son medidas de probabilidad, es decir $\nu_n([0, 1]) = 1$.
- Probar que $\nu_n \ll m$ para todo n (ver la definición de continuidad absoluta en el ejercicio 6).
- Demostrar que ν_n es w^* -convergente y hallar la medida $\nu = \lim^* \nu_n$.
- Verificar que ν es una probabilidad invariante por T que no es absolutamente continua respecto de m .
- Dado x_0 en $[0, 1]$ se llama órbita por x_0 a la sucesión de puntos $o_{x_0} = \{T^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Verificar que se cumple

$$\nu_n(\{o_{x_0}\}) = \nu(\{o_{x_0}\}) = 0 \quad \text{para todo } x_0 \in (0, 1]$$

$$\nu_n(\{y \in \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \in (0, 1]\}) = 1$$

$$\nu(\{y \in \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \in (0, 1]\}) = 0$$

- Para cada punto $x_0 \in [0, 1]$ se considera el conjunto (llamado ω -límite de x_0) definido como $\omega_{x_0} = \{y \in [0, 1] : \text{existe una subsucesión de } o_{x_0} \text{ que converge a } y\}$. Probar que para todo $x_0 \in [0, 1]$ se cumple $\nu(\omega_{x_0}) = 1$ y $\nu_n(\omega_{x_0}) = 0$

Introducción al Análisis Real. Curso 2003.

INTEGRACIÓN ABSTRACTA

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 3

Eleonora Catsigeras

2 de mayo de 2003.

1. El teorema de inducción para funciones no negativas.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible cualquiera.

Definiciones: Se denota $\mathbb{R}^+$ a la semirrecta de reales no negativos $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, y se denota $\overline{\mathbb{R}}^+$, a la *semirrecta positiva completada*, esto es: $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

En $\overline{\mathbb{R}}^+$ la *sigma-álgebra de Borel* (que denotaremos simplemente con $\mathcal{B}$), está constituida por todos los borelianos en la semirrecta $\mathbb{R}^+$ y por estos unidos con $\{+\infty\}$.

Una función $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ se dice *medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Sea $L^+ = \{f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+ : f \text{ es medible}\}$

Por ejemplo es medible la *función característica* χ_E de un conjunto $E \in \mathcal{M}$, definida como $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$ y $\chi_E(x) = 0$ si $x \notin E$.

Una combinación lineal finita de funciones características con coeficientes reales se llama *función simple*.

Sea $S^+ = \{\varphi \in L^+ : \varphi \text{ es función simple}\}$.

Se observa que el recorrido de una función $\varphi \in S^+$ es un conjunto finito de reales no negativos $a_i \in \mathbb{R}^+$ para $i = 0, 1, \dots, n$, que cumplen $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Como φ es medible, los conjuntos $E_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$ son medibles. Además forman una partición de X (son disjuntos dos a dos y su unión es X). Por construcción se obtiene: $\varphi = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{E_i}$, que se llama *representación canónica* de la función simple.

Se demostró en las clases teóricas el siguiente teorema:

Teorema 1. (Caracterización de L^+).

Dada $f \in L^+$ existe una sucesión de funciones simples $\varphi_n \in S^+$ tales que:

- (Monotonía) $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$.
- φ_n converge puntualmente a f , es decir $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$.

Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado:

Corolario del teorema 1. (Teorema de inducción en L^+).

Si P es una propiedad que cumple las siguientes hipótesis de inducción:

- a) Todas las funciones características de conjuntos en $\mathcal{M}$ verifican la propiedad P .
- b) Si dos funciones reales no negativas f_1 y f_2 verifican la propiedad P y además $f_1 f_2 = 0$, entonces cualquier combinación lineal de ellas con coeficientes reales no negativos, verifica también la propiedad P .

- c) Si una sucesión monótona creciente de funciones $f_n \in L^+$ que verifican la propiedad P , converge puntualmente a f , entonces f también verifica la propiedad P .

Entonces todas las funciones simples $f \in L^+$ verifican la propiedad P .

Demostración: Por las hipótesis a) y b) toda función simple $\varphi \in S^+$ verifica la propiedad P . En efecto, la representación canónica de φ es una combinación lineal finita de funciones características de las cuales a lo sumo una se anula para cada $x \in X$. Por la hipótesis de inducción c) y por el Teorema 1 de caracterización de L^+ , toda función f en L^+ verifica la propiedad P . $\square$

2. Propiedades μ - casi todo punto.

Sea dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ cualquiera.

Definiciones: Dos funciones en L^+ se dicen *iguales μ -c.t.p.* si el conjunto A de los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x) \neq g(x)$ tiene μ - medida igual a cero. Es fácil verificar que la igualdad μ -c.t.p. es una relación de equivalencia.

Una sucesión f_n es *monótona creciente μ - c.t.p.* si el conjunto E de los puntos $x \in X$ para los cuales $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tiene μ - medida nula. Esta definición es equivalente a la condición de que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto E_n de los puntos para los cuales no se cumple que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ tiene μ -medida nula.

Una sucesión f_n de funciones en L^+ se dice que *converge a f μ - c.t.p.* si el conjunto de los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x)$ no es igual al límite de $f_n(x)$ tiene μ - medida nula.

Ejercicio 1: Probar que si f y g son funciones de L^+ entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es medible. Probar que para toda sucesión f_n de funciones de L^+ es medible el conjunto E_n de los puntos $x \in X$ tales que $f_n(x) > f_{n+1}(x)$. Probar que es medible el conjunto $E = \{x \in X : f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall n \in \mathbb{N}\}$. Probar que es medible el conjunto de los puntos $x \in X$ para los cuales no existe el límite de $f_n(x)$ cuando n tiende a infinito, y que es medible el conjunto de los puntos para los cuales existe ese límite y es igual a $g(x)$, donde $g \in L^+$ es una función dada.

3. Integración abstracta de funciones positivas.

Definiciones:

Sea $\varphi \in S^+$ con representación canónica $\varphi = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{E_i}$. Se define la *integral de φ respecto a la medida μ* como

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=0}^n a_i \mu(E_i)$$

donde $0 \cdot \infty = 0$ por convención.

Sea $f \in L^+$. Se define la *integral de f respecto de la medida μ* como

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \in S^+, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Una *definición equivalente de integral de $f \in L^+$ respecto de μ* es la siguiente:

$$\int f d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu$$

donde $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona cualquiera en S^+ , creciente con n y que converge puntualmente a f , como en el enunciado del Teorema 1 de la sección anterior que caracteriza al espacio funcional L^+ . (Este resultado se ha demostrado en las clases teóricas como corolario del teorema de convergencia monótona.)

Dado $E \in \mathcal{M}$ y dada $f \in L^+$, la *integral de f respecto de μ en E* es por definición:

$$\int_A f d\mu = \int f \cdot \chi_E d\mu$$

Observación: La definición de integral de una función simple implica que $\int_A d\mu = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \forall A \in \mathcal{M}$. Se deduce entonces que dos medidas μ y ν en un mismo espacio medible son iguales si y solo si verifican $\int f d\mu = \int f d\nu$ para toda $f \in L^+$.

Se ha demostrado en las clases teóricas los siguientes teoremas:

Teorema 2: Convergencia monótona Si f_n es una sucesión de funciones en L^+ que es monótona creciente μ -c.t.p, (y por lo tanto convergente μ -c.t.p. a la función $f = \sup_n f_n \in L^+$), entonces

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Teorema 2: Propiedades de la integración abstracta

- a) **Positividad:** $\int f d\mu \geq 0 \forall f \in L^+$ y es nula si y solo si $f = 0$ μ -c.t.p.
- b) **Definición μ -casi todo punto** Si $f = g$ μ -c.t.p. entonces $\int f d\mu = \int g d\mu$.
- c) **Linealidad:** Si $f, g \in L^+$ y si $c \in \mathbb{R}^+$ entonces $\int cf d\mu = c \int f d\mu$ y $\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
- d) **Aditividad numerable y continuidad absoluta:** Si $f \in L^+$ es una función dada fija, se define la aplicación $\nu_f : \mathcal{M} \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ mediante la integración de f en A respecto de μ , esto es:

$$\nu_f(A) = (\text{def}) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

Entonces ν_f es una medida (por lo tanto ν_f es sigma-aditiva) y además ν_f es absolutamente continua respecto de μ (esto es: $\nu_f(A) = 0$ si $\mu(A) = 0$).

Ejercicio 2: Encontrar un contraejemplo al recíproco de la parte b) del teorema anterior.

Ejercicio 3: Sea $f \in L^+$ y sea ν_f la medida definida por $\nu_f(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$. Probar que para toda $g \in L^+$ se cumple:

$$\int g d\nu_f = \int gf d\mu$$

(Sugerencia: La igualdad es válida para g función característica. Aplicar el teorema de inducción a L^+ y el teorema de convergencia monótona de la integral.)

4. Integración abstracta de funciones no negativas como integral de Lebesgue en la semirrecta real positiva.

El teorema 4 de esta sección da una definición alternativa de la integral abstracta de una función $f \in L^+$ respecto a cualquier medida μ en un espacio medible cualquiera $(X, \mathcal{M})$.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida cualquiera. Sea $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ una función cualquiera (medible) de $L^+(X)$. Se define $G_f : [0, \infty) \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ de la siguiente forma:

$$G_f(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t \quad \forall t \geq 0\}) = \mu(f^{-1}(t, \infty))$$

Considerando en la semirrecta real $[0, \infty)$, la sigma-álgebra de Lebesgue y la medida m de Lebesgue se obtiene que G_f es medible.

La integral de G_f respecto de la medida de Lebesgue en la semirrecta real positiva, iguala a la integral de f respecto a la medida μ en el espacio X . En efecto:

Teorema 4: Para toda $f \in L^+(X)$ se cumple:

$$\int_X f d\mu = \int_{[0, \infty)} G_f dm$$

Nota: La integral a la derecha es la integral impropia en el sentido de Riemann $\int_0^{+\infty} G_f(t) dt$

Demostración: La igualdad de la tesis se verifica si f es una función característica. Además, si f_1 y f_2 cumplen $f_1 f_2 = 0$ y ambas verifican la igualdad de la tesis, entonces la suma $f_1 + f_2$ también la verifica, y el producto cf_1 también, para toda $c \in \mathbb{R}^+$. Por el teorema de inducción a L^+ la igualdad es válida para toda $f \in L^+(X)$ como se quería demostrar. $\square$

5. Continuidad absoluta y cambio de variables en la integral.

Definición: Una medida $\nu : \mathcal{M} \mapsto \overline{\mathbb{R}}^+$ es *absolutamente continua respecto de μ* , denotándose $\nu \ll \mu$, si se cumple

$$\nu(A) = 0 \text{ para todo } A \text{ tal que } \mu(A) = 0$$

Nota: Más adelante en el curso se demostrará el Teorema de Radon- Nikodym, recíproco de la parte d) del teorema 3:

Si $\nu \ll \mu$ entonces existe una función $h \in L^+$ tal que $\nu(A) = \int_A h d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

Por lo tanto (ver ejercicio 3), $\nu \ll \mu$ si y solo si existe una función $h \in L^+$ tal que para toda $f \in L^+$ se cumple:

$$\int f d\nu = \int fh d\mu$$

Ejercicio 4: Sea el espacio X la recta real $\mathbb{R}$ (o el plano $\mathbb{R}^2$, o el espacio $\mathbb{R}^n$ o la circunferencia S^1), y sea m la medida de Lebesgue en X .

Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera del espacio. La medida δ_{x_0} , llamada Delta de Dirac concentrada en un punto $x_0 \in X$, está definida en todas las partes de X como $\delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$ y $\delta_{x_0}(A) = 0$ si $x_0 \notin A$.

- Probar que NO EXISTE ninguna función $h \in L^+$ tal que $\int \chi_A h dm = \delta_{x_0}(A) = \chi_A(x_0)$ para todo A Boreliano en X . (Sugerencia: Verificar primero que δ_{x_0} no es absolutamente continua respecto de m y aplicar el teorema de continuidad absoluta de la integral (parte d) del teorema 3).
- Probar que $\int \chi_E d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0) \quad \forall E \subset X \quad \forall x_0 \in X$
- Probar que $\int f d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall f \in L^+$ (Sugerencia: utilizar el teorema de inducción en L^+ del final de la sección 1 y el teorema de convergencia monótona de la integral).
- Concluir que la medida delta de Dirac concentrada en el punto x_0 puede definirse como la única medida δ_{x_0} tal que $\int f d\delta_{x_0} = f(x_0) \quad \forall f \in L^+$ y que no existe ninguna función $h \in L^+$ tal que $\int fh dm = f(x_0)$ para todo $f \in L^+$.

Definición del operador T^* en el espacio de medidas Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $T : X \mapsto Y$ una transformación medible, (es decir: $T^{-1}(E) \in \mathcal{M} \forall E \in \mathcal{N}$).

Dada la medida μ en $\mathcal{M}$, se define la nueva medida $T^*\mu$ en $\mathcal{N}$ como

$$(T^*\mu)(E) = \mu(T^{-1}(E)) \quad \forall E \in \mathcal{N}$$

Se tiene el siguiente teorema de cambio de variables:

Teorema 4 : Cambio de variable en la integral

Sean $(X, \mathcal{M})$ y $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $T : X \mapsto Y$ una transformación medible. Dada μ medida en $(X, \mathcal{M})$, se cumple lo siguiente:

a) $T^*\mu$ es la única medida en $\mathcal{N}$ que verifica

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, dT^*\mu \quad \forall f \in L^+(Y)$$

b) Sea $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N})$ y $T : X \mapsto Y$ medible. Si existe una función $h \in L^+$ que cumple $\mu(E) = \int_{T^{-1}E} h \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$, entonces μ es absolutamente continua respecto de $T^*\mu$ y para toda $f \in L^+$ se cumple:

$$\int f(y) \, d\mu(y) = \int f(T(x))h(x) \, d\mu(x)$$

c) Si μ no es absolutamente continua respecto de $T^*\mu$ entonces no existe $h \in L^+$ que cumpla la igualdad de la parte b).

Demostración: La igualdad de las integrales de la parte a) se verifica para las funciones características. Por el teorema de inducción a L^+ y por el teorema de convergencia monótona de las integrales (Teoremas 1 y 2), se verifica la parte a) para toda $f \in L^+$.

Para probar la continuidad absoluta de la parte b) consideremos la medida ν_h , definida como en la parte d) del Teorema 3. Se tiene $\mu(A) = \nu_h(T^{-1}(A))$. Como $\nu_h \ll \mu$, si $\mu(T^{-1}(A)) = 0$ se cumple $\nu_h(T^{-1}(A)) = 0$ y consecuentemente $\mu(A) = 0$ como se quería probar.

La igualdad de las integrales de f al final de la parte b) se deduce del teorema de inducción a L^+ y del teorema de convergencia monótona de las integrales.

Finalmente, el enunciado de la parte c) es el contrarrecíproco del de la parte b). $\square$

Ejercicio 4: Sea el espacio X la recta real $\mathbb{R}$ (o el plano $\mathbb{R}^2$, o el espacio $\mathbb{R}^n$ o la circunferencia S^1), y sea m la medida de Lebesgue en X .

■ Sea T una traslación en X . Demostrar que

$$\int f \circ T \, dm = \int f \, dm \quad \forall f \in L^+$$

(Sugerencia: la medida de Lebesgue m es invariante por T ; luego $T^*(m) = m$, y la igualdad se deduce del teorema de cambio de variable.)

■ Sea $x_0 \in X$ y sea $T : X \mapsto X$ la transformación constante $T(x) = x_0$ para todo $x \in X$. Verificar que $T^*m = \delta_{x_0}$ y entonces no existe $h \in L^+$ tal que para toda $f \in L^+$ se cumpla:

$$\int f(y) \, dm(y) = \int f(T(x))h(x) \, dm(x)$$

Nota: Existen en la recta transformaciones T continuas e invertibles tales que m no es absolutamente continua respecto de T^*m .

Corolario del teorema 4: Invariancia de medidas e integrales.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medida y sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible,

Una medida μ es invariante por T (es decir: $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E) \forall E \in \mathcal{M}$) si y solo si

$$\int f \circ T d\mu = \int f d\mu \quad \forall f \in L^+$$

Demostración: Por definición del operador T^* , la medida μ es invariante por T si y solo si $T^*(\mu) = \mu$. Aplicando el teorema de cambio de variables (y la observación de que dos medidas son la misma si y solo si son iguales las integrales de toda $f \in L^+$ respecto a ambas), se obtiene la tesis de este corolario.

6. Aplicaciones a la Probabilidad.

Sea Ω un conjunto no vacío cualquiera llamado *espacio muestral* .

Sea $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ una función dada, cualquiera que tome valores reales no negativos.

Sea en $\mathbb{R}^+$ la sigma-álgebra de Borel (que denotaremos en esta sección con $\mathcal{B}$), y sea p una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$, es decir una medida tal que $p(\mathbb{R}^+) = 1$.

La pareja (X, p) se llama *variable aleatoria (real no negativa)*.

Dado $B \in \mathcal{B}$, el subconjunto $X^{-1}(B) \subset \Omega$, preimagen por X de $B \subset \mathbb{R}^+$, se denota como:

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\}$$

En Ω sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los subconjuntos que son preimagen por X de algún boreliano $B \in \mathcal{B}$. Es fácil verificar que esa colección es una sigma álgebra.

Con esta construcción, la función X es medible del espacio $(\Omega, \mathcal{M})$ al espacio $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$.

7. Aplicaciones a la Teoría Ergódica de los sistemas dinámicos.

Sea ahora

Ejercicio 12.

Sugerencia:

FE DE ERRATAS del Complemento al práctico 3.

Las correcciones están en **azul**.

Ejercicio 1. Teorema de inducción a L^1 . Hipótesis H2.

Donde dice

" $af+bg$ para todos a,b en R ",

debe decir

" $af+bg$ para todos a,b **en C** ".

Ejercicio 7. Límite débil estrella de medidas

Donde dice

"Sea X un espacio métrico cualquiera"

debe decir

"Sea X un espacio métrico **compacto**"

Donde dice:

"Una sucesión de medidas de Borel ν_n "

debe decir

"Una sucesión de medidas **de probabilidad** ν_n en el espacio medible de Borel (X, B) "

En el penúltimo ítem del ejercicio 7, parte d)

donde dice:

"Verificar que dado x_0 en $(0,1]$ la sucesión de puntos (llamada órbita por x_0).. "

debe decir:

"Dado x_0 en **$[0,1]$** se llama órbita por x_0 a la sucesión de puntos .."

Donde dice:

"cumple $\nu_n(\{o_{x_0}\}) = 1$ y $\nu(\{o_{x_0}\}) = 0$ "

debe decir:

"Verificar que se cumple $\nu_n(\{o_{x_0}\}) = \nu(\{o_{x_0}\}) = \mathbf{0}$ para todo **x_0 en $(0,1]$** "

Faltó decir además:

" $\nu_n(\{y \text{ perteneciente a } \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \text{ en } (0,1]\}) = 1$

$\nu(\{y \text{ perteneciente a } \{o_{x_0}\} \text{ para algún } x_0 \text{ en } (0,1]\}) = 0$ "

Introducción al Análisis Real. Curso 2003.

DERIVACIÓN DE MEDIDAS.

Complemento teórico y ejercicios adicionales al práctico 5.

Eleonora Catsigeras, 8 de junio de 2003.

VARIABLES ALEATORIAS, VALOR ESPERADO Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En lo que sigue $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, es decir un espacio de medida que cumple $\mu(\Omega) = 1$.

Definición: Se llama *variable aleatoria* a cualquier función **medible** $Z : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Las partes real e imaginaria de Z son variables aleatorias con recorrido real. Desarrollaremos la teoría para variables aleatorias reales. Las propiedades que sean cerradas en combinaciones lineales con coeficientes complejos (por ejemplo propiedades que se refieran a la integración respecto de la probabilidad μ), serán también válidos para las variables aleatorias complejas.

Definición: Se llama *variable aleatoria real* a una función medible $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, es decir, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$ se cumple:

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\} \in \mathcal{M}$$

Si Y es una variable aleatoria real, entonces está definida, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$, la probabilidad μ del subconjunto de Ω preimagen por Y de B .

Definición: Se llama *distribución de probabilidad de la variable aleatoria Y* a la probabilidad p_Y de Borel en la recta real definida, para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$ por la igualdad siguiente:

$$p_Y(B) = \mu(Y^{-1}(B)) = \mu\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$$

También se llama *distribución de probabilidad de Y* a la completación de la medida p_Y . Como para toda medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita en conjuntos acotados, la completación de p_Y (que denotaremos como $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_Y, p_Y)$), es un espacio de medida de Lebesgue-Stieljes en la recta real, y goza de las propiedades (por ejemplo las de regularidad) demostradas para todas ellas. La sigma-álgebra $\mathcal{L}_Y$ contiene a $\mathcal{B}$, sigma-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.

En lo que sigue denotaremos $\{Y \in B\}$ al subconjunto en Ω , preimagen por Y , del boreliano B . En particular por ejemplo, si Y es real, para todo $a \in \mathbb{R}$ la notación $\{Y \leq a\}$ indica al conjunto $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\}$. Si Y es compleja, para todo $a \in \mathbb{C}$ la notación $\{Y = a\}$ indica al conjunto $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = a\}$.

En lo que sigue, m denotará la medida de Lebesgue en la recta, y la integral de una función compleja $h \in L^1(m)$ se denotará de cualquiera de las siguientes formas:

$$\int h \, dm = \int_{\mathbb{R}} h \, dm = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dx$$

La integral de una función compleja $h \in L^1(p_Y)$ respecto a la probabilidad de Lebesgue-Stieljes p_Y en la recta real, se denotará de cualquiera de las siguientes formas

$$\int h \, dp_Y = \int_{\mathbb{R}} h \, dp_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dp_Y(x)$$

Ejercicio 1

(a) Demostrar que para toda $h \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y para toda $h \in L^1(p_Y)$, la función $h \circ Y : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ pertenece a $L^1(\mu)$ y se cumple:

$$\int_{\Omega} h \circ Y \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \, dp_Y(x)$$

(b) Demostrar que si la variable aleatoria real Y es μ -integrable (es decir $Y \in L^1(\mu)$), o si es no negativa, entonces

$$\int_{\Omega} Y \, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dp_Y(x)$$

Definición

Si Y es una variable aleatoria real no negativa, o compleja y μ -integrable (es decir $Y \in L^1(\mu)$) se define *valor esperado* $E(Y)$ de Y al valor de la integral

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y \, d\mu$$

Según lo probado en la última parte del ejercicio anterior, se tiene

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dp_Y(x)$$

Ejercicio Verificar que si Y tiene recorrido finito $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathcal{C}$ (es decir Y es función simple), entonces

$$E(Y) = \sum_{j=1}^k a_j p_Y(\{a_j\}) = \sum_{j=1}^k a_j \mu(\{Y = a_j\})$$

Definición: Se llama Función de distribución F_Y de la variable aleatoria real Y , a la función $F_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F_Y(a) = p_Y((-\infty, a]) = \mu\{Y \leq a\} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

Nota: Más adelante se definirá variable aleatoria absolutamente continua, caracterizándola a partir de una función densidad $f_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, que coincide, Lebesgue c.t.p con la derivada de la función de distribución F_Y . Se demostrará que, para y solo para las variables aleatorias absolutamente continuas, integrar en $\mathbb{R}$ respecto a la medida de probabilidad p_Y es lo mismo que multiplicar por la función densidad f_Y e integrar respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. A partir de lo anterior resulta, solo para las variables aleatorias absolutamente continuas, la igualdad siguiente:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx$$

Propiedades de la función de distribución

Se observa, de la definición de función de distribución para cualquier variable aleatoria Y , que

$$p_Y((a, b]) = F_Y(b) - F_Y(a)$$

Por lo tanto la función de distribución de la variable aleatoria real Y es una función de distribución para la medida de Lebesgue- Stieljes p_Y en la recta. Fue demostrado en general para cualquier medida de Lebesgue- Stieljes en $\mathbb{R}$, que la función de distribución cumple las siguientes dos propiedades:

(i) F_Y es monótona creciente en sentido amplio.

(ii) F_Y es semicontinua por la derecha.

Además F_Y cumple ciertas propiedades adicionales, fáciles de demostrar a partir de que μ (y por lo tanto p_Y) es medida de probabilidad:

(iii) $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_Y(a) = 0$

(iv) $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_Y(a) = 1$

Es inmediato demostrar, a partir de (i) la siguiente propiedad importante:

(v) F_Y es una función de variación acotada en todo intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (ver definición más adelante).

Como toda función de variación acotada (ver Teorema más adelante) la función de distribución cumple además:

- (vi) F_Y es continua excepto a lo sumo en una cantidad numerable de puntos.
- (iv) F_Y es derivable Lebesgue c.t.p., es decir existe $F'(x)$ definido como límite del cociente incremental de F_Y en x para Lebesgue casi todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio:

Probar que existen variables aleatorias Y singulares, es decir que la función de distribución F_Y (aunque sea continua) no cumpla la tesis del teorema fundamental del cálculo, es decir, que existen a y b reales tales que $F_Y(b) - F_Y(a) \neq \int_a^b F'(x) dx$. (Sugerencia: Tomar F_Y igual a una función de Cantor).

FUNCIONES REALES DE VARIACIÓN ACOTADA Y MEDIDAS SIGNADAS

Definición: Una función $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es de variación acotada, si existe K real positivo tal que para toda **partición** finita de $[a, b]$ en intervalos $I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_k = [a_k, b_k]$ se cumple $\sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| < K$.

Ejercicio

(a) Demostrar que toda función real monótona (en sentido amplio) en el intervalo $[a, b]$ es de variación acotada.

(b) Demostrar que si $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es la diferencia de dos funciones crecientes (en sentido amplio) entonces F es de variación acotada.

(c) Demostrar que si $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es de variación acotada, entonces las discontinuidades de F son de salto finito, y que F tiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos de discontinuidad.

Teorema. Propiedades de funciones de variación acotada.

(a) $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función de variación acotada si y solo si F es la suma de una función creciente en sentido amplio con una decreciente en sentido amplio.

(b) Si $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función de variación acotada, entonces los puntos donde F es discontinua es a lo sumo numerable.

(c) Si $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces los puntos donde F no es derivable tiene medida de Lebesgue nula.

Demostración: Ver Folland, teorema 3.27. La parte c) de este teorema es la parte complicada de demostrar. En el libro de Folland la demostración requiere conocer varios resultados previos no vistos en el curso. Una demostración casi autocontenida y elemental, pero larga, puede encontrarse en Kolmogorov- Fomin: Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Editorial MIR, 1972, desde página 364, Propiedades de las funciones monótonas, hasta página 379 Derivada de la integral de Lebesgue.

Ejercicio: Verificar que las siguientes funciones son de variación acotada en todo intervalo acotado $[a, b]$, encontrar los puntos de discontinuidad, encontrar la derivada $F'(x)$ Lebesgue casi todo punto de cada una de ellas, y decidir si se cumple o no la igualdad

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx ?$$

- (a) $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ donde $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n) \chi_{[n, n+1)}(x)$
- (b) $F(x)$ es la función de Cantor (definida en el ejercicio 6 del práctico 3), para x el intervalo $[0, 1]$; $F(x) = F(1)$ para todo $x \geq 1$ y $F(x) = F(0)$ para todo $x \leq 0$.
- (c) $F(x) = \chi_{[0, +\infty)}$
- (d) $F(x) = x^2$

Sea $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Redefiniendo F en los puntos de discontinuidad, se puede asumir que F es semicontinua por la derecha. Por el teorema anterior, F es la diferencia de dos funciones crecientes en sentido amplio $F = F_1 - F_2$, cada una de ellas de variación acotada y por lo tanto, (después de redefinidas adecuadamente en los puntos de discontinuidad) semicontinuas por la derecha. De acuerdo a la caracterización de las medidas de Borel en la recta acotadas en intervalos acotados, existen (únicas dadas F_1 y F_2) las medidas de Borel ν_1 y ν_2 en $[a, b]$ que tienen a F_1 y F_2 como funciones de distribución. Por lo tanto, se obtiene el siguiente:

Teorema de caracterización de funciones de variación acotada como funciones de distribución de medidas signadas.

(a) Dada una función $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de variación acotada y semicontinua por la derecha, existen medidas de Borel ν_1 y ν_2 finitas en $[a, b]$ tales que

$$F(x) - F(a) = (\nu_1 - \nu_2)((a, x]) \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

(b) Además, dada F , la medida signada $\nu_1 - \nu_2$ (por definición “medida signada” de Borel es la aplicación que a cada boreliano le asigna el número real obtenido como la diferencia de dos medidas finitas de Borel) es la única que cumple la igualdad (I).

(Nota: Dada F no son únicas ν_1 y ν_2 que cumplen (I), sino que es única su diferencia, en el sentido de que otra pareja de medidas que cumplan la igualdad (I) es tal que su diferencia, para todo boreliano B , coincide con $(\nu_1 - \nu_2)(B)$

(c) Recíprocamente, dada una medida signada entonces existe, única a menos de una constante, la función F que cumple la igualdad (I). Además F es de variación acotada y semicontinua superiormente.

Ejercicio: Demostrar el Teorema anterior. Sugerencia: para la parte a) admítase que toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes en sentido amplio. Para la parte b) supóngase que $\nu_1 - \nu_2$ y $\mu_1 - \mu_2$ cumplen la igualdad (I), y demuéstrese que $\nu_1 + \mu_2$ y $\nu_2 + \mu_1$ son medidas (positivas) de Borel finitas que coinciden en todos los borelianos. Para la parte c) constrúyase F como la diferencia de las funciones de distribución de las medidas de Borel (positivas) finitas ν_1 y ν_2 .

Una clase especial de funciones $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de variación acotada son las “funciones absolutamente continuas”, según la siguiente definición:

Definición:

Una función $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es *absolutamente continua*, si para todo ϵ real positivo existe $\delta > 0$ tal que para toda **colección** finita de intervalos disjuntos dos a dos $I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_k = [a_k, b_k]$ contenidos en $[a, b]$ tales que $\sum_{j=1}^k |b_j - a_j| < \delta$ se cumple $\sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$.

Ejercicio: (a) Probar que toda función absolutamente continua en $[a, b]$ es continua y de variación acotada. (b) Encontrar un ejemplo de función de variación acotada que sea continua pero no absolutamente continua. (Sugerencia: la función de Cantor definida en el ejercicio 6 del práctico 3). (c) Considerar la medida de Borel finita $m(F(B))$, definida para todo boreliano $B \subset [a, b]$. Probar que $m(F(B)) = \int_B F' dm$ y deducir que si $B = \emptyset$ entonces $m(B) = 0$. Por absurdo, si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay una colección B_n de intervalos con medida menor que $1/2^n$, tales que la medida de $F(B_n)$ es mayor o igual que ϵ , considerar el boreliano $B = \bigcup_k \bigcap_n B_n$. Por construcción

Las funciones absolutamente continuas se caracterizan por la siguiente propiedad:

Teorema fundamental del cálculo Una función $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y solo si es derivable m- c.t.p. y su derivada $F'(x)$ cumple

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x) dx \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

Demostración:

Es un corolario de teoremas de derivación más generales, para medidas abstractas, como se verá a continuación.

CONTINUIDAD ABSOLUTA

Definición

(a) Dadas dos medidas (positivas) μ y ρ cualesquiera en un mismo espacio medible se dice que ρ es absolutamente continua respecto de μ (y se denota $\rho \ll \mu$), si $\rho(A) = 0$ para todo A medible tal que $\mu(A) = 0$.

(b) Dada μ medida (positiva) y ρ medida signada (finita) en el mismo espacio medible, se define continuidad absoluta de ρ respecto de μ de la misma forma que antes.

(c) Más en general, sea ρ una medida compleja, es decir, una aplicación tal que a cada conjunto medible E le hace corresponder el número complejo $\rho_1(E) + i\rho_2(E)$ donde ρ_1 y ρ_2 son medidas signadas (finitas). Dada μ medida (positiva) en el mismo espacio medible, se define continuidad absoluta de ρ respecto de μ de la misma forma que antes.

Es inmediato verificar que una medida compleja es absolutamente continua respecto de μ si y solo si sus partes real e imaginaria lo son. Por otra parte una medida signada es una medida compleja que tiene parte imaginaria nula. (Nota: En el libro de Folland se usa otra definición de medida signada, admitiendo que puedan tomar valores infinitos. Con la definición de Folland las medidas signadas no son casos particulares de medidas complejas.)

Ejercicio: Sea un espacio de medida (positiva) $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(a) Dada $f \in L^+$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida (positiva) en el mismo espacio medible, y que $\rho \ll \mu$.

(b) Dada una función real $f \in L^1(\mu)$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida signada en el mismo espacio medible, y que $\rho \ll \mu$.

(c) Dada una función compleja $f \in L^1(\mu)$, demostrar que la aplicación

$$\rho(E) = \int_X f \, d\mu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$ define una medida compleja en el mismo espacio medible, y que $\rho \ll \mu$.

El ejercicio anterior muestra un procedimiento para construir medidas absolutamente continuas respecto de μ : integrar funciones dadas respecto de esa medida. El siguiente Teorema, prueba que ese procedimiento permite construir todas las medidas absolutamente continuas posibles, cuando éstas son finitas o sigma-finitas.

Teorema de Radon-Nikodym

(a) Si ρ y μ son dos medidas (positivas) sigma-finitas en un mismo espacio medible entonces $\rho \ll \mu$ si y solo si existe una función real medible no negativa $f \in L^+$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E . La función f es única μ -c.t.p.

(b) Si ρ es una medida signada (finita) y μ una medida (positiva) sigma-finita en un espacio medible, entonces $\rho \ll \mu$ si y solo si existe una función real $f \in L^1(\mu)$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E . La función f es única μ -c.t.p.

(c) Si ρ es una medida compleja (finita) y μ una medida (positiva) sigma-finita en un espacio medible, entonces $\rho \ll \mu$ si y solo si existe una función compleja $f \in L^1(\mu)$ tal que

$$\rho(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo conjunto medible E . La función f es única μ -c.t.p.

Demostración: Ver Folland, Teoremas 3.8 y 3.12

El siguiente teorema relaciona las funciones reales de variable real absolutamente continuas con la continuidad absoluta respecto a la medida de Lebesgue en la recta de las medidas de Borel acotadas en intervalos acotados.

Teorema: Caracterización de medidas de Borel absolutamente continuas en la recta.

Sea ν una medida (positiva) de Borel finita en intervalos acotados de $\mathbb{R}$ (o también ν una medida signada finita en los borelianos de $\mathbb{R}$) y sea F una función de distribución de ν , es decir: $F(b) - F(a) = \nu((a, b])$ para todos $a \leq b \in \mathbb{R}$.

La medida ν es absolutamente continua respecto a la medida m de Lebesgue en $\mathbb{R}$ ($\nu \ll m$) si y solo si la función F es absolutamente continua en todo intervalo $[a, b]$ acotado de $\mathbb{R}$.

Demostración:

Tomando parte positiva y negativa de F , basta asumir que F es no negativa, y por lo tanto μ es una medida positiva.

Si F no fuera absolutamente continua, existiría $\epsilon > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría una colección B_n finita de intervalos disjuntos en $[a, b]$ tales que $m(B_n) \leq 1/2^n$ y $\nu(B_n) \geq \epsilon$. Considerando el boreliano $B = \bigcap_k \bigcup_{n \geq k} B_n$ resulta $m(B) = 0$ y $\nu(B) \geq \epsilon$ lo que contradice la continuidad absoluta de ν respecto de m .

Recíprocamente si ν no fuera absolutamente continua respecto de m , entonces existiría un boreliano B contenido en algún intervalo acotado $[a, b]$ con $m(B) = 0$ y $\nu(B) = \epsilon > 0$. Para todo $\delta > 0$, el boreliano B se puede cubrir con una unión finita U de intervalos abiertos disjuntos (a_j, b_j) , $1 \leq j \leq k$ tales que $m(U) \leq \delta$. Pero $\nu(\bigcup_j (a_j, b_j]) \geq \nu(U) \geq \nu(B) = \epsilon$, y por lo tanto $\sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| \geq \epsilon$ contradiciendo la continuidad absoluta de la función F .

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria real Y se llama *absolutamente continua* si su distribución de probabilidad p_Y en $\mathbb{R}$, (definida como $p_Y(B) = \mu(Y \in B)$ para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}$), es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue m en la recta.

Ejercicio:

(a) Demostrar que una variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución $F_Y = \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua. (Sugerencia: es el teorema de caracterización de medida de Borel acotadas absolutamente continuas.

(b) Probar, usando el Teorema de Radon- Nikodym, que una variable aleatoria real Y es absolutamente continua, si y solo si existe una función $f_Y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ real no negativa tal que

$$p_Y(B) = \mu(\{Y \in B\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_B(x) f_Y(x) dx \quad \text{para todo Boreliano } B \subset \mathbb{R}$$

(c) La función f_Y (de la parte anterior) se llama *densidad* de la variable aleatoria. Probar que $f_Y \in L^1(m)$ y que f_Y es única m -c.t.p.

(d) Deducir que la variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución F_Y cumple

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^a f_Y(x) dx \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

(e) Probar que la variable aleatoria real Y es absolutamente continua si y solo para toda función medible $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ real no negativa, y para toda función $h \in L^1(m)$ (Lebesgue integrable) se cumple:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dp_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_Y(x) dx$$

(f) Deducir que si la variable aleatoria real Y es no negativa, o si es μ integrable ($Y \in L^1(\Omega, \mu)$), entonces su valor esperado es:

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x dp_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx$$

(g) Usando el teorema fundamental del Cálculo probar que la variable aleatoria Y es absolutamente continua si y solo si su función de distribución F_Y cumple:

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^a F'(x) \, dx \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

y que en ese caso la derivada $F'(x)$ es igual a la densidad m -c.t.p.