

Para la Biblioteca de la Facultad

APARTADO DEL

"BOLETÍN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE MONTEVIDEO"

N.º 7

La estática experimental de las estructuras

POR

PROF. ING. JULIO RICALDONI

*No 14701
18 febrero
1939.*

MONTEVIDEO

1939

La estática experimental de las estructuras (1)

PARTE I

CAPITULO I • INTRODUCCION

1) — Cuando una ciencia ha llegado a un grado tal de desarrollo como para constituir por sí misma una especialización completa y por lo tanto de exigir la total dedicación de las energías del que la cultiva, se hace necesario sacarle a los conocimientos sobre los que se apoya, el carácter de problemas capaces de desviar la atención del fin primordial de la investigación, para permitir así el estudio más a fondo de los conceptos e ideas directrices. La técnica de la construcción ha llegado precisamente a ese punto, debido a que la complejidad y magnitud de las obras que se emprenden, significan primero que todo, problemas de *concepción* y de *creación*, pasando los problemas de cálculo a ser una segunda etapa cuyas dificultades no deben limitar nunca los principios directivos; desde el punto de vista de la *filosofía de la técnica* como la llama CARDELLACH, se hace necesario *metolizar* y *mecanizar el cálculo de las estructuras*.

Por otra parte, y al mismo tiempo, el problema económico influye en forma cada vez más intensa sobre la construcción. Es indispensable pues reducir los elementos componentes hasta donde sea posible, llevando al máximo el aprovechamiento de las ventajas que presentan los nuevos materiales y la especialización creciente de la mano de obra. Estos factores exigen pues la utilización de estructuras con un rendimiento que tienda a la unidad, ya sea gracias a un dimensionado de los detalles con una gran exactitud, ya sea empleando diseños tales de conseguir una repartición lo más uniforme que se pueda entre todos los elementos que la componen, de manera de favorecer los elementos más solicitados por la colaboración con los elementos que lo son menos.

Es decir que, desde el punto de vista de la *economía de la construcción* el problema que se presenta actualmente es obtener la *homogeneidad* y la *continuidad del complejo estructural*, en sus detalles y en el conjunto.

La necesidad de satisfacer estas dos aspiraciones ha sido la causa del nacimiento y del rápido desarrollo de los métodos de cálculo experimentales, que, por lo tanto, no constituyen una rama aislada de la técnica de las estructuras sino que, y no creo dejarme llevar por un criterio parcial, debe llegar a constituir un capítulo fundamental e indispensable de su estudio.

Los ejemplos que apoyan esta afirmación se pueden encontrar en gran número, pero quizás no pueda presentarse uno tan categórico, especialmente por tratarse de un caso de colaboración de todos los métodos experimentales sin excepción, como el de la utilización de la soldadura autógena para la construcción de estructuras metálicas. Es, en efecto, muy fácil comprobar, recorriendo las publicaciones técnicas de estos últimos años, la enorme cantidad de estudios experimentales que se están ejecutando sobre las uniones soldadas, en sí mismas, por medio de la fotoelasticidad, las auscultaciones tensométricas, los modelos plásticos y los ensayos estáticos y de fatiga, y también sobre su influencia en los esquemas estáticos, llevados a la continuidad, por medio de modelos elásticos y métodos de cálculo mecánicos.

Los métodos experimentales de cálculo contribuirán por lo tanto a pasar a una nueva etapa de la utilización de las estructuras, en la cual se habrán independizado de todos los procesos anteriores que han ido dejando prejuicios y costumbres adquiridas, acumuladas unas sobre otras: llegaremos así a abandonar el aislamiento resistente y las discontinuidades de los sistemas rígidos que se heredaron, a través de la antigua Roma, de las civilizaciones egipcias y fenicias del segundo o tercer milenio antes de Jesucristo, y la complicación y vaguedad de esos bosquejos de barras de al-

(1) Un resumen de este trabajo fué el tema de un cursillo dictado en la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario (R. Argentina) durante los días 3, 4 y 5 de Agosto de 1938, como iniciación del intercambio entre las Facultades de Rosario y Montevideo. Ese resumen aparecerá simultáneamente en la serie de Conferencias de publicaciones de aquella Facultad.

gunos sistemas triangulados de acero en los que se reconoce la construcción en madera cuyos principios no han variado notablemente desde que se construyeron las terrazas de Persépolis y las más recientes arcadas indias. Nuestros materiales actuales, acero y hormigón armado, son capaces de la continuidad física y geométrica, y su aptitud para desprenderse, sin mengua de la economía, de la línea potencial de las cargas, gracias a su biresistencia, permiten las realizaciones más audaces. La teoría y la experiencia lo conseguirán sin duda alguna.

2) — Antes de dejar este aspecto general del tema que se trata debo referirme a otra ventaja de los métodos experimentales, que no por alejarse de su aplicación práctica, carece de importancia fundamental, y que es su aplicación a la enseñanza. Los métodos experimentales constituyen el medio de darle realidad y permitir la visualización de los fenómenos resistentes; el aspecto físico de estos se pierde generalmente entre el complicado andamiaje matemático que, aunque necesario, es muchas veces exagerado y llevado al lugar de preferencia.

Como consecuencia la resistencia de materiales, o la estabilidad de las estructuras, se convierte en una ciencia abstracta y exacta, una ciencia en la que no hay discontinuidades ni incertidumbres, cuando en realidad es una ciencia de aplicación que solo tiene valor en cuanto no se separa de la experiencia y que vive controlada y limitada por esta.

Aunque no se acepte por completo el conocido criterio de BOUASSE, indudablemente exagerado, sobre los peligros de la enseñanza matemática de las ciencias físicas, no hay duda que cuando escribe que "la abstracción, generalización, horror de lo real y del caso particular son las características del matemático y las razones de su nefasto rol cuando se mezcla de profesar las ciencias experimentales y las matemáticas encaradas como un útil", pone en evidencia un hecho innegable: la resolución de un problema físico es algo más que la solución de una ecuación, es ante todo la interpretación de un fenómeno que tiene existencia real y que como tal es necesario hacer primero un estudio de conceptos. Esto es precisamente lo que se obtiene con el exámen viviente de las estructuras que permiten los modelos de estructuras.

3) — Al comienzo de la utilización de las estructuras, en que se buscaba simplemente la esta-

bilidad de la obra sin preocuparse en absoluto de la economía y que las necesidades eran pequeñas, la ciencia de la construcción era completamente empírica: la ciencia de la construcción se basaba en la *experiencia* para la solución de los problemas nuevos. Era pues el estudio experimental limitado, de acuerdo con los medios, a la obra en su conjunto, sin análisis de detalle, y hecho sobre las mismas obras a emplear. Una misma construcción se rehacía, con modificaciones indicadas por el ensayo anterior, tantas veces como era necesario para llegar al fin. Y en esa forma se iban acumulando *hechos*; no se fabricaban teorías, de manera que el método experimental quedaba limitado estrictamente al conjunto estructural al que se aplicaba, sin poder sacar de allí conclusiones generales.

Tal fué el procedimiento que utilizaron los arquitectos de las bóvedas y cúpulas del Renacimiento o los ingenieros de los puentes romanos.

Los principios del método experimental para el estudio de las estructuras, en el concepto que merece actualmente, puede decirse que aparecieron simultáneamente con las primeras investigaciones teóricas sobre la Resistencia de los Sólidos.

Se ha establecido que se debe a GALILEO los primeros estudios sobre esta ciencia, puesto que en uno de sus diálogos (1638) discute el problema de una viga empotrada sometida a flexión, y también, ya entonces, piensa en utilizar modelos para tales estudios, aunque le corresponde a NEWTON a fines de ese siglo, el honor de establecer los principios fundamentales de su aplicación.

Es también en la segunda mitad del siglo XVII que aparecen los trabajos fundamentales de HOOKE y MARIOTTE, y los de BERNOUILLI, EULER, COULOMB y otros en el siglo siguiente, conjuntamente con las primeras experiencias sobre dichos temas. Estas, sin embargo, iniciadas por el físico sueco WURTIUS (aproximadamente en 1650) y por el mismo HOOKE en 1680, destinadas a verificar o investigar las características mecánicas de los materiales, pertenecen más bien al campo actual del Ensayo Mecánico de Materiales. En cambio las experiencias de DUPIN en 1811 sobre piezas en madera y de DULEAU en 1813 sobre piezas de hierro sometidas a flexión, parecerían ser los primeros trabajos experimentales de *control de teorías resistentes* o de repartición de tensiones: se estaría pues dentro del concepto moderno de

cálculo experimental, ya que esas investigaciones se referían a la existencia de fibras comprimidas y alargadas (negada por GALILEO y otros), del eje neutro, de la conservación plana de las secciones, etc.

Poco después que NAVIER, en 1821, presenta sus Memorias sobre las ecuaciones fundamentales de elasticidad, poniendo así la piedra fundamental de la teoría matemática, y que él mismo en 1824, y DE SAINT - VENANT en 1838 dan solución a los primeros casos de estructuras hiperestáticas, (vigas rectas con empotramientos o sobre varios apoyos, y estructuras reticuladas superabundantes respectivamente), se realizan los primeros estudios experimentales sobre *estructuras complejas*.

De entre ellas, generalmente constituídas por el control de puentes, merece destacarse a nuestros fines las investigaciones realizadas en 1845 por STEPHENSON para la construcción de los puentes sobre el estrecho de Menai (el célebre puente Britannia) y sobre el río Conway. En esa ocasión, en efecto, se utilizó por vez primera un *modelo a escala reducida* de la estructura, que fué, por su forma y dimensiones, viga de alma llena tubular con pasaje interior, de 90 y 100 metros de luz, una obra extraordinaria. Sobre el modelo, construido con una escala de 1/6, se hicieron sucesivas cargas hasta la rotura, modificando las disposiciones constructivas de acuerdo con los resultados, y también al final algunas medidas de flechas elásticas. Los medios existentes no permitían aún una verdadera auscultación de tensiones.

A partir de esta iniciación no es fácil seguir la historia y la evolución del estudio experimental sobre modelos de estructuras, debido a las escasas referencias de un asunto que, sin embargo, sería de enorme interés.

Lo que es indudable es que su utilización intensiva para la determinación de la repartición de tensiones, como modelo elástico, no ha podido hacerse con cierta precisión hasta la última década del siglo pasado. En efecto; la medida de la *deformación* local de un cuerpo bajo tensiones fué resuelta, dentro de ciertos límites, mucho tiempo después que la medida de los *desplazamientos*, utilizada ya en 1845 como se vió recién, debido a la magnitud de los desplazamientos a medir.

Pertenece al francés DUPUY el primer intento de resolver dicho problema por medio de un aparato presentado a la exposición de Viena de 1873, en el cual la base mínima de medida era igual a

1 metro y la amplificación, obtenida por medio de palancas, alcanzaba a 20: en esas condiciones parece que el error máximo estaba entre 1/10 y 1/20 de la lectura correspondiente al trabajo máximo del material. En la figura 1 se reproduce de la memoria original (B. 3) el plano de este tensómetro.

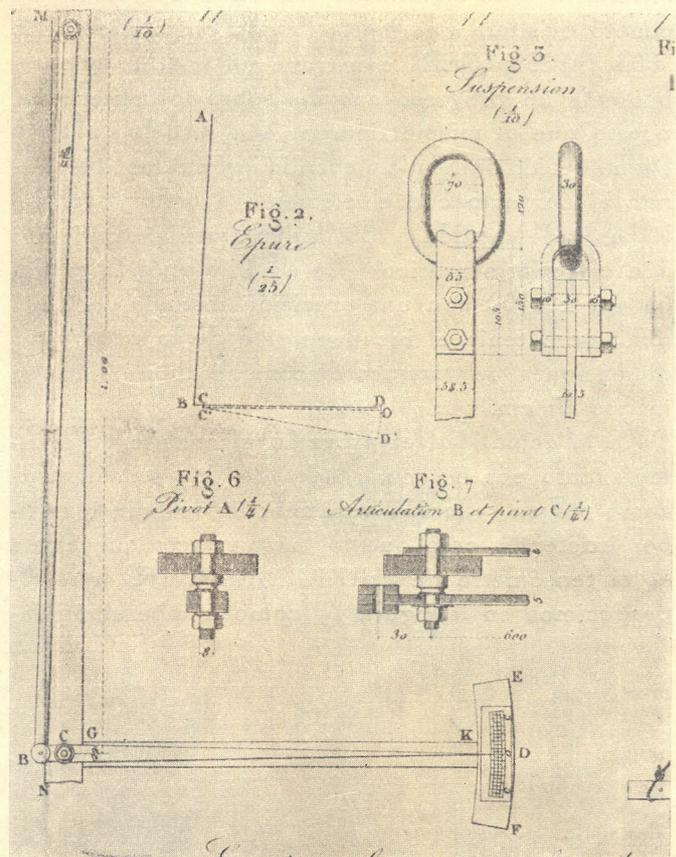


Fig. 1

A partir de este momento se obtienen sucesivos perfeccionamientos en los dispositivos de medida de los desplazamientos, lo que permite, al mismo tiempo que aumentar la exactitud, disminuir la base mínima de medida, condición indispensable para un estudio detallado. Aparecen así posteriormente el aparato de MANET (aproximadamente en 1890), que sustituye la aguja de DUPUY por un sistema de engranajes y consigue llevar la amplificación a 1 x 60, pero manteniendo la base de 1 metro; el MANET - RABUT - MANTEL en 1895 (y el de USTERRI muy semejante) en el cual combinando el engranaje con una segunda palanca se consigue una amplificación de 1 x 450, con lo cual puede utilizar una base de 20 centímetros. Es también de esta época el tensómetro de SCHREDER VAN DER KOLK y VIST con

una amplificación de 1 x 150 pero con la notable característica de ser registrador

Sin embargo todos estos aparatos tenían como defecto común el que, debido a sus dispositivos de aplicación, la medida se efectuaba entre dos puntos distantes de la superficie de la pieza en cambio de hacerlo entre dos puntos de la superficie misma, lo que significaba un error apreciable en cuanto existiera una cierta flexión en la pieza. En 1903 MESNAGER construye un aparato que representa un progreso enorme sobre los anteriores, puesto que al mismo tiempo que resuelve el problema recién indicado llevando las puntas del aparato al contacto con el elemento a medir, reduce la base de medida a 50 milímetros, permitiendo aún el registro gráfico. La amplificación alcanzaba a 1 x 1100 con una precisión máxima de 0.001 mm., pero tenía el inconveniente de su peso y sus dimensiones relativamente considerables (más o menos 10 cm. por 20 cm.)

En la actualidad el progreso alcanzado es enorme, tanto por las cualidades de los tensómetros como por su reducido volumen; de los diversos tipos existentes creo que lo más perfecto que existe es el tensómetro de HUGGENBERGER, que reproducimos en la figura 2 como comparación in-

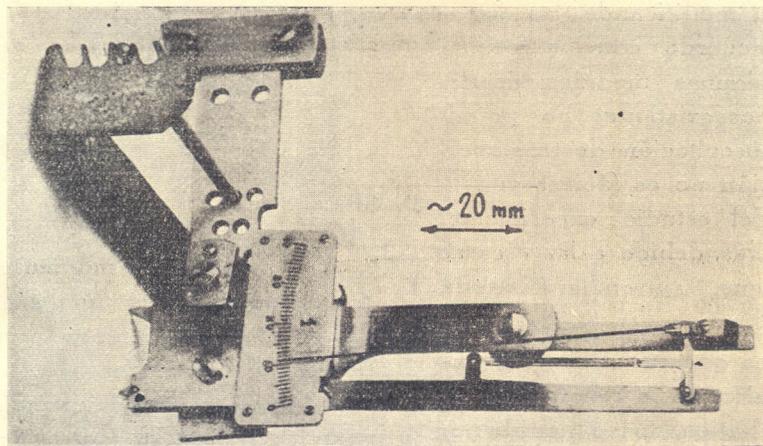


Fig. 2

teressante con el de DUPUY. Las características de un modelo corriente de estos aparatos, basados en la amplificación por medio de dos sistemas de palancas sucesivas y con indicación directa de una aguja sobre un cuadrante, son las siguientes:

- Dimensiones: 16.5 x 5.2 x 2.0 cm.
- Amplificación: 1 x 1200.
- Base mínima: 1.0 cm.

Además de este tipo de tensómetros de lectura directa, existen actualmente otros tipos para lectura a distancia y que son indispensables para estudiar las tensiones en lugares de difícil o imposible acceso como los puntos del interior de un macizo de hormigón, basados en la transmisión eléctrica de fenómenos magnéticos, electrostáticos o acústicos. Su detalle nos llevaría muy lejos; en la obra de BAES (B. 5) se hace una descripción detallada de ellos, de manera que ahora solo notaremos el empleo extensivo que se ha hecho de uno de ellos en la investigación que efectúa la "Steel Structures Research Committee" (B. 6,7) sobre la continuidad real de los sistemas remachados. Las características de estos tensómetros MAIHAK, que utilizan la propiedad de que si se hace vibrar una cuerda de acero tendida entre dos puntos la nota emitida es función directa de la tensión que soporta, son las siguientes (figura 3):

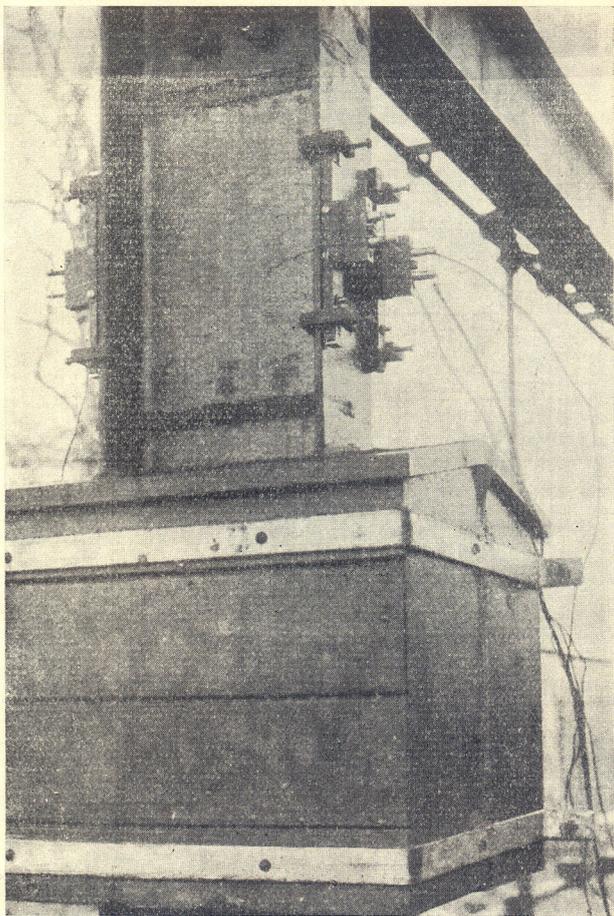
- Base de medida: 12 a 15 cm.
- Aproximación normal (en el acero): 5 a 7 k/cm.²
- Capacidad total (en el acero); 5000 k/cm.².

También hay que hacer mención de otro tipo de extensómetro destinado más bien a la medida

de la variación del espesor de los cuerpos, especialmente empleados como complemento a los estudios fotoelasticimétricos. A estos pertenece el latómetro de MESNAGER, que utiliza las franjas de interferencia por la separación de dos cristales de caras paralelas unidos a los puntos cuyo movimiento relativo se desea medir, y el latómetro de COKER que emplea con el mismo objeto una palanca amplificadora que trasmite la variación de

espesor a un espejo sobre el que incide un haz luminoso, midiéndose los desplazamientos del haz reflejado sobre una regla graduada.

La precisión de medida de estos aparatos se aprecia con decir, por ejemplo, que el latómetro de COKER tiene una amplificación de $1 \times 10\,000$ y que sobre un ejemplar de 6 mm. de espesor permite medir un desplazamiento relativo de dos



puntos igual a 0.0001 mm con un error máximo probable de 1 %.

Dentro de la categoría de cálculo experimental que se está considerando ahora, modelos completamente similares al prototipo bajo la acción de cargas exteriores, sería imperdonable no indicar una realización muy poco conocida pero de verdadero valor. Más o menos a fines del siglo pasado o primeros años del actual, el arquitecto catalán GAUDI, figura interesantísima de artista y técnico, empleó un método de cálculo, o más propiamente de diseño, completamente original, para el estudio estructural de la Iglesia del Sagrado Corazón en Barcelona y otras obras análogas. Los edificios citados tienen

una estructura portante de mampostería ideada en un principio muy semejante al del estilo gótico, es decir que en cambio de absorber los empujes de arcos y bóvedas por medio de grandes macizos, los manejaba y dirigía hacia las fundaciones gracias a un trazado adecuado del eje longitudinal de los elementos de soporte, que siguiera la curva de presiones.

Aprovechando entonces lo que podríamos llamar la "analogía del polígono funicular", GAUDI invertía simplemente los signos de los esfuerzos, cambiando las compresiones por extensiones y las cargas de gravedad por cargas dirigidas hacia arriba: en esa forma representando en el modelo los ejes longitudinales de los elementos con hilos, y aplicándole a estas cargas semejantes enteramente a las reales (pero de signo invertido), tomarán los hilos, la forma del polígono de equilibrio, que a su vez será la forma que deberá tener el eje longitudinal de los elementos. En la figura 4 se reproduce uno de los modelos construídos por GAUDI, que demuestra las concepciones técnicas y plásticas de dicho arquitecto.

Este procedimiento no es de importancia tan limitada ni de aplicación en sistemas en desuso como podría parecer; en efecto, puede aplicarse a todo ese nuevo tipo de *estructuras superficiales* que dieron actualidad las bóvedas delgadas de ZEISS-DYWIDAG, y que también se han realizado en láminas delgadas de acero con el nombre de *superficies autoportantes*, en las cuales se somete el material únicamente a compresión simple en el primer caso, o a extensión simple en el otro. Para su utilización no habrá más que sustituir en el modelo los hilos por papeles o telas: es el cambio del arco por la bóveda, del cable suspendido por el "velarium".

El desarrollo actual de la Estática Experimental con empleo de modelos de grandes dimensiones y con medida de deformaciones o desplazamientos que hemos visto hasta ahora, es muy grande. Su enumeración y descripción escapa al alcance de esta nota en que se ha querido solamente esbozar el proceso histórico, puesto que el estudio con este tipo de modelos no ha sido aún emprendido por el Laboratorio. En la interesante obra de OBERTI (B. 8) que utilizaré más adelante muchas veces, se encuentra una descripción y bibliografía del asunto muy completa.

4) — La fotoelasticimetría, que puede considerarse una subdivisión del método anterior, es, des-

de el punto de vista práctico, de origen muy reciente. Aunque la doble refracción accidental es conocida desde hace más de cien años, puesto que BREWSTER realizó las primeras observaciones en 1815 a 1820, recién a fines del siglo pasado fué utilizado como control de las tensiones en los cuerpos por WILSON y KERR, y un poco después, en 1901, por MESNAGER.

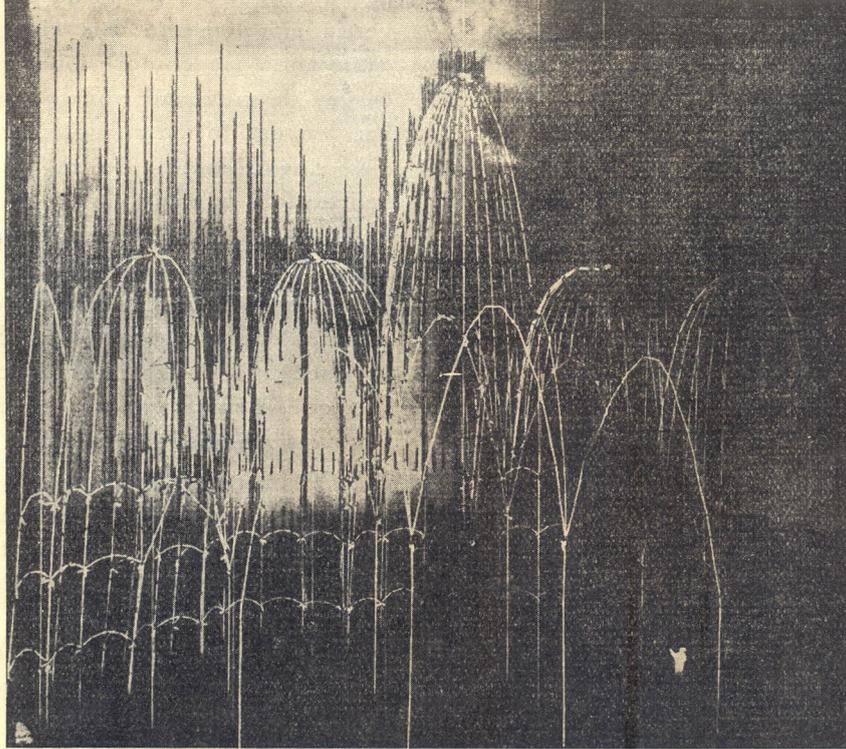


Fig. 4

Pero fué el mismo MESNAGER el que, algunos años más tarde, en 1913, dió los medios completos para su utilización técnica, iniciándola magníficamente con un estudio completo de verificación de un puente en arco sobre un modelo de vidrio. A partir de ese momento y mediante los trabajos teóricos y experimentales de MESNAGER, COKER y FILON, esta ciencia tomó un vuelo admirable permitiendo el estudio más exacto de las tensiones, que se ha obtenido hasta ahora.

5) — La historia del *cálculo mecánico* por el método de las distorsiones y las deformaciones es aún más corta. Los propósitos perseguidos con su creación han sido, más que su aplicación a la investigación, al estudio de estructuras excepcionales o de estructuras-tipo, los de disponer de un método mecánico de cálculo de estructuras

normales, adaptable a la rutina del ingeniero proyectista, y presentando por lo tanto como características:

- Simplicidad de manejo
- Costo relativamente pequeño
- Reducción casi absoluta de los cálculos numéricos.

El factor determinante, sin duda alguna, fué la

utilización día a día más general de las estructuras continuas; como lo vimos en el primer artículo la época actual es la de los sistemas elásticos con utilización de materiales biresistentes. Pero, al principio, el único material adaptable era el hierro: los medios de unión eran los pernos de articulación o los remaches. Aunque aquellos, especialmente en Estados Unidos, se trató de aplicarlos corrientemente como medio de unión de los elementos de las estructuras trianguladas, para realizar así la articulación teórica de los esquemas, poco a poco ha ido desapareciendo debido a una serie de consideraciones teóricas y prácticas que no hay por qué analizar aquí, limitándose su empleo a las articulaciones de apoyo o de enlace de las diversas partes de la estructura.

Quedó así como medio de unión de los elemen-

tos de estructuras elásticas el remachado, medio eminentemente deformable, aunque solo parcialmente elástico, e incapaz por lo tanto de realizar una verdadera continuidad si no era gracias a complicaciones técnicas y económicas bastante grandes.

Se hubiera seguido en esas condiciones si no aparece un nuevo material y sistema constructivo, también biresistente pero que posee en cambio como cualidad intrínseca el de la continuidad: el hormigón armado. Sus posibilidades fueron apareciendo poco a poco a la luz de las investigaciones teóricas y experimentales actuando simultáneamente: los técnicos descubrían horizontes imprevistos para la economía y rigidez de la estructura en esa continuidad inherente, que no solo insinuaba sino que imponía sus virtudes. Desconocerla es no solo antieconómico sino también peligroso debido a la trasposición de los puntos críticos.

Transportadas así las estructuras continuas al plano de las construcciones corrientes, a las cuales no es posible dedicarles estudios largos y profundos de verificación, se mostraron insuficientes, desde ese punto de vista, los métodos clásicos, enormemente exactos, pero largos y pesados. Los teoremas del trabajo y de las derivadas parciales se encontraban un poco fuera de lugar, en las aplicaciones, para el cálculo de estructuras porticadas y para el trazado de líneas de influencia.

El esfuerzo de los ingenieros se dedicó entonces a deducir, de esos principios básicos, procedimientos de cálculo gráficos o analíticos que permitieran, aún a expensas de una pequeña reducción en la exactitud, inútil la mayoría de las veces, realizar un trabajo más rápido y menos expuesto a errores. Debido a esa demanda fué que surgieron los procedimientos de GEHLER, CROSS, el método de los puntos fijos, el de la elipse de elasticidad, el de las deformaciones ficticias y tantos otros con pequeñas variaciones de detalle, que, como por ejemplo el de la distribución de momentos de CROSS y el gráfico de la elipse elástica permitían libertarse de los sistemas de ecuaciones, siempre incómodos y muchas veces casi fuera del alcance de la paciencia del calculista.

El cálculo de solicitaciones o trazado de líneas de influencia en estructuras porticadas y aún en estructuras más complejas como los arcos continuos sobre pilas elásticas, tenían pues sus proce-

dimientos prácticos de cálculo. Pero nadie podía eliminar de ellos las posibilidades de error, recién descubiertos al final del proceso, ni las simplificaciones indispensables no siempre teóricamente justificadas, ni tampoco el cansancio mental de cualquier método analítico ni la rapidez mucho mayor de los métodos mecánicos.

De esa manera fué que a partir del año 1910 empezaron a colocarse tímidamente las bases de los métodos mecánicos de cálculo, siendo BEGGS, GOTTSCHALK y COLONNETTI los que, por una u otra vía, dieron las normas fundamentales teóricas o experimentales, que muchos otros hubieron de seguir y que llegaron a poner en su punto una serie de aparatos y procedimientos capaces de ser utilizados por ingenieros y oficinas técnicas.

El primer aparato correspondiente a esta categoría parece ser el *influenciógrafo* de COLONNETTI (1914), destinado al trazado de líneas de influencia de vigas continuas de sección constante únicamente, como materialización del segundo principio de reciprocidad que había demostrado teóricamente. Casi simultáneamente, allá por 1916, BEGGS comenzaba a aplicar el mismo principio con modelos de varillas primero e inmediatamente con modelos de celuloide o cartón sometidos a deformaciones microscópicas.

En 1922 GOTTSCHALK presenta en Buenos Aires el *Continostat*, (B. 9) también para líneas de influencia de vigas continuas, pero en una publicación de 1923 (B. 10) ya queda resuelto el trazado para estructuras porticadas, aunque simples, y el cálculo de momentos flectores por el método de las tangentes. Es a GOTTSCHALK, según lo hacen notar CAROT y RIECKHOF (B. 11), a quien se debe el empleo intensivo de las deformaciones macroscópicas, que COLONNETTI solo había intentado en las vigas continuas, y que permiten la medida de las ordenadas de influencia con el doble decímetro simplemente, así como también ha sido el primero que discutió en sus publicaciones las probables causas de error y su magnitud y corrección.

Derivado precisamente del *Continostat* y muy perfeccionado, permitiendo un empleo más amplio, aparece el *Nupubest* de RIECKHOF en 1925 o 1927 aproximadamente.

Los otros aparatos o disposiciones utilizadas actualmente con mayor o menor amplitud, son generalmente perfeccionamientos de esos, como su-

cede con el *Microinfluenziómetro* de MAGNEL, o, por el contrario, para facilitar la ejecución de los modelos, dedicándolo entonces, debido a su menor exactitud, a control de cálculos como en el método de KANN (1930).

6) — Como pudo apreciarse a través de este esquema histórico, el cálculo experimental de estructuras ha alcanzado ya su pleno desarrollo; tanto la teoría correspondiente como los elementos disponibles permiten encarar con plena seguridad de éxito los más complicados problemas. Desde la fotoelasticimetría, que representa la disección del estado de tensiones de una chapa llevado al más alto grado de precisión en cuanto a su poder separador y a la exactitud de sus medidas, hasta el estudio de modelos por medio de tensómetros de precisión, pasando por los influenciógrafos y sistemas derivados, tales métodos han tenido aplicación en infinidad de circunstancias a trabajos de investigación o de índole práctica, mereciendo cada vez más la confianza de los técnicos.

Pero es necesaria una aclaración destinada a colocar en su verdadero plano al tema que estoy tratando. Y es la siguiente: No hay que ver en la estática experimental un sustituto a la teoría, ni

un medio de limitar el estudio teórico de los fenómenos resistentes. Los resultados de los métodos experimentales, como los de los ensayos mecánicos en general, solo pueden dar todo lo que en si mismos significan gracias a un profundo conocimiento de la teoría de la elasticidad y de la resistencia de materiales. En el establecimiento de las condiciones de experiencia primero y en la interpretación de los resultados después, se necesitan los conocimientos teóricos en forma primordial, y también solamente la teoría puede dar el criterio a seguir para pasar de los modelos a la realización de las estructuras y para tener una idea sobre la aproximación mantenida durante esa trasposición.

Al terminar creo oportuno, para apoyarme en una autoridad, reproducir las siguientes palabras del prof. BAES:

« Ha pasado la época en que el constructor de obras de arte, de edificios, de máquinas podía satisfacerse con una educación de simple práctico.

« Y no ha llegado, ni llegará jamás, la época en la cual el constructor pueda satisfacerse con una educación de ciencia pura ».

CAPITULO II - CLASIFICACION. GENERALIDADES

7) — Como el título lo indica no se tendrán en cuenta las fuerzas dinámicas sino solamente las cargas aplicadas lentamente, dejando de lado choques, vibraciones, etc. Es de hacer notar sin embargo que esta limitación no afecta en nada el cálculo de estructuras, puesto que cuando existen tales solicitaciones, como en los puentes, su efecto puede tomarse en cuenta como se hace en el cálculo analítico, por medio de un coeficiente de aumento de la carga estática.

El problema general a considerar comprende dos campos perfectamente distintos y de importancia semejante, que corresponden respectivamente al estudio de *detalles constructivos* y al de los *esquemas estáticos*.

El primero pertenece al dominio de la repartición de las *tensiones* dentro de cada sección y a las características físicas de los materiales; el segundo se refiere a la determinación de las *solicitaciones* en las diversas secciones. El primero utiliza la teoría de la elasticidad, la resistencia de materiales y la física; el segundo necesita de la

resistencia de materiales y de la estabilidad de las construcciones.

Los métodos experimentales que actualmente son utilizados para el cálculo de estructuras se refieren casi unánimemente a solicitaciones comprendidas dentro del período elástico de los materiales, puesto que es dentro de ese período que se admite que están comprendidas las tensiones de trabajo efectivas. La utilización de las ventajas que puedan ofrecer los materiales dúctiles cuando se les hace trabajar en el período de plasticidad no puede considerarse sino como un problema que recién comienza a considerarse y que aún no es posible tenerlo en cuenta para la práctica a pesar de los numerosos e interesantísimos trabajos de ENGESSER, KIST, BLEICH, MAIER-LEIBNITZ y otros.

Además es a las tensiones elásticas que se aplican la teoría de las escuelas y la mayor parte de los métodos experimentales; la auscultación con tensómetros puede ser de utilidad en estructuras trabajando plásticamente, pero desde el punto de

vista cualitativo. El estudio de la similitud (utilización de modelos a distinta escala que el prototipo) y los métodos de observación, tensómetros, deformadores o dispositivos fotoelasticimétricos, se apoyan exclusivamente en las hipótesis básicas de la teoría de la elasticidad: elasticidad de las deformaciones y proporcionalidad entre estas y las tensiones. Luego pues la experiencia llevada a la ruptura no puede dar, con excepción de tratarse de un exacto duplicado de la estructura a utilizar, sino indicaciones *cualitativas*, con excepción de los materiales netamente rígidos en que existe prácticamente coincidencia entre el límite elástico y la carga de rotura, es decir que no se aplica a las estructuras en hierro ni en hormigón armado.

Se ha utilizado en cambio este procedimiento en Estados Unidos como medio sencillo y de poco costo para estudiar experimentalmente algunos problemas simples de resistencia de materiales por medio de ejemplares en yeso, y cuando no se necesitan sino resultados muy poco aproximados (ver B. 12).

8) — Dejando de lado esta excepción de pequeñísima importancia, se puede establecer que el cálculo experimental de estructuras utiliza únicamente *modelos elásticos*.

A estos se les puede hacer una cómoda distinción en dos categorías, que siguiendo a C. C. GUIDI podremos llamar (B 12):

- i) — Método de las cargas
 - a) — Con medida de deformaciones
 - b) — Con medida de tensiones
- ii) — Método de las deformaciones
 - a) — Debidas a desplazamientos
 - b) — Debidas a distorsiones.

según que la causa sea respectivamente, fuerzas exteriores de magnitud conocida, o desplazamientos o distorsiones determinadas, pero sin necesidad de conocer la magnitud de la fuerza que las produce.

El caso elástico general,—cuerpos de forma y disposición arbitraria, estado elástico a tres dimensiones,—es posible encararlo por ahora únicamente con el método de las cargas con medida de las deformaciones, ya que la utilización de la medida directa de tensiones en este método, por medio de instalaciones fotoelásticas no ha pasado aún, considerando el punto de vista práctico, de los sistemas elásticos a dos dimensiones

Por lo tanto en el caso general la resolución se obtiene, expresado brevemente, construyendo un

modelo con la base de una similitud elástica rigurosa, sobre el cual se aplican cargas semejantes, en posición y magnitud, a las que soporta el prototipo;— además es general, aunque no necesario, utilizar el mismo material en el modelo y en el prototipo.

El procedimiento de análisis consiste en obtener en el modelo las características geométricas del estado de tensiones, es decir las deformaciones lineales y angulares en todos los puntos necesarios por medio de extensómetros y en general medidores de desplazamientos: de inmediato se hallan las deformaciones principales y a partir de ellas las tensiones principales. Todo esto, claro está, teniendo en cuenta los factores de reducción dados por las escalas.

Puede observarse de inmediato que para conseguir los objetivos antedichos con exactitud, el modelo debe ser generalmente de grandes dimensiones y por lo tanto de ejecución difícil y costo elevado;— se trata pues de un método de laboratorio exclusivamente. Su aplicación es muy corriente en las obras de magnitud excepcional y en especial, como sucede con frecuencia en estos casos, cuando los métodos de cálculo analíticos no pueden tener en cuenta en toda su amplitud la complejidad del problema: se ha empleado en grandes presas, en puentes suspendidos, etc.

También pertenece a esta categoría el estudio experimental de detalles constructivos que se resisten por su índole misma a toda reducción de escala o simplificación, como por ejemplo, el estudio de las uniones remachadas de vigas y columnas que, con vistas a utilizar su continuidad parcial, efectúa el "Steel Structures Research Committee" en Inglaterra.

En el laboratorio de estática experimental se ha encarado ya utilización de este método para algunos trabajos en vía de ejecución, proveyéndose actualmente de los elementos necesarios, pero aún no se tiene absolutamente ninguna experiencia al respecto;— por esta causa no se detallará más el procedimiento, aunque si aprovecharé para establecer la teoría de las escalas para este caso más general, del que las otras aplicaciones son casos particulares.

9) — Siguiendo en orden decreciente de generalidad se tomará ahora en cuenta a las estructuras planas, es decir estructuras asimilables a chapas planas limitadas por superficies paralelas al plano de las fuerzas exteriores, pero de contorno

completamente arbitrario. Aún aquí es necesaria la utilización del método de las cargas con modelos rigurosamente semejantes, pero además de la utilización de las deformaciones como en el caso anterior, se puede disponer ahora con toda su amplitud de la fotoelasticimetría siempre que se trate de un estado doble como sucede generalmente.

Aquí es donde la fotoelasticimetría ha recibido sus más extensas aplicaciones, debido no solo a su mayor exactitud en las observaciones sino también porque permite la observación individual de regiones cuyas dimensiones son tan pequeñas que pueden asimilarse prácticamente al punto geométrico. (Aunque el poder "separador" varía algo según el material utilizado y según el procedimiento de medida, podría establecerse que las dimensiones de la menor región que puede individualizarse es del orden del cuarto de milímetro, mientras que el tensómetro más perfeccionado, uno de los modelos de HUGGENBERGER, tiene como base mínima de medida una longitud de 10 mm.)

Naturalmente que no se entrará a detallar este procedimiento ni sus propiedades porque la fotoelasticimetría es un tema vastísimo y complejo, aunque indicaré las particularidades de la teoría de modelos para su caso porque es un tipo de investigaciones a realizar en el laboratorio y también una breve reseña sobre sus posibilidades en el diseño de estructuras.

10) — Finalmente corresponde tratar el estudio experimental de estructuras compuestas por elementos prismáticos o barras (estructuras a fibra media) planas y, salvo artificios especiales, contenidos todos en el mismo plano que las fuerzas exteriores. Se trata por lo tanto de las estructuras que caen en el dominio corriente de la Resistencia de Materiales y de la Estabilidad de las construcciones. Aceptadas las hipótesis simplificadoras de estas ciencias como que responden a los hechos que se encuentran en la construcción de estructuras, se puede poner como características principales de los métodos experimentales de cálculo que se ocupan de ellas.

i. — Obtención exclusiva de las características de sollicitación para las diversas secciones transversales de las barras, pero no de la distribución real de tensiones, las que se calcularán con los métodos aproximados de la resistencia de materiales;

ii. — Dimensionado del modelo teniendo en cuenta en forma rigurosa (teóricamente por lo me-

nos), únicamente la principal sollicitación a que está sometido cada elemento, generalmente flexión o esfuerzo normal. (1)

iii. — Costo relativamente pequeño y facilidad de manejo; por lo tanto utilización posible tanto en el laboratorio de investigación como en oficinas técnicas.

iv. — Similitud de modelo y prototipo más restringida y por lo tanto exactitud intrínseca menor que en los métodos anteriores.

Para este tipo de estructuras se han utilizado métodos experimentales pertenecientes a todas las categorías mencionadas pero con frecuencia muy diferente desde luego. El método de las cargas con medidas de deformaciones por medio de tensómetros parecería que en realidad no presenta ventajas en estos casos sobre los otros procedimientos más simples y, en efecto, se le ha empleado muy poco; en realidad solo he visto la referencia de un estudio (B 8) de RITTER sobre un modelo de viga triangulada.

La fotoelasticimetría en cambio presenta más oportunidad de realizaciones porque puede dar con facilidad no solamente las sollicitaciones en las regiones normales de los elementos sino también las perturbaciones producidas en los nudos de las estructuras, puntos singulares de enorme importancia en ciertos casos especiales como en las vigas Vierendeel, para cuyo asunto BAES ha hecho un estudio detallado. No debe olvidarse, vuelvo a repetirlo, que la primera aplicación práctica de la fotoelasticimetría que se debe a MESSNER fué precisamente sobre un problema de este tipo.

Pero hasta ahora se trata siempre de procedimientos de laboratorio. Más posibilidades puede tener un método (B. 14) cuya idea original se debe a WILSON y MANEY de la Universidad de Illinois, pero perfeccionado por BAKER, aplicable a las estructuras a fibra media formada por elementos de eje rectilíneo y sección constante. El

(1) Hay circunstancias en que la sollicitación a tomar en cuenta varía según que se considere el elemento en sí mismo o respecto a la estructura total: — en el modelo del puente Sn. Francisco — Oakland estudiado por BEGGS, R. DAVIS y H. DAVIS (B. 13) la viga de rigidez es de tipo triangulado, pero para el modelo, y en lo que se refiere a la repartición de las cargas entre ella y el cable, no interesaban los esfuerzos en las barras sino su flexibilidad relativa, por lo cual se la sustituyó, para la experiencia, por una viga llena de igual rigidez flexional.

modelo es realizado en idéntica forma que los modelos de BEGGS sobre una chapa de celuloide o de bronce, con el plano de esta coincidiendo con el plano de las cargas, y se le somete a fuerzas de magnitud conocida por medio de balanzas de resorte, midiéndose los ángulos de giro de nudos y barras, fig. 5, deduciéndose los momentos de apoyo como en el método de KANN.

No sucede lo mismo con el método de las deformaciones, que pertenece íntegramente a la categoría de la experiencia corriente, y sobre la cual nos extenderemos un poco más puesto que es en tal dominio que se han realizado las experiencias de que voy a dar cuenta en esta exposición.

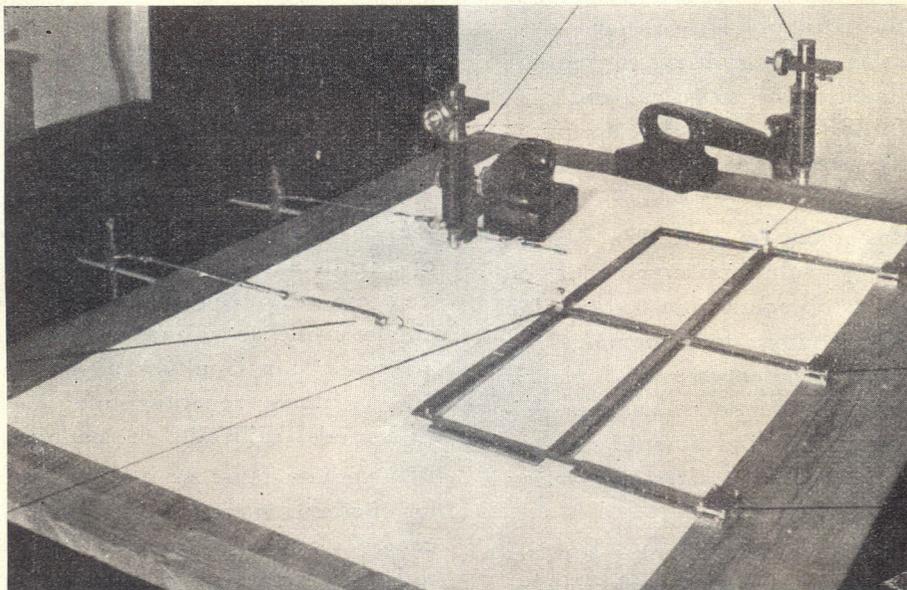


Fig. 5

En cualquiera de las dos subdivisiones el proceso sintetizado es el siguiente: Se construye un modelo de la estructura por medio de la unión de una serie de barras que representan los elementos del prototipo en una escala de longitudes siempre exacta pero con una similitud de sección transversal cuya exactitud varía enormemente de un método o aparato a otro. Luego se produce, o bien un *desplazamiento* en el punto de aplicación de una fuerza determinada representando, a una escala que no interesa, la flecha que presenta la estructura bajo la carga exterior, y se obtiene entonces el *diagrama de momentos flectores* de la estructura bajo esa carga, o bien se introduce una *distorsión* por medio de una cortadura del modelo a cuyas caras se hace sufrir determinados despla-

zamientos relativos y se obtiene la *línea de influencia* correspondiente a esa sección, de la sollicitación que produce el desplazamiento relativo. En ambos casos el resultado se obtiene por la medida de *desplazamientos*, relativos o absolutos, de diversos puntos del eje longitudinal de las piezas del modelo.

En principio puede utilizarse este sistema experimental en estructuras trianguladas, elementos sometidos a esfuerzos normales, y en estructuras de nudos rígidos, con elementos sometidos a esfuerzos de flexión. Para las primeras no existe actualmente ningún sistema experimental (con excepción de un procedimiento por analogía eléctrica

de BUSH, (B. 15) cuya aplicación práctica no conozco) de resolución de estructuras hiperestáticas que es en las que habría verdadero interés;—para estructuras isostáticas no es difícil imaginar influenciómetros, pero es el caso precisamente de un trazado analítico simple al extremo.

Para estructuras sometidas a flexión puede hacerse una clasificación de acuerdo con la magnitud absoluta de los desplazamientos provocados:

- i — Con desplazamientos microscópicos
- ii — Con desplazamientos macroscópicos

En la categoría i) los desplazamientos experimentados por el modelo se hacen de la menor magnitud posible para mantenerse prácticamente dentro de las hipótesis fundamentales sobre su magnitud: que la deformación del cuerpo sea tan

pequeña que no modifique las dimensiones en manera apreciable, o sea que la *forma*, longitudes y dimensiones transversales, del cuerpo antes y después de la deformación, sea la misma. Debido a esa circunstancia los desplazamientos deben medirse por medio de microscopios, con lo cual es posible emplear *desplazamientos máximos normales* de los puntos del eje, generalmente del orden de 1 o 2 milímetros, pudiéndose apreciar corrientemente hasta 0.01 milímetros, dentro de modelos que por razones prácticas constarán de elementos cuyas dimensiones longitudinales son del orden del decímetro.

Para la categoría ii) se ha tratado de dejar de lado esta limitación que, sin duda alguna, encarece y complica la utilización de los métodos experimentales, y con una extrapolación contraria completamente a las teorías de la estática, susceptible únicamente de una justificación práctica, obtenida con hechos, se ha ido al empleo de desplazamientos medibles a simple vista, con doble decímetro o sobre papel milimetrado.

Los desplazamientos máximos normales son del orden de 1 decímetro y sobre observaciones en que prácticamente puede obtenerse una apreciación de 1 a 2 mm. Las dimensiones longitudinales de los elementos son aproximadamente las mismas que en los tipos anteriores, un poco mayores quizás será conveniente: aunque lógicamente con oscilaciones muy amplias, podría decirse que varían entre 20 o 30 cm. a 70 u 80 cm.

Como consecuencia los desplazamientos son del mismo orden que las dimensiones longitudinales de los elementos, de donde alteración bastante grande de la forma geométrica del modelo y cambio apreciable en la posición relativa de las fuerzas. Sobre un caso así la teoría dice forzosamente que los resultados no son exactos, pero en la práctica no puede utilizarse una definición tan categórica. En la práctica sólo hay resultados con un error mayor o menor y se necesita saber, única y exclusivamente, si el error del método utilizado, analítico o experimental, está dentro de lo corriente o, mejor expresado, si está de acuerdo con la aproximación obtenida en los datos del problema: las características propias de la estructura (propiedades de los materiales empleados, dependencia mutua entre los diversos elementos, etc.) y las circunstancias exteriores (calidad y condición de fundaciones, sobrecargas posibles, etc.)

Estas circunstancias unidas a la consideración

de la importancia de la obra, en lo referente a su aspecto económico, llevan a establecer la posibilidad de utilizar coeficientes de seguridad más o menos reducidos para conducir las secciones resistentes a un mínimo y por lo tanto a exigir una exactitud creciente en el cálculo. Cada caso particular dirá pues si se puede o no facilitar los cálculos por medio de una reducción en la exactitud de los resultados.

Para permitir esos desplazamientos tan grandes sin someter al material del modelo a deformaciones permanentes durante la experiencia y sin necesidad de aplicar fuerzas apreciables, es indispensable utilizar, para la representación de las barras, elementos que presenten muy pequeña rigidez transversal, para lo que se ha elegido generalmente láminas de sección rectangular de muy pequeño espesor, alrededor de 1 mm., y de 1 cm. más o menos de ancho, colocadas normalmente al plano de la estructura, en material que puede ser cartón, celuloide o acero.

Estos modelos constituyen, según la feliz definición de KANN, los modelos en *elevación*, por oposición a los modelos a utilizar con deformaciones microscópicas que permiten una rigidez apreciable y que se cortan en una chapa del material adecuado con la altura de la sección descansando en ese plano, constituyendo los modelos *planos*. El material utilizado es celuloide, cartón o cobre.

Inmediatamente se deduce que, mientras que a los modelos planos se les puede dar sin complicación alguna una sección variable, equivalente en todos los puntos a la sección transversal del prototipo, en los modelos en elevación la forma práctica de hacerlo es por superposición de láminas, es decir que, además que esto significa bastante complicación, el momento de inercia variará según un pequeño número de saltos en cambio de hacerlo continuamente. Además la ejecución de barras de eje curvo necesita, en los modelos en elevación, hacerle sufrir a estas una deformación permanente en forma que sigan, con una exactitud no muy grande, el eje teórico, para lo que es necesario utilizar barras de acero especial, capaces de deformación plástica.

En este caso ni el celuloide ni el cartón (en elevación) pueden utilizarse, lo que limita a barras rectilíneas la utilización del método de KANN.

A la primera categoría, observaciones microscópicas, pertenecen el influenciómetro de BEGGS y el de MAGNEL, destinados al trazado de líneas

de influencia por aplicación del segundo principio de reciprocidad; — y también el método de trazado de diagramas de momentos flectores de BAKER.

A la segunda los influenciómetros de COLONNETTI, GOTTSCHALK, RIECKHOF y KANN, y los métodos de trazado de diagramas de GOTTSCHALK (métodos de las tangentes en los apoyos),

de RIECKHOF (método de los puntos de momento nulo) y de KANN (método de los ángulos de giro de nudos y barras).

Las características de cada uno de estos métodos y sus condiciones de utilización así como su exactitud probable, es lo que se verá en la última parte de esta nota

PARTE II - TEORIA DE LOS MODELOS

CAPITULO III - CASO DE UN CUERPO DE FORMA CUALQUIERA

11) — La teoría de los modelos es el conjunto de normas que establecen los factores de reducción y relaciones que deben cumplir las características físicas y geométricas del modelo y del prototipo y las fuerzas aplicadas (o distorsiones), para que puedan transportarse de una a otra estructura las características del estado elástico: tensiones y deformaciones.

Los factores que deben tenerse en cuenta para este objeto son:

- El material.
- La escala geométrica.
- Las fuerzas aplicadas.

Estos factores están ligados por una serie de relaciones que permiten establecer algunos de ellos en forma arbitraria y deducir los restantes; — la categoría a la cual pertenecerá cada uno, depende del tipo particular de la estructura y del procedimiento que se utilice para su estudio.

Para que sea posible el objeto enunciado se debe establecer que: “En puntos similarmente colocados en el modelo y en el prototipo, las tensiones o deformaciones provocadas por fuerzas similares, deben ser proporcionales entre sí con un cierto factor constante para toda la estructura”.

12) — A este respecto el problema que hay que resolver y que surge de inmediato a toda persona que entra a considerar el estudio experimental con modelos, es: ¿Que influencia tiene el material, debido a sus diferentes características mecánicas, sobre la *distribución* de las tensiones en un cuerpo determinado? No puede establecerse a priori en efecto, que en un sistema sólido determinado sometido a fuerzas invariables, el sistema de tensio-

nes producido sea el mismo cualquiera que sea el material de que está construido, aunque las formas y dimensiones sean exactamente las mismas. La mayor parte de las veces es indispensable utilizar diferentes materiales en el modelo y en el prototipo, debido a que el procedimiento puede ser capaz de aplicación con una categoría determinada de materiales solamente como en la fotoelasticimetría, o simplemente por razones de costo y facilidad de construcción

La más vasta aplicación de los modelos de estructuras, en la ingeniería civil, se presenta para cuerpos con sollicitación plana y, en el *cálculo mecánico*, para estructuras de barras, pero de cualquier manera, y aunque no fuera más que por las excepciones, es conveniente encarar el estudio de los modelos en caso elástico general.

El problema elástico a tres dimensiones queda determinado en el caso general, de sollicitación estática por los siguientes grupos de ecuaciones (B. 16):

a) — *ecuaciones indefinidas:*

$$\Delta^2 R_x + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 (R_x + R_y + R_z)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Delta^2 R_y + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 (R_x + R_y + R_z)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\Delta^2 R_z + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 (R_x + R_y + R_z)}{\partial z^2} = 0$$

en función de las tensiones, o también:

$$\Delta^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{F_x}{G} = 0$$

$$\Delta^2 v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{F_y}{G} = 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta^2 w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{F_z}{G} = 0$$

cuando aparecen los desplazamientos u , v , w según los ejes coordenados, y si se indica con Θ la dilatación cúbica.

b) — Ecuaciones en los límites:

$$\begin{aligned} \alpha. R_x + \beta. S_z + \gamma S_y &= \varphi_x \\ \alpha. S_x + \beta. R_y + \gamma. S_x &= \varphi_y \\ \alpha. S_y + \beta. S_x + \gamma R_z &= \varphi_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

para las tensiones, o mejor dicho en función de las tensiones, y

$$\begin{aligned} 2 G. \alpha. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta}{m-2} \right) + G \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ + G. \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \varphi_x \\ G. \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 G \beta \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\Theta}{m-2} \right) + \\ + G. \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= \varphi_y \quad (3.4) \\ G. \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + G. \beta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ + 2 G \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\Theta}{m-2} \right) &= \varphi_z \end{aligned}$$

cuando las condiciones en los límites se imponen por los desplazamientos.

Estas condiciones representan precisamente las condiciones o circunstancias exteriores al cuerpo mismo que se considera y que en uno u otro caso (ecuaciones 3.3 o 3.4), pueden ser

i) — Fuerzas de magnitud conocida y arbitraria, en cuyo caso la única condición en el equilibrio

entre las fuerzas aplicadas y las tensiones del triedro elemental en ese punto.

ii) — Vínculos que obligan a determinadas deformaciones de los puntos del cuerpo que le pertenecen y que generan fuerzas y tensiones funciones de ellas.

Los cuerpos del primer tipo, condiciones en el contorno que dependen de las fuerzas aplicadas únicamente, son los cuerpos con *conexión simple*, o sea los sistemas *estáticamente determinados* de la resistencia de materiales: los vínculos exteriores existen solamente en número necesario y suficiente para impedir todo desplazamiento rígido de dicho sistema, y las discontinuidades internas son tales que cuando el cuerpo se corta según una sección transversal cualquiera, los dos trozos son capaces de desplazamientos rígidos.

Cuando las condiciones en el contorno exigen determinados desplazamientos, se trata en cambio, de los cuerpos con *conexión múltiple*, dentro de cuya categoría están incluidas las estructuras *internamente o externamente hiperestáticas*. En otras palabras, se puede establecer que un cuerpo tiene *conexión simple* cuando es tal que, "trazado un circuito cerrado, dentro del cuerpo, en forma arbitraria, este puede reducirse por deformación gradual hasta encerrar un área nula, sin que ningún trozo de dicho circuito salga de los contornos que limitan el cuerpo interior o exteriormente". (B 17)

13) — Si ahora observamos las ecuaciones anteriores, se deduce que en el caso de cuerpos con *conexión simple* (ecuaciones 3.1 y 3.3), el régimen de tensiones depende del módulo de Poisson m , pero es independiente del módulo de elasticidad longitudinal E o transversal G . Esta conclusión es muy importante porque además de que su valor varía enormemente de un cuerpo a otro, permite utilizar, para fabricar los modelos, materiales mucho más deformables que los reales y más fáciles de trabajar.

Por otra parte, puede establecerse que aún la influencia de m desaparece prácticamente. En la tabla adjunta se reproducen los valores de m y derivados, para los materiales que interesan directamente por su empleo en las estructuras reales o en los modelos, además de las constantes mecánicas más importantes (B. 8, 12, 17 y 18):

| Material | σ_k kg/cm ² | σ_s kg/cm ² | E kg/cm ² | m | $\frac{m}{m+1}$ |
|-------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------|-----------------|
| Celuloide (1) | 400 — 500 | 100 | 20000 | 2.40 | 0.71 |
| Bakelita | 300 — 400 | 150 | 37000 | 3.00 | 0.75 |
| Vidrio | | 150 (Ext.) | 600000 | 4.00 | 0.80 |
| | | >500 (Compr.) | | | |
| Yeso | | 25 | 60000 | 7.00 | 0.87 |
| Cemento | | | 6000 | 7.00 | 0.87 |
| Hormigón | | | 0.14/0.20 x 10 ⁶ | ~ 8.00 | ~ 0.90 |
| Acero Estructural | | | 2.10 x 10 ⁶ | 3.40 | 0.77 |

Se deduce en efecto que la variación de $\frac{m}{m+1}$, parámetro a través del cual influye m , es muy pequeña para todos estos cuerpos, generalmente entre 0.75 y 0.85, o sea aproximadamente en un 10 %.

Pero en los cuerpos con conexión múltiple, la influencia de los desplazamientos hace que el estado elástico dependa de m y de $G \left(= \frac{E}{2} \frac{m}{m+1} \right)$, o sea de m y de E .

Será pues este un caso muy complejo en el que deberá procederse con mucho cuidado.

14) — Los desplazamientos elásticos del caso general dependen, para cualquier tipo de condiciones en el contorno, de las dos constantes m y G como puede verse en las ecuaciones (3.2) y (3.3) o (3.4) que rigen esta solución.

Sin embargo en el caso que puedan despreciarse las fuerzas de masa, las ecuaciones (3.2) y (3.4) quedan reducidos a los tipos

$$\Delta^2 u = - \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

.....

$$y \quad 2 \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta}{m-2} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{X}{G}$$

de donde, si el valor de m en los dos materiales no es muy diferente, se podrá obtener los mismos desplazamientos con modelo y prototipo si las fuerzas exteriores se reducen en la misma relación que los módulos tangenciales.

15) — *Elasticidad plana.* — Más interesa desde nuestro punto de vista, el estudio de cuerpos en elasticidad plana, constituido prácticamente por una "chapa" limitada por dos planos paralelos al plano medio o "plano de deformación" en cuya dirección se aplica la sollicitación exterior; — excluyendo los casos de inestabilidad elástica, ese plano medio será por lo tanto un plano de simetría cuyos puntos se desplazan en el mismo plano.

Dentro de la elasticidad plana pueden distinguirse dos casos diferentes según que estado plano sea el de los desplazamientos o el de las tensiones.

a) — *Deformación plana.*

Admitimos que los desplazamientos son paralelos a ese plano medio en todos los puntos del cuerpo y que además son iguales en todos los planos paralelos a ese, por cuya razón los esfuerzos serán independientes de Z . Sin embargo se se verá enseguida que la hipótesis $w = 0$ exige que en general R_z sea diferente de cero, es decir que este tipo de régimen de deformaciones exige la presencia de algún medio que obre sobre el cuerpo considerado en sus caras laterales. Es el caso de un cuerpo prácticamente "muy extendido" en la dirección Z sollicitado por fuerzas situadas en el plano $x y$ y estudiado en su parte media.

De acuerdo con lo expuesto si sustituimos el valor de la deformación según Z tomado de la expresión

(1) Guidi (B. 12) indica valores más altos: $\sigma_s = 300 - 400$ kg/cm²; $E = 2500$ kg/cm²; $\sigma_p = 2500$ kg/cm²

$$a_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E_i} \left(R_z - \frac{R_y + R_x}{m} \right) = 0$$

en la primera ecuación (3.1) obtenemos:

$$\Delta^2 R_x + \frac{\partial^2 (R_x + R_y)}{\partial x^2} = 0$$

e igualmente $\Delta^2 R_y + \frac{\partial^2 (R_x + R_y)}{\partial y^2} = 0$ (3.5)

$$\Delta^2 R_z + \frac{\partial^2 (R_x + R_y)}{\partial z^2} = 0$$

Por lo tanto si las ecuaciones en los límites son del tipo (3.3), cuerpos con conexión simple, las tensiones son independiente de todo coeficiente de elasticidad.

Las tensiones serán además

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{2G}{m-2} \vartheta' + 2G a_1 \\ R_y &+ \frac{2G}{m-2} \vartheta' + 2G a_2 \\ R_z &= \frac{2G}{m-2} \vartheta' \end{aligned} \quad (3.6)$$

es decir que solo se tendrá $R_z = 0$ si

$$\vartheta' = a_1 + a_2 = 0$$

16) — Tensiones planas generalizadas.

Este tipo de régimen elástico que es indudablemente el que más interesa desde el punto de vista de la fotoelasticidad o de los modelos de estructuras planas, supone una chapa de espesor infinitamente pequeño, limitada por dos planos paralelos completamente libre de fuerzas y una tensión $R_z = 0$; análogamente al caso anterior podemos suponer que las tensiones son independientes de Z (1)

En esta forma tenemos de las dos primeras ecuaciones de (3.1)

$$\Delta^2 R_x + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 (R_x + R_y)}{\partial x^2} = 0$$

$$\Delta^2 R_y + \frac{m}{m+1} \frac{\partial^2 (R_x + R_y)}{\partial y^2} = 0$$

de donde sumando e indicando con

$$\Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ tenemos ya que}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial R_y}{\partial z} = 0:$$

$$\Delta_1^2 (R_x + R_y) = 0 \quad (3.7)$$

y de las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial^2 R_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_y}{\partial y^2} = 0 \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) junto con las ecuaciones en los límites, para cuerpos con conexión simple, resuelven el problema independientemente de los constantes del material.

Sin embargo para estar más en la realidad de los hechos conviene estudiar el desarrollo análogo para cuerpos que responden prácticamente a las condiciones enunciadas, es decir para el caso de una chapa de espesor moderado, limitada lateralmente por los planos paralelos $Z = \pm c$ (siendo $2c$ el espesor de la chapa). En este caso, aunque ya no se puede considerar que las tensiones y desplazamientos no dependen de Z , se puede en cambio admitir (dado el pequeño espesor) que dicha variación en Z es pequeña respecto a su *valor medio* en dicha extensión, que se definirá así:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} R_x dz \\ N_2 &= \frac{1}{1c} \int_{-c}^{+c} R_y dz \\ T &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} S dz \\ U &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} u dz \\ V &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} v dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

(1) — Coker demuestra la posibilidad de este tipo de sollicitación estudiando una solución particular y mostrando que no es incompatible con las ecuaciones fundamentales. Ver B. 19, p. 131.

Si se toma ahora las ecuaciones de equilibrio (B. 16, ecuaciones 3) e integrando por ejemplo la primera respecto a Z (suponiendo $X_0 = Y_0 = 0$):

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\partial R_x}{\partial x} dz + \int_{-c}^{+c} \frac{\partial S}{\partial x} dz + 0$$

puesto que:

$$\frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{\partial S}{\partial z} dz = \frac{1}{2c} \left[S \Big|_{-c}^{+c} \right] = 0$$

Sustituyendo los valores indicados recién en esta ecuación y su análoga queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por otra parte, de las ecuaciones que relacionan tensiones y deformaciones se tiene

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{2G}{m-2} \left(\theta' + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ R_y &= \frac{2G}{m-2} \left(\theta' + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 &= \frac{2G}{m-2} \theta' + 2G \left(1 + \frac{1}{m-2} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Sacando el valor de $\frac{\partial w}{\partial z}$ de la última y sustituyendo en las dos primeras:

$$\begin{aligned} R_x &= G' \theta' + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ R_y &= G' \theta' + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ S &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{donde } G' = \frac{2G}{m-2}$$

Integrando estas ecuaciones según el espesor y tomando el valor medio de los desplazamientos, ya definido, así como los de las tensiones:

$$\begin{aligned} N_1 &= G' \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial U}{\partial x} \\ N_2 &= G' \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial V}{\partial y} \\ T &= G' \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se vé pues de las (3.10) y (3.12) que en el caso de tensiones planas generalizadas, el problema elástico se reduce al estado de deformaciones planas, cuando a las tensiones reales se sustituyen las tensiones medias y al módulo de elasticidad tangencial G se sustituye el módulo tangencial reducido G' .

Además las ecuaciones (3.12) nos dan directamente las tensiones en función de las deformaciones sin necesidad de tomar en cuenta la condición $R_z = 0$ que ya ha sido contemplada; — el estado elástico depende pues exclusivamente de ellas y de las (3.1) sin ninguna otra condición complementaria.

La influencia de las constantes elásticas se obtiene de (3.10) derivando la primera respecto a x , la segunda a y , y restando:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.13)$$

Por otra parte la última ecuación (3.1) nos dá cuando $R_z = 0$, e integrando con la variable Z como antes

$$\Delta^2 (N_1 + N_2) = 0 \quad (3.14)$$

Tenemos en la (3.13) y la (3.14) la solución completa del problema, o sea que los valores medios de las tensiones son independientes de los coeficientes elásticos del material siempre que el cuerpo sea de conexión simple.

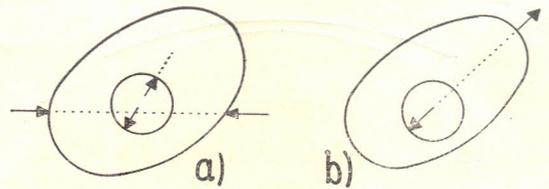


Fig. 6

16) — Si el cuerpo es de conexión múltiple y por lo tanto es necesario hacer intervenir las condiciones en el contorno de deformaciones (3.4), puede verse desde ya que las constantes van a intervenir en la distribución de tensiones, con excepción de situaciones o condiciones especiales que puedan existir. Estas condiciones especiales, dentro de las cuales los cuerpos de conexión múltiple se presentan con las ventajas de la otra categoría, han sido encontradas por J. H. MICHELL (1) y pueden expresarse en la siguiente forma:

1) — Ver B. 19, B. 17 y B. 20.—MESNAGER dió posteriormente una demostración muy simple aunque no tan rigurosa del problema (B. 21).

« Las tensiones en un cuerpo de cualquier forma, perforado por cualquier número de orificios y sometido a fuerzas cualesquiera en sus contornos, son independientes de las constantes elásticas si, y solamente si, es nula cada resultante de las fuerzas exteriores que obran en cada contorno.»

Conviene hacer notar como lo hace COKER que esto no significa que las fuerzas que obran en cada contorno (sobre cada orificio en los cuerpos con discontinuidades internas), deban constituir un sistema en equilibrio: aquellas pueden formar un par sin que dejen de ser válidas las conclusiones.

Cuando se trata de una estructura isostática (exterior e interiormente), las fuerzas aplicadas al contorno deben formar un sistema en equilibrio, lo mismo que sobre cualquier circuito interno; en cambio si se trata de un cuerpo de conexión múltiple, esa condición puede cumplirse solamente en ciertas circunstancias (fig. 6*a*), mientras que en otras no sea así aunque el cuerpo esté equilibrado (fig. 6*b*).

Para poder utilizar estas ventajas en el caso de estructuras externamente hiperestáticas, como sistemas de arcos o pórticos continuos por ejemplo, en que los poyos o empotramientos representan restricciones a los desplazamientos en los contornos, se utiliza un artificio que consiste en sustituir, (fig. 7*a*), al empotramiento rígido realmente exist

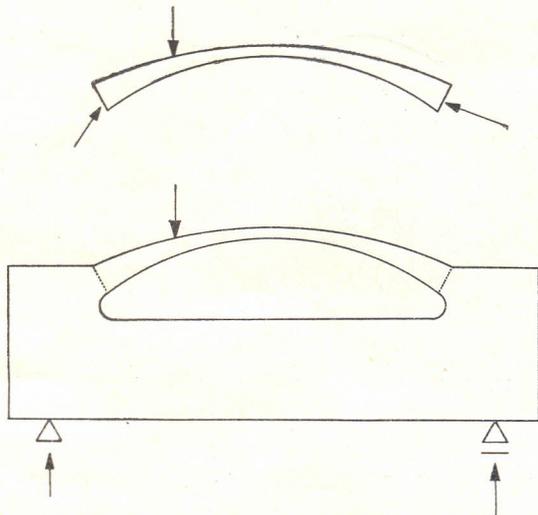


Fig. 7

tente, un ensanchamiento del mismo modelo (fig. 7*b*) cuyas dimensiones sean tales de impedir, como lo exige el prototipo, todo desplazamiento lineal o angular de la sección de empotramiento.

En cambio el modelo y su base pueden apoyar-

se a su vez en un sistema isostático como el indicado en la figura que lleva todo el sistema a mantenerse dentro del límite de validez del teorema de MICHELL, a la vez que la parte del modelo que nos interesa cumple con las condiciones de deformación en el contorno impuestas por el prototipo.

Para la demostración del teorema de MICHELL conviene utilizar la "función de tensiones" de Airy y la "función de los desplazamientos" en un estado de tensiones planas generalizadas.

Sabemos que en elasticidad plana y cuando las únicas fuerzas de masa son de gravedad, las tensiones están dadas por las expresiones siguientes en que F es la función de Airy:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ S &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mientras que dicha función debe cumplir a su vez con la condición

$$\nabla^4 F = 0$$

$$\text{Con } \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{2 \partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.15')$$

Por otra parte los desplazamientos medios U y V están definidos por

$$2G.U = -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$2G.V = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial x}$$

Siendo D una función de x y de y que debe cumplir con la condición

$$\nabla^2 D = 0 \quad (3.17)$$

Sea ahora s un arco de curva trazado en el cuerpo considerado y que puede también confundirse con cualquiera de sus contornos; las componentes X e Y que se ejercen sobre un elemento diferencial de curva ds , definida por los cosenos directores α y β de su normal n (fig. 8) están dadas por las ecuaciones (3.3):

$$\begin{aligned} X &= \alpha N_1 + \beta T \\ V &= \beta N_2 + \alpha T \end{aligned}$$

Colocando aquí la expresión (3.14) de las tensiones

$$X = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$Y = \beta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(\beta \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial x}$$

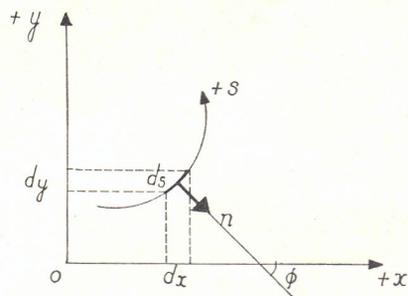


Fig. 8

pero $\alpha = \cos \Phi = + \frac{dy}{ds}$ y

$\beta = \sin \Phi = - \frac{dx}{ds}$, por lo tanto:

$$X = \left(+ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (3.18)$$

$$Y = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

Luego pues integrando a lo largo del arco s desde un origen O arbitrario hasta un punto cualquiera A :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X ds + B = \int_0^s X ds + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{s=0} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \int_0^s Y ds + C = - \int_0^s Y ds + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{s=0}$$

Si el arco s se dispone de manera que forme un circuito cerrado, volviendo al mismo punto O , se tendrá:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{s=0} - C(y) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{s=0} + C(x)$$

indicando con $C(f) = \int_s f ds$ la integral de

una función cualquiera f extendida a un circuito cerrado, o sea "la función cíclica de la función f ."

Tomando ahora las expresiones (3.16) y calculando la función cíclica de los desplazamientos:

$$2 G \cdot C(U) = - C \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{m}{m+1} C \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right) \quad (3.21)$$

$$2 G \cdot C(V) = - C \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) + \frac{m}{m+1} C \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)$$

Las ecuaciones (3.18) y (3.21) dan de inmediato la demostración del teorema de MICHELL. En efecto, dejando de lado el caso de las "distorsiones" o "dislocaciones" de VOLTERRA, que significan la posibilidad física de que exista una expresión cíclica de los desplazamientos, y que aplicaremos luego a la demostración del segundo principio de reciprocidad, podremos establecer que debe existir una solución única del problema para el cuerpo dado, de la cual resulten desplazamientos U y V acíclicos, a partir de las funciones F y D . — (B. 16, p. 185).

Supongamos pues que se tiene una chapa A (prototipo) de un material de constantes G_0 y m_0 y otra chapa B (modelo) de idéntica forma y dimensiones y sometida a las mismas cargas, pero de un material de constantes G y m diferentes.

Los desplazamientos están dados por las expresiones (3.16) o sea

$$2 G_0 U_0 = - \frac{\partial F_0}{\partial x} + \frac{m_0}{m_0+1} \frac{\partial D_0}{\partial y}$$

$$2 G_0 V_0 = - \frac{\partial F_0}{\partial y} + \frac{m_0}{m_0+1} \frac{\partial D_0}{\partial x}$$

para la chapa A , y

$$2 G U = - \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial y}$$

$$2 G V = - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial x}$$

para la chapa A .

La condición necesaria para que estos desplazamientos sean monodromos es de (3.21):

$$C \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right) = \frac{m_0}{m_0 + 1} \cdot C \left(\frac{\partial D_0}{\partial y} \right) \quad (3.22)$$

$$C \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right) = \frac{m_0}{m_0 + 1} \cdot C \left(\frac{\partial D_0}{\partial x} \right)$$

y expresión análoga para la chapa B.

Veamos ahora en que circunstancias serán iguales las tensiones en A y B; para ello deberá tenerse desde luego:

$$F = F_0 \text{ y } D = D_0$$

Pero entonces puede observarse que las ecuaciones (3.22) y análogas no pueden cumplirse dado que m y m_0 son diferentes, a menos que se tenga:

$$C \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right) = C \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right) = C \left(\frac{\partial D_0}{\partial x} \right) = C \left(\frac{\partial D_0}{\partial y} \right) = 0$$

Volviendo a las ecuaciones (3.20) vemos que para que se cumplan estas condiciones deberá tenerse:

$$C(X) = \int_0^s X \, ds = 0 \quad (3.23)$$

$$C(Y) = \int_0^s \gamma \, ds = 0$$

o sea que para cualquier circuito cerrado trazado en el cuerpo, debe anularse la resultante de las fuerzas que lo atraviesan, como lo expresa el teorema de MICHELL.

En el caso que exista tal resultante, las tensiones serán diferentes en el modelo y prototipo, dependiendo exclusivamente de la relación $\frac{m}{m+1}$ (1).

17) — Hasta ahora se ha tratado el cuerpo sometido a fuerzas exteriores únicamente. Hay sin embargo un tipo de sollicitación de mucho interés provocado por deformaciones de origen interior o exterior, precisamente las tensiones provocadas por un cambio de temperatura o por un desplazamiento no elástico de los vínculos.

(1) Aún en este caso es posible llegar a las tensiones en el prototipo mediante ensayos sobre modelos, por superposición de las tensiones producidas por la sollicitación exterior y por una serie de dislocaciones provocadas en el modelo. En B. 19 y B. 22 se puede encontrar detallado este proceso.

Recordemos que un método apto para hallar la sollicitación provocada por la temperatura es, encarrando los conceptos físicos, destruir todos los vínculos hiperestáticos, provocar la deformación correspondiente a la variación de temperatura y luego volver a colocar dichos vínculos por medio de deformaciones forzadas: — es un caso elástico con condiciones de deformación en el contorno. La solución debe encontrarse por medio de las ecuaciones (3.15) en el medio interior y con las (3.16) en el contorno:

$$U = \frac{1}{2G} \left(- \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial y} \right) = \delta_x^n \quad (3.24)$$

$$V = \frac{1}{2G} \left(- \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m}{m+1} \frac{\partial D}{\partial x} \right) = \delta_y^n$$

Siendo δ_x^n y δ_y^n las componentes del desplazamiento impuesto por los vínculos en ese punto.

La consecuencia rigurosa es que las tensiones dependen de G y m ; pero si despreciamos la variación de $\frac{m}{m+1}$, se puede considerar que las

tensiones serán las mismas cuando los desplazamientos impuestos al modelo son afectados por un coeficiente igual a la relación de los módulos de elasticidad tangencial o, lo que es lo mismo, del módulo de elasticidad longitudinal

$$E = 2 \frac{m+1}{m} G.$$

18) — DIMENSIONADO DEL MODELO A ESCALA REDUCIDA.

Se ha estudiado prolijamente la influencia que puede tener *el material* sobre la repartición y magnitud de las tensiones de un cuerpo cualquiera sometido a fuerzas o desplazamientos exteriores, y que en muchos casos de ellos esa repartición difiere de un cuerpo a otro; es necesario ahora estudiar las constantes escalares que toman en cuenta tanto el material como la reducción (o ampliación) de dimensiones entre modelo y prototipo. Como caso más corriente en la técnica, para cálculo experimental de estructuras, debe tomarse aquel en que la distribución de tensiones es independiente del material, es decir un cuerpo con conexión simple, o que, como aproximación, pueda asimilarse a tal

Con las hipótesis establecidas al principio podremos definir los siguientes coeficientes de reducción principales:

$$\alpha = \frac{l_m}{l_p} \quad \beta = \frac{F_m}{F_p} \quad (3.25)$$

indicando con el subíndice m las magnitudes correspondientes al modelo y con p las correspondientes al prototipo; l las dimensiones lineales y F las fuerzas superficiales aplicadas.

Por otra parte las tensiones están dadas, en uno y otro, por:

$$N_1 = 2 G a_1 + \frac{2G}{m-2} \Theta$$

.

$$S_1 = G b_1 \quad (3.26)$$

con

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, 2 b_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dots$$

$$\Theta = a_1 + a_2 + a_3$$

Además, ya que se admite que la "distribución" de tensiones no es afectada por el pasaje del prototipo al modelo, se tendrá siempre que

$$N \equiv \frac{F}{A} \quad (a)$$

indicando con A el área de la superficie que se toma en cuenta, como puede verse fácilmente hallando el equilibrio de la parte del cuerpo limitada por esa superficie, bajo la acción de F y de las tensiones internas N y S .

Tomando una cualquiera de estas tensiones se tiene de (3.25) y (a)

$$N_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{F_p}{A_p} = \frac{\beta}{\alpha^2} N_p$$

y llamando entonces c el coeficiente de reducción de tensiones

$$c = \frac{\beta}{\alpha^2} \quad (b)$$

Si d es el coeficiente para los desplazamientos, se tiene que

$$a_m = \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \frac{d}{\alpha} \frac{\partial u_p}{\partial x_p} = \frac{d}{\alpha} a_p \quad (c)$$

de donde las deformaciones están dadas por

$$e = \frac{d}{\alpha} \quad (d)$$

De la expresión de las tensiones dada en (3.26) se saca:

$$N_m = 2 G_m a_m + \frac{2G_m}{m-2} \Theta_m = G_m \left(2 a_m + \frac{2}{m-2} \Theta_m \right)$$

Si se admite que m vale lo mismo en el modelo y en el prototipo, o sea entonces que

$$\frac{G_m}{G_p} = \frac{E_m}{E_p} = \gamma$$

Luego pues:

$$N_m = \gamma G_p \left(2 a_p + \frac{2}{m-2} \Theta_p \right) \frac{d}{\alpha} = \frac{\gamma d}{\alpha} N_p$$

y

$$c = \frac{\gamma d}{\alpha} \quad (e)$$

Igualando (b) y (e):

$$\frac{\gamma d}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha^2} \text{ o sea } d = \frac{\beta}{\alpha \gamma}$$

y de (d)

$$c = \frac{\beta}{\alpha^2 \gamma}$$

Resumiendo se tiene (indicando con letras griegas las relaciones de escala fundamentales):

longitudes: $\alpha = \frac{l_m}{l_p}$; desplazamientos: $d = \frac{\beta}{\alpha \gamma}$

fuerzas: $\beta = \frac{F_m}{F_p}$; deformaciones: $e = \frac{\beta}{\alpha^2 \gamma}$ (3.27)

constantes elásticas: $\gamma = \frac{E_m}{E_p} = \frac{G_m}{G_p}$

tensiones: $c = \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{d \gamma}{\alpha}$

En el caso de similitud elástica estricta se tendrá $a_m = a_p$, es decir $e = 1$, y de la (3.27)

$$\frac{\beta}{\alpha^2 \gamma} = 1$$

o sea como condición $\gamma = \frac{\beta}{\alpha^2} = c$ (3.28)

y también $d = \alpha$

Por otra parte cuando la sollicitación de la estructura no proviene de fuerzas exteriores sino de dislocaciones, como sucede cuando se produce una variación de temperatura, la escala de fuerzas β (fuerzas *producidas* por la deformación) no es independiente, sino que es función de las otras. Generalmente tendremos como escalas preestablecidas: la de longitudes (α), la de módulos (γ) y

finalmente la de dislocamientos (d), donde de las (3.27):

$$\begin{aligned}\beta &= d \cdot \alpha \cdot \gamma \\ e &= \frac{d}{\alpha} \\ c &= \frac{d\gamma}{\alpha}\end{aligned}\quad (3.29)$$

CAPITULO IV - ESTRUCTURAS A FIBRA MEDIA

19) — Dejaremos de lado ahora el problema general de un cuerpo de forma arbitraria que, cuando se limita a una chapa plana de espesor finito con la sollicitación contenida en el plano medio, interesa especialmente a la fotoelasticimetría, para encarar el estudio más simple de estructuras constituidas por un número finito de elementos o prismas a los que se supone aplicables los postulados de la resistencia de materiales, y que entran en el vastísimo campo de utilización de los *modelos de barras* en general, y especialmente de los *influenciómetros*.

Definiremos como *barras*, aquellos sólidos prismáticos generados por una superficie plana, de contorno constante o variable como función de su posición, que se desplaza en el espacio manteniéndose siempre normal a la línea, recta o curva, descrita por su centro de gravedad, línea que toma el nombre de "eje longitudinal" de la barra, y cuya dimensión longitudinal s es mucho mayor que la mayor dimensión transversal. Además se supone que la superficie lateral de dicho cilindro no está sometida a ningún vínculo ni fuerza exterior, o lo que significa lo mismo, se admite que las barras componentes de la estructura solo están sollicitadas o vinculadas por sus bases.

También es sabido, de acuerdo con SAINT-VE-NANT, que conocidas las seis características de la sollicitación sobre la base, — esfuerzo normal, componentes del esfuerzo tangencial según los ejes de la sección, componentes del momento flector y momento torsor, — queda perfectamente determinado el estado de tensiones en cualquier sección transversal que no esté situada a una distancia muy pequeña de las bases, en cuya vecindad inmediata ese estado de tensiones depende también de la forma de distribución de las fuerzas aplicadas; — sin embargo, de acuerdo con las proporciones supuestas para las barras, esa parte es des-

preciable y puede ser dejada de lado. De la misma manera se puede considerar que la deformación que sufre la base, es despreciable respecto a su desplazamiento, pudiendo admitirse por lo tanto que es completamente indeformable; esas traslaciones y rotaciones son además funciones lineales de la fuerza exterior.

En esas condiciones se tiene que el potencial de un sistema formado por una serie de n barras unidas en forma arbitraria, esta dado por la expresión conocida:

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2} \sum_1^n \int_s \left(\frac{N^2}{E \cdot A} + \frac{T_x^2}{t_x \cdot G \cdot A} + \frac{T_y^2}{t_y \cdot G \cdot A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_x^2}{E \cdot I_x} + \frac{M_y^2}{E \cdot I_y} + g \cdot \frac{M_t}{G \cdot J} \right) ds\end{aligned}\quad (4.1)$$

en la cual se indica con t_x y t_y los factores de corte y con g el factor de torsión de la sección transversal.

Aplicando entonces el procedimiento general de resolución de sistemas hiperestáticos basado en la energía de deformación, las magnitudes de las sollicitaciones superabundantes están dadas por

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = 0 \quad (4.2)$$

para vínculos interiores y vínculos exteriores indeformables, y por

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = \delta_x \quad (4.3)$$

para vínculos exteriores deformables, cuando se indica indistintamente con X una fuerza o un par y con δ_x el desplazamiento o rotación correspondiente.

20) — Se puede deducir enseguida la influencia que tiene el material sobre la distribución de las

solicitaciones, análogamente a lo hecho antes para el caso elástico general.

Cuando se trata de apoyos deformables (o aún en el caso menos probable de vínculos interiores deformables), o de sollicitación de temperatura, las incógnitas hiperestáticas deducidas de las expresiones

$$\sum_1 \int_s \left(\frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{T_x}{t_x \cdot GA} \cdot \frac{\partial T_x}{\partial X} + \dots + g \frac{M_t}{G \cdot J} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial X} \right) ds = \delta_x \quad (4.3')$$

dependerán de las dos constantes elásticas E y $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, es decir que será el mismo caso que el de un cuerpo isótropo de forma arbitraria tratado anteriormente. Pero, teniendo en cuenta la expresión de G , y si se admite que el factor $\frac{m}{m+1}$ es constante para cualquier material (ver cuadro 1), se deduce que se tendrán las mismas sollicitaciones cuando se tome como desplazamiento del prototipo, a reducir si es necesario con la escala corriente, un desplazamiento ideal δ_p^i reducido del real en la relación de los módulos de elasticidad:

$$\delta_p^i = \frac{E_p}{E_m} \delta_p \quad (4.4)$$

Si, inversamente, los vínculos son indeformables se tendrá análogamente a la (4.3') la expresión

$$\sum_1 \int_s \left(\frac{N}{A} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{2(m+1)}{m} \frac{T_x}{t_x \cdot A} \cdot \frac{\partial T_x}{\partial A} + \dots \right) ds = 0 \quad (4.5)$$

que depende únicamente del coeficiente de Poisson a través de la relación $\frac{m}{m+1}$, es decir en una cantidad despreciable prácticamente.

El tipo de sollicitación completa que se acaba de ver no es el tipo corriente en estructuras, sino que con mucha frecuencia las barras que las constituyen están sometidas solamente a una sollicitación plana, caracterizada por:

i) — La fibra media o eje longitudinal de la barra es una curva plana.

ii) — La barra es de forma simétrica respecto al plano medio (que contiene al eje longitudinal).

iii) — Las fuerzas exteriores están contenidas en ese mismo plano.

Por lo tanto en este importantísimo caso las ecuaciones determinantes del estado de sollicitación se reducen a

$$\frac{1}{2} \sum_1^n \int_s \left(\frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{T}{t \cdot GA} \cdot \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} \delta \\ 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

según que se trate de vínculos deformables o indeformables. La forma de estas ecuaciones es la misma que el tipo general indicado en (4.3') y la influencia de las constantes elásticas idéntica.

Pero se puede, y es necesario, hacer una simplificación aún mayor en el tratamiento de los modelos, teniendo en cuenta que la influencia del esfuerzo cortante es siempre muy pequeña dada la proporción corriente de las barras. Entonces despreciando el término correspondiente de la (4.6):

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} \delta \\ 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{N}{A} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{M}{I} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} E \cdot \delta \\ 0 \end{cases} \quad (4.7')$$

Se puede observar que:

i) — Si se trata de un vínculo deformable, se obtendrá las mismas sollicitaciones siempre que las deformaciones se reduzcan de acuerdo con las expresiones (4.4). (1)

(1) Esa deformación δ que puede sufrir el vínculo cuando se carga la estructura consiste en: a) — Un vínculo elástico cuya deformación es proporcional al esfuerzo que soporta. En ese caso se sustituye el vínculo por una barra análoga a las de la estructura, dimensionada de manera que posea idéntica flexibilidad y se estudia la nueva estructura con vínculos fijos. — b) — Una deformación determinada e independiente de la sollicitación de la estructura, tal como la producida por el fraguado del hormigón o por una variación de temperatura.

Por lo tanto este es el único tipo de deformación de los vínculos que nos interesa conocer.

ii) — Si son únicamente vínculos indeformables el estado de sollicitación es independiente de toda constante elástica.

Finalmente hay otro caso de sollicitación que puede presentarse alguna vez, que consiste en una barra sometida a sollicitaciones de flexión según los dos planos principales; despreciando todo otro esfuerzo se llega entonces a la expresión

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{M_x}{E \cdot I_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} \delta \\ 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

que por ser enteramente análoga a la (4.7) sugiere idénticos comentarios.

Es conveniente aclarar desde ahora la razón que lleva también a darle especial importancia a estos dos tipos de sollicitación simple caracterizados por las condiciones

$$M_y = M_t = T_x = T_y = 0 \quad \text{o bien}$$

$$N = T_x = T_y = M_t = 0$$

respectivamente. Como se verá más adelante, en la construcción de modelos de estructuras con elementos a fibra media, se utilizan barras de sección rectangular, o con mucho menos frecuencia, de sección circular: por lo tanto se podrá disponer de dos magnitudes como máximo (base y altura), para su dimensionado, lo que exige pues que se tenga en cuenta únicamente dos variables independientes o sea dos tipos de sollicitación, y debiéndose elegir entonces en cada caso las más importantes, que para los tipos que hemos visto son el momento flector M y el esfuerzo normal N por una parte y las componentes del momento flector según dos ejes M_x y M_y por otra. La intervención de otra sollicitación exigirá utilizar una sección más complicada, por ejemplo un perfil I , que permitiera disponer de una tercera característica.

21) — SOLICITACION PLANA SIMPLE. — Se ha visto que solamente se toma en consideración, como sollicitaciones importantes, el esfuerzo normal y un momento flector que descansa en uno de los planos principales de la sección transversal. Su estudio teórico está determinado por un sistema de ecuaciones análogas a la (4.7):

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{N}{A} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \frac{M}{I} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} E \cdot \delta \\ 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

En esta expresión puede incluirse también el caso en que en la estructura haya barras de diferente módulo, puesto que no habría más que sustituir las características reales A e I por otros valores ideales que mantuvieran invariable las rigideces respectivas EA y EI . Conviene también establecer desde ya las condiciones que afectan al dimensionado, con vínculos deformables naturalmente, cuando los módulos son diferentes en el modelo y en el prototipo. Si el modelo tuviera las mismas dimensiones del prototipo se ve de (4.9) que las sollicitaciones con las mismas si ponemos como en (4.4)-

$$\delta'_p = \frac{E_p}{E_m} \delta_p \quad (4.10)$$

Luego el pasaje a otra escala puede hacerse manteniendo el mismo módulo E_m ; como δ es un desplazamiento, de (3.29) del capítulo anterior se sabe que, siendo d la relación de desplazamientos:

$$\begin{aligned} d &= e \cdot \alpha \quad \text{o sea que} \quad \delta_m = \\ &= d \cdot \delta'_p = e \cdot \alpha \cdot \frac{E_p}{E_m} \cdot \delta_p \\ d_v &= \frac{\delta_m}{\delta_p} = e \cdot \alpha \cdot \frac{E_p}{E_m} \end{aligned} \quad (4.11)$$

siendo δ_v la constante de reducción de los desplazamientos del vínculo que deben aplicarse.

22) — De la ecuación fundamental recién apuntada se deduce que las sollicitaciones no dependen directamente de las dimensiones y forma de la sección, sino únicamente de las características A , superficie de la sección transversal, e I momento de inercia de la misma, o sino del radio de giro $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$. Veremos enseguida las relaciones que deben guardar la sección del modelo con la del prototipo para que haya similitud elástica, es decir que sean iguales las deformaciones en las dos estructuras. Sin embargo para más generalidad estableceré las condiciones para una cierta reducción de las deformaciones

$$e = \frac{a_m}{a_p}$$

Para los dos tipos de sollicitación que obran simultáneamente se tiene:

$$\text{prototipo } F_p = E_p a_p A_p, \quad M_p = \frac{E_p I_p}{\rho_p} \quad (4.12)$$

$$\text{modelo } F_m = E_m a_m A_m, \quad M_m = \frac{E_m I_m}{\rho_m}$$

siendo ρ el radio de curvatura $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{dy^2}{dx^2}\right)$.

Para similitud elástica $a_m = e a_p$ luego de las (4.12):

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{A_m}{A_p} \cdot e, \text{ o sea } \beta = \frac{A_m}{A_p} \cdot \gamma \cdot e \quad (4.13)$$

y análogamente por dicha similitud $\rho_m = \frac{d}{e} \cdot \rho_p$

de donde

$$\frac{M_p}{M_m} = \frac{E_p I_p}{E_m I_m} \cdot \frac{\alpha}{e} \quad \text{Pero siendo}$$

$$\beta = \frac{F_m}{F_p} \text{ se tiene } M_m = \alpha \cdot \beta \cdot M_p, \text{ luego}$$

$$\frac{E_p I_p}{E_m I_m} \cdot \frac{\alpha}{e} = \frac{1}{\alpha \beta} \quad \text{o} \quad \frac{E_p I_p}{E_m I_m} = \frac{e}{\alpha^2 \beta} \quad (4.14)$$

y dividiendo (4.13) por (4.14) miembro a miembro:

$$\frac{r_m^2}{r_p^2} = \alpha^2$$

$$\text{o} \quad r_m = r_p \alpha \quad (4.15)$$

que junto con la (4.13), $A_m = A_p \cdot \frac{\beta}{\gamma \cdot e}$

nos determinan las características de la sección del modelo para que las deformaciones sean similares ($a_m = e a_p$) en puntos homólogos ($c_m = \alpha c_p$).

Sin embargo como generalmente las barras utilizadas en los modelos son rectangulares se puede precisar el dimensionado aún más de lo que se ha hecho; para la sección rectangular de ancho b y altura h se tiene

$$h = r \sqrt{12}, \quad A = b \cdot h$$

y sustituyendo en (4.13) y (4.15)

$$h = \alpha \cdot \sqrt{12} \cdot r_p \quad \text{y} \quad (4.16)$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha \cdot \gamma \cdot e \sqrt{12}} \cdot \frac{A_p}{r_p} \quad (4.17)$$

Las ecuaciones (4.13) y (4.15), o (4.16) y (4.17)

cuando la barra del modelo es de sección rectangular, permiten hallar las dimensiones del modelo a partir de:

i) — Magnitudes determinadas: A_p, r_p, E_p .

ii) — Magnitudes más o menos variables en forma arbitraria: α, β .

iii) — Magnitudes que dependen del material del modelo (E_m) y de la apreciación de los aparatos a utilizar en las medidas de las deformaciones (e) y del material del original.

La determinación de las constantes de reducción debe hacerse pues por medio de aproximaciones sucesivas, probando diversos materiales y escalas, hasta llegar a la combinación más conveniente, que en muchos casos, distará de ser idealmente perfecta debido a factores de costo del modelo, de local disponible y aún de los materiales disponibles.

23) — SOLICITACION POR FLEXION DESVIADA. — Las consideraciones generales hechas en el artículo anterior sirven igualmente al propósito actual. Esta sollicitación está definida por

$$\sum_1^n \int_s \left(\frac{M_x}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{M_y}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial X} \right) ds = \begin{cases} E \cdot \delta \\ 0 \end{cases}$$

Las expresiones determinantes son:

$$\text{prototipo } M'_p = \frac{E_p I'_p}{\rho_p}, \quad M''_p = \frac{E_p I''_p}{\rho''_p}$$

$$\text{modelo } M'_m = \frac{E_m I'_m}{\rho'_m}, \quad M''_m = \frac{E_m I''_m}{\rho''_m}$$

y según se vió: $M_m = \alpha \beta M_p$ y $\rho_m = \frac{\alpha}{e} \cdot \rho_p$

$$\text{de donde } \alpha \cdot \beta \cdot M'_p = \frac{E_m I'_m}{\frac{\alpha}{e} \cdot \rho'_p}$$

$$\text{y} \quad I'_m = \frac{\alpha^3 \beta}{e} \cdot \frac{M'_m}{\rho'_p} \cdot \frac{1}{E_m}$$

$$\text{o sea} \quad I'_m = \frac{\alpha^3 \beta}{e} \cdot \frac{E_p}{E_m} \cdot I'_p \quad (4.18)$$

$$\text{y análogamente: } I''_m = \frac{\alpha^2 \beta}{e} \cdot \frac{E_p}{E_m} \cdot I''_p \quad (4.19)$$

Estas dos ecuaciones resuelven el problema en

el caso de una barra de forma arbitraria, puesto que determinan los dos momentos de inercia principales; cuando la barra es de sección rectangular se tiene, calculando las dimensiones en una forma más concreta aún:

$$\frac{I_m}{I_m''} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{h \cdot b^3} \cdot \frac{h^2}{b^2} \quad (a)$$

se se admite que el momento M^1 obra en un plano vertical, es decir en el mismo plano que descansa h . Dividiendo (4.18) y (4.19) miembro a miembro y sustituyendo (a) se tiene:

$$\frac{I_p'}{I_p''} = \frac{h^2}{b^2} \quad \text{o sea} \quad u = \frac{h}{b} = \sqrt{\frac{I_p'}{I_p''}} \quad (b)$$

De la (4.18) se puede sacar:

$$\frac{bh^3}{12} = \frac{\alpha^2 \beta}{e \cdot \gamma} \cdot I_p' \quad \text{y con (b)}$$

$$\frac{b}{12} u^3 b^3 = \frac{\alpha^2 \beta}{e \cdot \gamma} \cdot I_p', \quad \text{o } b^4 = \frac{12 \alpha^2 \beta}{u^3 \cdot e \cdot \gamma} I_p'$$

de donde

$$b = \sqrt[4]{\frac{12 \alpha^2 \beta}{u^3 \cdot e \cdot \gamma} I_p'} = \frac{1}{u} \sqrt[4]{\frac{12 \alpha^2 \beta u}{e \cdot \gamma} I_p'} \quad (4.20)$$

y análogamente:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 \alpha^2 \beta u}{e \cdot \gamma} I_p'} \quad (4.21)$$

Conviene hacer notar la independencia entre estas expresiones y las deducidas en III-18 (caso general), o sea que las relaciones (3.27) dadas allí no son válidas en este caso, puesto que mientras que en las (3.27), las secciones deben ser *similares* y por ello la constante e (relación de deformaciones) queda determinada en función de las variables independientes α , β , γ , en las expresiones escritas recién se determina la forma y dimensiones de la sección de manera de obtener un cierto valor de e arbitrario, dentro de ciertos límites claro está, lo que puede obtenerse gracias a las simplificaciones hechas respecto a las sollicitaciones.

24) — SOLICITACIÓN POR FLEXIÓN PLANA PROVOCADA POR UN DISLOCAMIENTO. Tenemos que $M = \frac{E \cdot I}{\rho}$

de donde indicando con

$$r = \frac{Q_m}{Q_p}, \quad m = \frac{M_m}{M_p}, \quad i = \frac{I_m}{I_p} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{E_m}{E_p}$$

$$\text{queda } m = \frac{M_m}{M_p} = \frac{E_m \cdot I_m}{Q_m} \cdot \frac{Q_p}{E_p \cdot I_p} = \frac{\gamma \cdot i}{r}$$

pero de los desplazamientos de flexión tenemos que

$$\Delta = l \cdot \Theta = l \cdot \frac{l}{\rho} = \frac{l^2}{\rho}$$

de donde si d es la escala de desplazamientos (impuestos y resultantes):

$$d = \frac{\Delta_m}{\Delta_p} = \frac{l_m^2}{Q_m} \cdot \frac{Q_p}{l_p^2} = \frac{\alpha^2}{r}$$

y sustituyendo arriba:

$$m = \frac{\gamma \cdot i \cdot d}{\alpha^2} \quad (4.22)$$

25) — Las expresiones de reducción obtenidas para la sollicitación plana admiten que la tensión total producida es de la forma

$$N = \frac{F}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

Estamos pues evidentemente dentro del campo de validez exclusivo de las estructuras de material homogéneo (acero y madera aproximadamente), pero no en realidad en el de las estructuras de hormigón armado en que se admite generalmente, tanto en flexión simple como en flexión compuesta, que las partes extendidas del hormigón no contribuyen a la estabilidad. Sin embargo, como ya lo hizo notar MESNAGER (B. 23) el método es aún aplicable a estas, si se sustituye a la sección real la sección ficticia equivalente y si se admite con toda razón, como se hace para el cálculo analítico de sistemas hiperestáticos, que en lo que se refiere a la determinación de magnitudes hiperestáticas debe tomarse la sección *total* reducida porque las fisuras son defectos locales, con pequeña importancia sobre la deformación total.

H. CROSS (B. 24 y también B. 25) analiza la influencia de las magnitudes E e I en las estructuras hiperestáticas, dándole a $E \cdot I$ el verdadero significado de una magnitud física, "constantes de deformación" las llama, que traduce como la *rotación por unidad de momento por unidad de longitud*; en este sentido, y dada la sensibilidad de esta constante respecto a las dimensiones de la sección, la magnitud del momento y el tiempo de aplicación, resulta bastante pretencioso obtener un valor absoluto y exacto de la rigidez, así como los valores

exactos de E e I que deben utilizarse. Lo que interesa más generalmente es el valor relativo de las constantes de deformación en las diversas secciones, y esa relación no es muy sensible al valor que se le da a E o I ;—CROSS así como McCOLLOUGH, SANTARELLA y otros, aceptan como valor más conveniente en todos sentidos, el momento de inercia de la sección ideal completa.

Cuando se trata de hallar tensiones a partir de las solicitaciones deducidas de las medidas efectuadas en el modelo, deberá entonces utilizarse el

procedimiento corriente en hormigón armado sobre la contribución del hormigón a las solicitaciones de extensión: es decir que, al contrario de las estructuras en hierro, o en hormigón armado cuyas tensiones sean todas de compresión, en que se puede pasar directamente de las deformaciones y desplazamientos medidos, a las tensiones en el prototipo por medio de las constantes adecuadas (1), en el caso general del hormigón armado será necesario hallar primero las solicitaciones a partir de las observaciones y luego volver a las tensiones en el prototipo.

PARTE III - MÉTODOS DE CÁLCULO

CAPÍTULO V - SEGUNDO PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD

26)—El segundo principio de reciprocidad constituye uno de los principios más fecundos de la teoría de la elasticidad o de la resistencia de materiales para el cálculo práctico de estructuras. Su aplicación permite, en efecto, el trazado más simple y rápido de las líneas de influencia para estructuras sometidas a cargas móviles, cualquiera que sea su tipo:—Si se trata de estructuras isostáticas, especialmente trianguladas, facilita en grado sumo la obtención de la unidad o escala correspondiente, y si debe utilizarse en un sistema hiperestático será la mayoría de las veces el método más simple, especialmente cuando se le combina con la aplicación de la elipse elástica. Además su conocimiento significa en cualquier caso la posibilidad de trazar en forma completamente intuitiva el aspecto general de cualquier línea de influencia, ventaja enorme desde cualquier punto de vista.

Este principio ha sido utilizado muchas veces, en su forma más sencilla, bajo aspectos diversos y también ha sido encarado su estudio con diferentes objetos, más o menos rigurosos y con mayor o menor generalidad, pero puede establecerse con bastante certeza que su principal difusión y aplicación se debe a COLONNETTI en el campo teórico y a BEGGS en el campo experimental, dado que este principio significa la base exclusiva de los influenciómetros. Este solo hecho bastaría pues para merecerle un puesto de preferencia en el estudio que se está haciendo; también justifica que no solamente se haga su demostración para las

estructuras a fibra media en las que se admiten todos los postulados de aproximación de la resistencia de materiales, demostración que tiene la ventaja de su sencillez, sino que también se exponga su demostración rigurosa dentro del campo de la teoría matemática de la elasticidad a pesar sus extensos desarrollos.

27) — Es interesante estudiar el proceso de utilización del segundo principio de reciprocidad para ver también los lazos estrechísimos que lo unen al estudio experimental de las estructuras: casi al mismo tiempo que en Europa COLONNETTI publicaba sus investigaciones sobre este teorema, dándole desde ya su demostración completamente rigurosa basada en los trabajos de LANG y VOLTERRA, en Estados Unidos, BEGGS llegaba por vía experimental e intuitiva a la aplicación de ese mismo principio para el trazado mecánico de líneas de influencia en estructuras a fibra media.

En efecto, COLONNETTI enunció su teorema por primera vez en 1912 (B. 26, pág. 306), publicando entre 1913 y 1915 una nueva demostración más simple, así como algunas aplicaciones en las

(1) Por ejemplo en el caso general se tendrá según (3.27):

$$a_p = \frac{a_m}{e} = \frac{\alpha^2 \gamma}{\beta} a_m$$

y de aquí directamente:

$$N_p = a_p \cdot E_p = E_m \frac{\alpha^2}{\beta} a_m$$

"Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino" y en los "Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei"; — por su parte BEGGS, en el año 1916, aplicaba esa propiedad de los sistemas elásticos en la forma que describió más tarde (B. 27, pág. 497) en los siguientes términos: "Esas líneas de influencia (de las reacciones de una viga triangulada continua sobre 4 apoyos) tenían semejanza con las deformadas de vigas continuas sujetas a 3 soportes, a la que se le hubiera hecho sufrir un desplazamiento unitario en el apoyo restante para cuya reacción se había trazado la línea de influencia.

Para determinar la exactitud de esta observación se utilizó una vara de madera de sección uniforme de 3 metros de largo y 3 clavos. Para trazar la línea, etc.,"

Más adelante, después de poner el teorema de Maxwell de reciprocidad como principio fundamental de la solución mecánica de estructuras, dice aún:

"No deseando descansar completamente en consideraciones tan teóricas ("philosophical considerations"), decidí en Enero de 1920, controlar el principio establecido por medio de un ensayo práctico", ensayo que efectuó sobre un modelo de estructura de tamaño apreciable, — eran barras de 1.25 mts. de largo, — cargada con pesos que obraban por medio de hilos y poleas constituidas por ruedas de bicicleta.

A partir de ese momento BEGGS no cesó de perfeccionar su método bajo todos los aspectos: en la fabricación del modelo, en la producción del desplazamiento inicial y en la medida de los desplazamientos experimentados por los puntos del eje longitudinal de la estructura. Con tales trabajos quedaba abierto el camino para la difusión de ese magnífico método de cálculo de estructuras, camino que no tardaron en seguir otros investigadores en su afán de mejorar aún su precisión o de hacerlo, por el contrario, de ejecución más fácil y rápida; cualquiera de estas dos tendencias ha sido de muy fecundos resultados puesto que cada método o aparato tiene su campo de aplicación bien definido.

28) — Demostraré la expresión más general del SEGUNDO PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD en la forma que lo dedujo COLONNETTI utilizando las "Distorsiones" de VOLTERRA (B. 26 p. 301 y B. 20 p. 221), y de cuya obra se traduce casi literalmente, aunque agregando la demostración de la

necesidad y suficiencia de las *características de dislocación* para definirla, que tomamos de LOVE.

Supongamos trazada dentro del espacio V ocupado por un cuerpo cualquiera, en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores, con conexión simple o múltiple, una superficie o diafragma Σ cuyo perímetro descansa en la superficie del sólido y que esté contenida dentro de ese cuerpo sin cortarse nunca a si misma. Si se efectúa un corte a lo largo de esa superficie, separando así dos trozos de sólido, unidos o no por otra parte, puede conservarse el equilibrio del conjunto si sobre las dos caras del corte se aplican dos sistemas de fuerzas iguales y contrarias, que sean totalmente equivalentes al sistema de tensiones internas que existía allí antes del corte.

Indicando entonces con

$$X_n, Y_n, Z_n \text{ y } -X_n, -Y_n, -Z_n$$

las componentes de dichas fuerzas de superficie, que pueden considerarse como fuerzas exteriores sobre el cuerpo, que existen en un punto cualquiera de normal n en la superficie Σ sobre las dos caras del corte, la condición de equilibrio puede indicarse utilizando la expresión conocida de las deformaciones virtuales:

$$\begin{aligned} & \int_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) dv + \\ & + \int_S (P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w) ds \\ & + \int_{\Sigma} [X_n (\delta u_1 - \delta u_2) + Y_n (\delta v_1 - \delta v_2) + \\ & + Z_n (\delta w_1 - \delta w_2)] d\Sigma = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial \pi}{\partial a_1} \delta a_1 + \frac{\partial \pi}{\partial a_2} \delta a_2 + \frac{\partial \pi}{\partial a_3} \delta a_3 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_3} \delta \alpha_3 \right] dv \end{aligned} \quad (5.1)$$

cuando $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ y $\delta u_2, \delta v_2, \delta w_2$ son los valores de las componentes $\delta u, \delta v, \delta w$ del desplazamiento virtual, de un punto cualquiera de la superficie Σ según que se le considere como perteneciente a una u otra de las caras del corte.

Se convendrá en considerar como positiva la dirección de la normal de Σ que se dirige hacia el interior de V y entonces el subíndice l indica las componentes del desplazamiento de un punto de

Σ si se le considera como perteneciente a aquella cara del corte respecto a la cual la normal de Σ entra en V y con el subíndice 2 el relativo al mismo punto considerado como perteneciente a la otra cara del corte, respecto a la cual la normal a Σ sale de V .

Supondremos que el desplazamiento relativo de las dos caras sea un desplazamiento rígido en el espacio, es decir que se pueda poner:

$$\begin{aligned} \delta u_2 - \delta u_1 &= l' + q'z - r'y \\ \delta v_2 - \delta v_1 &= m' + r'x - p'z \\ \delta w_2 - \delta w_1 &= n' + p'y - q'z \end{aligned} \quad (5.2)$$

siendo l', m', n', p', q', r' constantes.

Y tomaremos en consideración las variaciones de configuración que un desplazamiento relativo de las dos caras del corte tal como este determina en el sistema, supuesto provisoriamente libre de cualquier fuerza exterior. Se puede siempre pensar en realizar físicamente tal variación de configuración: Una variación de configuración semejante implica en general una verdadera deformación elástica, a la cual se le da el nombre de *distorsión*, o según LOVE, *dislocación*.

Con esto no se excluye que, como caso especial, la variación de configuración de que se trata pueda sin embargo degenerar en un simple movimiento rígido relativo de una parte respecto a la otra: esto puede pasar siempre que el espacio V sea de conexión simple o sea una estructura isostática.

Vamos a demostrar ahora que dadas las seis características de la *dislocación*

$$l', m', n', p', q', r'$$

dicha dislocación queda perfectamente definida, es decir que quedan determinadas las deformaciones y tensiones en todos los puntos del sólido.

El desplazamiento (u, v, w) y las rotaciones $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ no son necesariamente de un valor, pero las componentes de deformación a_1, a_2, \dots tienen un valor definido en cada punto. Sean (u_0, v_0, w_0) uno de los valores del desplazamiento en un punto $M_0 (x_0, y_0, z_0)$; entonces uno de los valores (u_1, v_1, w_1) del desplazamiento en otro punto $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ se obtendrá por medio de la integral lineal

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (a)$$

obtenida a lo largo de cualquier línea que une los puntos M_0 y M_1 . Pero pueden obtenerse diferentes valores eligiendo distintas líneas de integración. Ahora, se tiene en general

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} a_3 - \omega_3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} a_2 + \omega_2 \quad (b)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= \int_{M_0}^{M_1} a_1 dx + \frac{1}{2} a_2 dz + \\ &+ \frac{1}{2} a_3 dy + \int_{M_0}^{M_1} \omega_2 dz - \omega_3 dy \end{aligned} \quad (c)$$

Sean $(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$ uno de los valores de la rotación en M_0 o el valor si hay uno solo. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^{M_1} \omega_2 dz - \omega_3 dy &= \int_{M_0}^{M_1} \omega_3 d(y_1 - y) - \\ &- \omega_2 d(z_1 - z) \quad \text{e integrando por partes} \\ &= \omega_2^0 (z_1 - z_0) - \omega_3^0 (y_1 - y_0) - \\ &- \int_{M_0}^{M_1} (y_1 - y) d\omega_3 - (z_1 - z) d\omega_2 \end{aligned} \quad (d)$$

donde por ejemplo:

$$d\omega_3 = \frac{\partial \omega_3}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dz$$

Ahora se tiene idénticamente

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x} &= \frac{\partial a_3}{\partial x} - 2 \frac{\partial a_1}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} &= 2 \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_2}{\partial x} \\ 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= 2 \frac{\partial a_2}{\partial y} - 2 \frac{\partial a_3}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} &= \frac{\partial a_3}{\partial z} - \frac{\partial a_1}{\partial x} \end{aligned}$$

$$2 \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y}$$

$$2 \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = \frac{\partial a_2}{\partial z} - 2 \frac{\partial a_3}{\partial x}$$

y sustituyendo en (d) y luego en (c)

$$u_1 = u_0 + \omega_2^0 (z_1 - z_0) - \omega_3^0 (y_1 - y_0) + \int_{M_0}^{M_1} \xi \, dx + \eta \, dy + \zeta \, dz \quad (e)$$

Con

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + (y_1 - y) \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) + \\ &+ (z_1 - z) \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) \\ \eta &= \frac{1}{2} a_3 + (y_1 - y) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) + \\ &+ (z_1 - z) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_3}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right) \quad (f) \\ \zeta &= \frac{1}{2} a_2 + (y_1 - y) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} \right) + \\ &+ (z_1 - z) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

y ecuaciones análogas para v_1 y w_1 .

Ahora supongamos que la región con conexión múltiple se reduzca a una con conexión simple por medio de un sistema de barreras o cortaduras.

Vamos a aplicar la ecuación (c) a un circuito, de manera que coincidan M_0 y M_1 , tomando como línea de integración un circuito *no-evanescente*, o sea un circuito tal que no pueda ser reducido a un punto sin salir fuera de la región en que estaba trazado. Tomaremos el circuito de manera que corte una determinada barrera Ω una vez, en el punto M , y no corte ninguna de las otras.

Entonces tomamos M_0 y M_1 cerca de M , en lados (fig. 9) opuestos, y tratamos el circuito como si no cortara Ω . Además se comprueba fácilmente que en virtud de las condiciones que deben cumplir las expresiones a_1, \dots, a_3 , como funciones de los desplazamientos u, v, w , se tiene que las expresiones (f) cumplen idénticamente:

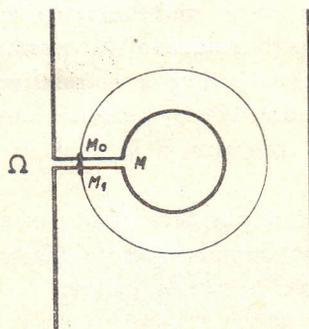


Fig. 9.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

Ahora bien, según el teorema de Stokes se tiene que:

$$\int_{c'} \xi \, dx + \eta \, dy + \zeta \, dz = \int_{s'} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) n \right] ds'$$

siendo s' una superficie cuyo contorno es el circuito c' del cual forma parte el trozo abierto en Ω ; por lo tanto

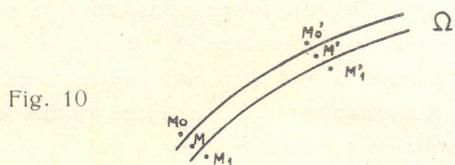


Fig. 10

$\int_{c'} \xi \, dx + \eta \, dy + \zeta \, dz = 0$ y entonces se deduce que el valor de la integral

$$\int_{M_0}^{M_1} \xi \, dx + \eta \, dy + \zeta \, dz$$

es el mismo para todos los circuitos *concordantes*, esto es para todos aquellos que pueden deformarse uno en el otro sin pasar fuera de la región (puesto que dentro de ella es que se cumple la irrotacionalidad de (ξ, η, ζ)).

Luego pues, en cualquier punto de Ω que se tome como punto M , la integral curvilínea considerada tiene el mismo valor para todos los circuitos que empiezan y terminan en M , siempre que

corten la barrera Ω más que en M y no corten ninguna otra.

Se deduce que $u_1 - u_0$ tiene en cada punto M de Ω un valor definido que depende de la posición de M . Lo mismo sucede con $v_1 - v_0$ y $w_1 - w_0$.

Consideremos ahora la variación de $u_1 - u_0$ cuando M se mueve en Ω .

Sean M y M' dos puntos arbitrarios de Ω (fig. 10), M_0 y M_1 puntos cercanos a M en lados opuestos de Ω , M'_0 y M'_1 puntos cercanos a M' en lados opuestos de Ω ; (u'_0, v'_0, w'_0) los desplazamientos en M'_0 ; (u'_1, v'_1, w'_1) aquellos en M'_1 . El teorema expresado por la ecuación (e) puede ser aplicado al pasaje de M_0 a M'_0 , coincidiendo con una curva trazada en Ω y que une M a M' . Así se tiene

$$u'_0 - u_0 = \omega_2^0 (z'_0 - z_0) - \omega_3^0 (y'_0 - y_0) + \int_M^{M'} \xi dx + \eta dy + \zeta dz.$$

El mismo teorema puede aplicarse al paso de M_1 a M'_1 , coincidiendo con la misma curva, y de allí

$$u'_1 - u_1 = \omega_2^1 (z'_1 - z_1) - \omega_3^1 (y'_1 - y_1) + \int_M^{M'} \xi dx + \eta dy + \zeta dz.$$

Desde que (x_1, y_1, z_1) vale lo mismo que (x_0, y_0, z_0) y (x'_1, y'_1, z'_1) lo mismo que (x'_0, y'_0, z'_0) , estas ecuaciones dan, restando miembro a miembro:

$$u'_1 - u'_0 = (u_1 - u_0) + (\omega_2^1 - \omega_2^0) (z'_0 - z_0) - (\omega_3^1 - \omega_3^0) (y'_0 - y_0)$$

donde los coeficientes de $(z'_0 - z_0)$ e $(y'_0 - y_0)$ son independientes de (x'_0, y'_0, z'_0) . Existen además ecuaciones similares para $v'_1 - v'_0$ y $w'_1 - w'_0$.

Se deduce pues que las discontinuidades u, v, w en Ω están expresadas por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= l' + q' z - r' y \\ v_1 - v_0 &= m' + r' x - p' z \\ w_1 - w_0 &= n' + p' y - q' x \end{aligned}$$

como se dijo. Es decir que dadas estas 6 constantes, quedan definidas completamente las componentes u, v, w del desplazamiento y por consiguiente las deformaciones y luego las tensiones.

Se puede notar que, mientras que los desplazamientos son discontinuos en Σ , el estado de deformación y el de tensión se presentan en cambio caracterizados por valores de sus componentes que son siempre continuos en el espacio V , sin excluir los puntos de la superficie Σ .

29) — Con estos valores (5.2), la expresión (5.1) queda (indicando con u', v', w' , etc., los desplazamientos, deformaciones y tensiones producidas por la dislocación):

$$\begin{aligned} & \int_V (F_x u' + F_y v' + F_z w') dv + \\ & + \int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w') \alpha_s \\ & - \int_{\Sigma} [X_n (l' + q'z - r'y) + \\ & + Y_n (m' + r'x - p'z) + Z_n (n' + p'y - q'x)] d\Sigma = \\ & = \int_V \left[\frac{\partial \pi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial \pi}{\partial a_2} a'_2 + \frac{\partial \pi}{\partial a_3} a'_3 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_1} \alpha'_1 + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} \alpha'_2 + \frac{\partial \pi}{\partial \alpha_3} \alpha'_3 \right] dv \end{aligned}$$

Ahora bien, es fácil demostrar que el segundo miembro de esta ecuación es nulo. Consideremos por un momento que la dislocación se hubiera efectuado sobre el cuerpo en su estado natural. Para el equilibrio del sistema en estas condiciones debe satisfacerse evidentemente una ecuación completamente análoga a la (5.1), pero en la cual serán nulos todos los términos en F y P .

Nada impide aplicar esa expresión tomando para $\delta u, \delta v, \delta w$, precisamente las componentes u, v, w , de los desplazamientos que habíamos supuesto producidos en el sistema elástico por las fuerzas exteriores.

Entonces, como estos desplazamientos son continuos en Σ , en aquella ecuación se anulan no solo las dos primeras integrales, sino también la tercera. Se tiene pues la condición

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1} \right)' a_1 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2} \right)' a_2 + \dots + \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_3} \right)' a_3 \right] dv = 0$$

y como de acuerdo con una propiedad de las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1} \right)' a_1 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2} \right)' a_2 + \dots &= \\ = \frac{\partial \pi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial \pi}{\partial a_2} a'_2 + \dots \end{aligned}$$

queda

$$\int_v \left[\frac{\partial \pi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial \pi}{\partial a_2} a'_2 + \dots + \frac{\partial \pi}{\partial a_3} a'_3 \right] dv = 0$$

como se estableció antes.

Luego pues queda la (5.1) finalmente, poniendo en evidencia las 6 características de la dislocación:

$$\begin{aligned} &\int_v (F_x u' + F_y v' + F_z w') dv + \\ &\int_s (P_x u' + P_y v' + P_z w') ds = \quad (5.3) \\ &= l' \int_{\Sigma} X_n d\Sigma + m' \int_{\Sigma} Y_n d\Sigma + \\ &+ n' \int_{\Sigma} Z_n d\Sigma + p' \int_{\Sigma} (Z_n y - \\ &- Y_n z) d\Sigma + q' \int_{\Sigma} (X_n z - \\ &- Z_n x) d\Sigma + r' \int_{\Sigma} (Y_n x - X_n y) d\Sigma \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las seis integrales en Σ son las seis características del sistema de tensiones que se desarrollan en el sólido dado, bajo la acción del sistema de fuerzas exteriores que se considera, se obtiene finalmente que:

“La suma de los productos de las seis características del sistema de tensiones internas que se desarrollan en un cuerpo elástico en equilibrio, en correspondencia de una sección dada, por las características correspondientes de una dislocación, es igual al trabajo

que las fuerzas exteriores, aplicadas al cuerpo mismo, realizarían en el cambio de configuración a la cual daría origen aquella dislocación.”

.

El mayor interés para nosotros existe cuando la dislocación se reduce a un desplazamiento elemental, es decir una traslación o una rotación simple.

Por ejemplo si se toma una traslación pura, según el eje x , de magnitud unitaria, tendremos de (5.3) con

$$l' = 1 ; m' = n' = p' = q' = r' = 0$$

que

$$\begin{aligned} &\int_v (F_x u' + F_y v' + F_z w') dv + \int_s P_x u' + \\ &+ P_y v' + P_z w') ds = \int_{\Sigma} X_n d\Sigma \end{aligned}$$

y si aún la carga se reduce a una fuerza única P aplicada en cierto punto, ya que

$$P_x u' + P_y v' + P_z w' = P \cdot f$$

si f es el desplazamiento de dicho punto en la dirección de P , queda

$$P \cdot f = \int_{\Sigma} X_n d\Sigma \quad (5.4)$$

Análogamente, si

$$p' = 1 ; l' = m' = n' = q' = r' = 0$$

queda

$$P \cdot f = \int_{\Sigma} (Z_n y - Y_n z) d\Sigma \quad (5.5)$$

Es decir que:

“La componente del vector sollicitación (fuerza o momento) del sistema de tensiones internas que se desarrollan en un cuerpo elástico en equilibrio en correspondencia de una sección dada, según una dirección cualquiera, es medida por el mismo número que mide el trabajo que realizaría la fuerza exterior aplicada al cuerpo mismo cuando, cortado este en correspondencia de la sección dada, se hiciere sufrir a las dos caras del corte un desplazamiento relativo (traslación o rotación) cuyo vector, de magnitud unitaria, coincide con la dirección establecida”.

30) — Se ha expuesto recién la demostración del segundo principio de reciprocidad con toda su generalidad y rigurosidad aunque ello no es indispensable para el objeto que se persigue en este trabajo, puesto que el trazado de líneas de influencia, teórico o experimental de estructuras utiliza única-

mente el caso particular de las dislocaciones simples (una traslación o una rotación no nula, solamente, por determinación). El tema es muy interesante y creo que no sea tiempo perdido el que se dedique a conocer tal principio en esa forma. Sin embargo se puede también dar una demostración más simple y menos extensa como fundamento de los métodos experimentales, para aquellos que no desean entrar en tanto detalle.

La demostración del segundo principio de reciprocidad en su forma particular y limitada se basa simplemente en el teorema de Betti de reciprocidad de las deformaciones, o también en su forma

CAPÍTULO VI - ECUACIÓN GENERAL DE ESTRUCTURAS PORTICADAS

31) — Todos los métodos mecánicos de cálculo para trazado de diagramas actualmente en uso, se refieren exclusivamente a estructuras compuestas por elementos rectilíneos de sección constante, y, desde luego, planas; — la justificación teórica que sigue se limitará a estas condiciones.

Supongamos que se tiene una estructura continua de nudos rígidos compuesta por tales elementos, dispuestos y combinados en cualquier forma; para cada uno de esos elementos, o mejor dicho, para cada uno de sus extremos podremos aplicar las expresiones conocidas

$$M_1 = M_0 + 2EK (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\alpha) \quad (6.1)$$

$$M_1 = -M_0 + 2EK (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\alpha)$$

en donde M_0 y M_1 son los momentos existentes en los apoyos 0 y 1; M_0'' y M_1'' los mismos momentos si el elemento tuviera sus extremos perfectamente empotrados; φ_0 y φ_1 los ángulos de giro de las tangentes en los apoyos, y α el ángulo de giro del eje del elemento.

Ahora bien En cada uno de los nudos obrarán una serie de momentos M_1, M_2, \dots , producidos por las barras que llegan a él, pero para que ese nudo esté en equilibrio después de producida la carga y deformación correlativas de la estructura, la suma de dichos momentos debe ser nula:

$$\sum_1^{n-1} M = 0$$

Entonces si en esta expresión sustituimos los valores de los momentos dados en (6.1), notando

más simple establecida por Maxwell. Pero aún con la aplicación de este teorema se han seguido diversos caminos por los varios autores que han tratado el tema, que presentan diferencias de detalle o procedimiento, o que encaran el problema con mayor o menor generalidad; — quizás a mi modo de ver, el más interesante y más directo es el método de STABILINI, obtenido como generalización del estudio de ALBENGA sobre el teorema de reciprocidad de LANG (1), que se ha tomado como base para la demostración dada en la publicación de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario, a que hace referencia la nota colocada al pie del título de este trabajo.

que los ángulos φ_0 que figuran allí y que corresponden al nudo cuyo equilibrio se establece, debe ser igual para todas las barras (e igual al giro del nudo φ_n), tendremos:

$$\begin{aligned} & 4E\varphi_0 (K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1}) + \\ & + 2E (K_1 \varphi_1 + \dots + K_{n-1} \varphi_{n-1}) - \\ & - 6E (K_1 \alpha_1 + \dots + K_{n-1} \alpha_{n-1}) + \\ & + \sum_1^{n-1} M_0^p = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Además la expresión de los momentos de apoyo M^0 se reduce a

$$\begin{aligned} M^0 &= \frac{2}{l^2} \int_0^l M (1 - 3x) dx = \\ &= \frac{2}{l^2} \left[l \int_0^l M dx - 3 \int_0^l M x dx \right] = \\ &= \frac{2}{l^2} (l \mathfrak{A}_m - 3 \mathfrak{M}_m) \end{aligned}$$

(1) L. STABILINI (B. 28). También han dado demostraciones algo diferentes McCULLOUGH y THAYER (B. 25), MESNAGER (B. 29), C. GUIDI (B. 12) y especialmente R. MABILLEAU en su interesante obra sobre "Deformaciones Ficticias" (B. 30) en pag 3 y 49.

$$\begin{aligned}
 y \quad M^1 &= -\frac{2}{l^2} \int_0^l M (2l - 3x) dx = \\
 &= -\frac{2}{l^2} \left[2l \int_0^l M dx - 3 \int_0^l M x dx \right] = \\
 &= -\frac{2}{l^2} (2l \mathcal{A}_m - 3 \mathcal{M}_m) \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

cuando se indica con \mathcal{A}_m el área de la superficie de momentos isostáticos de las fuerzas exteriores y con \mathcal{M}_m el momento estático de la misma superficie respecto a un apoyo.

Con cuyos valores queda la (6.2), si admitimos que todos los elementos tienen el mismo módulo de elasticidad:

$$\begin{aligned}
 2 \varphi_n \sum_1^{n-1} K + \sum_1^{n-1} K_p \varphi_p - 3 \sum_1^{n-1} K_p \alpha_p + \\
 + \sum_1^{n-1} \frac{2}{l^2} (l \mathcal{A}_m - 3 \mathcal{M}_m) = 0 \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones podremos escribir un número n igual al número de nudos, o sea el número de incógnitas φ , ángulo de giro de nudo; se necesitan pues un número de ecuaciones suplementarias igual al número r de ángulos α , no nulos a priori, que existan, número que generalmente no es igual al número b de barras, porque muchas de estas no se desplazan (estructuras con nudos de coordenadas fijas en el espacio) o se desplazan paralelamente a sí mismas. Estas r relaciones entre los momentos de apoyo se obtienen estableciendo el equilibrio de los momentos que obran en los extremos de las barras cortadas por secciones de la estructura convenientemente elegidas, de manera de aislar los elementos que poseen ángulos α diferentes de cero:

$$\sum_r^s M_p + \sum F \cdot \delta = 0 \quad (6.5)$$

En esa forma tendremos un sistema de $(n + r)$ ecuaciones lineales con $(n + r)$ incógnitas, con lo cual, teóricamente por lo menos, se hallan de

inmediato los ángulos φ y α , y por las expresiones (6.1) los momentos de apoyo

32) — ESTRUCTURA DE NUDOS FIJOS EN EL ESPACIO — Cuando los nudos están inmóviles en el espacio, en posición pero no en dirección naturalmente, todos los ángulos α son nulos y por lo tanto el sistema de ecuaciones (6.4) es suficiente por sí solo para resolver el problema elástico. Ahora bien, como las fuerzas exteriores entonces figuran únicamente en el término $(l \mathcal{A}_m - 3 \mathcal{M}_m)$, es decir por el área y el momento estático respecto a un apoyo, de la superficie de momentos flectores isostáticos M (de la viga simplemente apoyada), o lo que es lo mismo, por su área y la vertical del centro de gravedad de esta, se puede establecer que:

“Los momentos de apoyo de una estructura continua de nudos fijos en el espacio, tienen el mismo valor cualquiera que sean las fuerzas exteriores que la soliciten, siempre y solamente en el caso, que los diagramas de momentos flectores de la viga isostática equivalente, de los diversos sistemas, tengan la misma área y la misma posición de la vertical del centro de gravedad de dicha área”.

ESTRUCTURA DE NUDOS MÓVILES. — En este caso que existen ángulos α no nulos se necesitan tanto las ecuaciones (6.4) como las (6.5) en número igual al de los α . De manera pues que en este caso las fuerzas exteriores no solamente aparecen por su diagrama de momentos isostáticos como en el anterior, sino que también figuran en forma de momentos estáticos con respecto a ciertos puntos de su plano, ecuaciones (6.5), que pueden transformarse, haciendo intervenir en cambio de las fuerzas F , resultantes de las cargas de cada tramo, sus componentes en los nudos o sea las reacciones isostáticas:

$$\sum_r^s M + \sum (R \delta + R' \delta') = 0 \quad (6.6)$$

Por lo tanto se puede establecer que:

“Los momentos de apoyo de una estructura continua de nudos móviles en el espacio, tienen el mismo valor cualquiera que sean las fuerzas exteriores que la soliciten, siempre y solamente en el caso que:

a) — Los diagramas de momentos flectores de la viga isostática equivalente de los diversos sistemas tengan la misma área y la misma posición de la

vertical del centro de gravedad de dicha área.

b) — Se agregue una fuerza en cada apoyo igual a la diferencia de las reacciones isostáticas producidas por los sistemas que se sustituyen”.

33) — Es necesario también hallar un método de repartición de un momento incidente entre las diversas barras que concurren al nudo.

a) — En el caso de un nudo fijo en el espacio los momentos en los apoyos de un tramo sin carga directa, como se puede considerar siempre para esta repartición, están dados por la expresión siguiente, deducida de la (6.1), si se hace $\alpha = 0$:

$$M_0^p = \frac{2EI}{l}(2\varphi_0 + \varphi_1) \quad M_1^p = \frac{2EI}{l}(2\varphi_1 + \varphi_0) \quad (b)$$

Hallando φ_1 en la segunda y sustituyendo en la primera:

$$M_0^p = 2EK \left(2\varphi_0 + \frac{M_1^p}{4EK} - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

o sea
$$M_0^p = 3EK\varphi_0 + \frac{M_1^p}{2}$$

Haciendo ahora
$$M_1^p = c \cdot M_0^p$$

y haciendo las reducciones convenientes se tiene finalmente:

$$M_0^p = \frac{6EK}{(2-c)} \varphi_0 \quad (6.7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de equilibrio $\sum_1^n M_p = M_R$ y notando que el ángulo φ_0 es el mismo para todas esas barras, se tiene

$$M_R = \sum_1^n \frac{6EK}{(2-c)} \varphi_0 = 6E\varphi_0 \sum_1^n \frac{K}{(2-c)}$$

que combinada con la (6.7) resulta

$$M_0^p = \left(\frac{K}{2-c} \right) \frac{M_R}{\sum_1^n \frac{K}{2-c}} \quad (6.8)$$

Particularmente cuando la barra que se considera tiene su otro extremo articulado, será $c = 0$ y por lo tanto:

$$M_0^p = K_p \frac{M_R}{\sum_1^n K_p} \quad (6.9)$$

Y cuando el diagrama de momentos es rectangular, o sea con la convención de signos adoptada, $M_1^p = -M_p$, será $c = -1$ y por tanto también:

$$M_0^p = \frac{K_p}{3} \frac{M_R}{\sum_1^n K_p} = K_p \frac{M_R}{\sum_1^n K_p} \quad (6.10)$$

b) — Tratándose de estructuras de nudos móviles no puede hacerse la repartición del momento incidente en la forma sencilla expuesta recién, puesto que en las expresiones (b) de más arriba entraría además el ángulo α que no es común a todas las barras. Es necesario pues recurrir a otro parámetro observable, dependiente por supuesto de la deformación.

Si tomamos como ejes coordenados para referir la deformación de una barra, un par de ejes con origen en un punto de la deformada y que sean respectivamente tangente y normal a ella, se puede poner enseguida por el teorema de Mohr, cuando las medidas se refieren al punto de inflexión

$$y = \frac{Xx}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{x}{EI} = \frac{Xx^2}{3EI} = Q \frac{x^3}{3EI}$$

de donde el esfuerzo cortante será:

$$Q = 3EI \frac{y}{x^3} \quad (6.11)$$

En esta ecuación, I es un dato del problema, x e y son magnitudes observables en el modelo, mientras que E es desconocido. Para levantar esta indeterminación, se puede aplicar esta ecuación a un tramo en que se conozca Q , como puede ser en la barra incidente, y entonces comparando las expresiones (6.11) aplicadas a estos dos casos, quedará como se ve fácilmente:

$$Q_1 = \frac{(Iy)_1}{(Iy)_0} \cdot \frac{x_0^3}{x_1^3} \cdot Q_0 \quad (6.12)$$

o también si $x = \text{constante}$:

$$Q_1 = \frac{(Iy)_1}{(Iy)_0} \cdot Q_0 \quad (6.12')$$

PARTE IV - METODOS EXPERIMENTALES

CAPITULO VII - MICROINFLUENCIOMETROS

34) — De la discusión hecha en el capítulo II se deduce que los *microinfluenciómetros* (o *defórmómetros* como los llama BEGGS), pueden considerarse como representación teóricamente exacta de los fenómenos elásticos, puesto que por oposición a los influenciómetros con grandes deformaciones, o deformaciones macroscópicas, la magnitud de los desplazamientos no significa ningún error, en principio.

Luego pues, basándose en el segundo principio de reciprocidad, y de acuerdo con la exposición hecha, se puede definir el trabajo del influenciómetro en la forma siguiente: En la sección de cuyas características (esfuerzo normal, esfuerzo tangencial y momento flector) se desea trazar las líneas de influencia, se efectúa un corte según la sección transversal y entonces se miden los desplazamientos que sufren los puntos del eje longitudinal, en los cuales se desea la ordenada de influencia, cuando a las dos caras de dicho corte se las somete por medio del deformador a ciertos desplazamientos relativos correspondientes a la característica que se desea hallar.

Este desplazamiento relativo, mejor definido como *dislocación*, es la unidad a que hay que referir los desplazamientos sufridos por los puntos del eje, puntos de aplicación de las cargas:

$$\begin{aligned} \text{ordenada de influencia} &= \\ &= \frac{\text{desplazamiento del punto}}{\text{dislocación}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Como se dijo al final del capítulo V la dislocación que debe producirse es aquella cuyo vector coincide con el de la sollicitación que se busca.

El principio establecido es capaz de interpretar estructuras espaciales, aunque siempre a fibra media, pero la aplicación práctica se reduce hasta ahora, indudablemente por dificultades en la realización del deformador más que nada, a estructuras planas.

De la misma definición (7.1) se deduce que no interesa el valor de la escala de los desplazamientos, puesto que lo que se obtiene es la relación de ellos, pero en cambio es necesario asegurarse que esa relación es la misma en modelo y prototipo, o sea, simplemente que los desplazamientos del modelo sean proporcionales a los del prototipo.

De acuerdo con esto, tomando la sollicitación plana completa (en el sentido corriente de los cálculos prácticos) con momento flector y esfuerzo normal, las escalas están determinadas por las (4.16) y (4.17), pero ahora conviene colocar la escala de desplazamientos $d = e. \alpha$, o sea

$$\begin{aligned} h_m &= \alpha. \sqrt{12}. r_p \\ b_m &= \frac{\beta. \alpha}{\gamma. \alpha. d} \cdot \frac{A_p}{r_p} = \frac{\beta}{\gamma. d} \cdot \frac{A_p}{r_p} \end{aligned}$$

Ahora bien, β en este caso no es un dato del problema, sino que sería la escala de las fuerzas internas que es desconocida, pero no interesa su valor, sino solamente que permanezca constante a lo largo de toda la estructura. Como d también debe serlo se podrá poner

$$\frac{\gamma. b_m r_p}{A_p} = \text{Cte.} \quad \text{y de la (4.16)} \quad \frac{\gamma b_m h_m}{A_p. \alpha. \sqrt{12}} = \text{Cte.}$$

o sea que las condiciones necesarias y suficientes serán, cuando se indica con k una constante arbitraria, y suponiendo un material único en toda la estructura (si no fuera así bastaría utilizar la sección reducida):

$$\begin{aligned} h_m &= \alpha \sqrt{12}. r_p \\ b_m &= K. \frac{A_p}{h_m} \end{aligned} \quad (7.2)$$

35) — Este caso sería sin embargo bastante complicado para realizar, no solo por las escalas sino también por la confección del modelo con dos variables, y, en efecto, no es utilizado por ningún investigador. La construcción del modelo se efectúa cortándolo en una chapa de material de espesor constante y dándole a las barras alturas variables. Es decir que se dispone en este caso de una sola variable escalar, lo que exige tomar en cuenta una sola sollicitación que es indudablemente, en este caso de estructuras continuas flexionadas, el momento flector.

De aquí, entonces, podemos simplificar más la escala de lo que aparece en (7.2), si volvemos a la (4.14) correspondiente a la sollicitación de flexión únicamente y despejamos I_m :

$$I_m = \frac{E_p}{E_m} \cdot I_p \cdot \frac{\alpha^2 \beta}{e}$$

pero como $I_m = \frac{b_m h_m^3}{12}$ queda:

$$h_m^3 = \frac{12 \cdot \alpha^2 \beta}{b_m \cdot e \cdot \gamma} \cdot I_p \quad \text{o indicando con}$$

k' otra constante arbitraria (puesto que todas las magnitudes que cubre son constantes para un caso dado y cuyo valor no interesa):

$$h_m = k' \sqrt[3]{I_p} \quad (7.3)$$

es decir que para tener desplazamientos similares en el modelo y prototipo de una estructura a fibra media sometida a esfuerzos de flexión en forma principal, es suficiente darle al modelo, de espesor constante, alturas proporcionales a la raíz cúbica de los momentos de inercia correspondientes del prototipo, sin tener en cuenta para ello la escala α de longitudes.

Sin embargo hay veces que cierta parte de la estructura, aunque trabajando en flexión, puede tener un esfuerzo normal relativamente importante; en este caso puede tomarse consideración, si bien en forma bastante rústica, pegando una chapa sobre otra en esas partes. El espesor necesario, para una altura ya dimensionada de acuerdo con la (7.3), se puede hallar de la segunda de (7.2): para el lugar que se toma como base con el espesor de la chapa única y con h_m ya determinado se halla k de la segunda (7.2), valor que se utiliza entonces para el lugar al cual quiere aumentarse el espesor de acuerdo con la altura determinada normalmente.

Luego pues si bien el modelo de los microinfluenciómetros toma en cuenta el efecto de las deformaciones normales y tangenciales, además de las flexionales, como dice BEGGS (B. 34), puesto que es del trabajo *real* de una estructura que se deducen las incógnitas, no lo hace sin embargo en forma completamente rigurosa, ya que la escala verdadera de esas dos sollicitaciones puede diferir, mucho, a veces, de la teórica. Este error se mantiene generalmente dentro de límites muy pequeños debido a la importancia de la flexión, pero conviene emplear el aumento de sección por superposición de chapas en aquellos casos en que, como puede apreciarse cualitativamente con facilidad, las tensiones normales lleguen a tener influencia preponderante, y también conviene tratar de

mantener la relación $\frac{\text{altura}}{\text{longitud}}$ de las barras del mo-

delo y del prototipo más o menos constante para hacer intervenir en forma semejante la influencia del esfuerzo cortante en las sollicitaciones, que como se sabe, aumenta rápidamente con el aumento de esa relación.

Lo que es indudable, y es la gran superioridad de estos métodos que introdujo BEGGS con modelos planos, que en esta forma se tiene en cuenta el efecto sobre las sollicitaciones, de las dimensiones transversales de las barras, no asimilables a líneas, y también el efecto de los nudos y chapas de acordamiento que, como en las vigas Viendeel, pueden tener importancia decisiva, ya que en esas regiones la distribución de tensiones no tiene semejanza alguna con las distribuciones simples del cuerpo de la barra.

Ya que se trata del dimensionado del modelo, conviene además encarar el punto de vista de la conveniencia del trabajo. Precisamente esa relación $\frac{\text{altura}}{\text{longitud}}$ tiene gran importancia para la faci-

lidad de manejo, porque representa la rigidez de la barra del modelo. Al producir la dislocación en una sección, la fuerza que debe ejercer el deformador crece con la rigidez y puede llegar a ser completamente imposible de ejercer con aparatos prácticos, y también, como para un determinado desplazamiento lineal o angular las tensiones producidas en la barra crecen con la rigidez, podrían llegar a superar el límite elástico del material, falsando por lo tanto los resultados. Hay así tres constantes que deben tenerse en cuenta:

- Material
- Magnitud de la dislocación
- Rigidez de las barras.

El material conviene entonces que presente un límite elástico relativamente alto y un pequeño módulo de elasticidad, que significa menor rigidez; según OBERTI (B. 8) se puede establecer en general que el pequeño valor de la relación E/σ_E constituye el principal coeficiente de calidad de un material para modelos. De acuerdo con estos conceptos, así como por su homogeneidad, isotropía y facilidad de trabajo, el celuloide es el mejor material, muy superior al papel, cartón y otros materiales que han sido usados al comienzo. Según GUIDI (B. 12) esas constantes son:

$$E = 25000 \text{ k/cm}^2$$

$$m = 2.4$$

$$\sigma_K = 400 - 500 \text{ k/cm}^2$$

$$\sigma_E = 250 \text{ k/cm}^2$$

La magnitud de la dislocación convendría que fuese lo más pequeña posible por las razones dadas recién y también para asimilarse más a las hipótesis de cálculo, pero es fácil darse cuenta que por otra parte tiende a aumentarla las consideraciones del error de producción de la dislocación y de lectura de los desplazamientos. En el

minuir todavía más la magnitud de la dislocación, debido a que la rigidez relativamente grande puede producir los inconvenientes ya apuntados; sucede esto en estructuras muy complicadas, compuestas por barras de pequeña longitud, como sucede en puentes en arco con tablero solidario, etc.; — THOMPSON (B. 32) precisamente indica que durante el estudio del puente sobre el río Yadkin, del tipo nombrado, tuvo que emplear dislocaciones de esfuerzo normal de 0.137 mm. en cambio del valor normal, debido a la enorme rigidez, especial-

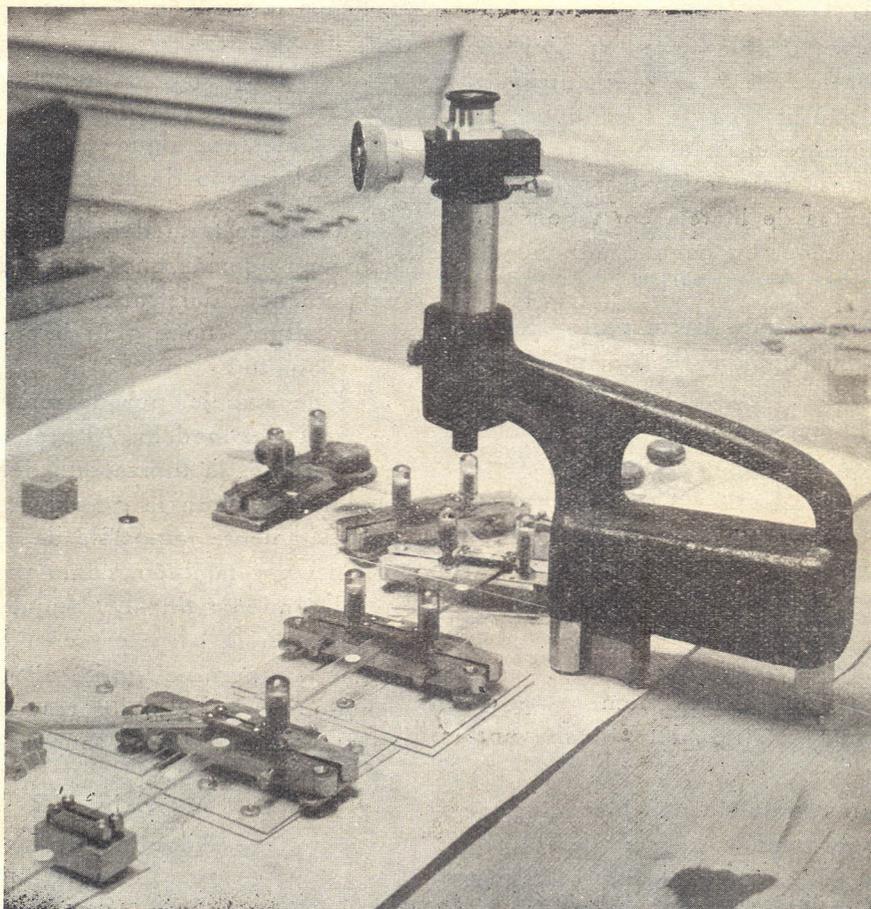


Fig. 11

aparato de BEGGS por ejemplo, las dislocaciones normales son para el ejemplar utilizado en el laboratorio:

$y = 0.914 \text{ mm.}$, $x = 1.293 \text{ mm.}$, $\varphi = 0.01007 \text{ radianes}$ con un error máximo de construcción entre 0.0007 (B. 31) y 0.005 mm (B. 12). Admitiendo como más probable este último valor y suponiendo que se agreguen los errores de los dos juegos de fichas, se obtiene como error máximo en la dislocación el 1 %.

Hay veces no obstante en que es necesario dis-

mente en la región de la clave, que producía en el modelo fenómenos de flambéo normalmente a su plano; o bien los resortes eran incapaces de llevar nuevamente a contacto las caras, según el sentido

Las barras deben hacerse de la mayor flexibilidad posible, aunque sin reducir demasiado las dimensiones debido a la exactitud del dimensionado; —según McCOLLOUG y THAYER (B. 25) en los casos de arcos, la altura del modelo en la clave conviene que sea alrededor del 2 % de la luz,

proporción que en los ensayos hechos en el laboratorio ha dado buenos resultados, y a disminuir aún en los modelos muy complicados.

39) — En las figuras 11 y 12, que reproducen dos aspectos diferentes de la utilización del procedimiento de Beggs en un modelo de puente, se pueden observar los elementos fundamentales.

El *deformador* o productor de dislocaciones es la parte más delicada, por esa misma precisión que se ha visto necesaria y está compuesto por dos fuertes piezas de acero, móviles una respecto a la otra, que se unen a las dos caras del corte respectivamente; la interposición de un par de fichas de acero entre dos entalladuras practicadas en ca-

miento del modelo y en cambio es más rápido y más seguro que soldar los bordes con una solución de celuloide.

La medida de los desplazamientos de los puntos del eje longitudinal del modelo se hace con microscopio de ocular micrométrico, en los cuales cada división del tambor es de 0 005 milímetros aproximadamente. Las lecturas se hacen sobre puntos de dimensiones microscópicas marcados en pequeños discos de celuloide blanco que se pegan al modelo en el lugar indicado, y la orientación del retículo de los microscopios en la dirección de las fuerzas aplicadas, se hace por medio de un hilo que se hace coincidir con esa dirección marca-

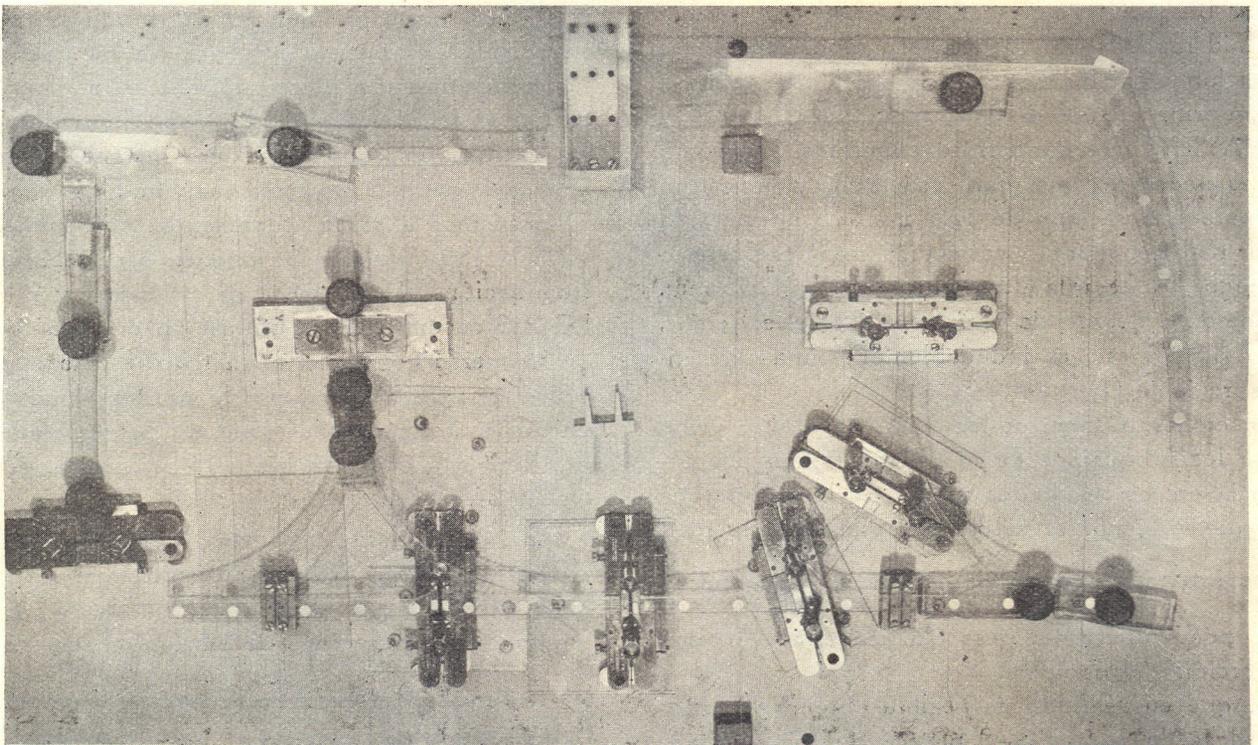


Fig 12

da pieza, provoca los desplazamientos relativos necesarios siempre en forma simétrica respecto a la posición natural, en forma de compensar errores de origen. Ese par de fichas tiene una forma y dimensiones determinadas para cada tipo de dislocación.

También se ven unas pequeñas bridas de acero que se utilizan cuando es necesario volverle la continuidad a alguna sección cortada por utilización anterior de un deformador; — según las observaciones de THOMBSON (B. 32) tales bridas no afectan en nada absolutamente el comporta-

da en el dibujo que sirve de base al montaje del modelo, como puede verse en la figura 12.

MAGNEL, con el objeto de disminuir el costo de los microscopios (ya que la rapidez del trabajo exige el mayor número posible de estos, debido a que la mayor parte del tiempo, relativamente, es absorbida por la operación de los deformadores), emplea microscopios con ejes fijos y coloca en los puntos de observación, unos "tests" constituidos por pequeñas placas de vidrio sobre las que se ha grabado un par de ejes rectangulares de 1 mm. de largo divididos en 100 partes; en tal forma

puede apreciarse hasta 0.0025 mm. más o menos.

La lectura debe hacerse así indudablemente más rápida, pero quizás, no hemos trabajado con el MAGNEL, la colocación y orientación de los tests sea un poco complicada. Una comparación fundada solo podrá hacerse trabajando con los dos aparatos, pero parece que tanto uno como otro método poseen las mismas magníficas propiedades, y que con los dos puede trabajarse con facilidad y sencillez.

37) — El corte del celuloide debe hacerse en dos etapas para poder hacerlo suficientemente exacto: primero se corta a una distancia de 0.5 a 1 mm. de la línea definitiva con una pequeña sierra alternativa para madera y luego se afina con lima. Según BEGGS ("Rules of technique for testing celluloid models with deformeter apparatus") las dimensiones finales deben responder a las teóricas con un error máximo de 0.025 mm.; McCULLOUGH y THAYER, sin dar cifras concretas, expresan que es necesario una gran exactitud y muestran que para una sección de 12.5 mm. de altura, si la altura real del modelo varía 0.25 mm. en más o en menos, es decir la altura entre 12.25 y 12.75 mm. el momento de inercia varía, entre esos extremos, de un 15 %, que es indudablemente una diferencia apreciable (1).

Sin embargo un error local en la altura, como serían los producidos en el trabajo, tienen una influencia en los resultados menor de lo que parece a simple vista por el valor de I , puesto que realmente interviene por su peso elástico $\frac{\Delta s}{E I}$, y por lo tanto podrá alterar el peso elástico total en una proporción despreciable.

Aunque en realidad es posible obtener la exactitud deseada por BEGGS, parece que aún limitándola a un error máximo de 1/10 de milímetro, con lo que se abrevia el tiempo destinado a la fabricación, o sea un error en el valor de I , para una altura de sección de 10 mm. digamos como mínimo, igual a 3 %, el error en el dimensionado de la estructura debe llegar a lo sumo a una pequeña fracción de 1 %. Claro está que tal será el caso cuando se trate de variaciones locales accidentales y no de un exceso o defecto sistemático.

(1) En realidad no debe tomarse esa variación sino la variación respecto al valor teórico para tener una idea del error cometido respecto al ideal; sería pues entre 12.75 y 12.50 mm. de donde el error de I sería de 6 %.

El montaje también requiere mucho cuidado y para ello conviene cuando el modelo está constituido por varios trozos, dibujarlo en un papel de base con sus ejes y alturas como referencia, así como con la ubicación exacta de los deformadores y las direcciones de las fuerzas exteriores para cada punto de lectura. Para evitar todo frotamiento que impida la deformación del modelo, este se coloca sobre pequeñas esferas de acero que descansan en cristales, así como los deformadores que no son de apoyo (figs. 11 y 12); también para evitar que el modelo sufra deformaciones fuera de su plano, se le carga en esos lugares con arandelas de plomo.

38) — Aparte de estos cuidados de montaje hay una causa exterior que puede producir errores apreciables, pero cuya influencia es fácil descubrir: la temperatura. En efecto, siendo estructuras hiperestáticas toda variación de temperatura del modelo significa la producción de tensiones correlativas, que, dada la pequeña magnitud de los desplazamientos a medir, representan porcentajes elevados. Esas variaciones pueden ser debidas a la iluminación de la mesa de trabajo, y por eso BEGGS recomienda la utilización de una batería de lámparas colocadas a un metro más o menos sobre la mesa, de manera de producir una iluminación uniforme y sin sombras pronunciadas, y por supuesto evitar la luz del sol directo, corrientes de aire, etc.

Para dar una idea de esta influencia, extracto enseguida algunos valores obtenidos en experiencias realizadas en el laboratorio, en las que el termómetro estaba colocado sobre el mismo modelo:

| Tiempo | Temperatura | Lecturas | Observaciones |
|--------|-------------|----------|---|
| — | 16°0 c. | 431.5 | — Se prende la luz general |
| 2' | 16°3 | 429.0 | |
| 4' | 16°4 | 428.0 | |
| 15' | 16°7 | 426.0 | |
| 30' | 16°8 | 426.0 | — Se prende una luz de observación de efecto local. |
| 40' | 17°3 | 423.5 | |

Como puede apreciarse los primeros 0.7° C producen una diferencia de lectura de 5 puntos, y siendo la lectura de la unidad de dislocación 250 puntos aproximadamente (para las fuerzas), resulta un

porcentaje de errores completamente inadmisibles, más aún teniendo en cuenta que puede llegarse a admitir como diferencia máxima en las dos lecturas de comprobación, por superposición de todas las causas de error, entre 2 y 3 puntos.

THOMPSON mantuvo un control muy severo, despreciando toda lectura durante la cual se hubiera producido un cambio de temperatura de más de 0,1 °C, pero lo hace notar, debido al destino especial de la investigación en que interesaban mucho las pequeñas lecturas: la línea de influencia de clave de un arco muestra una variación, para 0,5 °C de cambio de temperatura, de 8 % en la lectura máxima, hasta 100 % en las pequeñas. Pero para la utilización corriente del método, en que influyen especialmente las ordenadas mayores, quizás pudiera admitirse hasta 0,2 o 0,3 °C.

En el laboratorio, dadas las pésimas condiciones del local para estas observaciones, es imposible mantener un control rígido de temperatura, pero aquellos días en que por causas anormales (que muchas veces pudieron relacionarse directamente con condiciones del ambiente) las primeras lecturas arrojaban variaciones no solo de magnitud mayor a la admitida, sino que esa variación seguía progresivamente durante varios ciclos, se abandonaba la lectura.

39) — Las causas *teóricas* de error en general han sido ampliamente discutidas por McCULLOUGH y THAYER (B 25) y MAGNEL (B. 33), a cuyas publicaciones me referiré para no alargar demasiado la exposición. Las causas de error más importantes son:

— Inexactitud de fabricación y montaje del modelo. En este sentido es de especial importancia conocer exactamente la orientación del deformador, debido no tanto a los esfuerzos producidos en esa sección, porque el cambio de componentes sería muy pequeño para el error posible, sino para las secciones alejadas cuyo momento flector se calcula analíticamente a partir del deformador. En el laboratorio se midió simplemente en forma gráfica trabajando con las componentes directas, pero en los casos en que se necesita una exactitud extremada, conviene medirla con los microscopios y efectuar la corrección.

— Error de colocación del punto de lectura: MAGNEL demuestra que, debido a la reducida magnitud de los giros elásticos productores de esta diferencia (1/100), un error de 0,5 mm. en la

colocación, produce un error máximo de 0,005 mm.

— Utilización de pocos deformadores y cálculo analítico consiguiente en secciones alejadas. Según McCULLOUGH en arcos conviene no ir más allá del 1/4 de la luz. Un error de un punto (0,005 mm.) en cada lectura puede llegar, si no se toma esta precaución, a producir errores de 5 o 6 %.

— Error en la orientación de los microscopios: es muy importante y puede alcanzar magnitudes apreciables cuando el punto observado se desplaza con mucha inclinación sobre la dirección de la fuerza. Según MAGNEL (B. 33) es necesario orientar con una aproximación de 1/4° y entonces el error es menor de 0,005 en el caso de las mayores lecturas. Cerca de apoyos una inclinación de 1° puede producir un error de 23 %.

— Error de temperatura.

— Factor personal.

— En el método de MAGNEL se agrega además el error de orientación del "test" y el error producido por este debido al giro elástico. Sin embargo el primero no llega a 0,005 mm. para un error de 1/4°, error fácilmente evitable, y el segundo es siempre despreciable.

40) — Finalmente se estudiará la *exactitud práctica* capaz de obtenerse con el microinfluenciómetro de BEGGS de acuerdo con las investigaciones hechas en el laboratorio, así como las diversas referencias al respecto. La comparación se hace siempre respecto a un método analítico, en la forma utilizada corrientemente; pero si se piensa en la serie de hipótesis simplificativas que encierra cualquiera de ellos, aún los más completos como la elipse elástica, y las influencias que, como la de repartición de tensiones en los nudos, afectan el valor de las solicitaciones, que no pueden tenerse en cuenta por ahora, y también los pequeños errores numéricos acumulables inevitables, se llega casi a admitir que la comprobación es más para el método analítico que para el mecánico.

Por eso tomando primero casos simples en que es menos probable que existan esas inexactitudes analíticas y demostrado que el microinfluenciómetro coincide prácticamente con la teoría, en los casos complicados las diferencias halladas pueden ser atribuidas a cualquier procedimiento indistintamente. Es así por ejemplo, que en la viga Viendeel se compara el BEGGS con los valores analíticos de MAGNEL (B. 35) hallados por un procedimiento de aproximaciones sucesivas que él

mismo comprobó que era exacto por medio de su microinfluenciómetro.

MAGNEL (B. 33) habla para el BEGGS de errores máximos del 5 %, pero con exactitud decreciente con la complejidad del modelo; GUIDI (B. 12) se expresa en idéntica forma pero quizás basándose en la referencia anterior. OBERTI (B. 8) establec el 2 % como error máximo de los microinfluenciómetros, aunque refiriéndose indudablemente al MAGNEL, que es el utilizado en el laboratorio de Milán.

BEGGS (B. 34) dice; "El error experimental en soluciones por medio de modelos no debe exceder 1 %", pero es posible que se refiera a un valor medio porque en ese mismo párrafo da como comprobación de la bondad del método una figu-

en la comparación un error máximo, en el momento flector, de 5,3 %, también aproximadamente, mientras que en otra del mismo origen sobre un sistema de arcos sobre pilas elásticas, presenta pequeños errores, con un máximo en el momento flector de 3 a 4 %.

McCULLOUGH y THAYER (B 25, fig. 20, pág. 234) en la comparación de un sistema de arcos sobre pilas elásticas tiene para el momento flector una diferencia que, para el pico de la curva, llega a 12/14 % y que en esa región oscila entre 8/10 %. HAYDEN (B. 31, fig. 81, pág. 178) muestra para un pórtico simple una diferencia de 5 % en el pico a 10 % en la región adyacente, para el momento flector.

Veamos ahora nuestra propia experiencia. En la

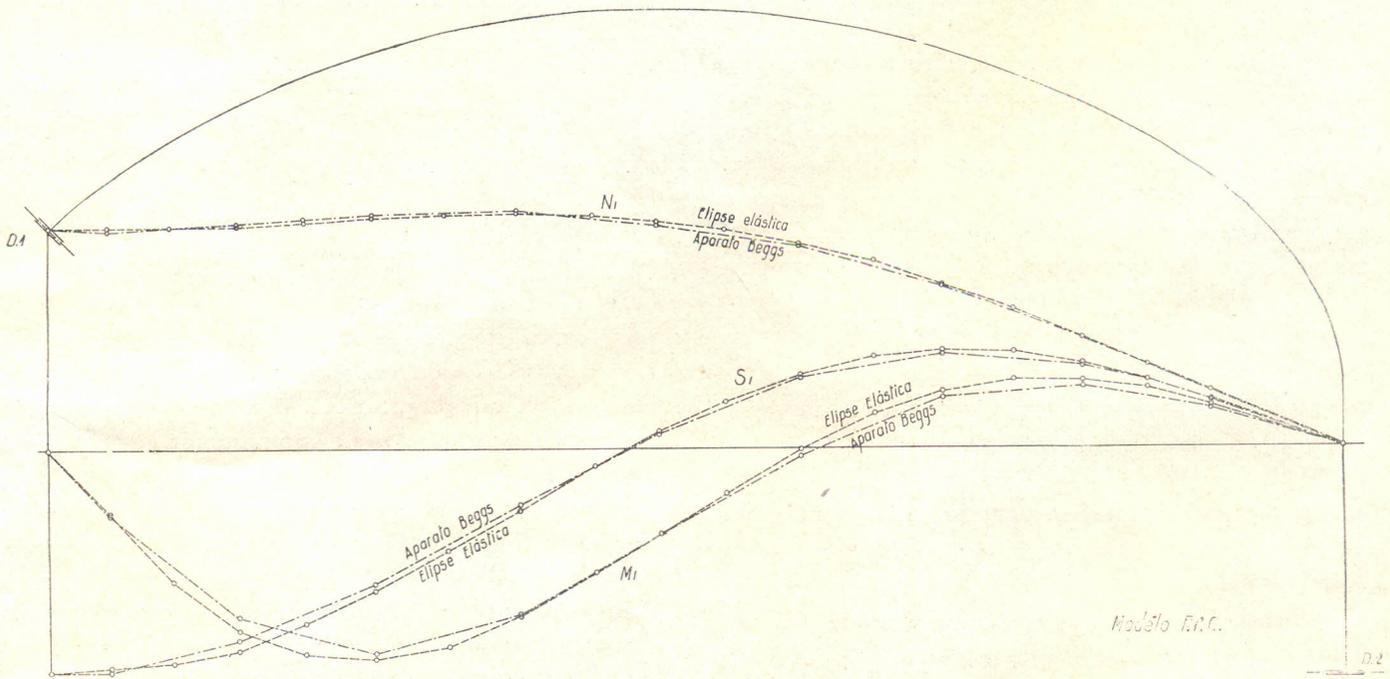


Lámina I

ra en la que están representadas las líneas de influencia, analíticas y mecánicas, para las reacciones de apoyo de un arco doblemente empotrado, y que muestran en el momento flector una diferencia máxima (cantidad aproximada desde luego pues es medida graficamente) de 6.8 %. (1) Otra hoja del mismo BEGGS con las líneas de influencia de otro arco doblemente empotrado, muestra

lámina I están dibujadas las líneas de influencia de apoyo de un arco sobre una pila elástica, con empotramiento doble, que muestra la coincidencia general del trazado del BEGGS y el obtenido por la elipse elástica. Los errores máximos son:

- Momento flector: 2.8 a 7.4 %.
- Fuerzas: 2,6 a 6,7 %.

Las láminas II y III muestra las líneas de influencia de las sollicitaciones en varias secciones de una viga Vierendeel: — los valores analíticos de MAGNEL como ya se dijo, para la misma forma de viga aunque con montantes un poco más

(1) En estas comparaciones, como en las de nuestras determinaciones, el porcentaje se toma en la región de ordenadas máximas, que coincide generalmente con las mayores diferencias.

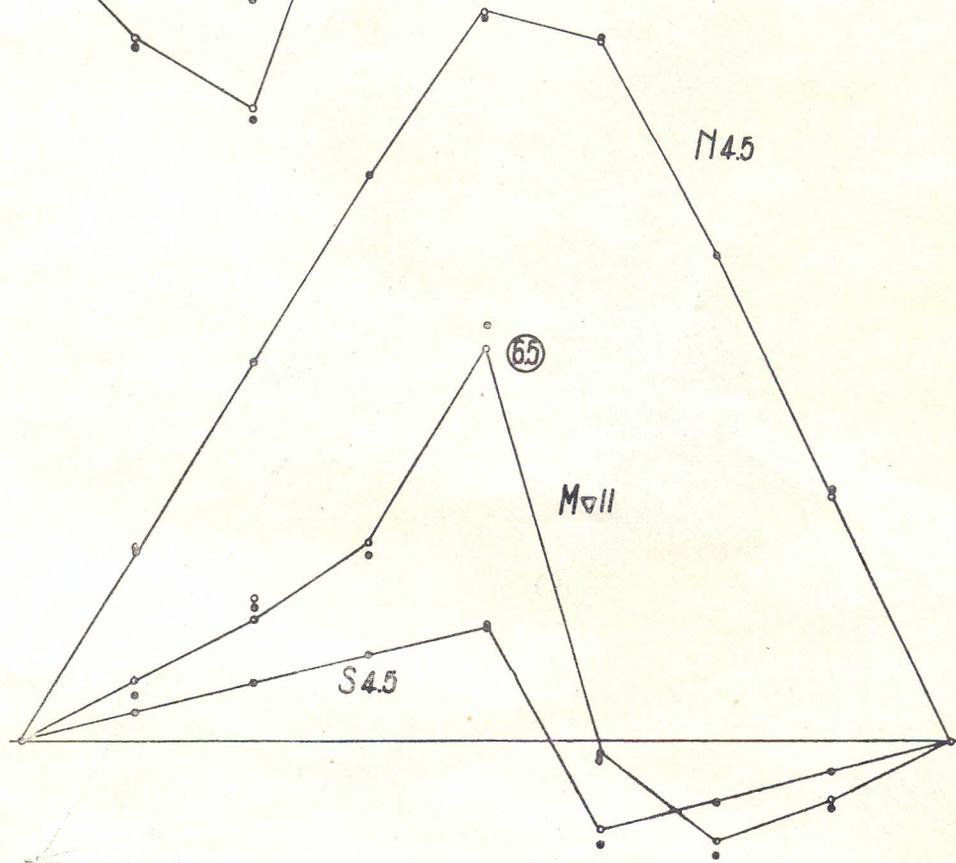
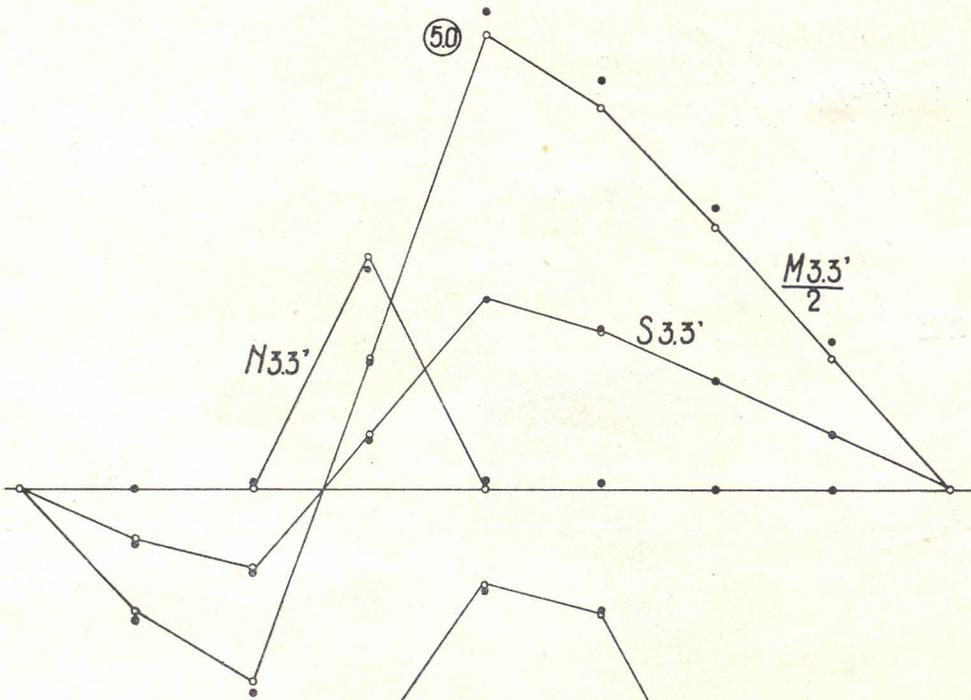
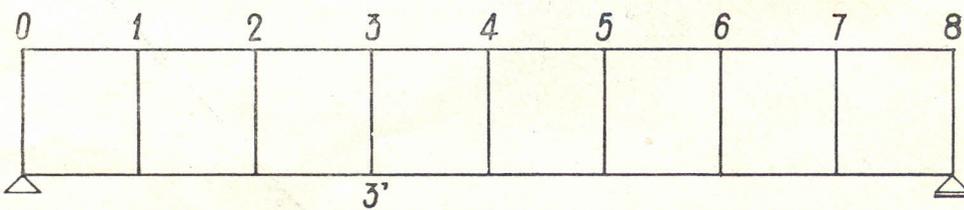


Lámina II



Modelo G.V.1

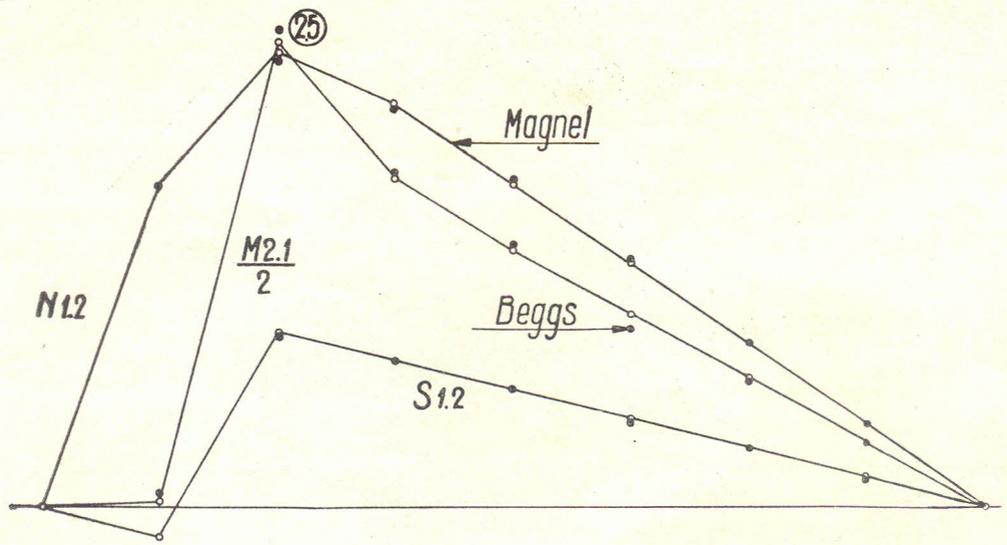
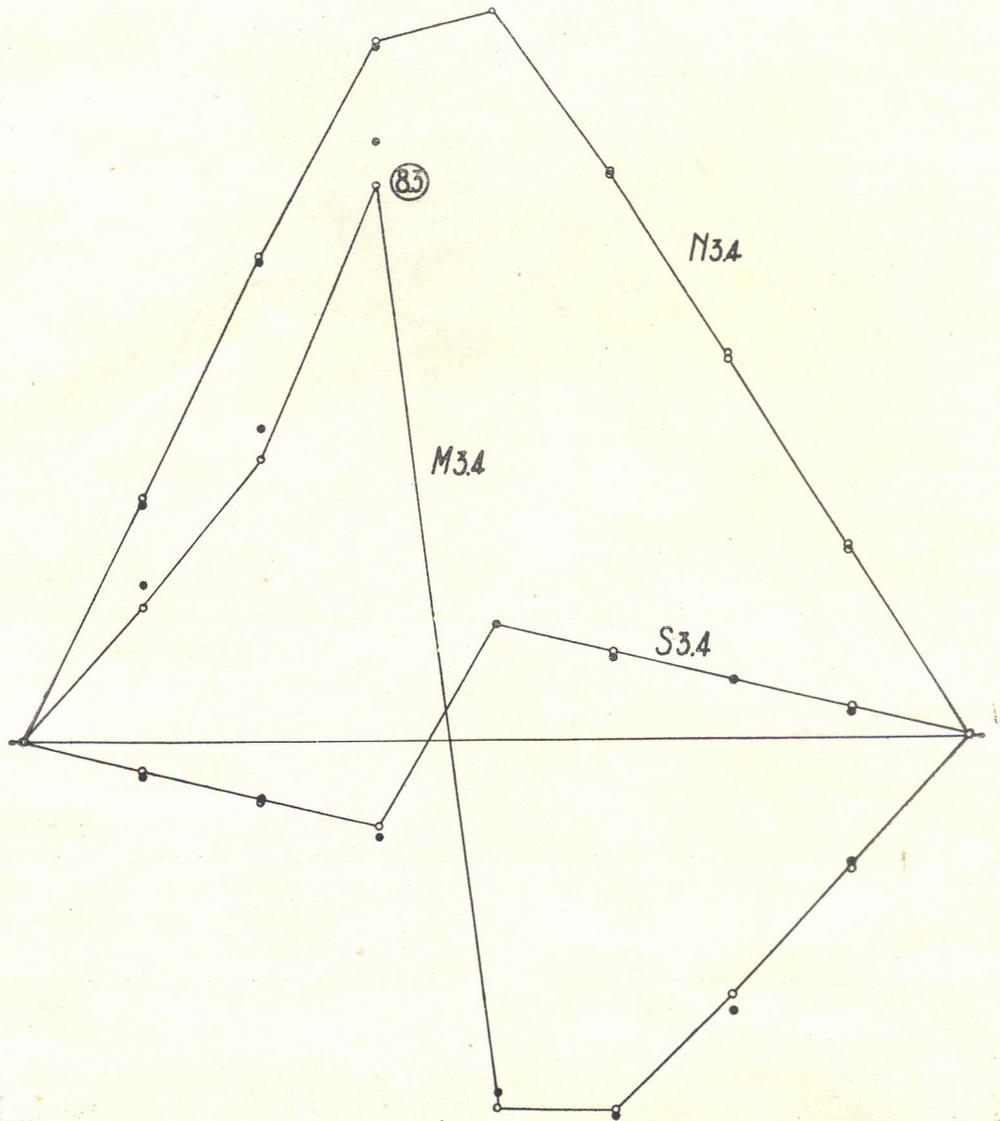


Lámina III



esbeltos. Los errores son aquí un poco mayores, especialmente para el momento M_{34} (nudo 3 de la barra 3.4), pero sin embargo puede pensarse que la diferencia es debida a que el deformador del cual se dedujeron los valores estaba colocado muy dentro del nudo y por lo tanto la repartición de las tensiones muy alterada. Los errores máximos son:

- Momento flector: 2,6 a 8,3 %.
- Fuerzas: 0 a 5 %.

Otro ejemplo de estructura compleja es la de la láminas IV y V cuyas características geométricas son tomadas de HAYDEN, cuyos valores analíticos hallados por una sistematización del teorema del trabajo mínimo, se reproducen, así como los

mientras que el gráfico es más inexacto aunque muy rápido. En el caso de barras rectas podría ser este el indicado, pero en barras curvas, en que hay que hacer, con el procedimiento normal, la distribución de empujes, etc., conviene más la elipse de elasticidad cuyos ejes dan ya inmediatamente los puntos neutros, con los cuales puede distribuirse el esfuerzo cortante entre las columnas sin tener en cuenta el efecto del arco.

Dichas líneas comparadas con los valores teóricos arrojan los siguientes errores máximos:

- Momento flector: 0 a 8,5 %.
- Fuerzas: 2 a 4 %.

Se puede notar además que en este caso y en el anterior, solo en una líneas de influencia sobre

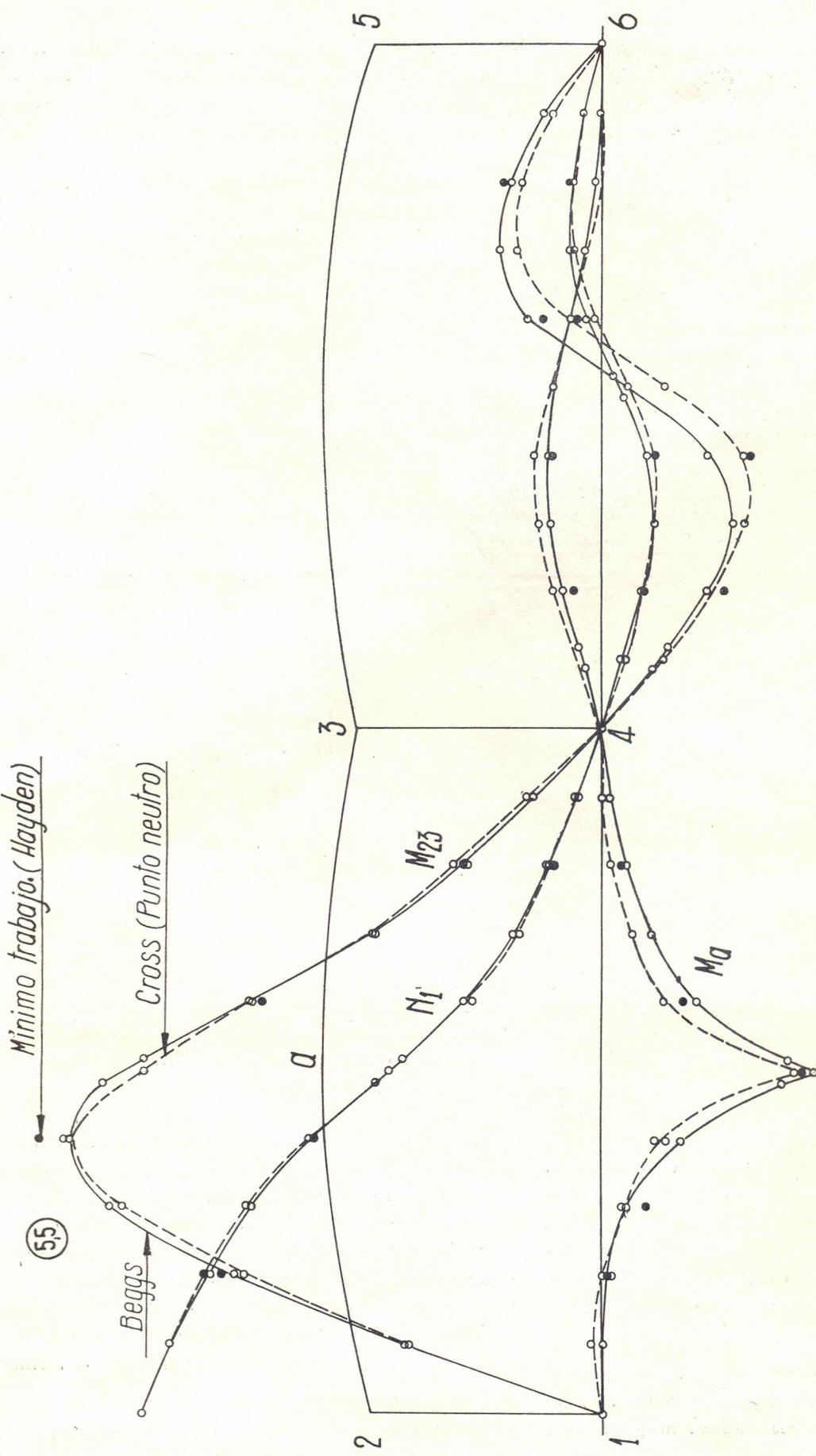
T A B L A I I

| Barra | Punto | R i g i d e z | | | I n d u c c i ó n | | |
|-----------------|------------------|------------------------|-----------|---------|-------------------|-----------|---------|
| | | Elipse elástica | columna | análoga | Elipse elástica | columna | análoga |
| | | | analítica | gráfica | | analítica | gráfica |
| Columna central | articulación | 0.844×10^{-2} | 0.844x | 0.833x | 0.976 | 0.988 | 1.027 |
| | neutro superior | 1.620x | 1.670x | 1.935x | 0.512 | 0.512 | 0.513 |
| Viga | neutro izquierdo | 0.249x | 0.239x | 0.212x | 0.917 | 0.916 | 0.918 |
| | neutro derecho | 0.310x | 0.292x | 0.272x | 0.748 | 0.770 | 0.750 |

valores hallados por nosotros utilizando el método de CROSS, tomando en cuenta claro está, la sección variable y la curvatura del eje de la viga. Creo no sin interés indicar que la determinación de las constantes de las barras, rigidez y coeficiente de inducción de los dos extremos, fué hecha por tres métodos diferentes con objeto de comparar su exactitud y su rapidez: Elipse de elasticidad y analogía de la columna analítica y gráfica (flexión compuesta); en esta última se admitió dada la pequeña curvatura, para la determinación de constantes, que se podía asimilar a una pieza recta por proyección.

Algunos resultados reproducidos en la tabla II muestran que la elipse elástica y el método de la columna análoga dan resultados muy exactos,

cinco y doce líneas respectivamente, ese error llega al 8 %, pues en general, no pasa de 5 o 6 %. También tanto para nuestras investigaciones como para las extrañas cuyos resultados he reproducido, se nota que los errores mayores corresponden al momento flector, siendo el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante de valores bastante más exactos. En realidad es difícil asegurar cual puede ser la causa, puesto que por una parte el tarado de las de las fichas se hace directamente en puntos del microméetro (sin basarse en los diámetros medidos), de manera que no puede ser error de unidad de dislocación y por otra parte un defecto probable como es el defecto de orientación del deformador, afecta a las fuerzas pero no a los momentos (de las mismas secciones); solo cabe la explicación



Modelo F.2

Lámina IV

que la dislocación de momento flector es más pequeña, con lecturas del orden de 150 a 200 punto como máximo en los casos estudiados, contra 250 o 300 puntos en las fuerzas y por lo tanto cualquier error tiene mayor valor relativo.

Resumiendo lo expuesto puede establecerse como resultado práctico para el microinfluenciómetro de BEGGS, cuando se considera además que el error de cálculo o dimensionado de una estructura no es el error máximo único sino el promedio de los errores de las mayores ordenadas:

i) — El error es mayor para los momentos que para las fuerzas y aumenta con la complicación de la estructura.

ii) — Como error *máximo absoluto* puede tomarse de 8 a 10 % para el momento flector y 5 a 6 % para las fuerzas.

iii) — El error *máximo normal*, prácticamente considerado es de 5 a 6 % para el momento flector y de 2 a 3 % para las fuerzas.

Los resultados justifican pues la enorme confianza que dan los microinfluenciómetros en todo aquel que lo maneja alguna vez; no hay que olvidar que este método, debido al espíritu creador y verdaderamente técnico del profesor BEGGS, y en general todos los influenciómetros, aislan, por así decir, cualquier error, que se produce raramen-

te, de lectura o transcripción, y que su corrección se hace rápidamente.

En cuanto al tiempo empleado no se han hecho comparaciones, pero es indudable que en los casos simples, por ejemplo arcos aislados simétricos, pórticos simples, o estructuras más complicadas pero con barras de sección constante capaces de ser tratados por el Cross corriente o por Gehler, etc, no hay ventajas debido al tiempo empleado en la fabricación y montado del modelo. Según HAYDEN, que efectuó el cálculo de una larga serie de puentes en la "Westchester County Comm.", el método mecánico sería útil para estructuras con más de 3 o 4 indeterminaciones.

Las ventajas aumentan mucho también cuando es necesario estudiar diversas variantes de sección de una misma estructura, que en el método analítico significan cálculos nuevos totalmente, mientras que con modelos solo es necesario hacer modificaciones pequeñas y hay que repetir únicamente las lecturas.

En cuanto a estructuras complejas pero con barras de sección constante veremos más adelante que en general los métodos macroscópicos dan resultados perfectamente aceptables y más rápidamente.

CAPÍTULO VIII · INFLUENCIÓMETROS CON GRANDES DEFORMACIONES

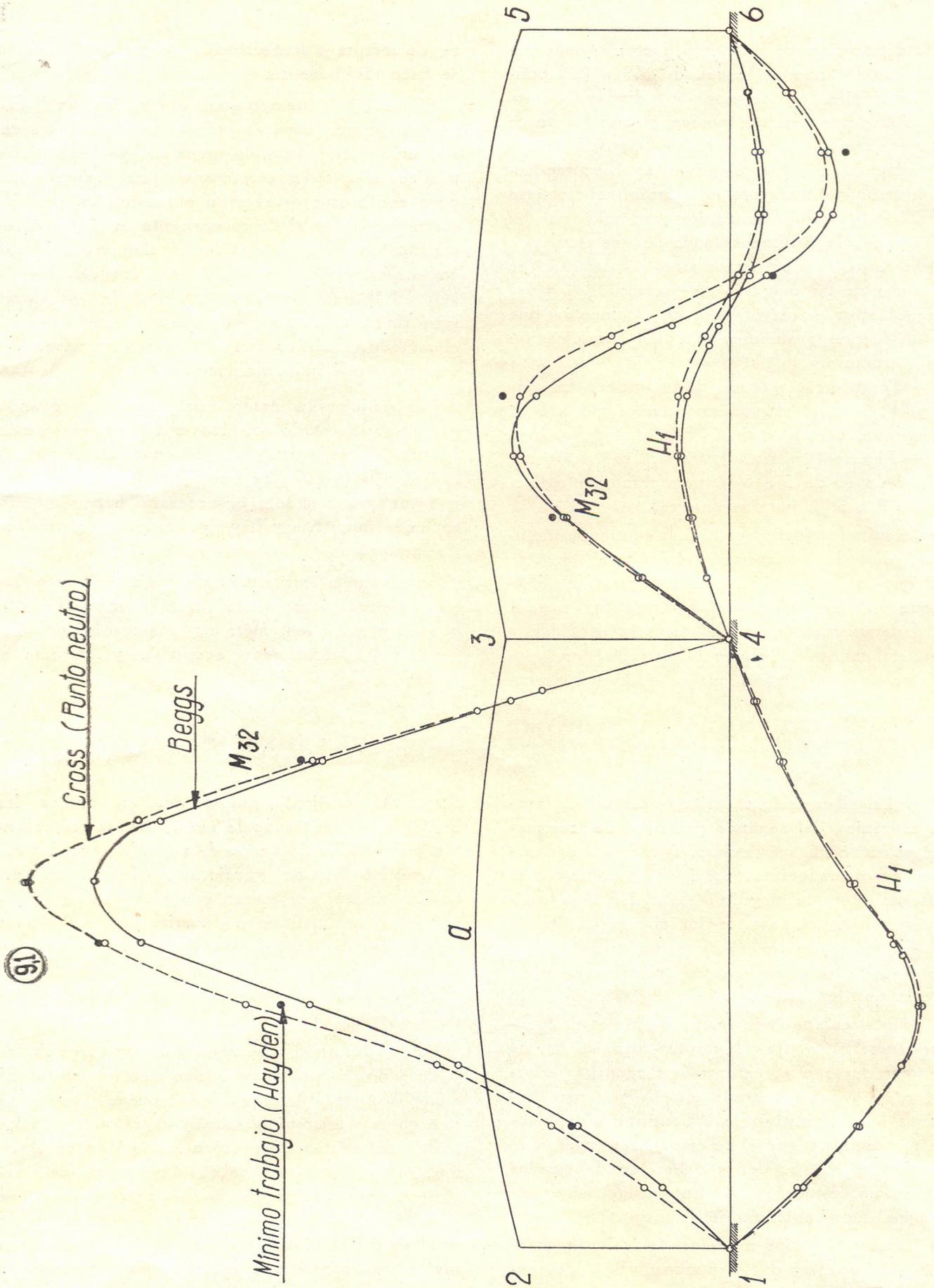
41) — En el capítulo anterior se discutió la analogía mecánica del segundo principio de reciprocidad en su forma más exacta. Cuando las dislocaciones son de magnitud apreciable, prácticamente finitas diríamos, de magnitud del orden de las dimensiones longitudinales de los elementos, fallan las bases teóricas rigurosas, y como ya se anotó, debe basarse cada caso en la experiencia para conocer sus límites de validez.

El estudio comparativo hecho en nuestro laboratorio se refiere a tres diferentes dispositivos, de los cuales dos son aparatos más o menos perfeccionados y que han entrado en el comercio fabricados por sus inventores ("Continostat" y "Nupubest"), mientras que el tercero utiliza una serie de elementos que pueden y deben ser fabricados por quien lo emplea, ya que no exige sino un "outillage" muy rudimentario (Kann).

La formación de los modelos del "Continostat" (B. 10 y 36 a 39) y del "Nupubest" (B. 11) es en-

teramente semejante, puesto que en ambos las barras o elementos de la estructura se representan por varillas de acero de acuerdo con las características que se expusieron en la primera parte. Los nudos se ejecutan con pinzas o grampas metálicas que mantienen invariables los ángulos que forman las tangentes a las diversas barras en cada uno, que, en el caso que la estructura de nudos móviles en el espacio se colocan sobre pequeñas esferas de acero.

En la figura 13 se reproduce un modelo de pórtico doble con apoyos empotrados, ejecutado con el Continostat, en el que puede observarse que en este aparato la movilidad relativa de los nudos del pórtico respecto a los apoyos, se obtiene montando estos sobre una regla, que los mantiene en una posición invariable entre si, pero que permite el movimiento por estar colocada sobre rodillos. En cambio los nudos están en posición invariable apoyados sobre guías que descansan en



la regla de base, que sirve a su vez para aplicar las fuerzas solicitantes.

En uno de los modelos se ha colocado una pieza de deformación angular unidad para trazar la línea de influencia del momento de empotramiento de la barra izquierda. Las líneas de influencia de fuerzas se obtienen simplemente variando las longitudes de las barras.

Debido a la forma de la grampa de nudo, el Continostat solo puede aplicarse a estructuras de malla rectangular, por lo cual, posteriormente GOTTSCHALK ha fabricado un dispositivo com-

importantes para la construcción de los diversos tipos de nudos y apoyos.

Como ejemplo más completo, la figura 16 muestra la línea de influencia del momento flector en el apoyo derecho.

En el método de KANN (B 41), las varillas son sacadas de una lámina de celuloide de 1 mm. de espesor más o menos y una altura de 10 mm, y los nudos se cortan en madera de 3 o 4 mm. de espesor, como puede apreciarse en la figura 17, que es un modelo aplicado al trazado de diagramas; — las dislocaciones angulares pueden produ-

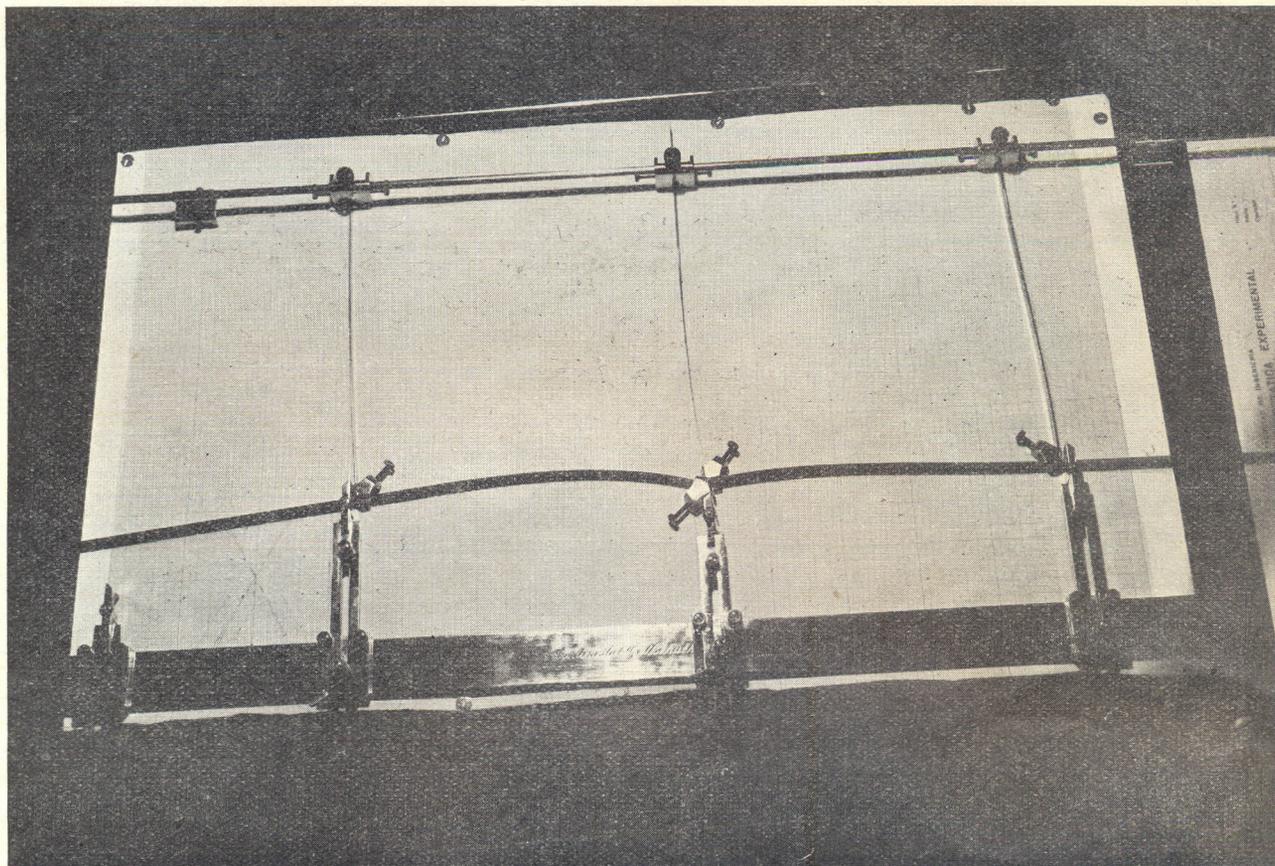


Figura 13

plementario, el "Mecanostat" (figura 14) (B. 38 y 40) que permite, aunque basado en los mismos elementos, tratar estructuras de cualquier malla.

Los elementos principales del Nupubest están reproducidos en la figura 15; — en la parte superior está el modelo dispuesto para trazar una línea de influencia del momento flector en un punto intermedio de una viga continua sobre 3 apoyos, y en la parte inferior la línea de influencia del esfuerzo cortante en una sección de la traviesa de un pórtico disimétrico, así como las piezas más

ducirse ejecutando nudos especiales en que las ranuras que reciben los extremos de la varillas (que se mantienen firmes por simple presión y sin necesidad de cola alguna) ya están ejecutadas formando los ángulos relativos necesarios. La variación de momento de inercia no ha sido encarada por KANN, puesto que la utilización de celuloides de diversos espesores complicaría la ejecución de los nudos, y por otra parte la variación del momento de inercia por variación de altura no sería posible llevarla a los valores que interesan, porque

sobresaldrían demasiado del nudo, perdiendo eficacia

42) — La magnitud de las dislocaciones de fuerzas, de acuerdo con la disposición expuesta, se ve que queda sometida al criterio del operador, pues se produce por traslación del apoyo en la dirección conveniente. Como en los microinfluenciómetro, hay factores que obran en sentido opuesto y

es necesario por lo tanto establecer un cierto equilibrio entre esos factores, pero existe la ventaja de poder adaptar la dislocación a cada caso particular, disminuyendo su magnitud a medida que aumenta la complicación de la estructura. Conviene, en general, para obtener buenos resultados, establecer un máximo de dislocación en función de la longitud de las barras adyacentes, y especialmente

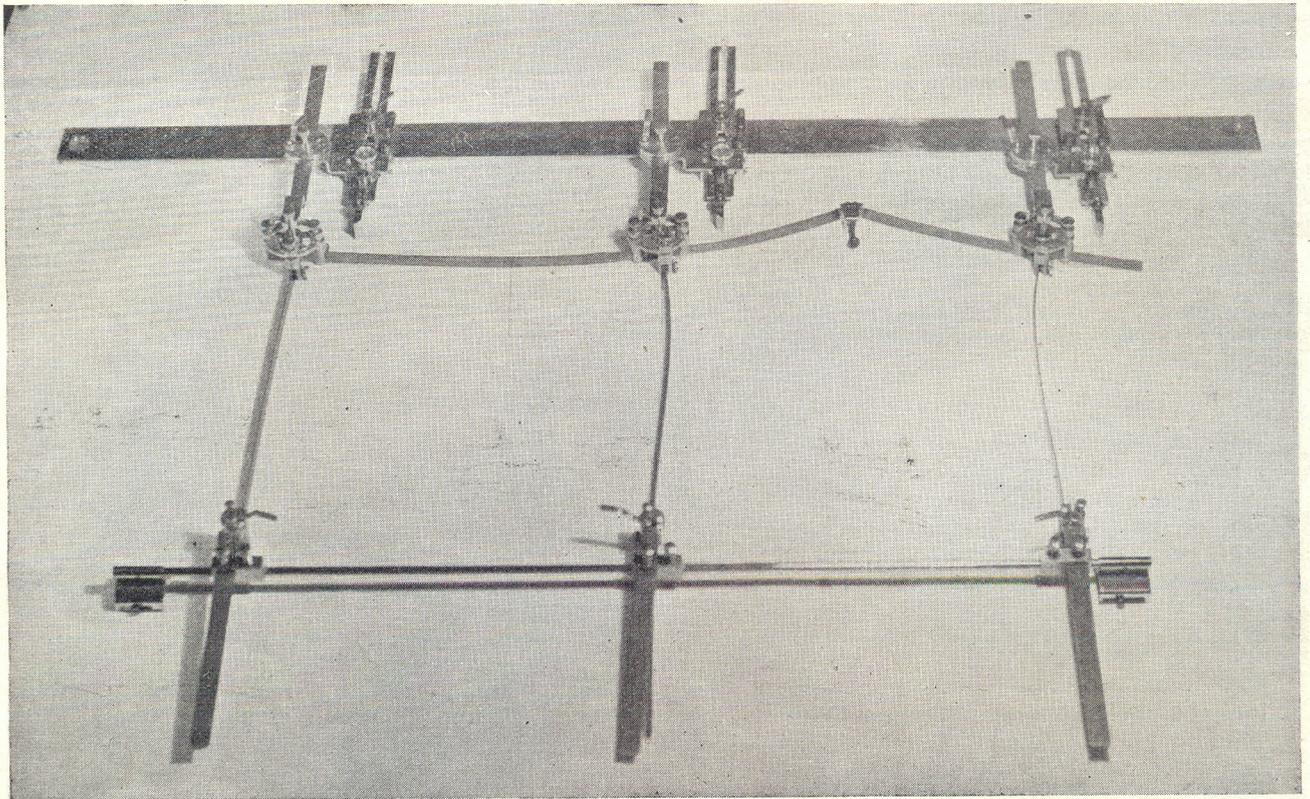


Figura 14

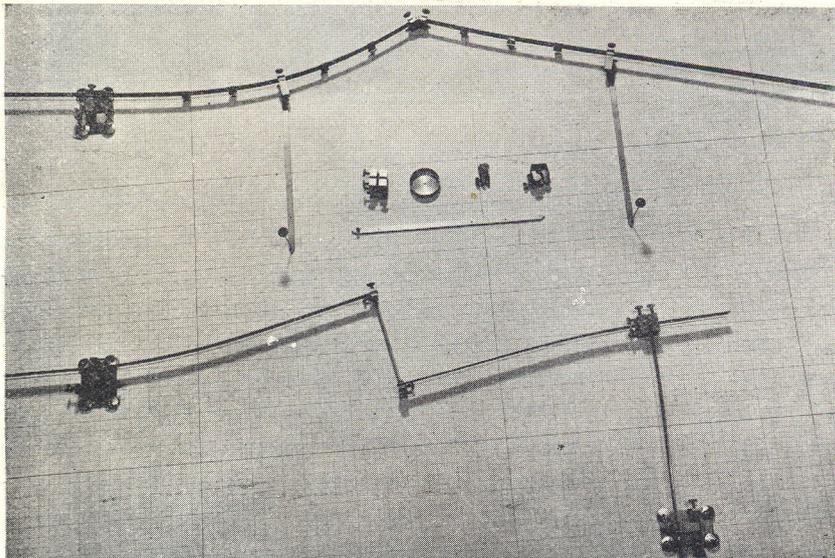
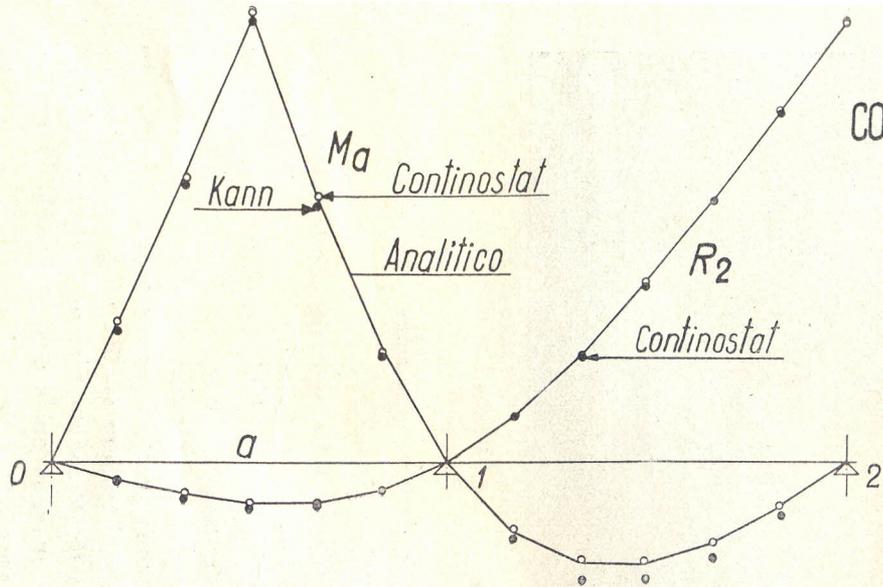
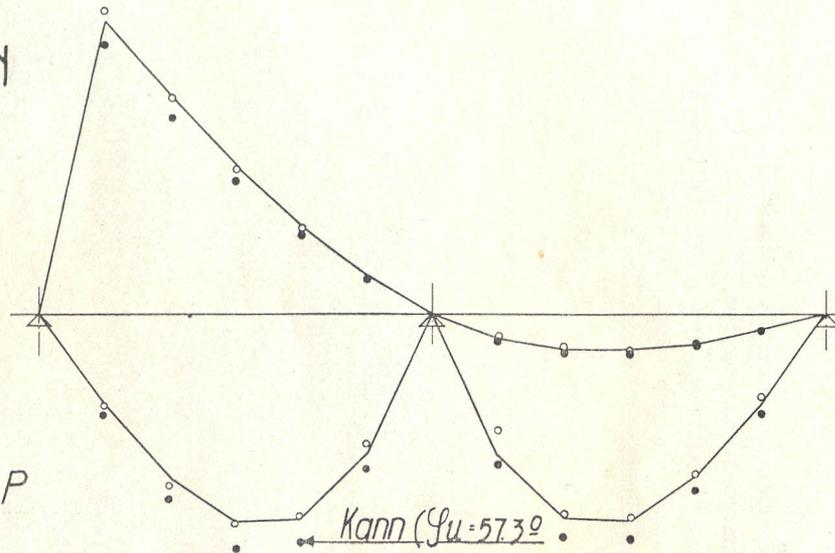


Figura 15

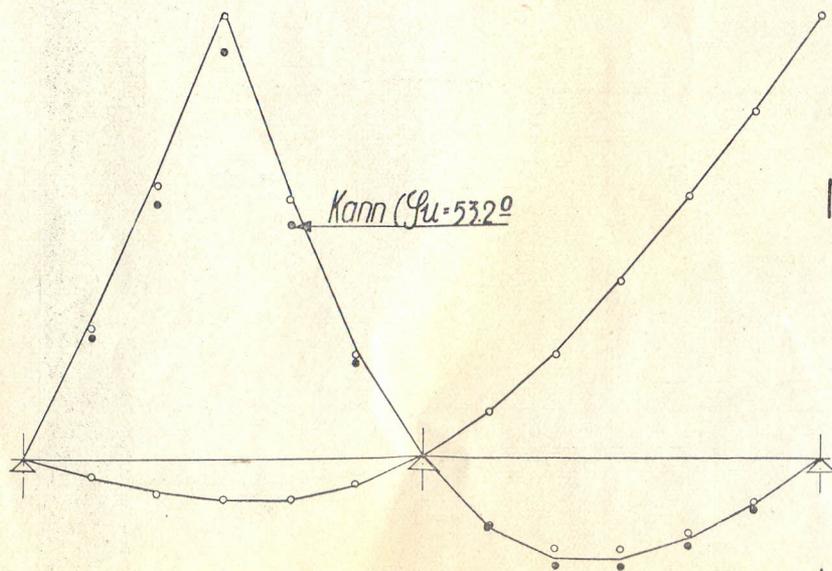


CONTINOSTAT
Y
KANN



$M = \alpha \cdot l \cdot P$

— 51 —



α ton.mt

NUPUBEST
Y
KANN

0.14

0.04

0.02

0

Modelo F 8

de la distancia al apoyo fijo más cercano situado en dirección normal a la de la dislocación. Además generalmente conviene que sea mayor de ± 25 mm., de manera que si se aprecia 0.5 mm. en la lectura sobre papel milimetrado, representa una apreciación de medida igual a 1 %.

Esa relación oscila, para obtener los mejores resultados, entre 1/4 y 1/6, y solo en el caso en que no se puede mantener la magnitud absoluta recién anotada, se llega hasta 1/3 o 1/2.5 pero con mayor probabilidad de error. GOTTSCHALK (B. 36) recomienda no exceder 1/5, ya que el error aumentaría al doble (B. 10) para un valor igual a 1/3.

La dislocación angular para el momento flector está predeterminada en los aparatos comerciales Nupubest y Continostat por la utilización de las grampas o deformadores correspondientes; sólo en

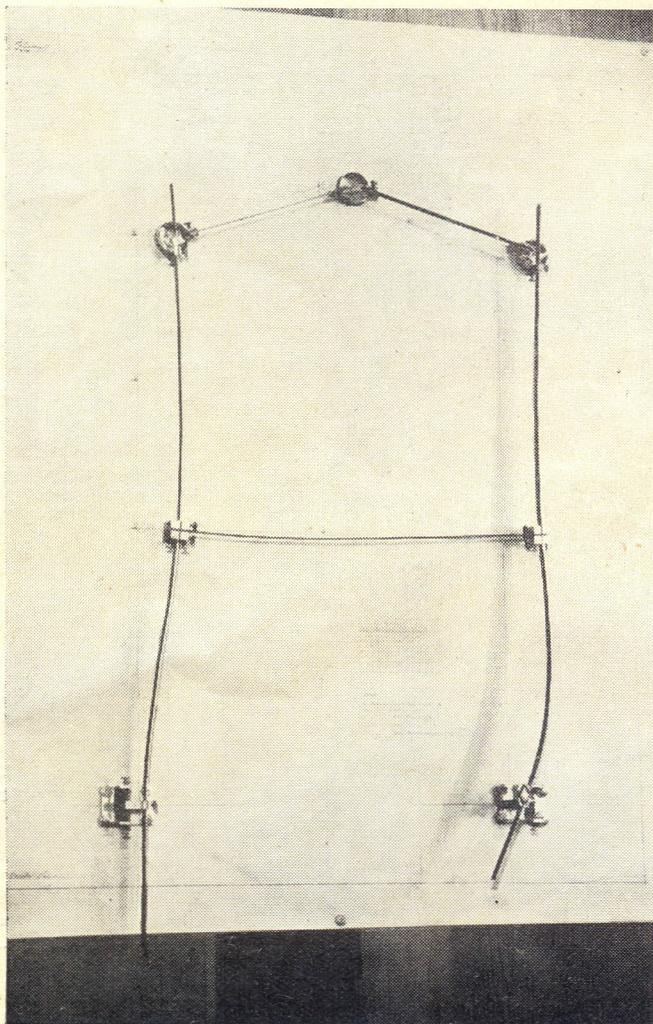


Figura 16

el Kann es posible variarla. En este caso sin embargo su determinación no es tan elemental como en el Beggs porque ahora se trata de deformaciones finitas de magnitud apreciable respecto de las dimensiones longitudinales, con lo cual:

- a) — El ángulo de dislocación y su tangente son completamente diferentes, y por lo tanto de imposible simplificación.

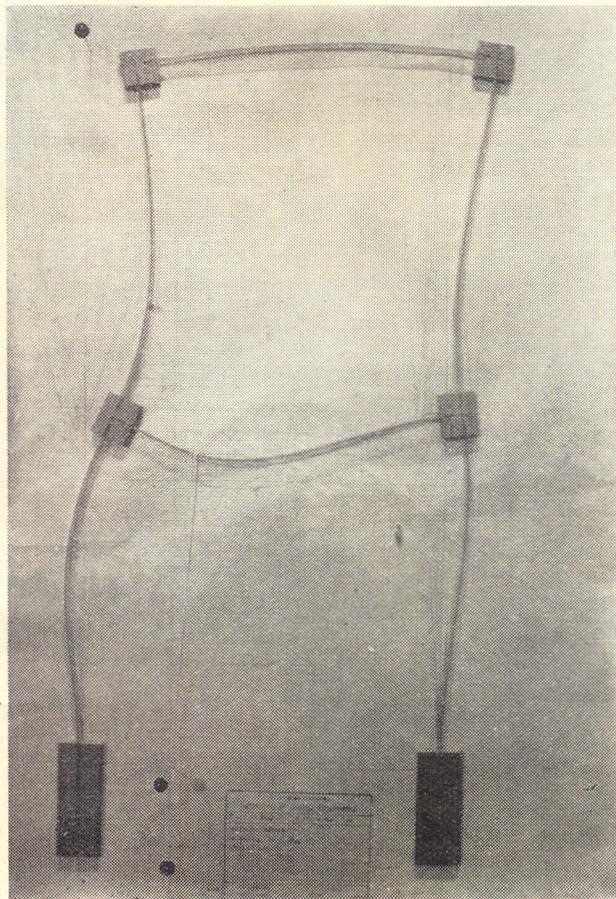
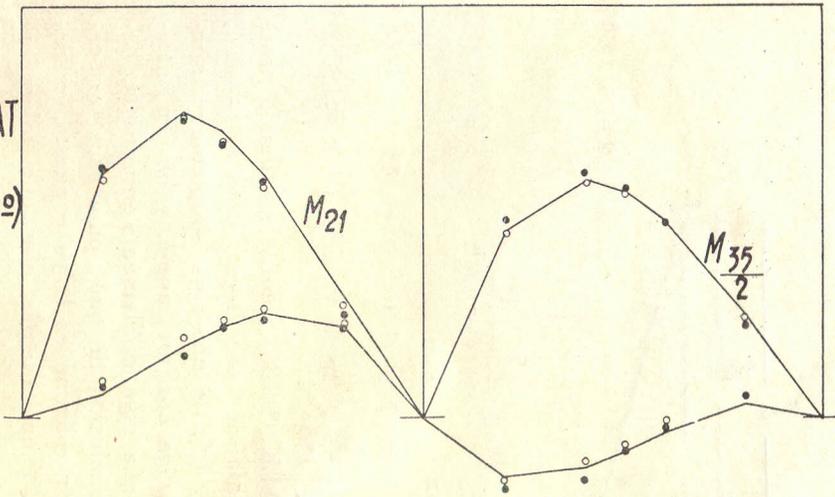
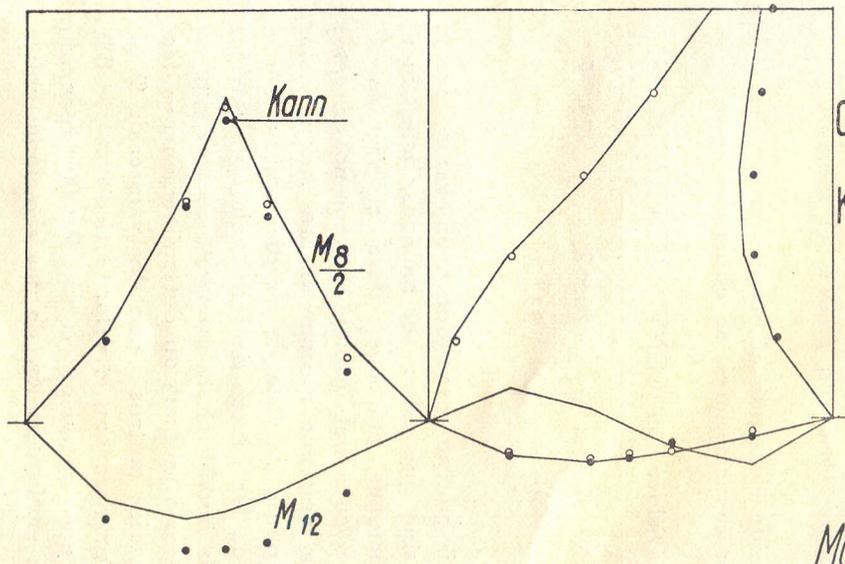
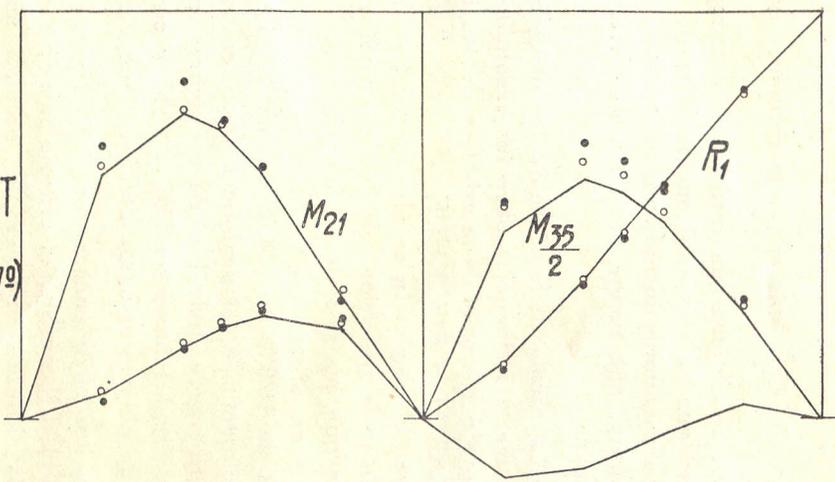
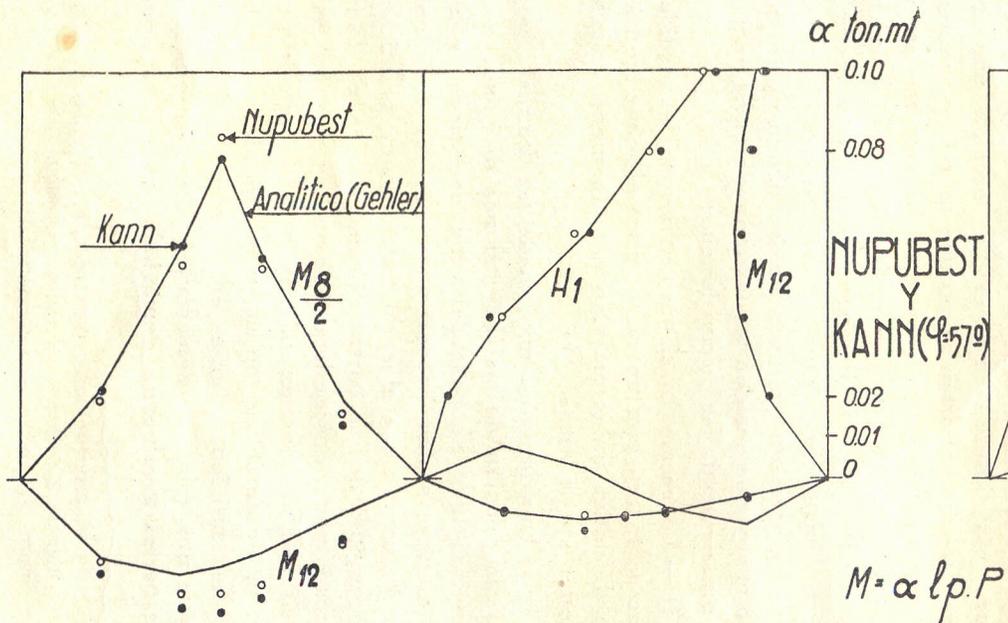


Figura 17

- b) — Las flechas adquiridas son influenciadas por las longitudes.

Teóricamente, y de acuerdo con la expresión de trabajo del momento flector, la dislocación unitaria es aquella para la cual las caras del corte sufren un desplazamiento angular relativo igual a un radian. Pero, con deformaciones finitas, ya no sucede esto, como puede comprobarse de inmediato estudiando el trazado analítico de una línea de Influencia de Momento Flector de una viga simplemente apoyada en la cual el ángulo φ de dislocación vale (fig. 18):



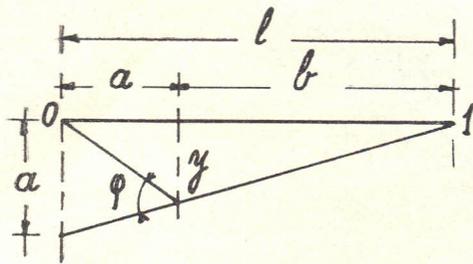


Figura 18

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l^2}{l^2 - a \cdot b}$$

de donde, para

$$a = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1 \quad \text{y} \quad \varphi = 45^\circ$$

$$a = b = \frac{l}{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 1.33 \quad \text{y} \quad \varphi = 57^\circ 2'$$

GOTTSCHALK (B. 36) estudia en detalle este aspecto, calculando ese ángulo para $a/l = 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$, en una viga simplemente apoyada, en una viga con un apoyo y un empotramiento, y en una viga doblemente empotrada, llegando a la conclusión de que para esos tres casos la variación máxima es la ya expuesta, es decir un 6.5 %. Y que además, con una tolerancia del 1 % se puede considerar constante el error para los $0.5 l$ en el tramo simple, $0.7 l$ en la viga empotrada y apoyada, y $0.87 l$ en la viga doblemente empotrada. Recordaremos que el ángulo unitario teórico en grados (1 radian) es de $57^\circ 20'$.

Si se mide el ángulo colocando dos varillas rectas en los deformadores, se obtiene:

| Lugar | Dislocación | CONTINOSTAT | NUPUBEST |
|--------|-------------|-----------------|-----------------|
| apoyo | 0.5 | $26.0^\circ 2'$ | $28.0^\circ 7'$ |
| centro | 1 | $53.0^\circ 2'$ | $52.0^\circ 2'$ |

Es decir que no responden a un valor teórico definido sino que deben ser hallados, más bien, por condiciones prácticas. Para el método de KANN, en cuya publicación el autor no dá datos sobre esta magnitud (porque encara sus modelos desde el punto de vista de los diagramas más que desde el de las Líneas de Influencia, y además con nudos notablemente grandes), se verá que en el Laboratorio se hicieron determinaciones — después de varios tanteos — con dos valores de φ diferentes: primero con el valor teórico $\varphi = 57^\circ 00'$, y luego con un valor $\varphi = 53^\circ 00'$ reducido de aquel en la relación de las rotaciones finitas

$$\frac{45^\circ 00'}{53^\circ 16'} = 0.845. \quad \text{Más adelante veremos que en}$$

esa forma se obtiene una aproximación apreciable.

No hay que olvidar aquí que la longitud de las piezas deformadoras introducen un error de relativa magnitud, que tiende a reducir el efecto de la dislocación.

43) — La escala de fabricación del modelo tiene también cierta influencia sobre los resultados, directamente o a través de la esbeltez de las barras. Según CAROT y RIECKHOF (B 11): “es recomendable el elegir la escala mayor posible, para aumentar la precisión de las determinaciones; cada vez que sea posible se adoptará una escala de $1/10$ y en ningún caso deberá de descenderse a menos de $1/20$ ”. Ni GOTTSCHALK ni KANN hacen referencia a tal problema, pero en cuanto al primero puede deducirse de las figuras que trabaja con escalas hasta de $1/50$ o $1/60$ y con longitudes de elementos hasta de 15 o 20 centímetros.

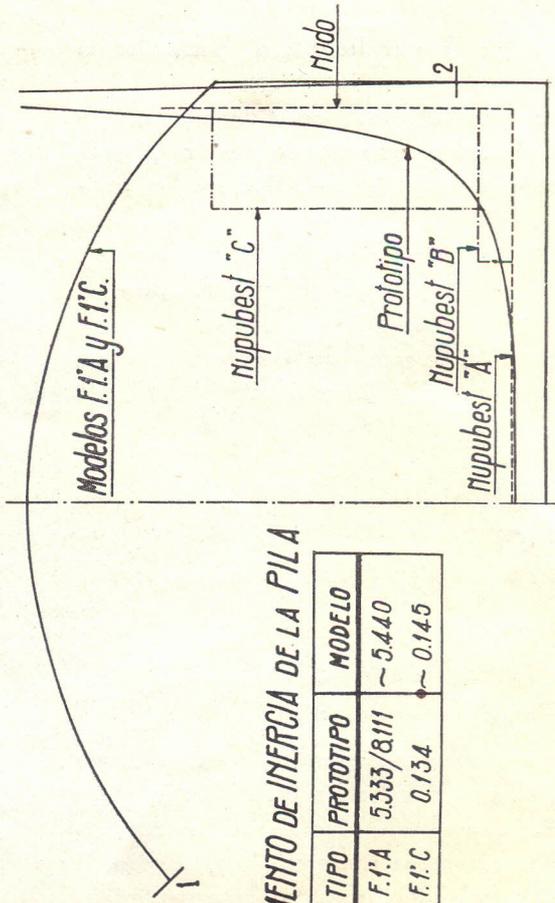
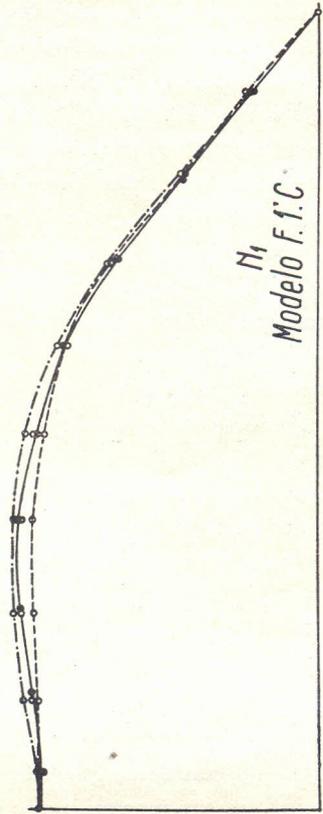
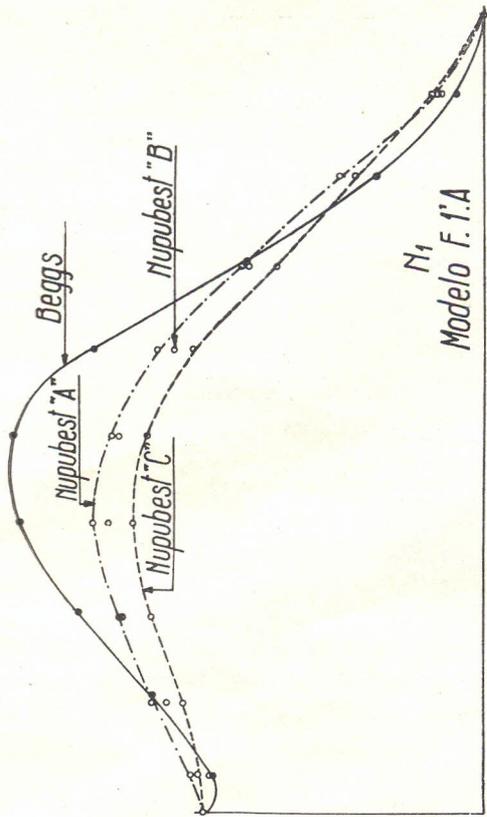
De las dos posiciones parece más lógica la de GOTTSCHALK porque el criterio nos dice que lo que más interesa no es la escala, que no tiene mayor importancia porque un mismo modelo sirve para todas las estructuras de esquema semejante y con igual distribución *relativa* de Momentos de Inercia; esta independencia existe naturalmente hasta cierto punto. Pero en realidad hay tres factores que influyen en las dimensiones del modelo y que pueden tener preponderancia — uno u otro — según las circunstancias:

i) — La escala en sí misma, porque las medidas que se tomen con un cierto error absoluto tendrán en definitiva un error relativo tanto menor cuanto menor sea la escala. (1)

ii) — Una longitud mínima de las barras, para que la relación de las dimensiones del nudo a la longitud libre no pase del valor que tiene en las estructuras reales, aproximadamente. Es decir que cuanto menor sea el nudo tanto menor podrá ser la longitud de las barras del modelo: en el Continostat podrá descenderse más que en el Nupubest.

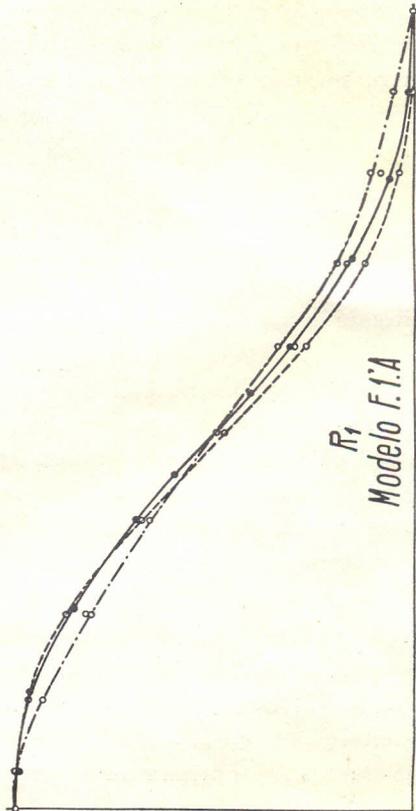
iii) — Una esbeltez máxima, debido a que la posición de equilibrio no es muy definida cuando no hay suficiente rigidez en el modelo. Por otra parte una esbeltez demasiado pequeña somete a las barras a esfuerzos demasiado fuertes, aunque

(1) En el procedimiento de momento nulo influye también la escala por la menor distancia apreciable al nudo del punto de inflexión.



MOMENTO DE INERCIA DE LA PILA

| TIPO | PROTOTIPO | MODELO |
|-------|-----------|---------|
| F.1.A | 5333/8111 | ~ 5.440 |
| F.1.C | 0.134 | ~ 0.145 |



este efecto no llega generalmente a controlar el dimensionado.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, y otras de índole práctica que no es del caso mencionar aquí, creo que podrían establecerse los puntos siguientes:

1) — La escala mínima conviene que sea de 1/40 para el Nupubest y el Kann, y 1/60 para el Continostat.

2) — La dimensión mínima de las barras debe ser aproximadamente de 20 a 25 cms. para el Nupubest; 18 a 20 para el Kann; y 12 a 15 cms. para el Continostat.

3) — La esbeltez debe de limitarse principalmente por su máximo, caracterizándola por la relación $\frac{\text{longitud}}{\text{espesor}} = \lambda$, cuyo valor aproximado conviene que sea:

Nupubest y Continostat: $\lambda \leq 650$ a 700

Kann: $\lambda \leq 350$ a 400

notando que a veces — por ejemplo en estructuras con nudos móviles — la esbeltez que interesa puede no ser la de cada barra sino la de un conjunto de barras sucesivas sin nudo fijo intermedio.

44) — Con los influenciómetros macroscópicos no es posible, ni necesario, una discusión teórica de los errores que pueden producirse, tal como sucede para los microinfluenciómetros. En el caso actual hay una causa de error innata, que es la magnitud de las deformaciones, la que cubre toda otra causa que pudiera existir, siempre que no sobrepase los límites corrientes y fácilmente accesibles.

Las circunstancias que deben tenerse en cuenta, en general, son la perfecta movilidad de los nudos, con esferas de acero si es necesario, la conservación invariable de la tangente en los empotramientos, y rectificación de las barras para evitar el flambeo.

La exactitud que es posible obtener, o en otras palabras el error máximo que puede esperarse con los macroinfluenciómetros varía algo de un aparato a otro, y según las circunstancias, aumentando indudablemente como en el Beggs con la complicación de la estructura.

Con el Continostat, según GOTTSCHALK, en las vigas continuas puede esperarse un error hasta 5 % si la deformación relativa es de 1/4, y hasta 10 % si se llega a 1/3 (B. 10); para los Momentos Flectores de secciones comprendidas en los 3/5 interiores de las barras, se obtiene un error máxi-

mo sin mayor precaución del 2 %, y para las fuerzas el 4 % (B. 36); cuando se utilizan cintas variables, barras no-rectilíneas, los errores quedan dentro del 5 % (B. 38).

CAROT y RIECKHOF no establecen el valor del error máximo posible; — en los ejemplares tratados, el error oscila entre 3 y 4 % para vigas continuas a 3 y 8 % para pórticos simples. En la admisión oficial del Nupubest para el Estado Alemán (B. 11) se establece el 10 % como diferencia máxima entre la determinación principal y su verificación

Por el contrario otros investigadores que trabajan más bien con microinfluenciómetros les atribuyen a los modelos en elevación, aún para vigas continuas, un error de 30 a 35 % (B. 33). Veremos que un error tan grande solo se produce en casos enormemente desfavorables.

44) — A continuación expondremos la magnitud de los errores que pueden deducirse de nuestra experiencia. Lo único que debe tenerse en cuenta, es encarar separadamente los diversos tipos de estructuras, ya que las condiciones en que deben trabajar los modelos pueden diferir mucho, y también influir en mayor o menor grado las grandes deformaciones.

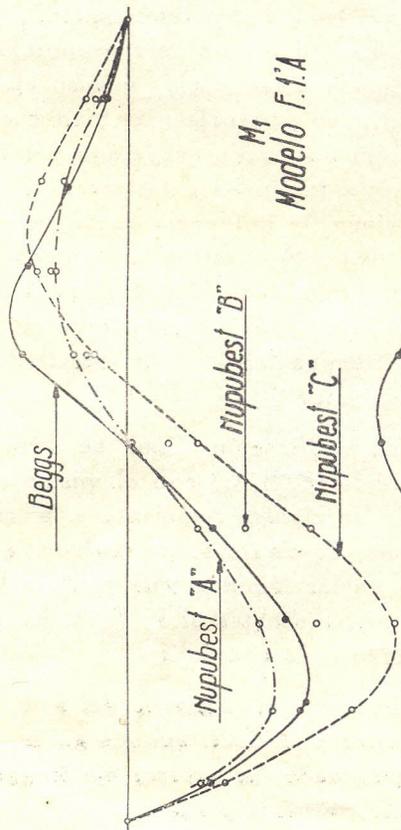
Las vigas continuas son los sistemas más simples y para los cuales es dado esperar mayor exactitud, ya que, entre otras condiciones los nudos son fijos. En la lámina VI están indicadas algunas líneas de influencia para una viga continua de dos tramos con sección constante, entresacadas, como característica media, de trazados hechos para diferentes estructuras con diversas proporciones.

Las líneas representan los valores analíticos. Como puede verse la exactitud del Nupubest y del Continostat es casi perfecta, especialmente para la fuerza, y un poco menos para el momento de apoyo.

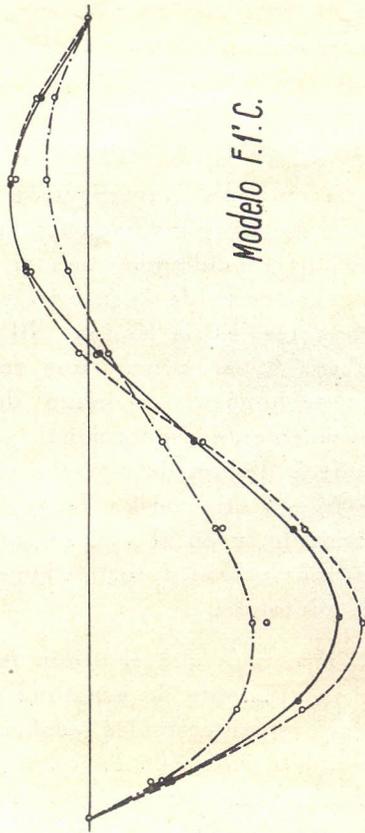
En cada aparato, y para una esbeltez que varía entre 340 y 430, se tienen los siguientes errores máximos:

| | | |
|--------------|------------------|---------|
| CONTINOSTAT: | Momento flector: | 3 a 6 % |
| | Fuerzas: | 1 " |
| NUPUBEST: | Momento flector: | 4 a 5 " |
| | Fuerzas: | 1 a 2 " |

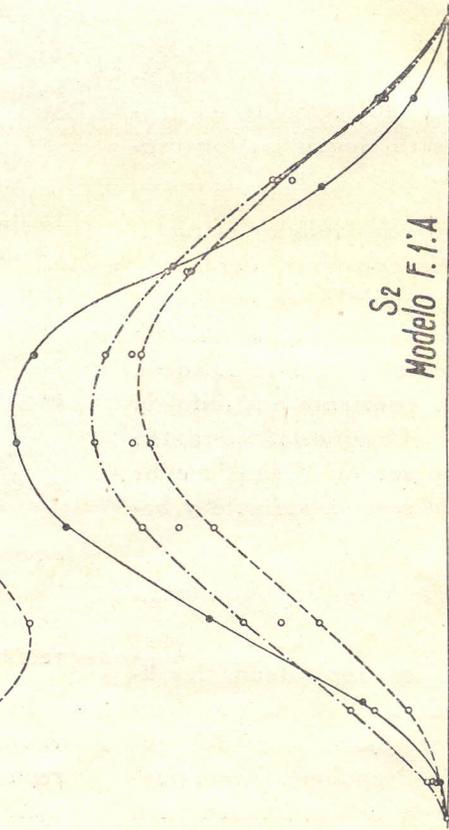
con un promedio, de todos los valores del tramo que contiene la sección dislocada, igual a 4.25 % (máximo) y 2.02 % (medio) para el Continostat, y 6.25 % (máximo) y 3.62 (medio) para el Nupubest.



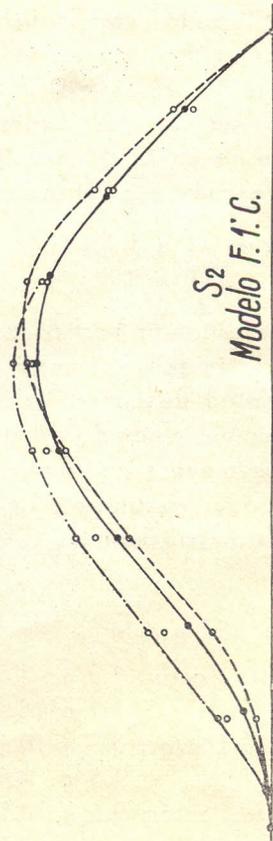
M_1
Modelo F.1.A



Modelo F.1.C.



S_2
Modelo F.1.A



S_2
Modelo F.1.C.

Lámina IX

En cuanto al KANN, utilizando como dislocación unitaria para el momento flector, los valores de $\varphi = 57^\circ$ para el centro del tramo y $\varphi = 53^\circ$ para los apoyos, deducidos de algunas experiencias, se obtienen (como se ve en la misma lámina que los anteriores) errores máximos del orden de:

Momentos flectores: 2 a 5 %.
Fuerzas: 0 a 2 "

En la lámina VII se trata ahora un pórtico doble empotrado con momento de inercia constante, en modelos de 25 cm de longitud de barras. La coincidencia es aún bastante buena, a pesar de tratarse de una estructura de nudos móviles en el espacio, aunque menor que en la viga continua; — como siempre la coincidencia es mayor para las fuerzas que para los momentos.

Los errores máximos obtenidos son:

| | | |
|--------------|------------------|--------------|
| CONTINOSTAT: | Momento flector: | 1,5 a 7,5 % |
| | Fuerzas: | 1.5 a 8 " |
| NUPUBEST | Momento flector: | 3. a 10 " |
| | Fuerzas: | 1.5 a 4.5 " |
| KANN | Momento flector: | 9.5 a 10.5 " |
| | Fuerzas: | ~ 3.5 " |

si se deja de lado, para el método KANN, el momento de empotramiento de la columna, que no fué hallado con deformador sino girando el apoyo, a cuya causa puede atribuirse el valor exagerado. De cualquier manera, para llegar a conclusiones definitivas sobre esta utilización de los modelos de KANN, es necesario seguir las investigaciones.

45) — Hasta hora se han considerado estructuras con momento de inercia constante dentro de cada barra, en la forma corriente en edificios, y también de eje recto. El método de KANN no alcanza nada más que este caso, y además debe ser de momento de inercia constante en toda la estructura; el Nupubest y el Continostat permiten en cambio, encarar, aunque sea en forma menos precisa, también el caso de sección variable y barras curvas.

Veamos pues los errores que se introducen con ello.

En las láminas VIII y IX se replantean las líneas de influencia del modelo F. I'. C, ya estudiado con el BEGGS (primer ejemplo) y del modelo F. I'. A, halladas con el Nupubest. Como puede verse en el esquema de la lámina VIII, se trata

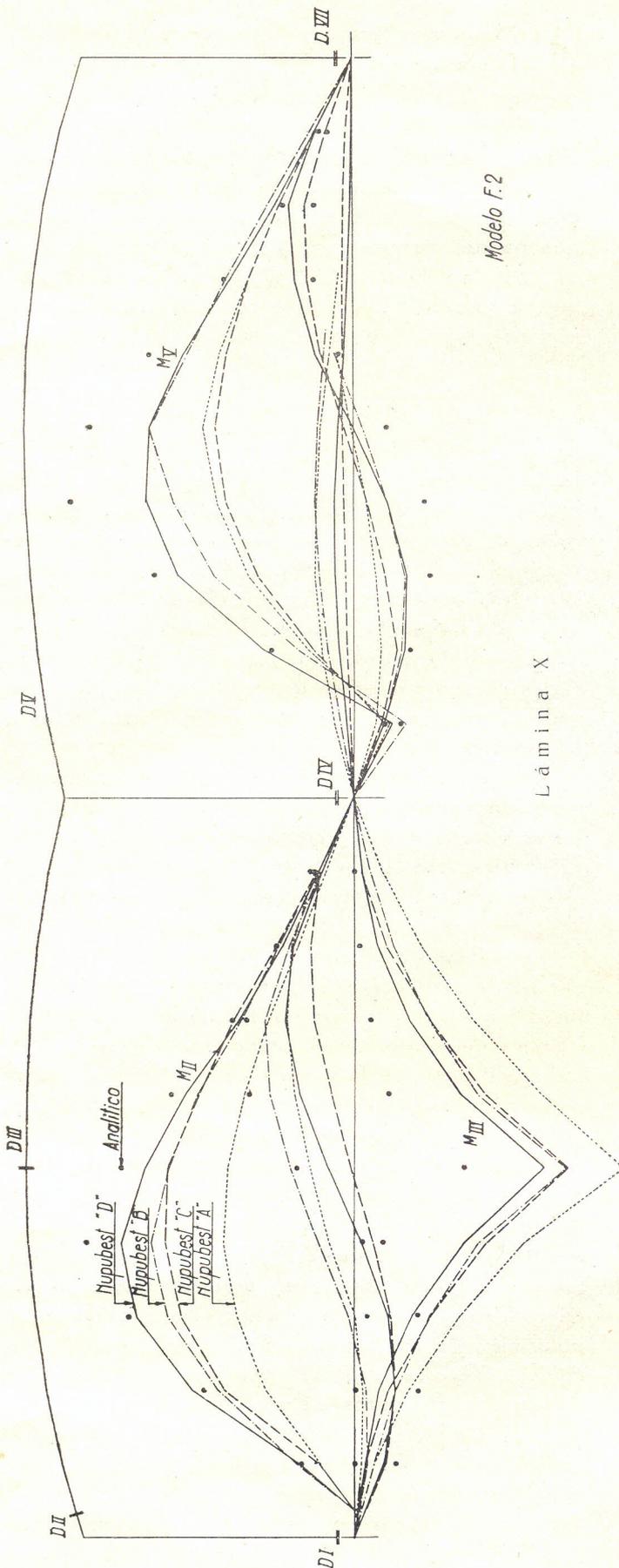
de un arco con sección sumamente variable que descansa, en el modelo F. I'. A sobre una pila muy rígida (60 u 80 veces la rigidez de clave), y en el F. I'. C sobre una pila del mismo orden de rigidez que la clave.

La primera investigación se hizo sobre el F. I'. A; — los modelos tenían todos el eje longitudinal coincidiendo con el eje teórico, pero el dimensionado de la sección se hizo en tres formas diferentes. En la lámina VIII se ve que en el Nupubest "A" se utilizó una varilla sola, es decir que se tomó un momento de inercia constante sensiblemente proporcional, respecto del de la pila, al de la región de clave; — en el Nupubest "B" se agregó otra varilla desde los riñones al empotramiento, y en el "C" se colocó una tercera que da una sección aproximadamente equivalente a la del prototipo.

De manera que el orden A-B-C debería indicar orden creciente de exactitud y sin embargo cuando se replantearon los resultados no se obtuvo ese resultado sino todo lo contrario y con grandes errores, como puede verse en las líneas de influencia para N_1 , M_1 y S_2 del modelo F. I'. A. Este resultado desconcertante a primera vista fué estudiado cuidadosamente, y después de diversos tanteos pudo llegarse a la conclusión que era debido a que las grandes deformaciones que sufre el modelo de arco, dejan de ser proporcionales porque se extiende a tal punto que su eje llega a ser casi rectilíneo y trabaja más bien como tirante; — este fenómeno estaba exagerado por la gran rigidez de la pila. Inclínaba a tal creencia el hecho de que la línea de influencia de N_2 , cuyo trazado no provocaba esta circunstancia era mucho más exacta: como comprobación se trazó la línea de influencia de la *reacción vertical* en el apoyo izquierdo R_1 (lámina VIII), con resultados perfectamente aceptables

La verificación final se hizo construyendo un modelo (F. I'. C) con el mismo arco pero con una pila de rigidez semejante a la rigidez media de aquel, cuyas líneas de influencia se han replanteado en las láminas VIII y IX, a la derecha de las correspondientes al F. I'. A. En ellas ha desaparecido toda anomalía.

Los errores máximos del F. I'. C (respecto a los valores analíticos, aunque en la figura se hayan replanteado los valores del Beggs) para los tres tipos de modelo fueron:



| | Momento flector | Fuerzas |
|---------------|-----------------|---------|
| NUPUBEST "A": | ~ 30 % | ~ 15 % |
| NUPUBELT "B": | ~ 25 " | ~ 10 " |
| NUPUBEST "C": | ~ 8 " | ~ 8 " |

es decir que, especialmente para el momento flector como podría preverse por razones teóricas, el error del "A" y del "B" es muy grande, pero que el "C" daría resultados muy buenos; — para las fuerzas aún el más simple da resultados relativamente exactos.

Sin embargo debe hacerse notar que en estos modelos en que el dimensionado, contrariamente al del Beggs, se hace en forma un poco arbitraria, pudo haber influido algo la casualidad en su elección. Quizás sería más firme considerar errores del 10 al 15 %.

Otro ejemplo semejante es el modelo F. 2 de un pórtico doble articulado, ya estudiado para el Beggs, cuyas características geométricas se ven en la lámina X y que tiene una sección enormemente variable. Con el Nupubest se hicieron tres modelos diferentes, en cuanto a las traviesas, caracterizados por:

— Nupubest "A". — Eje recto en posición intermedia; I constante

— Nupubest "B". — Eje recto en posición intermedia; I variable en tres etapas

— Nupubest "C". — Eje curvo exacto; I constante.

— Nupubest "D" — Eje curvo exacto; I variable como el "B", — para ver especialmente la influencia de la curvatura del eje del modelo, cuando en el prototipo es pequeña. En las láminas X y XI se pueden observar algunas de las líneas de influencia obtenidas, de donde se deduce la gran importancia que tiene la exactitud de la curvatura aún en este caso, y que indican que su empleo representa un mejoramiento casi tan grande como el de la sección variable, y que la coexistencia de estas dos aproximaciones permite reducir los errores en una magnitud apreciable.

Aún así, con el modelo realizado en la forma más exacta posible los errores para este tipo de estructura son mayores que los admisibles para un cálculo definitivo y solo podría adoptarse como primera aproximación del dimensionado, si se piensa que su montaje y operación es mucho más rápida que la del Beggs. Los errores máximos del Nupubest "D" son de 10 a 20 % en las fuerzas y de 15 a 25 % en los momentos, con excepción del momento en clave en que llega al 60 %; — la

anomalía de esta sección ya apareció, aunque no tan pronunciada, con el Beggs.

Finalmente en la lámina XII se dan las líneas de influencia de un sistema de arcos sobre p_s elásticas estudiado con el BEGGS y con el Nupubest con momento de inercia constante; en este caso en que las pilas son mucho más rígidas que el arco, la sección variable de este tiene en realidad una importancia un poco menor. Los errores máximos son de orden de:

Momento flector: 25 a 35 %
Fuerzas: 5 a 30 %

muy grandes por lo tanto; sin embargo como la distribución es bastante parecida, puede servir como primer tanteo, de orden cualitativo. Pero puede ser interesante notar que recién en estos dos últimos tipos de estructuras, los más complicados que pueden presentarse, llegamos a una magnitud de error de 30 a 35 %, contrariamente a lo establecido por MAGNEL, que supone estos errores aún para vigas continuas, como se expresó antes.

CAPITULO IX - TRAZADO DE DIAGRAMAS

46) — El trazado de diagramas de momentos flectores, y a partir de ellos las otras dos sollicitaciones, por medio de la aplicación simple de la estática, es también uno de los campos de aplicación en el que los métodos experimentales pueden ser de positivos resultados prácticos. Su utilización, sin embargo, no es tan corriente como la de los trazados de líneas de influencia debido por una parte, a que sus ventajas sobre estos últimos aparecen únicamente en pocas oportunidades, y por otra, a que solo algunos de los aparatos para cálculos experimental, son capaces de ello; es indudable además que el principio de los influenciómetros es mucho más simple y permite perfeccionar en mayor grado su manipulación, pudiéndose obtener resultados más exactos.

El problema considerado es hallar los momentos de apoyo de una estructura sometida a cargas determinadas, a partir de ciertos datos experimentales obtenidos en un modelo a escala reducida, en forma tal de eliminar de los cálculos, tanto la escala elástica absoluta del modelo, como también, y a causa de la condición anterior, la magnitud de la fuerza aplicada para deformar el modelo, factores que introducirían complicaciones de orden práctico e inexactitudes consiguientes; no debe perderse de vista que los métodos experimentales que estamos considerando, son destinados principalmente al calculo práctico de estructuras.

Tales estructuras, además, deben ser sistemas reticulados de elementos prismáticos rectos en los que la sollicitación primordial es la flexión plana (aunque no tienen por que ser siempre estructuras planas), puesto que los fundamentos teóricos de tales métodos que hemos visto, se apoyan en expresiones deducidas para elementos de eje rectilíneo sometidos puramente a deformaciones flexio-

nales. Además, por lo menos dentro del estado actual de estos métodos, se emplean para ello las deformaciones macroscópicas, y es necesario utilizar los modelos en "elevación"; quedan pues descartadas en absoluto la influencia de la fuerza normal y de la fuerza tangencial en la distribución de las sollicitaciones, ya que el valor de las rigideces correspondientes es, relativamente a la estructura real, muchísimo mayor que la rigidez a la flexión.

Planteado el problema en estos términos, tendremos como elementos observables en el modelo, las características de deformación de los elementos prismáticos rectos sometidos a flexión:

- Flecha o deformación transversal,
- Inclinación del eje longitudinal,
- Radio de curvatura del mismo,

a partir de los cuales debe poderse obtener el valor del momento flector en cualquier punto. También es necesario hacer notar que, para poder independizarse de la magnitud de la fuerza deformadora aplicada al modelo, no podrá estudiarse la sollicitación correspondiente a varias fuerzas simultáneas obrando en la estructura, sino que habrá que estudiarla sucesivamente para cada una de las cargas aisladamente y luego superponer los resultados. Solo es posible dejar de lado esta regla fundamental cuando las diversas cargas obran en un mismo tramo de la estructura, gracias a a utilización de la "fuerza ficticia de reemplazo", equivalente a la carga real en cuanto a la magnitud de los momentos de apoyo, o aún al sistema de GOTTSCHALK, que utiliza un hilo sobre pequeñas poleas que permite aplicar simultáneamente varias fuerzas de igual magnitud.

Siguiendo estas directivas se han desarrollado tres métodos experimentales destinados al uso práctico:

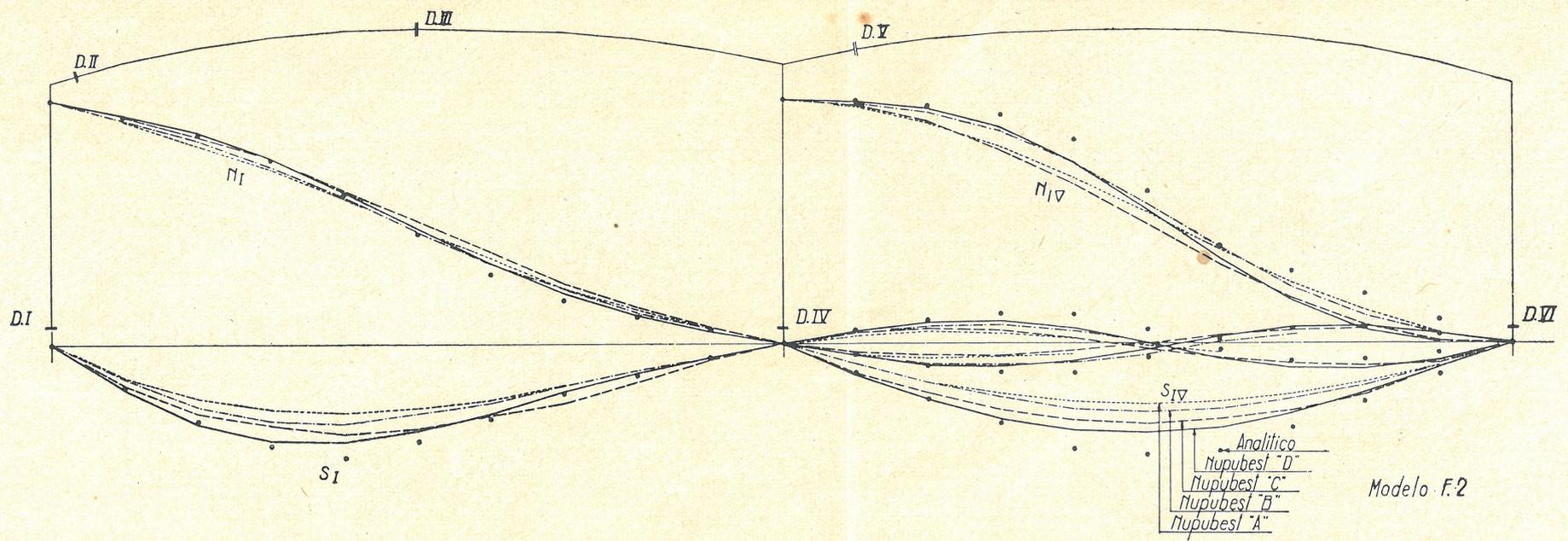


Lámina XI

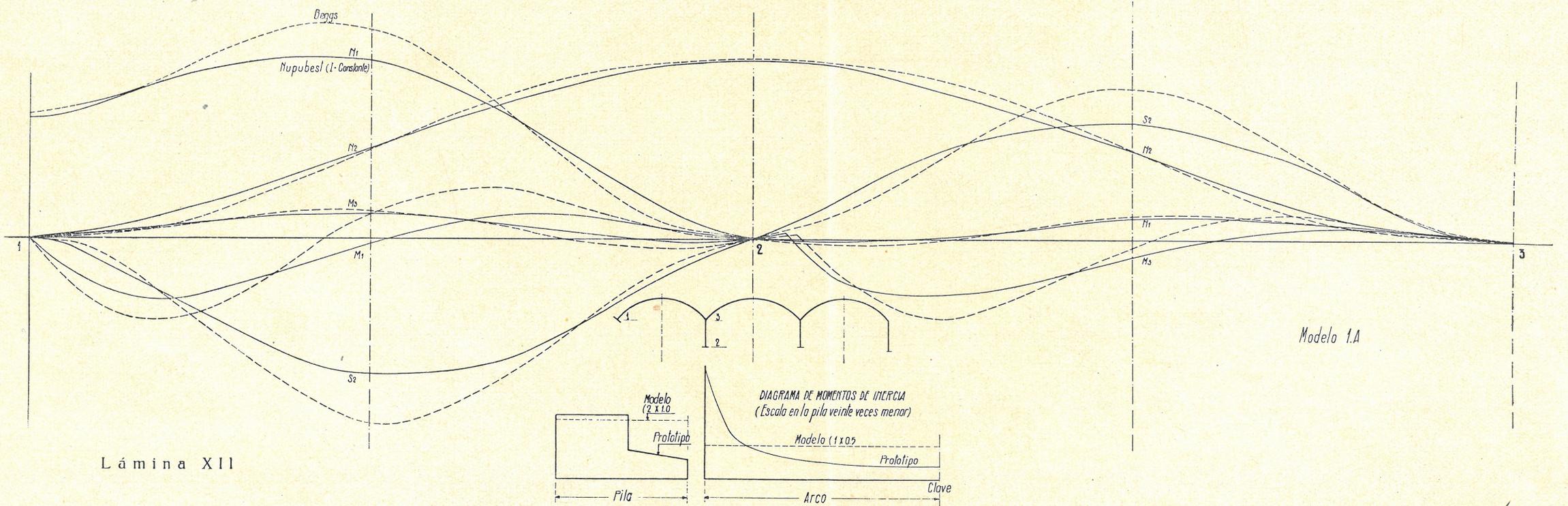


Lámina XII

- El método de los coeficientes de empotramiento, de GOTTSCHALK (B.9,10 y 36 a 39).
- El método de los puntos de momento nulo de RIECKHOF (B. 11).
- El método de los ángulos de giro de nudos y barras de KANN (B. 40)

ordenados según la fecha de su aparición, y de los cuales los dos primeros permiten la resolución completa de cualquier problema, mientras que el último puede más bien considerarse como un procedimiento rápido de control.

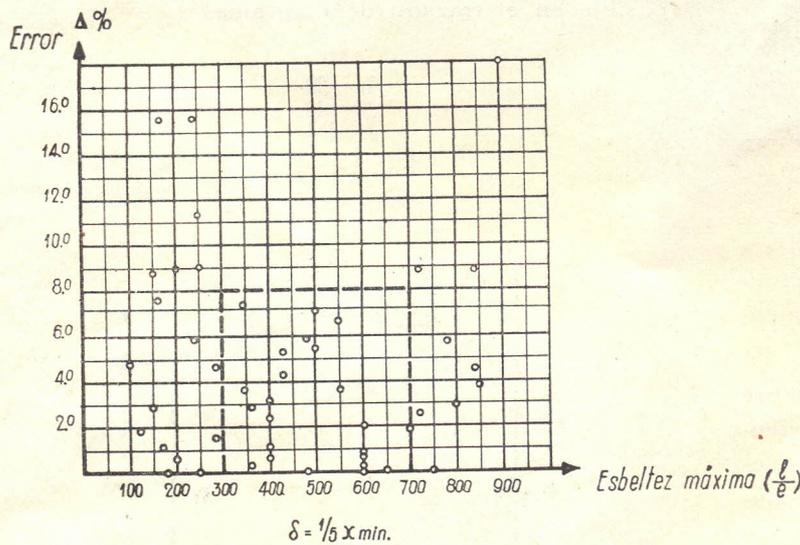
47) — CONTINOSTAT. — Para determinar los momentos flectores, GOTTSCHALK halla los momentos de apoyo M_0 y M_1 en el tramo cargado, con la expresión:

$$M_0 = m_0 \cdot P \cdot l$$

$$M_1 = m_1 \cdot P \cdot l$$

donde P es la carga total que obra en el tramo, l su longitud, y m_0 y m_1 son los coeficientes de empotramiento; estos son función de

a) — Magnitudes que dependen del diagrama de momentos de la viga isostática equivalente, es de



$$\delta = \frac{1}{5} \times \text{min.}$$

Continostat - Método de las tangentes

Viga continua

Figura 19

cir que pueden calcularse previamente para los tipos de carga más comunes, como lo ha hecho GOTTSCHALK.

b) — Magnitudes observables: Ordenada de la línea elástica h en el medio de la luz, y los segmentos f_0 y f_1 interceptados en la vertical media por las tangentes a la línea elástica en los apoyos. Por ejemplo cuando la fuerza está colocada a

los $2/5$ de la luz a partir del apoyo izquierdo, los coeficientes de empotramiento son:

$$m_0 = \frac{8}{375} \frac{27h - 13.75f_0 - 3.25f_1}{4h - f_0 - f_1}$$

$$m_1 = \frac{8}{375} \frac{18h - 11.50f_0 - f_1}{4h - f_1 - f_0}$$

La escala se elimina puesto que estas expresiones son la relación de dos funciones lineales en f_0 y f_1 y h . El procedimiento práctico es producir la deformación en un modelo como el de la fig. 14 con una de las guías aplicada en el mismo lugar que la fuerza real, y entonces dibujar en el papel la línea elástica en la región de los apoyo pasando un lápiz contra las varillas y también marcar el punto medio; retirado el modelo se busca con toda facilidad, y con una exactitud suficiente, la tangente a dicha línea.

La transmisión de los momentos en los tramos descargados y la repartición de un momento incidente entre las diversas barras que llegan a un nudo, se hace utilizando las mismas magnitudes que en los coeficientes de empotramiento, y por medio de expresiones derivadas de la (6.8)

El método de las tangentes se aplica para estructuras con nudos fijos en posición y especialmente para vigas continuas, siendo sus mayores ventajas la rapidez del trazado, las pequeñas dimensiones que es posible darle al modelo y su exactitud: solo podría objetarse la necesidad de cálculos numéricos relativamente extensos para determinar aquellos coeficientes.

En este caso como en los influenciómetros y en los otros métodos de trazado de diagramas, es útil estudiar la importancia de las escalas o esbelteces del modelo; aunque la esbeltez máxima pierde algo su importancia por no tratarse de nudos móviles, en cambio puede ser inconveniente porque

la varilla debe servir de guía al lápiz. En la figura 19 se reproduce diagrama de errores de este método obtenido en vigas continuas de 2 y 3 tramos para diferentes esbelteces y escalas, en que puede verse un agrupamiento de valores menores en los errores de las experiencias, en la región de las esbelteces medias; del recuadro marcado más fuerte se puede deducir que utilizando esbelteces entre 300 y 700 (naturalmente que sin mayor pre-

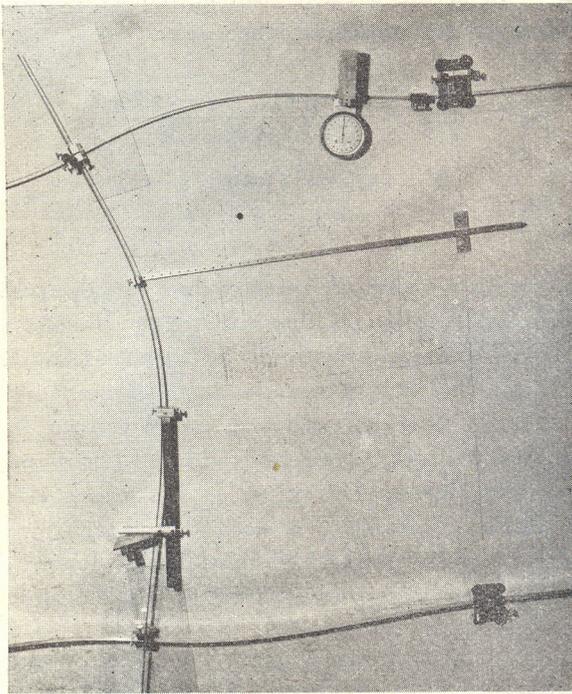


Figura 20

cisión de los límites); el error máximo probable no pasa de 6 a 8 %.

48) — NUPUBEST. — Este método utiliza el procedimiento de simplificación de una estructura compleja e hiperestática, por medio de su subdivisión en una serie de estructuras simples isostáticas, tramo simplemente apoyado y ménsula, según los puntos de momento nulo de la estructura original, cuyas reacciones mutuas se van obteniendo a partir del tramo directamente cargado.

La repartición de un momento incidente sobre las diversas barras de un nudo, se hace, conociendo del punto de momento nulo, aplicando directamente la (6.7), cuando es una estructura de nudos fijos en el espacio. En caso contrario se necesita, para aplicar la ec. (6.10), hallar la flecha o índice de rigidez y en dichos puntos.

La determinación de los puntos de momento nulo, o puntos de inflexión de la elástica, se hace con un simple indicador de curvatura o esferómetro, como puede verse en la figura 20, que representa una parte del modelo de pórtico de la figura 13, dispuesto para hallar el diagrama de momentos correspondiente a una fuerza aplicada en la viga inferior. También se ve en esta, el indicador de tangentes con el que se mide el índice de rigidez.

Como el aparato Nupubest es el que permite

encarar mejor las estructuras complicadas, de nudos móviles en el espacio, al tipo de nudos fijos y vigas continuas no se le dió mayor importancia en este estudio comparativo, por lo cual solo daremos a título de indicación algunos resultados:

- Viga continua: $\Delta = 4$ a 7 %.
- Pórtico fijo: $\Delta = 4,5$ a 5 %.

Pero en cambio se encaró el estudio a fondo de un modelo que pudiera representar, desde el punto de vista de la movilidad de los nudos y de las formas (malla no rectangular), el caso más general de trazado de diagramas, cuyas características y tipos de carga son los de la figura 21.

La comparación de resultados, respecto a los valores analíticos, se hizo con los momentos de apoyo, utilizando como procedimiento experimental también el de líneas de influencia, que aún en estos casos de cargas fijas puede dar resultados ventajosos; — no debe olvidarse además que mientras que el segundo principio de reciprocidad permite tratar piezas de sección variable, ello no es posible en el trazado de diagramas.

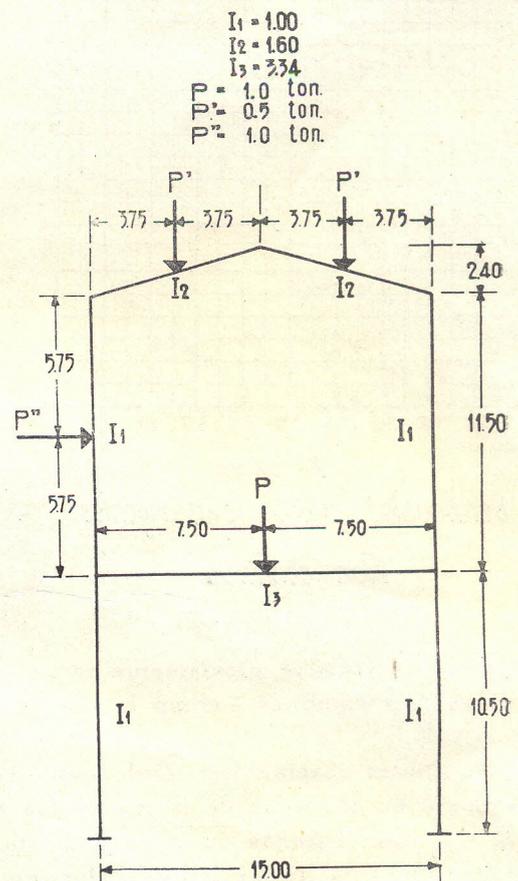


Figura 21

En la tabla adjunta se dan los errores relevados en dichos momentos de apoyo, dejando de lado solo los valores absolutos demasiado pequeños (generalmente solo uno), para diversas escalas y por lo tanto diferente esbelteces, y también con varias flechas provocadas, para apreciar si dentro de los valores establecidos, $f/u = 1/4$ a $1/6$, había diferencias apreciables, lo que no sucede como puede deducirse. Se observará que las escalas comienzan precisamente a partir del valor límite de RIECKHOF ($1/20$), hacia valores aún menores, debido a que la magnitud del prototipo hacía imposi-

nes, porque su exagerada flexibilidad dificultaba las medidas y provocaba errores mayores, como puede notarse claramente en las láminas, llegando a valores inadmisibles tanto los máximos como los promedios. También puede notarse ese efecto en las líneas de influencia, aunque observando que estas son siempre más exactas.

Una consideración de estos factores y el del espesor de las varillas, nos ha llevado a establecer que, dentro de las condiciones indicadas enseguida, el error probable es:

| N.º | Determinación | Escala | Carga P = 1 ton. | | | Carga P' = 0.5 ton. | | | Carga P'' = 1 ton. | | |
|-----|-----------------------|--------|------------------|----------|-------|---------------------|----------|-------|--------------------|----------|-------|
| | | | Flecha | Error %. | | Flecha | Error %. | | Flecha | Error %. | |
| | | | | Máximo | Medio | | Máximo | Medio | | Máximo | Medio |
| 1 | Gehler | — | — | 3.0 | — | — | 1.5 | — | (¹) | 6.3 | — |
| 2 | Gross | — | — | — | — | — | — | — | (²) | — | — |
| 3 | Línea de Influencia | 1/20 | — | 8.0 | 4.2 | — | 19.0 | 8.4 | — | 21.0 | 5.5 |
| 4 | “ “ | 1/25 | — | 10.0 | 6.0 | — | 5.0 | 3.0 | — | 11.0 | 6.3 |
| 5 | “ “ | 1/33 | — | 11.0 | 7.8 | — | 10.0 | 7.0 | — | 10.0 | 4.5 |
| 6 | “ “ | 1/40 | — | 7.0 | 4.0 | — | 20.0 | 13.0 | — | 9.5 | 2.1 |
| 7 | Punto de momento nulo | 1/20 | — | 42.0 | 18.6 | — | 18.0 | 10.6 | — | 32.0 | 12.7 |
| 8 | “ “ | 1/25 | 1/4 | 13.0 | 7.8 | 1/4 | 11.0 | 6.0 | 1/5 | 14.5 | 6.3 |
| 9 | “ “ | 1/33 | 1/5 | 22.0 | 10.4 | 1/5 | 15.0 | 7.2 | 1/5 | 13.0 | 4.5 |
| 10 | “ “ | 1/40 | 1/6.5 | 8.0 | 5.2 | 1/4 | 20.0 | 10.0 | 1/6.25 | 12.0 | 4.5 |

(1) Método de Cross con distribución del esfuerzo cortante

(2) Método de Cross con fuerzas de fijación.

ble ir más allá. (Aún así, el modelo de esta estructura en escala de $1/20$ medía 0.75 por 1.20 mts.).

Todavía para la escala $1/40$ los resultados son buenos, pero este podría considerarse como un mínimo debido a que ya aquí, el error provocado en la determinación de los puntos de momento nulo a causa de que el centro de medida del esférómetro no puede llegar a menos de 38 mm. del nudo teórico, por las dimensiones de estos dos elementos es relativamente importante; es decir que es imposible determinar exactamente la ubicación de ese punto cuando dista, para la escala $1/40$, menos de 1.52 mts. del apoyo.

El efecto de la rigidez en el modelo mayor ($1/20$) se notaba claramente en las determinacio-

| | Máximo | Medio | |
|-----------------------|---------------------------|-------|----|
| Líneas de Influencia | 10.0 | 7.0 | %. |
| Punto de momento nulo | 15.0 | 10.0 | %. |
| para una esbeltez | $450 < \frac{l}{e} < 750$ | | |
| y una escala | $E_D > 0.025$. | | |

No debe perderse de vista además, que la diferencia entre dos valores analíticos llega en uno de los casos a 6.3 %.

Un punto de interés es el tiempo necesario para el cálculo de una estructura según los diversos sistemas; así tenemos para este modelo con las cargas iniciadas:

— EXPERIMENTALES. — PARA LAS TRES FUERZAS.

Método de los puntos de momento nulo: (media) 175 minutos.

Método de las líneas de influencia: (media) 135 minutos.

— ANALÍTICOS. — FUERZA P'' (Asimétrica).

Cross. Distribución de esfuerzo cortante: 125 minutos.

Cross. Fuerzas de fijación: 240 minutos.

— ANALÍTICO. — FUERZAS P o P' (Simétrica).

Cross 70 minutos.

En este cuadro puede apreciarse la rapidez mayor del método experimental respecto al analítico, aún el más simple como es el Cross con distribución de esfuerzo cortante, cuando se trata de una sollicitación asimétrica, así como también la superioridad, en este caso, de las líneas de influencia sobre trazado de diagramas. Es indudable que la línea de influencia es tanto más rápida que el otro, cuanto mayor es el número de fuerzas solicitantes y menor el número de incógnitas, relativamente. La economía de tiempo en un sistema 8 veces hiperestático llega a un 70 %, con menor posibilidad de errores, y con un error probable máximo (10 %), no mucho mayor que el de los métodos analíticos.

49) — KANN. — En el estudio de los modelos de celuloide en elevación con nudos de madera, figuras 16 y 22, merece mucho más tiempo que el que se le ha podido dedicar hasta ahora, y será profundizado en el futuro, haciéndosele objeto de un nuevo trabajo en el que se tomarán en cuenta las diversas variables que pueden influir en su exactitud, principalmente la esbeltez de las barras, la longitud de los nudos y la flecha aplicada. También puede preverse la posibilidad de ampliar su campo de aplicación.

El procedimiento de KANN se basa en lo siguiente. Vimos en el capítulo VI, que los momentos de apoyo están dados por las ec. (6.1):

$$M_0 = M_0^0 + 2EK (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\alpha) \quad (a)$$

$$M_1 = M_1^0 + 2EK (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\alpha)$$

o sea cuando no hay carga directa:

$$M_0 = 2EK (2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\alpha) \quad (b)$$

$$M_1 = 2EK (2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\alpha)$$

y observando que (B. 40, p. 193):

1) — No se conoce el valor de las fuerzas que obran sobre el modelo, por lo cual no pueden calcularse los momentos M_0^0 y M_1^0 .

2) — La rigidez EI de las barras del modelo es desconocido.

3) — Solo pueden medirse los ángulos de giro de nudos y barras con cierta exactitud cuando las deformaciones son grandes, se deduce que, a causa de 1), debe cargarse un tramo por vez, como con los otros métodos, para utilizar las ec. (b) y entonces deducir los momentos de extremidad de los tramos cargados por el equilibrio del nudo; a causa de 2) no es posible calcular el momento mismo sino momentos reducidos o proporcionales a los reales:

$$m_0 \equiv 2\varphi_0 + \varphi_1 - 3\alpha \quad (c)$$

$$m_1 \equiv 2\varphi_1 + \varphi_0 - 3\alpha$$

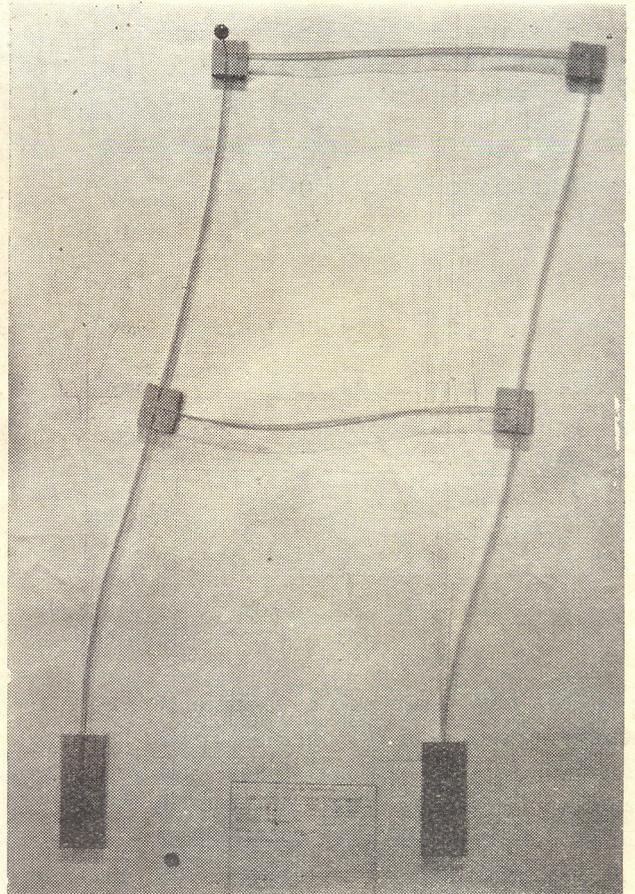


Figura 22

pudiéndose hallar en todo caso los valores absolutos si se determina uno de ellos por medio de una línea de influencia. La causa 3) exige utilizar modelos en "elevación".

KANN utiliza nudos de grandes dimensiones, con una longitud igual a $1/5$ de la luz de la barra, y entonces los valores analíticos de los momentos son:

$$m_0 \equiv 1.5 \varphi_0 + \varphi_1 - 2.5 \alpha$$

$$m_1 \equiv 1.5 \varphi_1 + \varphi_0 - 2.5 \alpha \quad (d)$$

tratando de representar así el acartelamiento de las vigas, aunque ese valor parece excesivo, por lo cual algunos de nuestros ensayos han sido hechos con valores menores.

De acuerdo con los ejemplos de la memoria original (B. 40, p. 195 y sig.), obtiene para los modelos en elevación (ese autor encara la utilización de los modelos planos cuando el grado de hiperestaticidad es pequeño, con lo cual obtiene entonces mayor exactitud), los errores siguientes, hallados en diversos modelos de pórtico sometidos siempre a una carga horizontal:

$$\Delta_{\max} = 7.5 \text{ a } 26.0 \text{ } \%; \quad \Delta_{\text{medio}} = 5.0 \text{ a } 9.0 \text{ } \%$$

calculado sin acartelamiento

$$\Delta_{\max} = 6.0 \text{ a } 35.0 \text{ } \%; \quad \Delta_{\text{medio}} = 3.8 \text{ a } 19.0 \text{ } \%$$

calculado con acartelamiento

y en mayor número de casos el error es un poco mayor cuando se compara con el cálculo analítico teniendo en cuenta el acartelamiento.

Sobre las experiencias efectuadas en el laboratorio nuestro se volverá en un próximo trabajo en el que se tomará en cuenta las diversas variables que pueden influir en su exactitud, principalmente:

- Esbeltez de barras,
- Longitud de nudos,
- Desplazamiento aplicado,

pues pueden ser objeto de variaciones aún mayor que en el Nupubest y Continostat, como sucedía también con las líneas de influencia; — se dará pues únicamente algunos resultados globales, pero en campos más diversos que los de KANN (únicamente pórticos sometidos a fuerzas horizontales), estructuras que, en general, pueden dar mayor

exactitud debido a su posición de equilibrio bien definida.

Tenemos así que en las vigas continuas los errores medidos han oscilado entre 10 y 30 %, y en pórticos de nudos fijos, entre 5 y 20 %; sin embargo en este tipo se ha visto la posibilidad, a confirmar posteriormente, que con nudos más pequeños, hasta 1/10 de la luz, y con ciertos valores de los ángulos deducidos teóricamente, ese error podría reducirse al 5 o 10 %.

En pórticos de dos pisos con nudos móviles, sometidos a fuerzas horizontales el error máximo osciló entre 5 y 8 % y su valor medio entre 3 y 5 % más o menos, utilizando nudos de 1/13. En cambio ese mismo pórtico sometido a cargas verticales arrojó errores máximos del orden de 20 % para carga simétrica, y de 30 a 40 % para carga asimétrica.

Finalmente en un modelo de pórtico de dos naves con fuerza vertical asimétrica, los errores de momentos (los de ángulo de giro, especialmente el ángulo de corrimiento lateral, dan valores bastante más altos, hasta 50 y 55 %), oscilan en los máximos entre 20 y 35 %, y los promedios entre 15 y 25 %; con fuerza horizontal el error máximo se reduce a 5 % para el momento y 12 % para los ángulos.

De acuerdo con lo expuesto puede aceptarse el método de KANN como instrumento de control, pero además tengo la firme convicción, que espero confirmar, de que bajo ciertas condiciones y con suficientes precauciones, esos errores se podrán llevar a 15 o 20 % como máximo, en los casos más desfavorables, es decir convertirlo en un método de cálculo aceptable. En esta forma, y gracias al gran sentido teórico-práctico del Prof. KANN, que ha aportado con esto una gran contribución al cálculo experimental, cualquier estudio de estructuras podrá disponer a muy poco costo un procedimiento de cálculo mecánico.

CAPITULO X - ESFUERZOS SECUNDARIOS

El problema de la determinación de los esfuerzos secundarios de las estructuras trianguladas, aunque no se presenta corrientemente en la práctica, puede llegar a tener en ciertos casos especiales una importancia fundamental, que hace necesario encarar su estudio.

Por otra parte su cálculo analítico no ofrece dificultad alguna, ni es tampoco de una longitud

desesperante. En lo que se refiere al cálculo experimental, es uno de los casos que más dificultades presenta, por cuya causa todavía no se ha utilizado prácticamente. Esas dificultades empiezan cuando se encara el problema con toda generalidad, debido al dimensionado del modelo; — en efecto, dejando de lado el modelo en gran escala, el modelo plano o en elevación permite tener en

cuenta para su dimensionado, únicamente una variable o tipo de sollicitación, que generalmente es el momento flector, y precisamente las tensiones secundarias son producto de sollicitaciones de flexión originadas a su vez por deformaciones normales. Es pues necesario tener similitud tanto para flexión como para esfuerzo normal.

El único intento práctico de determinación experimental de tensiones secundarias ha sido efectuado por RIECKHOF con el Nupubest, valiéndose de una subdivisión del problema que le permite eliminar del modelo la similitud para fuerzas longitudinales y utilizando el procedimiento del trazado de diagramas en cambio del de las líneas de influencia. Para ello, en lugar de aplicar una

$$Q = 3 EI \frac{y}{x^3}$$

Pero según la (4.22) se tiene que

$$Q_p = \frac{M_p}{a_p} = Q_m \frac{\alpha^3}{\gamma \cdot d \cdot i}$$

y combinando con la anterior se obtiene finalmente

$$Q_p = 3 (EI)_p \left(\frac{y}{x^3} \right)_m \cdot \frac{\alpha}{d^3}$$

La sistematización del cálculo o medición de y , α_m y luego del Q producido en una barra determinada por la sumación de deformaciones elementales significa la ejecución de cálculos numéricos de una extensión considerable, mayor que la de cualquier método analítico.

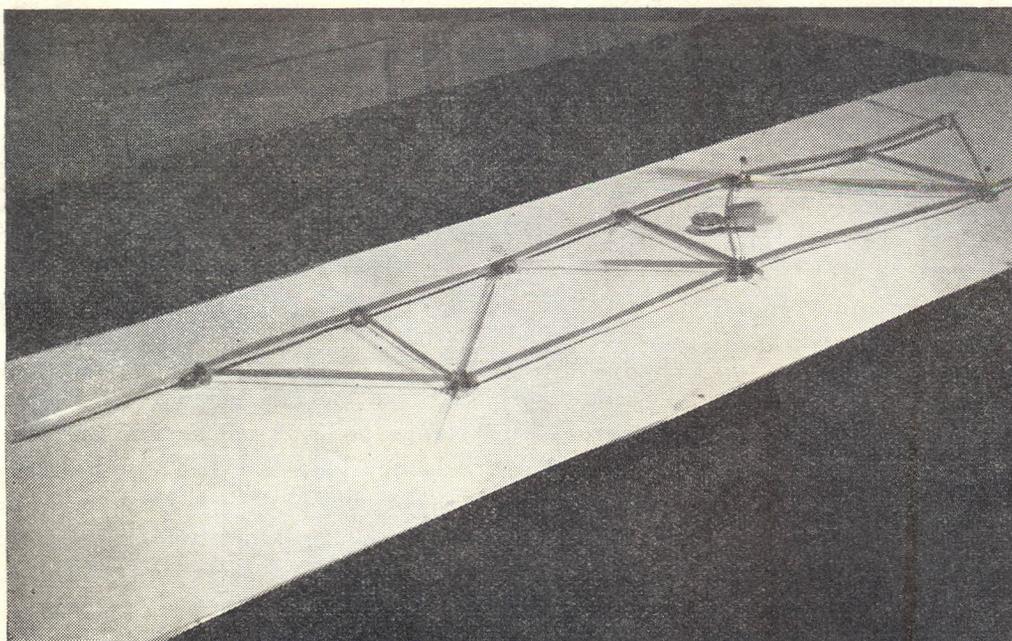


Figura 25

fuerza exterior al modelo, correspondiente a la del prototipo, como se hace en la aplicación corriente del método de los puntos de momento nulo, introduce en una barra una deformación longitudinal proporcional a la que sufre la barra correspondiente del prototipo cuando se carga, (fig. 23) y se determina entonces por medio de dichos puntos y de los índices de rigidez las sollicitaciones de flexión en todas las barras afectadas. Haciendo esto sucesivamente para todas las barras y luego sumando para cada una las sollicitaciones elementales producidas, se obtienen los momentos secundarios de la estructura a través de los esfuerzos cortantes en cada barra, que, según la (6.11) son

Para apreciar bien esta aplicación del Nupubest se hicieron dos determinaciones experimentales de un puente metálico tipo Warren de vía superior sin tablero. Simultáneamente con la primera determinación experimental (1) se hizo también el cálculo analítico de las mismas líneas de influencia utilizando el método de Winkler. Para este tipo de sollicitación esta es la única contribución que se podrá tomar en cuenta, pues la obra cita-

(1) Esta determinación, así como el cálculo teórico fueron hecho por los estudiantes Sres. Julio Etchart y Sergio Pisano como trabajo práctico del curso de Estructuras Metálicas.

da de CAROT y RIECKHOF, el método se expone con ayuda de un ejemplo que consiste únicamente en la determinación correspondiente a la deformación de una barra, y sin comparación con valores teóricos.

El resultado de la comparación ha sido desfavorable para el método experimental desde cualquier punto de vista que se le considere, puesto que además de que la exactitud de los resultados deja mucho que desear, el método analítico utilizando es más simple y más breve que el experimental.

Las líneas de influencia de las láminas XIII y XIV permiten observar, comparando con los valores analíticos.

En las láminas XIII y XIV se reproducen algunas líneas de influencia elegidas entre todas las halladas, como las más típicas y que representan las condiciones extremas alcanzadas; — se indican allí dos experiencias debido a que durante la ejecución de la primera se observaron dos motivos de error muy importantes que podían subsanarse. Por una parte, una de las variables a tener en cuenta era la magnitud de la deformación a producir en el modelo; en la primera experiencia se tomó un porcentaje medio de 15 (respecto a la longitud de la barra), siguiendo el ejemplo referido, y variando entre 10 y 20 %, aproximadamente. Para la segunda, en vista de los errores, se hicieron determinaciones individuales de ensayo en algunas barras y se comprobó que una deformación del 20 % podía llegar a invertir la curvatura de la barra, por lo cual era aconsejable tomar el 10 %, como magnitud conveniente.

Como otra causa de error probable se indicó el dimensionado del modelo: — en la primera experiencia se empleó en el cordón superior una barra compuesta de dos varillas de acero superpuestas para conseguir el gran momento de inercia relativo que, debido al tipo de puente, poseía el prototipo, respecto a las otras barras. Sin embargo, como las varillas no deslizaban bien una sobre otra como se había supuesto, y la disposición dificultaba además la determinación de las características geométricas, los errores consiguientes sobrepasaban las ventajas de un dimensionado exacto, por lo cual en la segunda experiencia, se prefirió utilizar barras simples, aunque no dimensionadas exactamente.

Pero si bien en esta forma desaparecieron una

serie de anomalías *cualitativas*, los errores sin embargo permanecieron enormemente altos, imposibilitando su empleo eficaz: en la primera determinación el error medio es de 20 %, y el máximo de 60 %, mientras que en la segunda pasan a 10 %, y 40 % respectivamente.

Luego pues, la exactitud del método experimental no es suficiente; y más que eso aún, no es conveniente ni práctico porque requiere más tiempo que los métodos analíticos, conservando además el inconveniente grave, que no poseen las otras aplicaciones experimentales, de requerir un número tan grande de cálculos numéricos, que mantienen las posibilidades de error de aquellos.

Con motivo de estas experiencias se hicieron una serie de determinaciones analíticas, por diversos métodos, de los esfuerzos secundarios en dos vigas indicadas en la figura 24. Me parece no des-

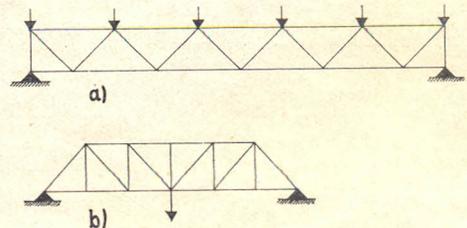


Figura 24

provisto de interés indicar los resultados comparativos obtenidos. Los métodos generalmente en uso son los de Winkler, Mohr y Cross, especialmente los dos primeros, y la primera etapa de la determinación, común a los tres, es la determinación del ángulo de giro θ de las barras, que puede hacerse analíticamente, por las expresiones conocidas

$$\delta a = (R_3 - R_2) \cot \beta + (R_3 - R_1) \cot \gamma$$

o bien por medio de un Williot.

Empleados los dos procedimientos a las dos estructuras se comprobó que el tiempo empleado es aproximadamente el mismo (25 minutos para la estructura c), aunque el método analítico da una mayor exactitud, pudiendo convenir también cuando el triangulado contiene ángulos rectos que eliminan alguno de los términos a calcular

El método de Winkler llega directamente a las

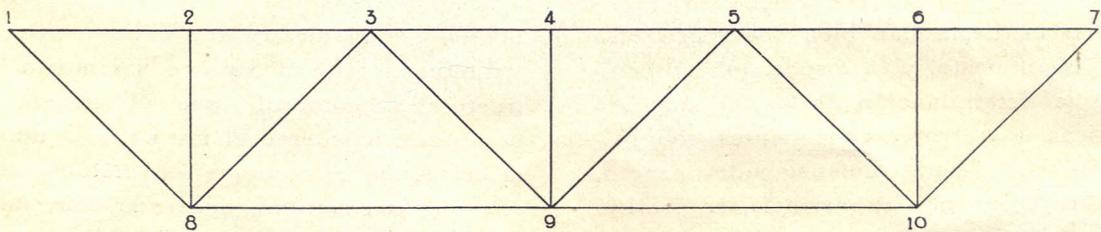
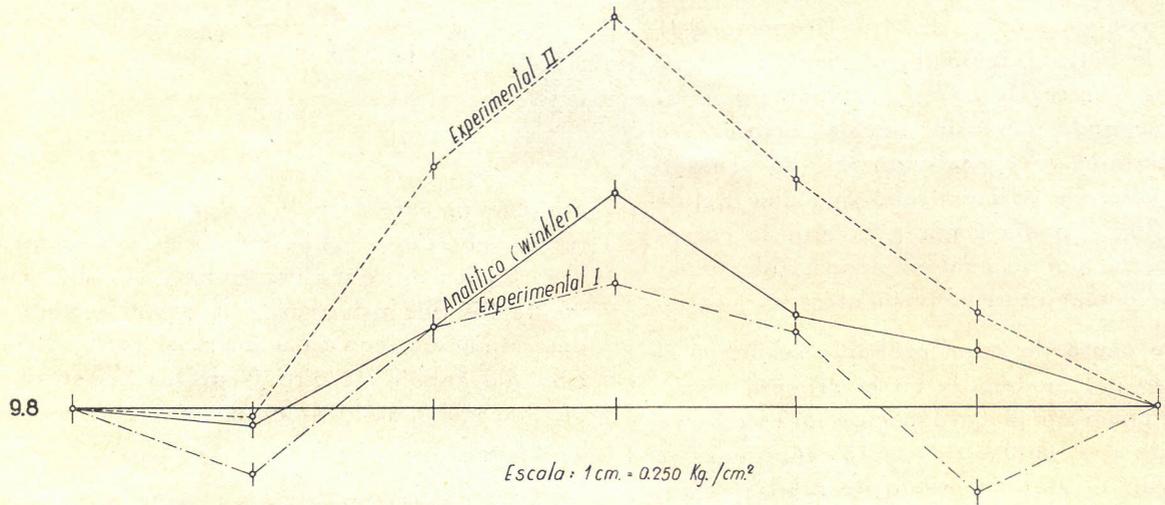
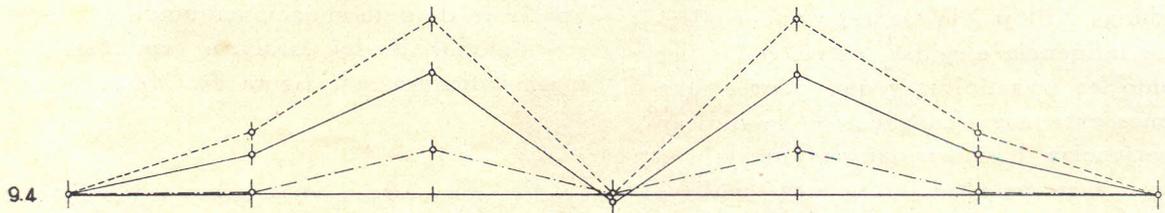
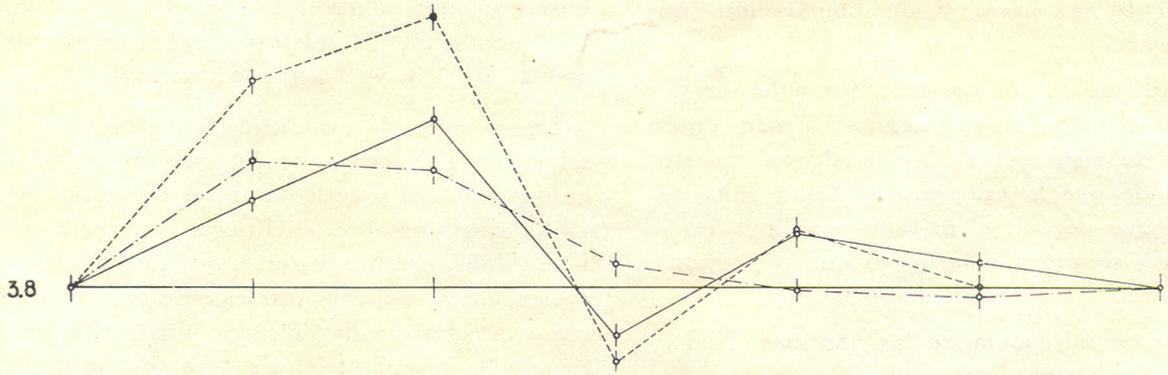


Lámina XIII

tensiones secundarias R_{mn} y R_{nm} que se producen en los extremos de las barras mn , por medio de un sistema de ecuaciones en número igual al de los nudos, cuyo término genérico es

$$2 \left\{ \tau_n \sum_1^m K_{np} + \sum_2^m (K_{np} \sum_1^p d\alpha) \right\} + \sum_1^m \left[K_{np} (\tau_p + \sum_p^{pn} d\alpha) \right] = 0$$

en donde se indica con n el número del nudo para el cual se establece la ecuación, con m el número de barras que llegan allí y con p un nudo cualquiera de los que están unidos a aquel (fig. 25).

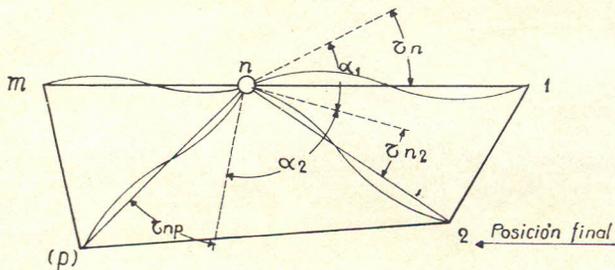


Figura 25

Los ángulos τ son los *ángulos de giro* de las tangentes en los extremos de las barras, dados a partir de un ángulo de referencia τ_n por la expresión:

$$\tau_{np} = \tau_n + \sum_1^p d\alpha$$

Como puede verse enseguida por la expresión dada, aunque el procedimiento no ofrece dificultad de método ninguna, es sin embargo un poco confuso para su aplicación, debido a las sumaciones dobles, etc., especialmente para el calculista que no tiene ocasión de aplicarlo corrientemente, como se comprobó en el cálculo analítico comparativo con el experimental. Es la opinión de Johnson, Bryan y Turneaure cuando dicen: "Para el novicio el método de Mohr es más ventajoso (que el de Winkler) a causa del proceso más obvio y más simple utilizado en la formulación del sistema de ecuaciones".

Para el empleo normal el método de Winkler, pues, puede descartarse, y la elección debe refe-

rirse a los métodos de Cross o de Mohr, que gozan de la ventaja de utilizar ecuaciones y conceptos perfectamente conocidos y fáciles de recordar.

El método de Mohr utiliza directamente las ecuaciones (6.4), en las que desaparece el último término función de las fuerzas exteriores aplicadas a la viga:

$$2 \varphi_n \sum_1^m K_{np} + \sum_1^m K_{np} \varphi_p - 3 \sum_1^m K_{np} \Theta_{np} = 0$$

La simple observación comparativa de esta ecuación con la de Winkler, confirma de inmediato los conceptos expuestos. La resolución del sistema se hace por aproximaciones sucesivas, como el de Winkler, necesiándose en general 5 o 6 ciclos para obtener una buena aproximación.

En el método de Cross (B. 44) se comienza calculando los momentos de empotramiento μ producidos por los desplazamientos Θ del eje de la barra:

$$\mu = 6 E K \Theta$$

| NUDOS | MOMENTOS SECUNDARIOS | | |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | MOHR | CROSS | WINKLER |
| 1/2 | + 254.8 + 153.3 | + 235.0 + 135.5 | + 266.0 + 155.2 |
| 2/4 | - 91.5 - 151.3 | - 82.5 - 128.5 | - 92.2 - 161.5 |
| 4/7 | + 1553.0 + 3010.0 | + 1526.0 + 2996.0 | + 1544.0 + 2993.0 |
| 1/3 | - 273.0 - 618.0 | - 235.0 - 600.5 | - 265.0 - 606.5 |
| 3/5 | + 1031.5 + 561.5 | + 1018.0 + 562.5 | + 1030.0 + 567.5 |
| 5/6 | + 627.0 + 4030.0 | + 638.0 + 4036.0 | + 647.0 + 4012.0 |
| 3/2 | - 66.1 - 64.1 | - 52.5 - 54.0 | - 63.4 - 61.4 |
| 3/4 | - 363.5 - 376.6 | - 358.5 - 361.5 | - 363.5 - 379.5 |
| 5/4 | - 1080.0 - 1019.0 | - 1112.0 - 1035.0 | - 1063.0 - 1006.0 |
| 5/7 | - 115.7 + 85.1 | - 91.5 + 97.0 | - 149.3 + 48.2 |
| 6/7 | 0 0 | (Momentos en kg.cm) | 0 0 |

y distribuyendo luego en la forma acostumbrada. En este método se saltea pues la etapa de cálculo de ángulos y luego los momentos a partir de estos, siendo indudablemente el método más simple y directo, pero sin embargo en este tipo de estructura de malla cerrada, más aún que en la viga Vierendeel, las ventajas del Cross disminuyen debido a que la convergencia no es tan rápida como en los casos corrientes y se necesita un número de ciclos bastante grande para llegar a la

exactitud conveniente. En los ejemplos tratados, que se eligieron de características distintas (uno malla Warren y otro malla Pratt) y bajo diferentes sistemas de cargas, se pudo observar la necesidad de llegar a 7 u 8 ciclos como mínimo. En la tabla adjunta se indican las tensiones secundarias de la estructura b) de la figura 24, calculada en la obra de Johnson, Bryan y Turneure por el método de Winkler, cuyos resultados reducidos a unidades métricas se indican, y calculadas nue-

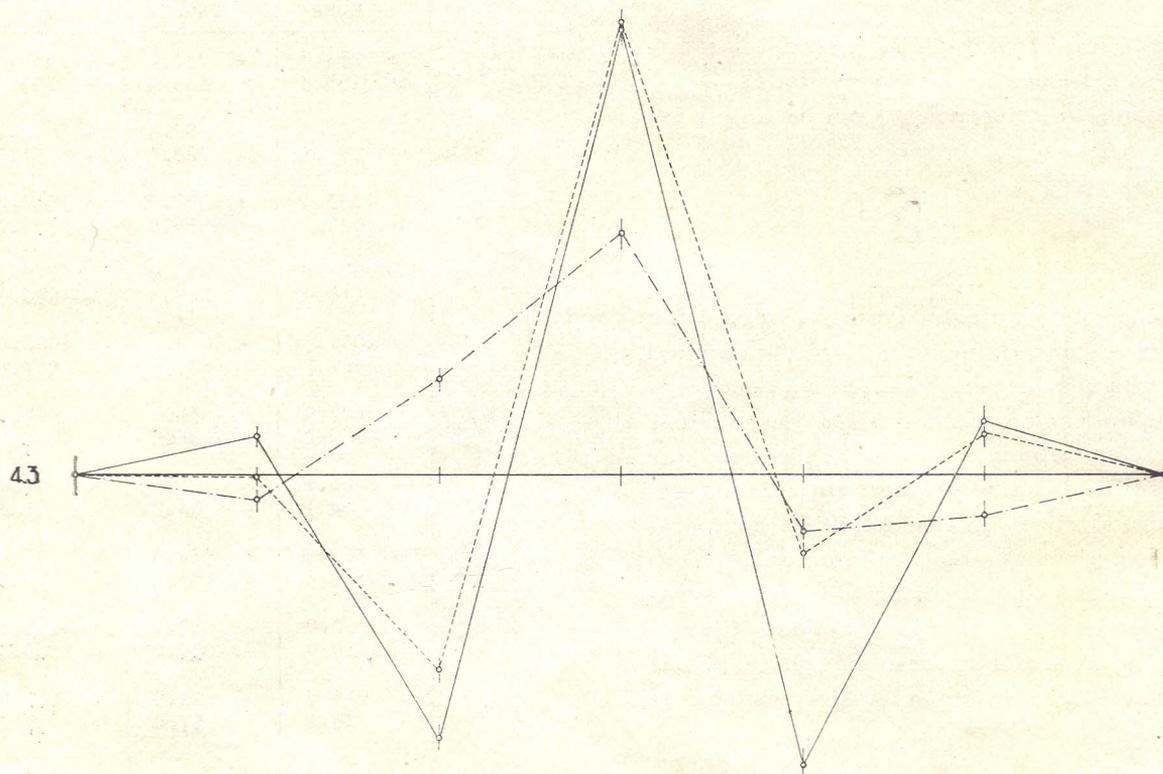
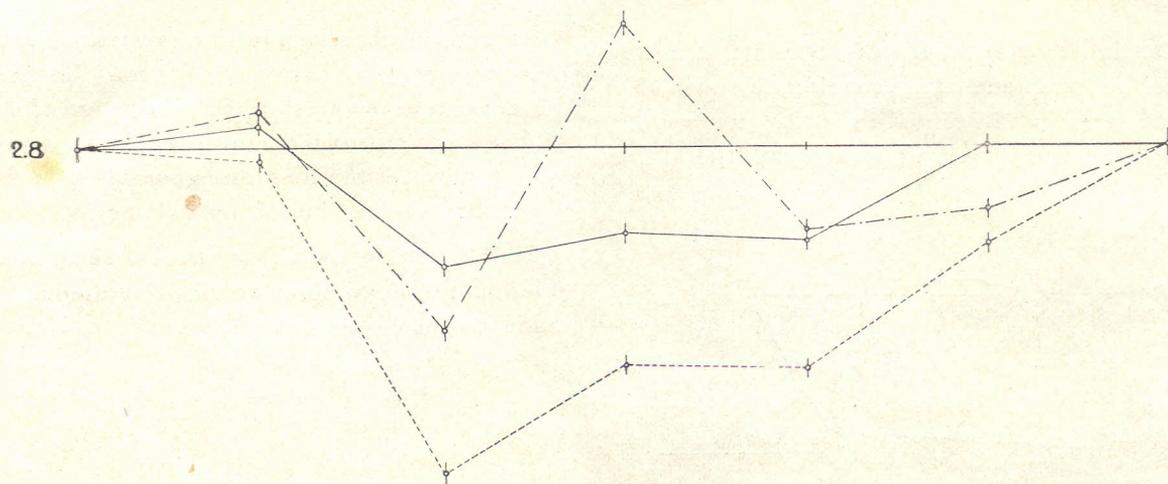


Lámina XIV

vamente con Mohr y Cross para estudiar tiempos y exactitudes.

La concordancia entre Mohr y Winkler es perfecta, a pesar de los pequeños errores que se introducen en el pasaje mencionado, y puede apreciarse la exactitud satisfactoria del Cross, especialmente para los momentos importantes.

En cuanto al tiempo necesario para efectuar un cálculo por el método de Cross o por el de Mohr, con una práctica corriente en cualquiera de los dos, no parece que haya mucha diferencia entre ellos, aunque en los ejemplos tratados, para una

misma exactitud de resultados, fué más rápido el método de Mohr:

| | Mohr | Cross | |
|---------------|------|-------|---------|
| Estructura a) | 235 | 245 | minutos |
| Estructura b) | 185 | 205 | " |

Resumiendo puede establecerse que, para el cálculo de las tensiones secundarias no existe actualmente un método experimental conveniente. De los métodos analíticos, los de Mohr y Cross son de fácil y rápida aplicación para cualquier calculista sin experiencia continuada, siendo ligeramente superior en exactitud y rapidez el método de Mohr.

BIBLIOGRAFÍA

1. — **F. Cardellach.** — *Philosophie des Structures.*
2. — **Navier.** — *Résumé des Leçons, etc. (Historique de B. de Saint-Venant).*
3. — **Dupuy.** — *Note sur l'appareil destiné a mesurer directement le travail du fer. (Ann. des Ponts et Chaussées, 1887, 2.º Sem.)*
4. — **Rabut.** — *Renseignements pratiques pour l'étude expérimentale des Ponts Métalliques. (Ann. des Ponts et Chaussées, 1896, 2.º semestre).*
5. — **L. Baes.** — *Résistance des Matériaux. Vol. I.*
6. — *Second Report of the Steel Structures Research Committee, London, 1934.*
7. — *Final Report of the Steel Str. Res. Comm., London, 1936.*
8. — **G. Oberti.** — *Indagini Sperimentali sulle costruzioni con l'ausilio di modelli. (Milano, 1935).*
9. — **O. Gottschalk.** — *Elementos de cálculo mecánico de sistemas elásticos, (Buenos Aires, 1922).*
10. — **O. Gottschalk.** — *Cálculo automático de sistemas Hiperestáticos. (Buenos Aires, 1923).*
11. — **P. Carot et Ch. Rieckhof.** — *La statique expérimentale dans les solides. (Paris, 1931).*
12. — **C. C. Guidi.** — *L'impiego dei modelli nelle ricerche sperimentali sulle costruzioni. (Annali dei Lavori Pubblici, Dicembre 1936, p. 947).*
13. — **G. E. Beggs, R. E. Davis and H. E. Davis.** — *Tests on Structural Models of Proposed San Francisco-Oakland Suspension Bridge. (San Francisco, 1933).*
14. — **Pippard and Baker.** — *Analysis of Engineering Structures (London, 1935).*
15. — **V. Bush.** — *Structural Analysis by electric circuit analogies. (Journal of the Franklin Inst., March 1934).*
16. — **F. de Medina.** — *Las leyes de superposición y de similitud en la teoría de la elasticidad. (Boletín de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, N.º 4).*
17. — **A. D'Annunzio - G. Oberti.** — *Indagini sperimentali sulle costruzioni. La Fotoelasticità. (Milano, 1932).*
18. — **P. Heymans.** — *La Photo - Elasticimétrie ses principes, ses méthodes et ses applications. (Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels).*
19. — **E. G. Coker and L. N. G. Filon.** — *A Treatise on Photoelasticity (Cambridge, 1931).*
20. — **A. E. Love.** — *The Mathematical Theory of Elasticity.*
21. — **A. Mesnager.** — *Les tensions intérieures rendues visibles. (Technique Moderne, 15 mars 1924).*
22. — **L. N. G. Filon.** — *A manual of Photo-Elasticity for Engineers (Cambridge, 1936).*
23. — **A. Mesnager.** — *Etude des efforts intérieures dans les solides. (Ann. des Ponts et Chaussées, 1913, 4, p. 133).*
24. — **Cross and Morgan.** — *Continuous Frames of Reinforced Concrete. (New York, 1932).*
25. — **McCullough and Thayer.** — *Elastic Arch Bridges. (New York, 1931).*
26. — **G. Colonnetti.** — *La Statica delle Costruzioni. Vol. I. (Torino, 1928).*
27. — **G. E. Beggs.** — *Indeterminate Structures Mechanically Analyzed. (Engineering and Contracting, May 24, 1922).*

28. — **L. Stabilini.** — *I fondamenti della teoria della linee d'influenza.* (Milano, 1934).
29. — **A. Mesnager.** — *Résistance des Matériaux.* (Paris, 1928).
30. — **Mabilleau.** — *Le calcul des systemes hypers-tatiques par le thoreme des déformations fic-tives.* (Paris, 1932).
31. — **A. G. Hayden.** — *The Rigid-Frame Bridge.* (New York, 1931).
32. — **J. T. Thompson.** — *Model Analysis of a Rein-forced Concrete Arch.* (Public Roads, January 1929).
33. — **G. Magnel.** — *Recherche Expérimentale des lignes d'influence relatives aux constructions hyperstatiques planes.* (I Congres International du Béton et du Béton Armé, vol. I, p. 147-156, 1930).
34. — **G. E. Beggs.** — *Deformeter Bulletin N.º 1.*
35. — **G. Magnel.** — *Le calcul pratique des poutres Vierendeel.* (Gand, 1934).
36. — **O. Gottschalk.** — *Cálculo mecánico de siste-mas elásticos.* (Buenos Aires, 1925).
37. — **O. Gottschalk.** — *Apuntes de estática experi-mental.* (Bs. Aires, 1926).
38. — **O. Gottschalk.** — *Cáculos mecano-estáticos de sistemas elásticos.* (Bs. Aires, 1929).
39. — **O. Gottschalk.** — *Lineas de influencia y está-tica natural.* (Bs. Aires, 1932).
40. — **F. Kann.** — *Fotschritte in der Experimentellen Statik vielfach Unbestimmter Rahmensysteme.* (I Congres International du Béton et du Béton Armé, Liege 1930, vol. I, p. 191-199).
41. — **O. Gottschalk.** — *The Experiment in Statics.* (Journal of the Franklin Inst., Febr. 1929).
42. — **J. Blazek.** — *Modellversuch in der Baustatik nach der Beggs'schen Methode.* (I Congres du Béton et du B. Armé, Liege 1930, vol. I).
43. — **L. A. Beaufoy.** — *Model Studies of some rigid frame problems.* (The Welder, Aug. 1935).
44. — **L. Giorgi.** — *Análisis de estructuras continuas. Método de Cross.* (Montevideo, 1932).
-

Lit. e Imp. DEL COMERCIO
25 de Mayo 321