

Nº 171

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Director Interino: Ing. RÓDOLFO MARTINEZ DE VEDIA

SERIE TERCERA

24

PUBLICACIONES ESPECIALES

SEMEJANZA MECANICA

POR EL

ING. CARLOS BERTA

de la Facultad de Ingeniería de Montevideo



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
FEBRERO DE 1944

Preelo: \$ 4.—

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PRESIDENCIA Y CONSEJO SUPERIOR (1944)

Presidente: doctor Ricardo de Labougle.

Consejeros titulares: Ingeniero agrónomo Juan C. Lindquist, ingeniero agrónomo Arturo Burkart, ingeniero Alejandro de Estrada, ingeniero Juan L. Albertoni, doctor Juan F. Muñoz Drake, doctor Juan E. Cassani, doctor Emilio E. Piaggio, doctor Hércules Corti, doctor Victorio Monteverde, doctor Rómulo R. Lambre, doctor Juan C. Speroni, doctor Osvaldo Eckell, doctor Joaquín Frengüelli, doctor Max Birabén, ingeniero Virgilio Manganiello.

Consejeros suplentes: ingeniero agrónomo Teófilo V. Barañao, doctor José María Monner Sans, doctor Reinaldo Vanossi, doctor Alejandro M. Oyuela, doctor Rodolfo Rossi, doctor Fernando Schweizer, doctor Francisco A. Ubach, ingeniero agrónomo Lorenzo R. Parodi.

Secretario general y del Consejo superior: abogado Bernardo Rocha.

Guarda sellos: doctor Alfredo D. Calcagno.

Oficial mayor encargado de publicaciones: Sr. Emilio Azzarini.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS (1944)

Delegado interventor: ingeniero Alejandro de Estrada.

Secretario general: ingeniero Juan B. Cendagorta.

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Donde dice:	Debe decir:
9	4	Estudiaremos.....	,estudiaremos....
"	12	B_n	B_m
10	15 ó 21	$a_{im} x_i$	a_{im}, x_i
11	16	$a_{k+r,k} \cdot x_{k+r}$	$a_{k+r,k}, x_{k+r}$
12	22	$-a_{i,k+1} \cdot y_{k+1} + \dots$	$-a_{i,k+1} \cdot y_{k+1} - \dots$
31	10	$\eta = \frac{W_m}{W_u} = \dots$	$\eta = \frac{W_u}{W_m} = \dots$
40	31	Esta traducción....	La traducción.....
43	16	empleados, y directamente.....	empleados, directamente
51	25	la 1a., 2a., 4a., y 5a. columnas.....	la 2a., 4a., y 5a. columnas.....
"	28	- 1 3 0	- 1 0 0
59	6	$\frac{\varepsilon_o}{\omega_o^2 \cdot \rho_o^2 \cdot \rho_o} = 1$	$\frac{\varepsilon_o}{\omega_o^2 \cdot \lambda^2 \cdot \rho_o} = 1$
"	9	$\omega_o^2 \cdot \rho_o^2 = 1 \therefore \omega_o = \frac{1}{\lambda}$	$\omega_o^2 \cdot \lambda^2 = 1 \therefore \omega_o = \frac{1}{\lambda}$

PUBLICACIONES ESPECIALES

Indice

Intercalar, en el Cap.V. aplicaciones, entre a) y b):

Resistencias de cuerpos parcialmente sumergidos. Resistencias de un barco.

Se me ha estimado el libro y
amigo J. J. Bladi Duro

Conde de Riba

SERIE TERCERA

24

PUBLICACIONES ESPECIALES

SEMEJANZA MECANICA

*Esta edición es propiedad de la
Facultad de Ciencias
Fisicomatemáticas.*

Se ha hecho el depósito de Ley.

Nº 171

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Director Interino: Ing. RODOLFO MARTINEZ DE VEDIA

SERIE TERCERA

24

PUBLICACIONES ESPECIALES

SEMEJANZA MECANICA

POR EL

ING. CARLOS BERTA

de la Facultad de Ingeniería de Montevideo



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
FEBRERO DE 1944

Precio: \$ 4.—

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISIOMATEMATICAS

Director General: Dr. ROBERTO MARIANO DE VEDIA

SERIE TERCERA

24

PUBLICACIONES ESPECIALES

SEMEJANZA MECANICA

por CARLOS BERTA

de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad Nacional de Montevideo



LA PLATA (Imp. Universitaria)
FACULTAD DE CIENCIAS FISIOMATEMATICAS
FEBRERO DE 1954

Precio: \$ 4.-

PROLOGO

En virtud del convenio de intercambio de profesores existente entre las Universidades de La Plata y Montevideo, el que esto escribe dictó, en Agosto de 1943, en el primero de los institutos nombrados, dos clases sobre el tema indicado en el título.

Gracias al amable empeño de algunos profesores de la prestigiosa universidad argentina, el trabajo preparado con tal objeto recibe ahora el alto honor de ser incluído entre las publicaciones de carácter científico que realiza esa institución.

Es oportuno por tanto, explicar brevemente el objeto de este estudio, que no es otro que el de ofrecer una reseña sintética de los fundamentos teóricos y de las posibles vías de aplicación de un principio que, según el juicio de Bertrand, confirmado a través de casi un 'siglo de investigaciones, puede considerarse como uno de los más fecundos de la Mecánica. Con esto queda dicho, implícitamente, que este trabajo no puede aspirar a otra cosa que a servir de introducción al estudio de dicho principio.

Al final del trabajo se agrega una bibliografía que indica las principales fuentes de información utilizadas. De esa bibliografía, el autor considera un deber destacar, para señalarlas en primer plano, dos obras cuya lectura le ha sido particularmente provechosa para su tarea, que son la « Teoría de las Magnitudes Físicas » de Walter S. Hill, y el « Análise Dimensional e Semelhança Mecânica » de Mauricio Joppert da Silva. De la primera el autor ha tomado en particular, el plan general de la exposición sobre transformación de unidades contenida en el Capítulo II de este trabajo. La segunda, además de ofrecerle una excelente vista de conjunto del problema, le ha brindado numerosas indicaciones y ejemplos de gran utilidad en el estudio de las aplicaciones; y le ha sugerido asimismo, los fundamentos de la demostración del teorema de Buckingham, explicada en los Capítulos II y III, demostración que, en el fondo, es una generalización de la que, para el caso de tres variables, ofrece la obra referida.

C. B.

I. — INTRODUCCION

El presente trabajo tiene por objeto estudiar los fundamentos teóricos del principio de semejanza mecánica y la forma de utilizar ese principio en el estudio experimental de los fenómenos mecánicos.

Comenzaremos por exponer, sucintamente, los desarrollos de la teoría de las magnitudes y del análisis dimensional —basados en la estructura de la expresión matemática de una magnitud física—, que conducen a establecer ese principio. Trataremos luego de demostrar la identidad de los resultados obtenidos por ese camino y los que pueden deducirse del enunciado del teorema de Newton. Por último, una vez establecido el principio en su forma general, examinaremos en detalle el problema de la determinación de las escalas en la construcción de modelos mecánicos, y terminaremos con la descripción de algunos ejemplos de aplicación a problemas técnicos.

Aunque en el estudio de estas aplicaciones nos proponemos considerar solamente fenómenos de índole puramente mecánica —que puedan por consiguiente ser descritos con el empleo de tres magnitudes fundamentales independientes, como longitud, masa y tiempo, u otras equivalentes—, los desarrollos teóricos necesarios para establecer el principio de semejanza, serán conducidos en forma general, lo que, aparte de exigir muy poco trabajo adicional, dará sin duda mayor fuerza y utilidad a las conclusiones obtenidas.

Admitiremos como punto de partida de la exposición, el hecho bien conocido de que una magnitud física derivada puede expresarse bajo la forma de un producto de potencias de las magnitudes consideradas como fundamentales. Esta propiedad, que algunos autores consideran posible adoptar como definición de la expresión matemática de una magnitud física, es deducida, en cambio, por otros, de propiedades más sencillas, como la constancia del valor relativo de dos magnitudes físicas. Entre estos últimos se halla Bridgman, quien en su obra « Dimensional Analysis » ofrece una demostración de esa propiedad, obtenida en la forma indicada; a esto se debe que la propiedad en cuestión se considere a menudo como enunciado del llamado teorema de Bridgman.

II. — TRANSFORMACION DE UNIDADES

Sea un sistema de n magnitudes

$$A_1, A_2 \dots A_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

que se suponen independientes. Con esto entendemos que la expresión general de una magnitud derivada:

$$a_0 \cdot A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n}$$

en la que los a_i son números, no podrá hacerse igual a un número N cualquiera, a menos que todas las a_i sean nulas ($i = 1, 2, \dots n$). Porque si se tuviera:

$$a_0 \cdot A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n} = N$$

o

$$A_1^{a_1} \cdot A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n} = \frac{N}{a_0}$$

con exponentes a_i no todos nulos, y si a_k fuera uno de esos exponentes no nulos, se tendría:

$$A_k = \left(\frac{N}{a_0} \right)^{\frac{1}{a_k}} \cdot A_1^{-\frac{a_1}{a_k}} \cdot A_2^{-\frac{a_2}{a_k}} \dots A_{k-1}^{-\frac{a_{k-1}}{a_k}} \cdot A_{k+1}^{-\frac{a_{k+1}}{a_k}} \dots A_n^{-\frac{a_n}{a_k}}$$

vale decir que una por lo menos de las A_i sería expresable en función de las restantes sin intervención de ninguna nueva magnitud, lo que es contrario a la hipótesis.

Consideremos un conjunto de m magnitudes derivadas del sistema A , cuya expresión general será, de acuerdo con lo que hemos dicho anteriormente:

$$B_j = b_j \cdot A_1^{a_{1j}} \cdot A_2^{a_{2j}} \dots A_n^{a_{nj}} \quad (j = 1, 2, \dots m) \quad [1]$$

Adoptemos este conjunto de magnitudes como un nuevo sistema

de unidades. Dada una magnitud cualquiera X derivada del sistema A , y por consiguiente expresable en la forma:

$$X = x_0 A_1^{x_1} \cdot A_2^{x_2} \dots A_n^{x_n} \quad [2]$$

Estudiaremos la manera de hallar su expresión en el sistema B , y las condiciones a que está sujeta esta transformación.

La expresión buscada deberá ser de la forma:

$$X = y_0 \cdot B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_m^{y_m} \quad [3]$$

sustituyendo en ella los valores de las B :

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1 A_1^{a_{11}} \cdot A_2^{a_{21}} \dots A_n^{a_{n1}} \\ B_2 &= b_2 A_1^{a_{12}} \cdot A_2^{a_{22}} \dots A_n^{a_{n2}} \\ &\dots\dots\dots \\ B_{n_1} &= b_m A_1^{a_{1m}} \cdot A_2^{a_{2m}} \dots A_n^{a_{nm}} \end{aligned}$$

y agrupando los exponentes de cada una de las A_i :

$$\begin{aligned} X &= y_0 \cdot b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_m^{y_m} A_1^{a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1m} \cdot y_m} \cdot \\ &\cdot A_2^{a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2m} \cdot y_m} \dots A_n^{a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \dots + a_{nm} \cdot y_m} \end{aligned} \quad [4]$$

Confrontando esta expresión con la [2] se ve que los coeficientes están ligados por la relación:

$$y_0 \cdot b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_m^{y_m} = x_0, \quad [5]$$

y que los exponentes deben satisfacer al sistema de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1m} \cdot y_m &= x_1 \\ a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2m} \cdot y_m &= x_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \dots + a_{nm} \cdot y_m &= x_n \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

Calculadas las y en este sistema, y determinando con ayuda de la [5] el valor de y_0 , queda completamente definida la expresión [3] de X que nos habíamos propuesto hallar.

Todo el proceso de transformación se reduce, pues, en lo fundamental, a la resolución de un sistema de n ecuaciones con m incógnitas. Se desprende de esto que cada uno de los resultados a que arriba la teoría general de estos sistemas, se traducirá en una propiedad concreta de la transformación que estudiamos.

Para establecer las condiciones de resolubilidad del sistema, consideremos la matriz de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & \dots & a_{hm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

y la matriz aumentada

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1m} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2m} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & \dots & a_{hm} & x_h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nm} & x_n \end{vmatrix}$$

El sistema admitirá soluciones si ambas matrices son de igual rango. Sea h el rango de la matriz de los coeficientes; es evidente que h deberá ser a lo sumo igual al más pequeño de los números n y m . Para que el sistema sea compatible, es preciso que el rango de la matriz aumentada sea también h .

Ante todo comparemos h con el número n de ecuaciones (o sea, con el número n de magnitudes del sistema fundamental A). Consideraremos dos casos:

1º — $h = n$. No existe en este caso ningún determinante característico; por consiguiente la matriz aumentada es también de rango $h = n$, y el sistema es compatible. Es posible entonces, dado un grupo de valores x_i , determinar (según los casos que veremos más adelante) uno o más grupos correspondientes de valores de y , que permiten efectuar la transformación propuesta. Como por otra parte la transformación inversa es siempre posible —ya que toda

magnitud expresable en el sistema B lo es también en el A , en virtud de las [1]—, la transformación $A \rightarrow B$ se llama *conmutable*, y se dice que los sistemas A y B son *equivalentes*.

2º — $h < n$. En este caso existen determinantes característicos que, para que el sistema sea compatible, deben ser todos nulos.

Si hay más de un determinante principal, adoptemos uno cualquiera de ellos, y supongamos que sus términos ocupen las h primeras filas y las h primeras columnas de la matriz de transformación, en lo cual no hay inconveniente alguno. El número de determinantes característicos que pueden formarse con el determinante principal adoptado es $n - h$, y su forma será:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & x_h \\ a_{h+r,1} & a_{h+r,2} & \dots & a_{h+r,h} & x_{h+r} \end{vmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, n - h) \quad [7]$$

Desarrollado cada uno de estos determinantes por los elementos de la última columna, se obtienen $n - h$ ecuaciones lineales que ligán los valores de $x_1, x_2, \dots, x_h, x_{h+r}$.

Por consiguiente una magnitud definida en el sistema A por un grupo de exponentes x_i , no será expresable en el sistema B a menos que los valores de esos exponentes satisfagan las $n - h$ relaciones [7]; ya que si estas relaciones no se cumplen, el sistema [6] no tendrá solución. En tal caso se dice que los sistemas A y B no son equivalentes, o que la transformación $A \rightarrow B$ no es conmutable.

Esto no impide, no obstante, que *algunas* de las magnitudes expresables en el sistema A lo sean también en el B ; serán precisamente aquellas cuyos exponentes x_i satisfacen las relaciones [7]. El mecanismo de la transformación comienza con la adopción de un determinante principal, con lo cual quedan fijados h de los n exponentes x_i ; hecho esto se escriben las $n - h$ relaciones [7] y se verifica si los $n - h$ exponentes x_{h+r} restantes las satisfacen, en cuyo caso, solamente, la transformación será posible. Cada una de las [7] puede escribirse en la forma:

$$x_{h+r} = \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_h)$$

con lo cual la expresión de la magnitud X en el sistema A será:

$$X = x_0 \cdot A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_h^{x_h} \dots A_{h+r}^{x_{h+r}} \dots A_n^{x_n} \quad (r=1, 2, \dots, n-h) \quad [2'']$$

con h exponentes independientes.

Confrontemos ahora el grado h del determinante principal con el número m de incógnitas del sistema [6]. Dos casos son posibles, a saber:

1º — $h = m$. En este caso, si el sistema es compatible (esto es, si la matriz aumentada es también de rango m) habrá una solución única. A cada grupo de exponentes x_i corresponderá un grupo y uno solo de exponentes y_j completamente determinados.

Obsérvese que en este caso, si hay más ecuaciones que incógnitas, la condición de compatibilidad exige que cada uno de los $n - m$ determinantes bordeados que se pueden formar con el determinante principal y los coeficientes de cada una de las $n - m$ ecuaciones en exceso debe ser nulo, lo que significa que esa ecuación será superflua, porque podrá deducirse de las h restantes mediante una combinación lineal.

2º — $h < m$. El sistema [6] admite ahora infinitas soluciones. Para hallar una cualquiera de ellas basta escribir una cualquiera de las ecuaciones [6] en la forma:

$$a_{i,1} \cdot y_1 + a_{i,2} \cdot y_2 + \dots + a_{i,h} \cdot y_h = x_h - a_{i,h+1} \cdot y_{h+1} + \dots - a_{i,m} \cdot y_m \quad [6']$$

asignando luego a cada una de las y_{h+r} ($r = 1, 2, \dots, m - h$) contenidas en los segundos miembros, valores arbitrarios. Resulta así un sistema de n ecuaciones con h incógnitas, en el cual la matriz de los coeficientes es de rango h . Si se cumple la condición de compatibilidad el sistema admitirá un único grupo de valores $y_1, y_2, \dots, y_h$ que serán naturalmente funciones de los y_{h+r} fijados arbitrariamente, y de los $x_1, x_2, \dots, x_h$.

La comparación del grado h del determinante principal con el número m de incógnitas nos proporciona un criterio para juzgar si las magnitudes B son o no dependientes. En efecto, la desigualdad $h < m$, es la condición necesaria y suficiente para que, en el sistema [6], todos los x puedan ser nulos sin serlo los y , o en otros

Como caso particular, señalaremos uno de sumo interés, que es la transformación entre sistemas de magnitudes de igual especie.

Se dice que un sistema de magnitudes C es de igual especie que el A , cuando a cada una de las magnitudes A_i corresponde una magnitud C_i tal que $A_i = \beta_i \cdot C_i$, en la cual β_i es un coeficiente numérico. Se ve que en tal caso $n = m$. Además la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

es una matriz cuadrada cuyo determinante principal, de grado n , tiene por valor la unidad. Luego $h = n = m$.

Además, del examen de las ecuaciones [6] resulta:

$$y_i = x_i$$

El coeficiente y_0 de la expresión general [3] se deduce de la ecuación [5], y es ahora:

$$y_0 = x_0 \cdot \beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} \dots \beta_n^{x_n}$$

Luego la expresión general [2] de una magnitud X , en el sistema A , transformada al sistema C será:

$$X = x_0 \cdot \beta_1^{x_1} \cdot \beta_2^{x_2} \dots \beta_n^{x_n} \cdot C_1^{x_1} \cdot C_2^{x_2} \dots C_n^{x_n}$$

Conviene para el objeto de este estudio profundizar el examen de las propiedades de los sistemas de magnitudes dependientes.

El mismo criterio que hemos establecido para juzgar si un sistema es o no dependiente, nos sugiere la posibilidad de separar, dentro de un sistema de magnitudes dependientes B , grupos de magnitudes que constituyan sistemas parciales independientes.

Uno de esos grupos estará formado por todas aquellas magnitudes B_j cuyos exponentes a_{ij} , en la ecuación de definición [1], forman parte del determinante principal. Escritas las ecuaciones [6] para una transformación entre el sistema A y dicho sistema parcial, se ve que el rango de la matriz $||a_{ij}||$ sigue siendo h , y el número

de incógnitas m es ahora igual a h . Luego el sistema parcial así definido es independiente.

Si A y B son conmutables, es decir, si $h = n$, habrá tantos sistemas parciales independientes como determinantes principales haya en la matriz correspondiente a todo el sistema B . Pero si no lo son, es decir, si $h < n$, entonces todos los determinantes principales que puedan formarse con h columnas dadas tomando distintas filas contarán evidentemente por uno solo y corresponderá a todos ellos, por consiguiente, un solo núcleo de magnitudes independientes.

Como ejemplo del primer caso consideremos un sistema A que comprenda una longitud, una masa y una fuerza, y un sistema derivado B en que entran una velocidad, una densidad, un trabajo y un tiempo. La matriz será:

	V	ρ	$\mathcal{C}$	t
L	$1/2$	3	1	$1/2$
M	$-1/2$	1	0	$1/2$
F	$1/2$	0	1	$-1/2$

Los cuatro determinantes de tercer grado que pueden formarse son distintos de cero; habrá por consiguiente cuatro núcleos de magnitudes independientes, a saber:

$$V - \rho - \mathcal{C} \quad V - \rho - t \quad V - \mathcal{C} - t \quad \rho - \mathcal{C} - t$$

Como ejemplo del segundo caso consideremos el mismo sistema A del ejemplo anterior y un sistema B formado por una velocidad, un tiempo, una aceleración y una superficie. La matriz será:

	V	t	a	S
L	$1/2$	$1/2$	0	2
M	$-1/2$	$1/2$	-1	0
F	$1/2$	$-1/2$	1	0

Todos los determinantes de tercer grado son nulos. La matriz es de rango 2. Con los elementos de la 1ª y 2ª columnas, por ejemplo, se pueden formar dos determinantes de 2º orden no nulos, según

que se tome la 1ª y 2ª filas o la 1ª y 3ª. Evidentemente ambos determinantes corresponden a un solo núcleo independiente (V, t).

Es natural que si agregamos a un sistema parcial independiente una o varias de las magnitudes que quedaron excluidas de él, el nuevo sistema así formado será ahora dependiente. Esto equivale a decir que toda expresión de la forma:

$$b_0 \cdot B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_h^{y_h} \cdot B_{h+1}^{y_{h+1}} \dots B_{h+r}^{y_{h+r}} \quad [8]$$

en que r es un entero cualquiera comprendido entre 1 y $m - h$, puede identificarse con un número. En efecto, si planteamos para el caso un sistema de n ecuaciones análogas a las [6''] —o a las [6] en que todos los x son nulos—, vemos que el grado del determinante principal de la matriz de los coeficientes sigue siendo h , en tanto que el número de incógnitas es ahora $h + r$. Y como el sistema es compatible, puesto que los determinantes bordeados son necesariamente nulos, se desprende que admitirá como solución valores *no todos nulos* de las y , que por corresponder a valores *todos nulos* de las x , convertirán la expresión dada [8] en un número.

Como el número de incógnitas excede al de ecuaciones independientes en r , dando a cada una de las r magnitudes agregadas exponentes arbitrarios, cada grupo de esos r exponentes permitirá calcular un grupo de h exponentes y , que junto con los anteriores, satisfarán la condición expresada.

Ofrecen interés particular los sistemas parciales dependientes obtenidos agregando a un núcleo de h magnitudes independientes *una sola* de las magnitudes superabundantes. Cada sistema independiente da origen así a $m - h$ sistemas dependientes

$$B_1, B_2, \dots B_h, B_{h+r}. \quad (r = 1, 2, \dots m - h)$$

Toda expresión de la forma:

$$y_0 \cdot B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_h^{y_h} \cdot B_{h+r}^{y_{h+r}} \quad [9]$$

podrá, de acuerdo con lo antedicho, identificarse con un número; y puesto que y_{h+r} es arbitrario, lo mismo sucederá con la expresión:

$$y_0 \cdot B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_h^{y_h} \cdot B_{h+r} \quad [9']$$

obtenida asignando a dicho exponente y_{h+r} el valor 1.

Para determinar los exponentes de la expresión [9'] habrá que resolver el sistema de ecuaciones:

$$a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \dots a_{i,h}y_h + a_{i,h+r}y_{h+r} = 0 ; (i = 1, 2, \dots n) \quad [6''']$$

que, de acuerdo con lo ya dicho, toma la forma de un sistema de n ecuaciones con h incógnitas:

$$a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \dots a_{i,h}y_h = -a_{i,h+r} \quad [6^{iv}]$$

En realidad basta considerar, de estas ecuaciones, aquellas que en número h , corresponden a un determinante principal; las restantes pueden dejarse de lado, ya que los determinantes característicos son, en este caso, todos nulos. Basta ver, en efecto, que la adición de la columna de los coeficientes $a_{i,h+r}$ y de una de las filas de los coeficientes restantes al determinante principal, da un determinante de grado $h+1$ que forma parte de la matriz de los coeficientes del sistema [6'']; y por ser ésta de rango h , aquél debe ser necesariamente nulo.

Las h ecuaciones que hemos retenido nos darán un juego de h valores de las y , que introducidos en la expresión [9'] la convertirán en un número.

Se observará que en cada sistema parcial dependiente pueden obtenerse solamente $m-h$ expresiones del tipo [9'] en que las B no sean todas las mismas.

Cada una de estas expresiones constituye lo que se llama un número *adimensionado*, o un número *de dimensiones cero*. Muchos autores las designan con el nombre de números π que nosotros utilizaremos en lo sucesivo.

En cada número π interviene una de las magnitudes superabundantes del sistema derivado B ; pero es evidente que si se multiplican dos o más números de esta especie, se obtendrán nuevas expresiones, *también adimensionales*, que contendrán dos o más magnitudes superabundantes, junto a las magnitudes principales, algunas de las cuales aparecerán repetidas; y es claro que si se suman los exponentes de estas magnitudes repetidas se llegará al fin de cuentas a una expresión del tipo [8].

La observación anterior justifica que, en lo sucesivo, limitemos el estudio de los números adimensionales a los llamados números π , o sea a aquellos que contienen una sola magnitud superabundante; ya que los otros, más complejos, derivan de éstos por vía de simple multiplicación.

en la cual

$$b_0 = y_0 \cdot b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_h^{y_h} \cdot b_{h+r}$$

es la medida de la magnitud X en el sistema A ; y P_i es el polinomio que constituye el primer miembro de la ecuación i del sistema [6'''] en la cual se ha hecho $y_{h+r} = 1$.

Adoptemos ahora como fundamental, otro sistema C , independiente y conmutable con el A . Sea:

$$B_j = b'_j \cdot C_1^{C_{1j}} \cdot C_2^{C_{2j}} \dots C_n^{C_{nj}}$$

la expresión general de la magnitud B_j en el nuevo sistema. Proce- diendo como antes hallaremos que la expresión de X en el nuevo sistema será:

$$X = y_0 \cdot b_1'^{y_1} \cdot b_2'^{y_2} \dots b_h'^{y_h} \cdot b_{h+r}' \cdot C_1^{C_{11} \cdot y_1 + C_{12} \cdot y_2 + \dots + C_{1h} \cdot y_h + C_{1, h+r}} \cdot C_2^{C_{21} \cdot y_1 + C_{22} \cdot y_2 + \dots + C_{2h} \cdot y_h + C_{2, h+r}} \dots C_n^{C_{n1} \cdot y_1 + C_{n2} \cdot y_2 + \dots + C_{nh} \cdot y_h + C_{n, h+r}} \quad [12]$$

que se puede escribir análogamente en la forma abreviada:

$$X = b'_0 \cdot C_1^{P'_1} \cdot C_2^{P'_2} \dots C_n^{P'_n}$$

en la cual, como anteriormente:

$$b'_0 = y_0 \cdot b_1'^{y_1} \cdot b_2'^{y_2} \dots b_h'^{y_h} \cdot b_{h+r}'$$

es la medida de la magnitud X en el sistema C ; y P'_i es el polino- mio que constituye el primer miembro de la ecuación i de un sis- tema análogo al [6'''], correspondiente a la transformación $C \rightarrow B$.

Si la magnitud X se supone ahora adimensional, todos los poli- nomios P y P' serán nulos. Las expresiones de X en los sistemas A y C quedarán reducidas a

$$X = b_0 \quad \text{y} \quad X = b'_0$$

respectivamente. Nos proponemos demostrar que

$$b_0 = b'_0$$

$$b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_h^{y_h} \cdot b_{h+r} = b_1'^{y_1} \cdot b_2'^{y_2} \dots b_h'^{y_h} \cdot b_{h+r}'$$

En efecto, si C es independiente y conmutable con A , cada una de las A se podrá expresar en el sistema C bajo la forma:

$$A_k = \alpha_k \cdot C_1^{\alpha_{1k}} \cdot C_2^{\alpha_{2k}} \dots C_n^{\alpha_{nk}} ;$$

introduciendo estas expresiones en la [11'] resulta:

$$X = b_0 \cdot \alpha_1^{P_1} \cdot \alpha_2^{P_2} \dots \alpha_n^{P_n} \cdot C_1^{\alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \dots + \alpha_{1n} P_n} \cdot C_2^{\alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \dots + \alpha_{2n} P_n} \dots C_n^{\alpha_{n1} P_1 + \alpha_{n2} P_2 + \dots + \alpha_{nn} P_n} \quad [13]$$

Esta expresión de X en el sistema C , hallada indirectamente por medio del sistema A , debe ser evidentemente igual a la [12] hallada directamente. Igualando ambos valores, y recordando que, si X es un número π , los P y los P' son nulos, resulta:

$$b_0 = b'_0$$

$$b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_h^{y_h} \cdot b_{h+r} = b_1'^{y_1} \cdot b_2'^{y_2} \dots b_h'^{y_h} \cdot b_{h+r}' \quad [14]$$

es decir, que el número π_{h+r} tiene igual medida en los sistemas A y C .

Para terminar, demostraremos una propiedad muy importante del conjunto de números π que pueden formarse en un sistema de magnitudes dependientes B .

Observemos ante todo que, si se forma un producto de potencias cualesquiera de todos los números π del sistema, se obtendrá un nuevo número adimensional, cuya expresión general será:

$$B_1^{z_1} \cdot B_2^{z_2} \dots B_m^{z_m} \quad [15]$$

en la cual algunas de las z pueden ser nulas.

Demostraremos ahora que la recíproca es cierta, esto es, que si una expresión de la forma [15] es adimensional, será posible representarla por un producto de potencias de los números π del sistema B .

En efecto, si la [15] es de dimensiones cero, sus exponentes z y los exponentes a_{ij} de las B deberán satisfacer las n ecuaciones:

$$a_{i,1} \cdot z_1 + a_{i,2} \cdot z_2 + \dots + a_{i,m} \cdot z_m = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [16]$$

Si se substituyen estos valores en la expresión [15] resulta:

$$B_1^{z_h+1 \cdot y_{11} + z_h+2 \cdot y_{12} + \dots + z_m \cdot y_{1m-h}} \cdot B_2^{z_h+1 \cdot y_{21} + z_h+2 \cdot y_{22} + \dots + z_m \cdot y_{2, m-h}} \cdot \dots \cdot B_{h+1}^{z_h+1 \cdot y_{h, 1} + z_h+2 \cdot y_{h, 2} + \dots + z_m \cdot y_{h, m}} \cdot B_{h+1}^{z_h+1} \cdot B_{h+2}^{z_h+2} \cdot \dots \cdot B_m^{z_m} \quad [15']$$

y agrupando en productos parciales las B que corresponden a cada uno de los números π del sistema:

$$(B_1^{y_{11}} B_2^{y_{12}} \dots B_h^{y_{h1}} \cdot B_{h+1})^{z_h+1} \cdot (B_1^{y_{12}} B_2^{y_{22}} \dots B_h^{y_{h, 2}} \cdot B_{h+2})^{z_h+2} \cdot \dots \cdot (B_1^{y_{1m-h}} B_2^{y_{2m-h}} \dots B_h^{y_{h, m-h}} \cdot B_m)^{z_m}$$

o, por último:

$$\pi_{h+1}^{z_h+1} \cdot \pi_{h+2}^{z_h+2} \cdot \dots \cdot \pi_m^{z_m} \quad [20]$$

que es la expresión a que queríamos llegar.

Esta propiedad es muy importante, y nos lleva de inmediato, como veremos más adelante, a la demostración del teorema π o de Buckingham.

$$[19] \left[\begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right]$$

III. — EL TEOREMA DE BUCKINGHAM

La expresión analítica de una ley física deberá ser necesariamente tal, que no dependa del sistema de unidades utilizado para la medida de las magnitudes que en ella intervienen, o, en otros términos, que sea invariante a través de cualquier transformación del sistema de unidades.

Por lo común esa expresión asume la forma de una ecuación cuyos miembros son sumas de productos de potencias de las magnitudes involucradas, sumas cuyos términos tienen todos las mismas dimensiones con respecto al sistema de unidades adoptado como fundamental. Una ecuación de este tipo se llama homogénea.

Una ecuación puede representar una ley física —puede ser la traducción de un fenómeno físico—, sin ser homogénea, es decir, sin que sus términos tengan todos iguales dimensiones. Basta, por ejemplo, sumar dos ecuaciones homogéneas, que traduzcan fenómenos afines pero que comprendan magnitudes de distintas dimensiones, para tener una ecuación que se halla en ese caso. Por ejemplo, en el estudio del movimiento de un sólido en torno de un eje, se obtienen las ecuaciones:

$$I \cdot \ddot{\theta} - H = 0 \qquad I \cdot \dot{\theta} - H \cdot t = 0$$

la primera de las cuales da la aceleración angular en función del par exterior H , y la segunda, la cantidad de movimiento angular en función del impulso del par (supuesto H constante). La ecuación:

$$I \ddot{\theta} + I \dot{\theta} - H - Ht = 0$$

obtenida sumando miembro a miembro las dos anteriores, tiene un significado físico bien definido, y conserva su forma frente a una transformación de unidades, pero no es homogénea en el sentido antes expresado. Es bueno observar, no obstante, que ecuaciones de esa forma no tienen por lo común alcance práctico alguno.

Consideraremos en adelante tan sólo ecuaciones homogéneas como las ya definidas. En cada uno de los términos de la ecuación

podrán aparecer constantes, de las cuales algunas serán números abstractos, en tanto que otras serán dimensionales. Las dimensiones de estas constantes entrarán naturalmente en el cómputo de las dimensiones del término que las contiene, a los efectos de verificar la homogeneidad de la ecuación. En realidad, admitido como axioma fundamental el principio de homogeneidad, sería más correcto decir que a cada una de esas constantes se le asignarán las dimensiones necesarias para que se cumpla ese principio.

Así, por ejemplo, la ecuación que da la resistencia opuesta por el aire al movimiento de un sólido, es, para valores de la velocidad comprendidos entre ciertos límites,

$$R = 0,08 \cdot s \cdot v^2$$

en que R estará expresado en kgs., s en metros cuadrados, y v en metros por segundo. La constante $K = 0,08$ debe tener las dimensiones:

$$|K| = |M| |L^{-3}|$$

para que la misma expresión sea válida al cambiar el sistema de unidades. El valor numérico de K cambiará naturalmente al cambiar de sistema; por esta razón, una ecuación de la forma indicada no tiene significado alguno si no se indica el sistema de unidades a que está referida.

Otro ejemplo, de apariencia algo más compleja que el anterior, se tiene en la ecuación:

$$x = a \text{ sen } 2t$$

que representa determinado movimiento armónico simple. El argumento del seno debe ser naturalmente un ángulo, lo que exige que la constante 2 tenga la dimensión $|T^{-1}|$. Es necesario también aquí indicar la unidad de tiempo a que está referida la ecuación dada; si esa unidad se hace por ejemplo, 60 veces mayor —es decir, si la medida de t se hace 60 veces menor—, la constante deberá ser multiplicada por 60, para que el seno conserve su valor. Aplicamos también aquí el principio de homogeneidad, al admitir que el valor numérico del término $a \cdot \text{sen } 2t$ sólo debe variar, como el de x , con la unidad de longitud adoptada.

Consideremos un fenómeno físico en el cual comprobamos la in-

fluencia de m magnitudes $B_1, B_2, B_3 \dots B_m$. La ecuación que describe el fenómeno será una función de estas magnitudes:

$$f(B_1 B_2 \dots B_m) = 0 \quad [22]$$

en la cual, como ya sabemos, cada uno de los símbolos B_i indica un número, medida de la magnitud, y una expresión dimensional que relaciona esa magnitud con las del sistema fundamental.

De acuerdo con el teorema de Bridgman, que hemos venido aplicando en lo que antecede, la forma de la función f no podrá ser en general otra que la de un polinomio cuyos términos serán productos de potencias de las magnitudes B_i ; y de acuerdo con el principio de homogeneidad todos esos términos deben ser de iguales dimensiones con respecto a las unidades adoptadas como fundamentales.

Por consiguiente, si dividimos todos los términos de f por uno cualquiera de ellos, por ejemplo, el primero, la función tomará la forma:

$$f[1, \Sigma (B_1^{z_1} \cdot B_2^{z_2} \dots B_m^{z_m})] \quad [22']$$

en la que el signo Σ indica una suma de términos de igual forma que el que figura en el paréntesis.

Cada uno de los términos de la función así escrita será evidentemente de dimensión cero. Todos ellos tienen igual forma, sin exceptuar el primero, puesto que

$$1 = B_1^0 \cdot B_2^0 \dots B_m^0.$$

De acuerdo con lo que demostramos al final del capítulo anterior, cada uno de esos términos podrá por consiguiente escribirse bajo la forma de un producto de potencias de los números π del sistema de las magnitudes B , de modo que la ecuación [22'] podrá expresarse en la forma:

$$f[\Sigma \pi_1^{z_1+1} \cdot \pi_2^{z_2+2} \dots \pi_{m-h}^{z_{m-h}}] = 0 \quad [22'']$$

o simplemente:

$$\phi(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{m-h}) = 0 \quad [23]$$

con la restricción de forma expresada.

Despejando una de las variables, por ejemplo, la primera, se tendrá la expresión bajo la forma equivalente:

$$\pi_1 = \varphi (\pi_2 \dots \pi_{m-h}) \quad [23']$$

Esta igualdad, o la anterior, traducen el enunciado del teorema de Buckingham, o teorema π , que establece que:

« si una ecuación:

$$f(B_1 B_2 \dots B_m) = 0$$

« es la expresión analítica de la ley que rige un fenómeno físico
« cualquiera, siendo $B_1, B_2 \dots B_m$, m magnitudes dimensionales,
« que constituyen un sistema dependiente, y que son por consiguiente
« expresables en función de un número h de ellas, será posible
« en general, disponer esas variables en $m - h$ grupos sin dimensiones, cada uno de los cuales será de la forma:

$$\pi_{h+1}^{z_{h+1}} \cdot \pi_{h+2}^{z_{h+2}} \dots \pi_m^{z_m}$$

« en que

$$\pi_{h+r} = B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_h^{y_h} \cdot B_{h+r}$$

Los exponentes y se calculan por medio del sistema de ecuaciones [6 IV] del capítulo anterior.

Como ejemplo de aplicación de este teorema, estudiaremos el aspecto mecánico del movimiento de un fluido cualquiera en su forma más general. Las variables pueden agruparse aquí en tres categorías, a saber:

- 1º — Variables lineales que definen las condiciones de contorno, es decir, la forma y dimensiones de las superficies que limitan exteriormente la masa fluida, y los cuerpos en ella sumergidos;
- 2º — Variables que definen las condiciones del escurrimiento, como ser, la velocidad media V , la diferencia de presión Δp , etcétera;
- 3 — Variables que definen el fluido mismo, como la densidad ρ , el peso específico γ , el coeficiente de viscosidad dinámica K , el de tensión superficial σ y el de compresibilidad ϵ .

Supondremos que en general todas estas magnitudes influyen en las condiciones del movimiento. Observemos que, si los parámetros

lineales son dos o más de dos, se obtendrán números π formando el cociente de dos cualesquiera de esos parámetros. Admitiremos, por tanto, para mayor sencillez, que sólo hay dos, que llamaremos a y b . La función [22] será ahora:

$$f(a, b, V, \Delta p, \rho, \gamma, K, \sigma, \varepsilon) = 0$$

Tomemos como sistema fundamental el $L-M-T$, y formemos la matriz de los exponentes de cada magnitud en ese sistema:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & a & b & V & \Delta p & \rho & \gamma & K & \sigma & \varepsilon \\ \hline L & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ M & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ T & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & -2 & -2 \end{array}$$

Es fácil comprobar que su rango es 3; es decir, que pueden escogerse tres magnitudes derivadas B , independientes, en función de las cuales se podrán expresar las restantes. Podemos, por ejemplo, elegir el determinante formado por la 1ª, 3ª y 5ª columnas de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

con lo cual quedan elegidas las magnitudes $aV\rho$ para integrar nuestro sistema parcial independiente. Los números π que pueden formarse en el sistema B partiendo de estas tres magnitudes serán en número:

$$m = h = 9 - 3 = 6$$

y su forma general será:

$$\pi_1 = b \cdot a^{x_1} V^{y_1} \rho^{z_1}$$

$$\pi_2 = \Delta p \cdot a^{x_2} V^{y_2} \rho^{z_2}$$

$$\pi_3 = \gamma \cdot a^{x_3} V^{y_3} \rho^{z_3}$$

$$\pi_4 = K \cdot a^{x_4} V^{y_4} \rho^{z_4}$$

$$\pi_5 = \sigma \cdot a^{x_5} V^{y_5} \rho^{z_5}$$

$$\pi_6 = \varepsilon \cdot a^{x_6} V^{y_6} \rho^{z_6}$$

Los coeficientes de cada uno de ellos se hallarán resolviendo el respectivo sistema de ecuaciones. Así, p. ej., para el primero el sistema a resolver será:

$$x_1 + y_1 - 3 z_1 = -1$$

$$z_1 = 0$$

$$-y_1 = 0$$

que da $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ con lo que $\pi_1 = b/a$.

Para el segundo, tendremos el sistema:

$$x_2 + y_2 - 3 z_2 = 1$$

$$z_2 = -1$$

$$-y_2 = 2$$

cuya solución es:

$$x_2 = 0 \quad y_2 = -2 \quad z_2 = -1$$

con lo que:

$$\pi_2 = \Delta p \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1}$$

Generalmente se expresa este número en la forma inversa

$$\pi_2 = \frac{V^2}{\Delta p / \rho}$$

que podría haberse obtenido inmediatamente con sólo multiplicar por -1 los segundos miembros de las ecuaciones del sistema.

Procediendo de igual manera con los restantes se tiene:

$$\pi_3 = \gamma a V^{-2} \rho^{-1} \quad \text{o la inversa} \quad \frac{V^2/a}{\gamma/\rho} \quad [NF]$$

$$\pi_4 = K a^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \quad \gg \gg \gg \quad \frac{Va}{K/\rho} \quad [NR]$$

$$\pi_5 = \sigma a^{-1} V^{-2} \rho^{-1} \quad \gg \gg \gg \quad \frac{V^2 a}{\sigma/\rho} \quad [NW]$$

$$\pi_6 = \varepsilon \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1} \quad \gg \gg \gg \quad \frac{V^2}{\varepsilon/\rho} \quad [NC]$$

Las expresiones de la derecha se designan generalmente con los nombres de números de Froude, Reynolds, Weber y Cauchy res-

pectivamente. El último se llama también a menudo número de Rayleigh; su raíz cuadrada recibe el nombre de número de Mach.

Luego la función representativa del fenómeno en estudio puede escribirse bajo la forma:

$$f\left(\frac{b}{a}, \frac{V^2}{\Delta p/\rho}, \frac{V^2 a}{\gamma/\rho}, \frac{Va}{K/\rho}, \frac{V^2 a}{\sigma/\rho}, \frac{V^2}{\epsilon/\rho}\right) = 0$$

Es claro que esta forma sería distinta si hubiésemos partido de otro determinante principal diferente del adoptado, en caso de haberlo, o lo que es lo mismo, de otro sistema parcial independiente. No es necesario señalar que las variables fueron escogidas adrede para llegar al resultado obtenido, cuya forma es la más comúnmente adoptada por todos los autores.

El teorema de Buckingham no nos da ninguna indicación acerca de la forma de la función f , pero nos muestra que las variables de que ella depende pueden agruparse en combinaciones adimensionales, lo que, como veremos conduce a resultados muy importantes desde el punto de vista de las investigaciones experimentales.

Como segundo ejemplo, estudiaremos el funcionamiento de una hélice que gira a razón de n revoluciones por segundo, en el seno de un fluido de densidad ρ , ilimitado en todos sentidos. Si se aplica al eje de la hélice un par motor H , ella ejercerá sobre su eje una tracción (o un empuje) T , haciéndolo desplazar con velocidad V . Llamemos d el diámetro de la hélice. Supondremos además que limitamos nuestro estudio a un tipo determinado de hélice, cuyas dimensiones son todas proporcionales al diámetro, que se adopta como módulo, y en el que, por último, la inclinación de las palas está fijada de antemano. Los resultados de nuestro estudio serán aplicables solamente a todas aquellas hélices que reúnan esas condiciones. La forma general de la ley del movimiento será:

$$f(T, n, \rho, V, d) = 0$$

Tomemos como sistema fundamental el $L-M-F$, y escribamos la matriz de transformación:

$$\begin{array}{l} L \\ M \\ F \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} T & n & \rho & V & d \\ 0 & -1/2 & -3 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right|$$

Las tres últimas columnas forman un determinante no nulo; podremos pues tomar como sistema independiente el ρ - V - d . Como $m=5$, tendremos $5-3=2$ números π , a saber:

$$\pi_1 = n \rho^{x_1} V^{y_1} d^{z_1} \quad \text{y} \quad \pi_2 = T \rho^{x_2} V^{y_2} d^{z_2}$$

El primero será evidentemente $\pi_1 = V/nd$, como resulta de la simple inspección de las magnitudes que en él intervienen. El otro, en que figura la tracción T , se determinará como anteriormente, y será:

$$\pi_2 = T \cdot \rho^{-1} V^{-2} d^{-2}$$

Observemos que si multiplicamos el segundo número por el cuadrado del primero, obtenemos un nuevo número adimensional en el que no aparece la velocidad de avance V , y figura en cambio la de giro n :

$$\pi_3 = \pi_1^2 \cdot \pi_2 = \frac{V^2}{n^2 d^2} \cdot \frac{T}{\rho V^2 d^2} = \frac{T}{\rho n^2 d^4}$$

La función buscada será de la forma:

$$\psi \left(\frac{V}{nd}, \frac{T}{\rho V^2 d^2} \right) = 0$$

o también de la forma:

$$\psi' \left(\frac{V}{nd}, \frac{T}{\rho n^2 d^4} \right) = 0 \quad \therefore \quad T = \rho n^2 d^4 \varphi \left(\frac{V}{nd} \right)$$

Al mismo resultado habríamos llegado directamente si en lugar de adoptar el sistema independiente ρ - V - d , hubiéramos elegido el n - ρ - d .

Procederíamos en la misma forma para hallar una función que nos diera el par motor H ; bastaría sustituir los elementos de la primera columna de la matriz, por 1, 0, 1, que son las dimensiones de H en el sistema L - M - F . Como anteriormente tendríamos:

$$\pi_1 = \frac{V}{nd} \quad \text{y} \quad \pi_2 = H \cdot \rho^{-1} \cdot V^{-2} \cdot d^{-3}$$

o, multiplicando π_2 por π_1^2 :

$$\pi'_2 = H \cdot \rho^{-1} \cdot n^{-2} \cdot d^{-5}$$

Luego se podrá escribir:

$$H = \rho V^2 d^3 \psi_1 \left(\frac{V}{nd} \right)$$

$$H = \rho n^2 d^5 \psi_1 \left(\frac{V}{nd} \right)$$

El producto de H por $2\pi n$ nos da la potencia motriz:

$$W_m = 2\pi \rho n^3 d^5 \psi_1 \left(\frac{V}{nd} \right)$$

en tanto que el producto de T por V nos da la potencia útil:

$$W_u = \rho V^3 d^2 \psi \left(\frac{V}{nd} \right)$$

El rendimiento será:

$$\eta = \frac{W_m}{W_u} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{V}{nd} \right)^3 \frac{\psi(V/nd)}{\psi_1(V/nd)} = \Phi \left(\frac{V}{nd} \right)$$

Las funciones ψ , ψ_1 , Φ , que hemos hallado en lo que antecede, puestas como ordenadas en un diagrama cuyas abscisas sean los valores de V/nd , dan las llamadas curvas características del esfuerzo de tracción, del par motor y del rendimiento del tipo de hélice dado. Vemos que, en tanto que el par motor, la tracción y la potencia son funciones de la densidad ρ del fluido, el rendimiento, en cambio, es independiente de ρ . Consecuencia de esto es que, si se mantiene el valor de V/nd , una hélice de aeroplano, por ejemplo, tendrá el mismo rendimiento cualquiera que sea la altura a que trabaja.

Terminaremos este capítulo con una observación referente a la naturaleza de las variables que intervienen en las funciones halladas. En cada caso hemos escogido estas variables guiados por un conocimiento previo del problema, o por nuestra intuición, o por analogías con otros problemas más conocidos, etc. Es natural que si en esta elección omitimos alguna variable esencial, el resultado que se obtenga será utilizable solamente en aquellos casos en que la variable omitida tenga un valor constante. Esta circunstancia

puede afectar sensiblemente la utilidad de ese resultado. Así, por ejemplo, en el problema de la hélice, hemos supuesto que la viscosidad y la compresibilidad del fluido no intervienen, siendo así que es en realidad lo contrario, y además que su influencia se manifiesta en forma muy compleja, pues varía en cada punto a lo largo del radio de la hélice, y es función de éste, y de la velocidad de giro. De aquí se deduce que la función hallada, aplicada a cualquier otro valor de n y de d , dará en general resultados afectados de error.

IV. — SEMEJANZA MECANICA

Al llegar a esta etapa de nuestro estudio, podemos seguir dos procesos para establecer el principio de semejanza mecánica. Uno de ellos utiliza los resultados del análisis dimensional, que tienen su expresión formal más completa en el teorema π , y nos permite establecer de inmediato la definición de dos sistemas semejantes, y sus relaciones dimensionales, en forma absolutamente general. El otro, arranca de una definición objetiva de lo que debe entenderse por sistemas semejantes, y llega a la expresión del teorema de Newton. Será fácil comprobar que también por este segundo camino pueden obtenerse aquellas relaciones dimensionales, verificándose así la unidad conceptual de ambos procesos.

En lo que sigue nos limitaremos al estudio de la semejanza entre sistemas y fenómenos de naturaleza puramente mecánica, dejando establecido, no obstante, que los resultados que obtendremos a partir del análisis dimensional son aplicables a todo género de fenómenos que puedan describirse con el empleo de sistemas de unidades de la forma de los utilizados en lo que antecede.

Comenzaremos por el primer procedimiento.

Consideremos un sistema material cuya estructura y movimientos puedan describirse empleando m magnitudes variables B , de las cuales h son independientes. Por tratarse de fenómenos puramente mecánicos, las unidades fundamentales se limitan a tres ($n=3$). Por consiguiente:

$$h \leq 3$$

Ya hemos visto que la ecuación que representa el fenómeno en estudio puede escribirse en la forma:

$$f(\pi_{h+1}, \pi_{h+2}, \dots, \pi_m) = 0$$

como función de $m-h$ números adimensionales

$$\pi_{h+r} \quad (r = 1, 2, \dots, m-h)$$

cada uno de los cuales será de la forma:

$$\pi_{h+r} = y_0 \cdot B_1^{y_1} \cdot B_2^{y_2} \dots B_h^{y_h} \cdot B_{h+r}$$

siendo

$$y_0 \cdot b_1^{y_1} \cdot b_2^{y_2} \dots b_h^{y_h} \cdot b_{h+r}$$

su medida en el sistema fundamental A . Recordemos, además, que en esta última expresión, y_0 es un coeficiente numérico que puede hacerse igual a la unidad; y que $b_1, b_2, \dots b_h, b_{h+r}$ son las medidas, en el sistema A , de las magnitudes B que intervienen en el número π considerado.

Adoptemos ahora, como fundamental, otro sistema de unidades C , de igual especie que las de A (*); para fijar las ideas, supondremos que las unidades C son mayores que las A (aunque, como se comprenderá fácilmente por lo que sigue, esta restricción es innecesaria). Con arreglo a esa hipótesis, el número que expresa la medida de una magnitud cualquiera B en el sistema C será más pequeño que el que da la medida de la misma magnitud en A . Sean

$$b'_1, b'_2, \dots b'_h \cdot b'_{h+r}$$

las medidas de las B en el nuevo sistema. La medida del número π_{h+r} será:

$$y_0 \cdot b_1'^{y_1} \cdot b_2'^{y_2} \dots b_h'^{y_h} \cdot b'_{h+r}$$

y como los números π son invariantes a través de la transformación $A \rightarrow C$, debemos tener:

$$\left(\frac{b'_1}{b_1}\right)^{y_1} \cdot \left(\frac{b'_2}{b_2}\right)^{y_2} \dots \left(\frac{b'_h}{b_h}\right)^{y_h} \cdot \frac{b'_{h+r}}{b_{h+r}} = 1 \quad [24]$$

Notemos que $\frac{b'_j}{b_j}$ es la escala de reducción de la medida de B_j al pasar del sistema A al C ; de manera que, si hacemos

$$\frac{b'_j}{b_j} = b_{0,j}$$

se tendrá

$$b'_j = b_{0,j} \cdot b_j$$

(*) Los resultados que vamos a obtener, serían válidos, en rigor, cualquiera que fuera la especie de las magnitudes C ; pero sólo cuando éstas son de igual especie que las A esos resultados son utilizables en la teoría de los modelos.

Podemos por consiguiente escribir la siguiente relación entre las escalas:

$$b_{0,1}^{y_1} \cdot b_{0,2}^{y_2} \dots b_{0,h}^{y_h} \cdot b_{0,h+r} = 1 \quad [24']$$

y es natural que habrá $m - h$ relaciones de esta clase entre las m escalas

$$b_{0,1}, b_{0,2} \dots b_{0,h}, b_{0,h+1}, \dots b_{0,h+r} \dots b_{0,m}.$$

Cada una de estas escalas, puede a su vez deducirse comparando las expresiones de la correspondiente magnitud B en los sistemas A y C . Limitándonos, para mayor sencillez, al caso de tres unidades fundamentales, podremos escribir, entre las A y las C las relaciones:

$$A_1 = \beta_1 \cdot C_1 \quad A_2 = \beta_2 \cdot C_2 \quad A_3 = \beta_3 \cdot C_3$$

que definen la transformación de igual especie considerada, y en las cuales las β son coeficientes numéricos. Para una magnitud derivada B cualquiera se tendrá:

$$B_j = b_j \cdot A_1^{a_{1j}} \cdot A_2^{a_{2j}} \cdot A_3^{a_{3j}} = b_j \cdot \beta_1^{a_{1j}} \cdot \beta_2^{a_{2j}} \cdot \beta_3^{a_{3j}} \cdot C_1^{a_{1j}} \cdot C_2^{a_{2j}} \cdot C_3^{a_{3j}}$$

con lo cual

$$b'_j = b_j \cdot \beta_1^{a_{1j}} \cdot \beta_2^{a_{2j}} \cdot \beta_3^{a_{3j}} \quad \text{y} \quad b_{0j} = \frac{b'_j}{b_j} = \beta_1^{a_{1j}} \cdot \beta_2^{a_{2j}} \cdot \beta_3^{a_{3j}} \quad [25]$$

El resultado de la transformación se reduce pues a multiplicar el valor de cada una de las variables B por un factor de reducción $b_{0,j}$ que se calcula por medio de las relaciones [25].

Consideremos ahora, por otra parte, un segundo sistema material, asiento de fenómenos mecánicos en un todo análogos a los que se producen en el primero, y determinados, por consiguiente, por variables de igual especie que las B del caso anterior, y en igual número que ellas. Supongamos ahora que, comparadas las medidas de las variables del segundo sistema con las del primero —referidas unas y otras al primitivo sistema de unidades fundamentales A —, las medidas del segundo sistema material resultan ser iguales a las correspondientes del primero multiplicadas por coeficientes cuyos valores coinciden con los de las correspondientes escalas de reducción $b_{0,j}$ halladas en la transformación de unidades del caso anterior. Si esta condición se mantiene mientras duran los fenómenos

que hemos considerado como análogos, el segundo sistema material será lo que se llama un « modelo » del primero, que a su vez toma el nombre de « prototipo ». Es evidente, por lo que antecede, que los números π del modelo tienen igual valor que los del prototipo, ya que las medidas de las variables del modelo no son otras que las b' , del caso anterior, las cuales, como vimos, mantenían inalterado ese valor.

Resumiendo lo que antecede, vemos que en el primer caso hemos medido las magnitudes B , *primero con las unidades A , y luego con las C , mayores que las A* , obteniendo en esta segunda medida un grupo de valores naturalmente más pequeño; en tanto que, en el segundo caso, hemos *medido, con las mismas unidades A* , las magnitudes del prototipo, y las de igual especie, pero más pequeñas, del modelo, elegidas de manera que sus medidas coincidieran con las del segundo grupo de valores antes obtenido, resultando de ahí iguales valores para cada uno de los números π .

Vemos así que la estructura y el funcionamiento de un modelo pueden deducirse de la estructura y el funcionamiento del prototipo, con solo cambiar los valores de las variables que intervienen en éste de manera que no se modifique el valor de los números π .

Expresaremos en otros términos la conclusión precedente diciendo, con palabras del profesor Hunter Rouse, que « un verdadero « modelo podría tener sus propias unidades de longitud, tiempo, « fuerza y masa, cada una de las cuales guardaría una respectiva « relación numérica con la correspondiente unidad del prototipo. « Podemos así imaginar el metro o el segundo en el mundo del modelo, como cierta fracción o múltiplo del metro o del segundo en « el mundo del prototipo; o también —lo que es más conveniente—, « podemos considerar todas las dimensiones del modelo como cierta « fracción o múltiplo de las correspondientes del prototipo, cada « una de ellas medida con referencia a las mismas unidades fundamentales. Así las escalas modelo-prototipo pueden referirse tanto « a *relaciones de unidades*, como a *relaciones de medidas* hechas con « una misma unidad; por ejemplo, en un modelo de barco a escala « 1:100, podemos decir, que la eslora del modelo es 50 metros-modelo, y la eslora del prototipo es 50 metros-prototipo, siendo estos « últimos metros cien veces mayores que los primeros; o bien, como « se hace corrientemente, podemos decir que las esloras del modelo « y del prototipo, medidas con el mismo metro, están en la relación « de 1 a 100. Esto último constituye la práctica más generalizada ».

Estas palabras encierran a nuestro juicio toda la filosofía del

problema, pues ponen en evidencia la identidad del prototipo y su modelo, considerados como sistemas mecánicos.

Hemos visto que entre las m escalas de reducción de las variables se pueden establecer $m - h$ relaciones, lo que equivale a decir que se pueden fijar arbitrariamente h de esas escalas, de las cuales dependerán las $m - h$ restantes. Ahora bien, es evidente que si una de las magnitudes B depende de h de las restantes, su escala de reducción dependerá a su vez de las escalas de reducción de esas h magnitudes. De aquí se deduce que las escalas que podemos fijar arbitrariamente serán las que corresponden a un núcleo independiente, o a un determinante principal de la matriz.

Antes de pasar al estudio de algunas aplicaciones, veremos cómo se puede llegar a resultados coincidentes con los ya obtenidos, partiendo del concepto de semejanza mecánica establecido por Newton, para lo cual expondremos previamente los conceptos auxiliares de semejanza geométrica, cinemática y material, que nos conducirán al enunciado del teorema que lleva su nombre.

Sabemos que dos sistemas son geoméricamente semejantes cuando las longitudes de dos segmentos homólogos guardan una relación constante λ . Como consecuencia de esta definición, las áreas homólogas estarán en la relación λ^2 ; los volúmenes, en la λ^3 ; los momentos de inercia de las áreas en la λ^4 , etc.

Para definir lo que se entiende por semejanza cinemática comenzaremos por establecer una homología entre los intervalos de tiempo medidos en uno y otro de los dos sistemas considerados. Si t es un instante genérico comprendido dentro del intervalo de tiempo $t_1 - t_0$ que indica la duración de un fenómeno en el primer sistema, y t' es un instante genérico del intervalo $t'_1 - t'_0$ correspondiente al segundo sistema, los instantes t y t' serán homólogos si:

$$\frac{t' - t'_0}{t - t_0} = \frac{t'_1 - t'_0}{t_1 - t_0} \quad \text{ó} \quad t' - t'_0 = (t - t_0) \tau$$

Diremos que los dos sistemas, cada uno de ellos referido a una terna fija, son cinemáticamente semejantes, si las configuraciones de cada sistema y su respectiva terna, en dos instantes homólogos cualesquiera, son geoméricamente semejantes.

Como consecuencia de esta definición, resultan las siguientes propiedades:

a) Las trayectorias descritas por los diversos puntos de uno de los sistemas constituyen, en su conjunto, una figura semejante a la formada por las trayectorias de los puntos homólogos del segundo sistema. Esto significa que, no sólo son semejantes las trayectorias de dos puntos homólogos cualesquiera, sino también que cada una de ellas está semejantemente dispuesta con respecto a las otras de su sistema.

b) Las velocidades y las aceleraciones de puntos homólogos tienen, en instantes homólogos, igual dirección y sentido respecto a las correspondientes trayectorias; sus magnitudes guardan las relaciones $\lambda \cdot \tau^{-1}$ y $\lambda \cdot \tau^{-2}$ respectivamente.

De lo que antecede se puede deducir un criterio que permite establecer si existe semejanza cinemática entre dos sistemas, en dos intervalos de tiempo dados, sin necesidad de verificar, instante por instante, la semejanza geométrica de los mismos. Ese criterio es el siguiente:

Sean dos sistemas tales que, la configuración de uno de ellos en el instante inicial t_0 sea geoméricamente semejante a la del segundo en el instante inicial t'_0 ; y que las velocidades de puntos homólogos sean, en esos instantes, proporcionales y semejantemente orientadas. Sean λ y v_0 los coeficientes de proporcionalidad respectivos; definamos un nuevo coeficiente τ tal que

$$\tau = \lambda \cdot v_0^{-1}$$

Si las aceleraciones de puntos homólogos, en dos instantes ulteriores t y t' tales que $t' - t'_0 = \tau(t - t_0)$ tienen igual orientación respecto a las configuraciones iniciales, y guardan entre sí la relación

$$\alpha' = \lambda \cdot \tau^{-2} \cdot \alpha$$

los dos sistemas serán cinemáticamente semejantes mientras se cumplan estas condiciones.

Es fácil, en efecto, deducir de la última ecuación, por integraciones sucesivas, que las velocidades de puntos homólogos, guardan la relación $\lambda \tau^{-1}$ y que las trayectorias son semejantes, con razón de semejanza λ , en dos instantes homólogos cualesquiera de los intervalos de experimentación.

Por último definiremos la semejanza material de dos sistemas diciendo que, si entre ellos puede establecerse una correspondencia biunívoca de punto a punto, habrá semejanza material cuando las

masas de elementos correspondientes guarden una relación constante. Si los sistemas son geoméricamente semejantes, la semejanza material se obtiene en la forma más sencilla construyendo los elementos homólogos con igual material.

Por medio de los conceptos ya explicados definiremos ahora lo que se entiende por semejanza mecánica.

Dos sistemas S y S' , que se mueven en intervalos Δt y $\Delta t'$ se dicen mecánicamente semejantes, cuando, establecida una correspondencia biunívoca entre los puntos de S y S' , y entre los instantes de Δt y $\Delta t'$ los dos sistemas presentan, en instantes homólogos, semejanza cinemática y material.

Veamos las consecuencias de este enunciado. Si hay semejanza cinemática, las aceleraciones de dos puntos homólogos estarán en la relación

$$\alpha' = \lambda \cdot \tau^{-2} \cdot \alpha$$

Por haber semejanza material, las masas elementales correspondientes a esos puntos serán tales que:

$$m' = \mu \cdot m$$

Se deduce de aquí que las fuerzas que actúan sobre ellas:

$$F = m \cdot \alpha \quad \text{y} \quad F' = m' \cdot \alpha'$$

estarán en la relación:

$$\varphi = \frac{F'}{F} = \frac{m' \alpha'}{m \alpha} = \mu \cdot \lambda \cdot \tau^{-2}$$

Esta expresión se transforma en:

$$\varphi = \mu \cdot \lambda^{-1} \cdot v_0^2$$

si se tiene en cuenta que $v_0 = \lambda \cdot \tau^{-1}$.

Esta última ecuación se toma a menudo como expresión del teorema de Newton. El enunciado de esta proposición puede considerarse, por lo que hemos visto, como una consecuencia de las definiciones que la preceden. No obstante, señalaremos que Bertrand, en una Nota sobre la Semejanza Mecánica, publicada en el Journal de l'Ecole Polytechnique del año 1848, da una demostración rigu-

rosa del teorema, basada en la ecuación general de la dinámica, en la forma derivada del principio de D'Alembert:

$$\Sigma \left[\left(X - m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

Bertrand hace notar simplemente que, si dado un sistema al cual se aplica una ecuación de esta especie, queremos obtener otro sistema semejante multiplicando las longitudes por un coeficiente λ , las masas por μ y las fuerzas por φ , la misma ecuación se aplicará también al segundo sistema siempre que los tiempos sean multiplicados por:

$$\tau = \sqrt{\frac{\lambda u}{\varphi}}$$

de donde resulta la expresión antes hallada

$$\varphi = \lambda \cdot \mu \cdot \tau^{-2} = \mu \cdot \lambda^{-1} \cdot v_0^2$$

En realidad el enunciado original del teorema dice aproximadamente así (respetando todos los giros del texto primitivo):

«Supongamos dos sistemas similares de cuerpos, que consistan
«cada uno de igual número de partículas, tales que las partículas
«correspondientes (esto es, cada una de las de un sistema a cada
«una de las del otro) sean semejantes y proporcionales, y ocupen
«entre ellas una situación semejante, y tengan la misma relación
«de densidad. Supongamos que las partículas comienzan a mover-
«se entre ellas en tiempos proporcionales y con movimientos seme-
«jantes (esto es, las de un sistema entre ellas y las del otro sistema
«también entre ellas). Si las partículas de un mismo sistema no se
«tocan entre sí, salvo en caso de impacto; ni se atraen o rechazan
«con otra clase de fuerzas que no sean fuerzas acelerativas inver-
«samente proporcionales a los diámetros de las partículas corres-
«pondientes y directamente proporcionales a los cuadrados de las
«velocidades, digo que las partículas de estos sistemas continuarán
«moviéndose entre ellas con movimientos semejantes y en tiempos
«proporcionales».

Esta traducción al inglés del enunciado original en latín ha sido publicada por Mr. B. F. Groat en un artículo aparecido en los Proceedings de la American Society of Civil Engineers.

Pueden destacarse claramente, en el enunciado, la condición de semejanza material y todas las que comprende el criterio de seme-

janza cinemática que expusimos más arriba, esto es, la semejanza geométrica inicial, la semejanza de las velocidades iniciales, y la proporcionalidad de las aceleraciones en los instantes subsiguientes. El teorema habla de fuerzas acelerativas inversamente proporcionales a los diámetros de las partículas y proporcionales al cuadrado de las velocidades; la relación entre dos fuerzas homólogas sería $\lambda^{-1} \cdot v_0^2$. Sustituyendo v_0 por $\lambda \cdot \tau^{-1}$ se obtiene el coeficiente $\lambda \cdot \tau^2$ que fija la proporcionalidad de las aceleraciones en criterio de semejanza referido.

Para lograr el resultado que anticipamos al emprender el estudio de la semejanza mecánica desde el punto de vista de Newton, verificaremos ahora que el teorema que lleva su nombre permite establecer la igualdad de los números π en dos sistemas semejantes. Limitaremos esa verificación a los números π que hallamos al estudiar el movimiento de un fluido, o sea:

$$\frac{V^2}{\Delta p / \rho} \quad NF = \frac{V^2 / a}{\gamma / \rho} \quad NR = \frac{Va}{K / \rho} \quad NW = \frac{V^2 a}{\sigma / \rho} \quad NC = \frac{V^2}{\varepsilon / \rho}$$

Consideremos primero el caso de que las fuerzas acelerativas sean debidas a diferencias de presión. En cada sistema la fuerza que actúa sobre un elemento será igual a la diferencia de presión multiplicada por el área A sobre la cual se ejerce, sea, $\Delta p \cdot A$; la relación entre fuerzas homólogas será $\Delta p_0 \cdot \lambda^2$, siendo Δp_0 la escala de las diferencias de presión. Igualando esa expresión a la que da el teorema de Newton se tiene

$$\Delta p_0 \cdot \lambda^2 = \mu \cdot \lambda^{-1} \cdot v_0^2$$

y como $\mu = \rho_0 \cdot \lambda^3$ (siendo ρ_0 la escala de las densidades:

$$\Delta p_0 \lambda^2 = \rho_0 \cdot \lambda^3 \cdot \lambda^{-1} \cdot v_0^2$$

de donde

$$\frac{v_0^2}{\Delta p_0 / \rho_0} = 1$$

lo que significa que

$$\left(\frac{V^2}{\Delta p / \rho} \right)_s = \left(\frac{V^2}{\Delta p / \rho} \right)_{s'}$$

De igual manera, si las fuerzas acelerativas son debidas al peso, su relación será $\gamma_0 \cdot \lambda^3$ siendo γ_0 la relación de los pesos específicos; luego se tendrá

$$\gamma_0 \lambda^3 = \rho_0 \cdot \lambda^3 \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_0^2$$

de donde

$$\frac{\nu_0^2/\lambda}{\gamma_0/\rho_0} = 1 \quad \text{y} \quad (NF)_s = (NF)_{s'}$$

Procediendo en igual forma se tiene:

Para las resistencias viscosas:

$$\mu_0 \lambda^2 \cdot \tau^{-1} = \rho_0 \lambda^3 \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_0^2$$

y como $\lambda \tau^{-1} = \nu_0$ se tendrá:

$$\mu_0 \lambda \nu_0 = \rho_0 \lambda^2 \cdot \nu_0^2$$

$$\frac{\nu_0 \lambda}{\mu_0/\rho_0} = 1$$

o, finalmente

$$(NR)_s = (NR)_{s'}$$

Para las fuerzas de capilaridad:

$$\sigma_0 \lambda = \rho_0 \lambda^3 \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_0^2$$

o

$$\frac{\nu_0^2 \cdot \lambda}{\sigma_0/\rho_0} = 1 \quad \therefore \quad (NW)_s = (NW)_{s'}$$

Por último, si las fuerzas dependen de la compresibilidad de los flúidos

$$\varepsilon_0 \cdot \lambda^2 = \rho_0 \lambda^3 \cdot \lambda^{-1} \cdot \nu_0^2$$

o

$$\frac{\nu_0^2}{\varepsilon_0/\rho_0} = 1 \quad \therefore \quad (NC)_s = (NC)_{s'}$$

Estamos pues en condiciones de dar una definición general de lo que debe entenderse por sistemas semejantes.

Diremos que si dos sistemas mecánicos son asiento de fenómenos de igual naturaleza, definidos por consiguiente por un mismo nú-

mero de variables, ambos sistemas serán semejantes mientras los números π , tengan igual valor en uno y otro.

Recordando las relaciones [24'] y [25] podemos decir también que estos sistemas serán semejantes, mientras se cumplan las $m - h$ relaciones [25] entre las m escalas de reducción de las variables.

Limitándonos a los fenómenos puramente mecánicos, resulta de lo que antecede que, para construir y operar un modelo mecánico, podemos elegir arbitrariamente, en principio, tres de las escalas de las variables. Parecería entonces, a primera vista, que lo más sencillo fuera fijar de antemano las escalas correspondientes a las magnitudes fundamentales, por ejemplo, las de longitud, tiempo y masa, y calcular luego con ellas las restantes. Pero en realidad, resulta más conveniente, para la conducción de los experimentos, elegir, además de la escala de longitudes, que determina la semejanza geométrica, otras escalas correspondientes a magnitudes características del fenómeno, o de los materiales empleados, y directamente medibles durante las experiencias sobre el modelo, como fuerzas, velocidades, gastos, etc.

Muy a menudo, no obstante, ciertas dificultades de orden práctico, que más adelante señalaremos, restringen la libertad de elección de las escalas, al punto que, en algunos casos, ninguna de ellas puede ser fijada arbitrariamente. Esto ocurre muy frecuentemente en el estudio experimental de los movimientos en una masa fluida, porque, dado el fluido del prototipo, si por razones de orden práctico nos vemos obligados a emplear otro fluido determinado para el modelo, quedan con ello automáticamente fijadas las escalas correspondientes a todos los parámetros característicos —densidad, viscosidad, tensión superficial y compresibilidad—; y cada uno de esos parámetros que intervenga en el problema, impondrá, como veremos luego, una relación adicional entre las escalas de las variables.

Hallada por vía experimental una relación entre las variables del modelo, se puede, en general, deducir una relación análoga entre las variables del prototipo aplicando a cada una de ellas la escala de reducción correspondiente. Para que esto sea posible, es preciso, no obstante, que la ley física que rige el fenómeno observado en el modelo subsista sin alteración al pasar de éste al prototipo; o de otro modo, que las variables que intervienen en el fenómeno sean las mismas en el modelo y en el prototipo, o aún, que la ley física no dependa de la escala de reducción.

Así, por ejemplo, si un fenómeno a investigar en el prototipo

depende sólo del peso, siendo el efecto de la viscosidad despreciable, es preciso que el fenómeno análogo que se quiere reproducir en el modelo dependa también exclusivamente del peso, sin intervención de la viscosidad. Si en el estudio de las vibraciones de un sistema elástico mediante un modelo, podemos despreciar en éste el efecto amortiguador de la fricción interna del material, será preciso que el prototipo también se comporte como un sistema vibrante sin amortiguación.

La falta de cumplimiento de esta condición es una de las mayores dificultades con que tropieza la técnica de la experimentación por medio de modelos, y es responsable de muchos de sus fracasos. Ya Galileo, mucho antes de que Newton diera expresión formal al principio de semejanza, había presentado esa dificultad. En uno de sus Diálogos, en efecto, hace expresar a uno de los interlocutores su asombro ante el hecho de que «una máquina, que construída en «pequeño da buen resultado, fracasa a menudo cuando se la cons-
«truye en escala mayor». El propio Galileo señala que este hecho resulta paradójal si se pretende explicarlo considerando sólo el aspecto geométrico de la semejanza, de acuerdo con el concepto, hasta entonces generalizado, que hacía de la geometría el fundamento exclusivo de la mecánica; e insinúa que la causa puede radicar en la diferente influencia relativa de los frotamientos en la máquina y en el modelo. De conformidad con las observaciones que preceden podemos establecer que se trata aquí, simplemente, de una forma particular del llamado *efecto de escala*; las resistencias pasivas, que en el modelo pueden ser muy pequeñas y despreciables frente a las restantes magnitudes, alcanzan a veces en el prototipo, valores muy grandes.

Para que la semejanza se mantenga es preciso, por consiguiente, que al pasar del prototipo al modelo, o viceversa, no pierda importancia ninguna de las variables dominantes en el problema, ni la adquieran otras que, a causa de su escasa influencia, no habían sido tomadas en cuenta. Cuando no se cumple esta condición, no es posible transportar al prototipo los valores obtenidos por experimentación sobre el modelo, sin introducir una corrección que en cada caso dependerá de la forma particular del efecto de escala.

Vamos a ver ahora cómo se plantea en la práctica, el problema de determinar las escalas de reducción en un modelo. Tomaremos un ejemplo del movimiento en una masa flúida, que es uno de los fenómenos mecánicos que presentan mayor complejidad.

Las características del modelo que quedan por lo común libradas

a nuestra elección son la escala de reducción geométrica λ y el fluido a emplear en el modelo, dado el del prototipo. Con esto quedan fijadas las escalas correspondientes a la densidad, la viscosidad, la tensión superficial y la compresibilidad:

$$\rho_0 = \frac{\rho_m}{\rho_p} \quad k_0 = \frac{k_m}{k_p} \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p}$$

La escala geométrica λ y la de densidades ρ_0 permiten determinar la de las masas μ ; con ésta, la geométrica y la de cualquiera de las otras características de los fluidos queda determinada la escala de los tiempos τ .

Supongamos que en el fenómeno estudiado tiene influencia dominante la viscosidad, de manera que se pueden dejar de lado las otras propiedades características. El número de Reynolds deberá tener igual valor en el prototipo y en el modelo; de donde resulta para las escalas la relación:

$$\frac{v_0 \cdot \lambda}{k_0 / \rho_0} = 1$$

y como la escala de las velocidades es

$$v_0 = \lambda \cdot \tau^{-1}$$

resultará:

$$\tau = \frac{\lambda^2}{k_0 / \rho_0}$$

Pero ya hemos dicho, que resulta más conveniente a los fines de la experimentación determinar las escalas de las velocidades, aceleraciones, fuerzas y otras magnitudes directamente observables durante el ensayo; estas escalas se calculan en la misma forma, y son: para la velocidades:

$$v_0 = \frac{k_0 / \rho_0}{\lambda}$$

para las aceleraciones:

$$\alpha_0 = \frac{(k_0 / \rho_0)^2}{\lambda^3}$$

para las fuerzas:

$$F = k_0^2 / \rho_0$$

y así sucesivamente.

Si en lugar de la viscosidad, suponemos que domina en el problema cualquiera de las otras características de los flúidos, o también la diferencia de presión (como sucede en algunos casos de escurrimiento de flúidos en conductos cerrados), la constancia del número π correspondiente nos da una nueva relación de escalas, con la cual procederemos en forma análoga al caso anterior. El cuadro adjunto da los valores de las escalas correspondientes a diversas magnitudes, según que intervengan exclusivamente la presión, o el peso del flúido, o su viscosidad, o su tensión superficial, o su compresibilidad.

Conviene hacer aquí una observación referente al efecto de escala. Recorriendo una horizontal cualquiera del cuadro, podemos ver cómo varía con la escala geométrica la influencia de las distintas características del movimiento sobre la magnitud considerada, lo que nos permite comprender mejor la causa del efecto de escala, y también, la imposibilidad de eliminarlo por completo de las experiencias.

Vemos así que cuando el fenómeno está influenciado por una sola de las características, la determinación de las escalas no presenta dificultad, aunque se elija arbitrariamente la escala geométrica y el flúido del modelo.

En particular, si la característica dominante es el peso del flúido, conviene observar que, si se supone que los ensayos sobre el modelo se realizan en condiciones de gravitación iguales a las que imperan en el prototipo —lo que siempre se puede admitir sin error considerable—, entonces, aunque se empleen distintos flúidos en uno y otro, la relación del peso específico a la densidad será la misma, esto es:

$$\frac{\gamma_m / \rho_m}{\gamma_p / \rho_p} = \frac{\gamma_m / \gamma_p}{\rho_m / \rho_p} = \frac{\gamma_0}{\rho_0} = 1 = g_0$$

Las escalas correspondientes al número de Froude serán en tal caso:

$$\begin{aligned} v_0 &= \lambda^{1/2} & \tau &= \lambda^{1/2} & \alpha_0 &= 1 \\ \varphi_0 &= \gamma_0 \cdot \lambda^3 & Q_0 &= \lambda^{5/2} & T_0 &= \gamma_0 \cdot \lambda^4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

En particular, la expresión de la escala de las velocidades es la expresión de la conocida ley de Reech-Froude.

Terminaremos el examen de este caso con dos observaciones.

CUADRO DE ESCALAS DE REDUCCION

Magnitud	Dimensión en el sistema L. M. F.	Notación de la escala	Número adimensional predominante				
			$\frac{V^2}{\Delta p / \rho}$	$NF = \frac{V^2/L}{\gamma/\rho}$	$NR = \frac{VL}{k/\rho}$	$NW = \frac{V^3 L}{\sigma/\rho}$	$NC = \frac{V^2}{\epsilon/\rho}$
Longitud.....	L	λ	λ	λ	λ	λ	λ
Tiempo.....	$L^{1/2} M^{-1/2} F^{-1/2}$	τ	$\lambda (\Delta p_0 / \rho_0)^{-1/2}$	$\lambda^{1/2} (\gamma_0 / \rho_0)^{-1/2}$	$\lambda^2 (k_0 / \rho_0)^{-1}$	$\lambda^{3/2} (\sigma_0 / \rho_0)^{-1/2}$	$\lambda \cdot (\epsilon_0 / \rho_0)^{-1/2}$
Velocidad.....	$L^{1/2} M^{-1/2} F^{1/2}$	v_0	$(\Delta p_0 / \rho_0)^{1/2}$	$\lambda^{1/2} (\gamma_0 / \rho_0)^{1/2}$	$\lambda^{-1} (k_0 / \rho_0)$	$\lambda^{-1/2} (\sigma_0 / \rho_0)^{1/2}$	$(\epsilon_0 / \rho_0)^{1/2}$
Aceleración.....	$M^{-1} F$	a_0	$\lambda^{-1} (\Delta p_0 / \rho_0)$	γ_0 / ρ_0	$\lambda^{-3} (k_0 / \rho_0)^2$	$\lambda^{-2} (\sigma_0 / \rho_0)$	$\lambda^{-1} (\epsilon_0 / \rho_0)$
Aceleración angular.....	$L^{-1} M^{-1} F$	θ_0	$\lambda^{-2} (\Delta p_0 / \rho_0)$	$\lambda^{-1} (\gamma_0 / \rho_0)$	$\lambda^{-4} (k_0 / \rho_0)^2$	$\lambda^3 (\sigma_0 / \rho_0)$	$\lambda^{-3} (\epsilon_0 / \rho_0)$
Fuerza.....	F	φ	$\Delta p_0 \cdot \lambda^2$	$\gamma_0 \lambda^3$	$k_0^2 \cdot \rho_0^{-1}$	$\sigma_0 \cdot \lambda$	$\epsilon_0 \cdot \lambda^2$
Gasto.....	$L^{3/2} M^{-1/2} F^{1/2}$	Q_0	$\lambda^2 (\Delta p_0 / \rho_0)^{1/2}$	$\lambda^{5/2} (\gamma_0 / \rho_0)^{1/2}$	$\lambda \cdot k_0 / \rho_0$	$\lambda^{3/2} (\sigma_0 / \rho_0)^{1/2}$	$\lambda^3 (\epsilon_0 / \rho_0)^{1/2}$
Presión.....	$L^{-1} F$	Δp_0	Δp_0	$\gamma_0 \cdot \lambda$	$\lambda^{-2} \cdot k_0^2 \cdot \rho_0^{-1}$	$\sigma_0 \cdot \lambda^{-1}$	ϵ_0
Trabajo, energía, momento.....	L F	T_0	$\Delta p_0 \cdot \lambda^3$	$\gamma_0 \cdot \lambda^4$	$\lambda \cdot k_0^3 \cdot \rho_0^{-1}$	$\sigma_0 \cdot \lambda^2$	$\epsilon_0 \cdot \lambda^3$
Impulso.....	$L^{1/2} M^{1/2} F^{1/2}$	I_0	$\lambda^3 \cdot \Delta p_0^{1/2} \cdot \rho_0^{-1/2}$	$\lambda^{7/2} \cdot \gamma_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$	$\lambda^2 \cdot k_0$	$\lambda^{5/2} \cdot \sigma_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$	$\lambda^3 \cdot \epsilon_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$
Momento de impulso.....	$L^{3/2} M^{1/2} F^{1/2}$	$(MI)_0$	$\lambda^4 \cdot \Delta p_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$	$\lambda^{9/2} \cdot \gamma_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$	$\lambda^3 \cdot k_0$	$\lambda^{7/2} \cdot \sigma_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$	$\lambda^4 \cdot \epsilon_0^{1/2} \cdot \rho_0^{1/2}$
Potencia.....	$L^{1/2} M^{-1/2} F^{3/2}$	W_0	$\lambda^2 \cdot \Delta p_0^{3/2} \cdot \rho_0^{-1/2}$	$\lambda^{7/2} \cdot \gamma_0^{3/2} \cdot \rho_0^{-1/2}$	$\lambda^{-1} \cdot k_0^3 \cdot \rho_0^{-2}$	$\lambda^{1/2} \cdot \sigma_0^{3/2} \cdot \rho_0^{-1/2}$	$\lambda^3 \cdot \epsilon_0^{3/2} \cdot \rho_0^{-1/2}$

- 1º — Si el fenómeno es de tal naturaleza que puede considerarse regido únicamente por las diferencias de presión entre dos puntos (como en el caso de un fluido perfecto e incompresible de cuyo peso pueden prescindirse), la escala de reducción de las presiones, Δp_0 , puede fijarse arbitrariamente, y permitirá, junto con las de longitud y masa, calcular las restantes. Pero si junto con las diferencias de presión, interviene alguno de los parámetros característicos del fluido, la semejanza seguirá siendo posible, pero la escala de presiones, antes arbitraria, será ahora función de dicho parámetro.
- 2º — Si el fluido del modelo se elige igual al del prototipo, resulta: $\rho_0 = k_0 = \sigma_0 = \epsilon_0 = 1$, con lo cual todas las escalas se simplifican. En particular las escalas de las fuerzas se convierten en:

$$\gamma_0 \lambda^3 \quad 1 \quad \lambda \quad \lambda^2$$

según que predomine el peso, la viscosidad, la tensión superficial o la compresibilidad.

Supongamos ahora que, en el fenómeno en estudio deban tenerse en cuenta, simultáneamente, dos de los parámetros característicos. Si, por ejemplo, dominan el peso y la viscosidad, deben cumplirse simultáneamente las relaciones de escala correspondientes a los números de Froude y de Reynolds. Tomando una magnitud cualquiera por ejemplo la fuerza, se tendrá, igualando ambas escalas:

$$\gamma_0 \cdot \lambda^3 = \frac{k_0^2}{\rho_0} \quad \therefore \quad \lambda^3 = \frac{k_0^2}{\rho_0 \cdot \gamma_0}$$

Si las condiciones de gravitación son las mismas ($g_0 = 1$) y si hacemos $\frac{k}{\rho} = k_c$ coeficiente de viscosidad cinemática, resulta:

$$\lambda^3 = k_{c,0}^2 \quad \text{ó} \quad \lambda = k_{c,0}^{2/3}$$

Vemos que ya no es posible elegir arbitrariamente, a un tiempo, la escala geométrica y el fluido del modelo. Vemos también que si el fluido de éste es el mismo que el del prototipo, no hay posibilidad de semejanza con una escala geométrica $\lambda \neq 1$.

De igual manera se procedería si debieran considerarse al mismo

tiempo otros dos parámetros cualesquiera. Combinando dos a dos las propiedades de los flúidos, se puede formar el siguiente cuadro que da en cada caso la escala geométrica en función de los parámetros correspondientes. Es obvio que los valores obtenidos serán los mismos si en lugar de la escala de fuerzas se comparan las de otra magnitud cualquiera.

Propiedades que intervienen	Escalas de las longitudes
Peso y viscosidad	$\lambda^3 = \frac{k_{c,0}^2}{\gamma_0 / \rho_0}$ y si $g_0 = 1$, $\lambda = k_{c,0}^{2/3}$
Peso y tens. superficial	$\lambda = \left(\frac{\sigma_0}{\gamma_0} \right)^{1/2}$ y si $g_0 = 1$, $\lambda = \left(\frac{\sigma_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$
Peso y compresibilidad	$\lambda = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0}$ y si $g_0 = 1$, $\lambda = \frac{\varepsilon_0}{\rho_0}$
Viscosidad y tens. superficial	$\lambda = \frac{k_0^2}{\rho_0 \sigma_0}$
Viscosidad y compresibilidad	$\lambda = \frac{k_0}{(\rho_0 \varepsilon_0)^{1/2}}$
Tens. superficial y compresibilidad	$\lambda = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

El examen de estos resultados nos muestra que, en general, cuando intervienen dos parámetros característicos de los flúidos, no se puede usar el mismo flúido en el prototipo y en el modelo, porque esta condición equivale en todos los casos a $\lambda = 1$.

Si se fija de antemano la escala de reducción, habrá que escoger el líquido del modelo de modo que sus parámetros y los del prototipo satisfagan la relación que corresponda a cada caso. El problema es a veces físicamente posible; por ejemplo, cuando interviene el peso y la viscosidad, el uso de líquidos tales como el agua y el mercurio, cuyas viscosidades dinámicas no son muy diferentes, en tanto que las densidades lo son, permitiría el uso de una escala de reducción $\lambda = 1/4, 6$. Pero naturalmente estas soluciones no tienen más que un valor puramente teórico, pues el factor económico las hace impracticables.

Digamos para terminar con este punto que, cuando intervienen en el problema más de dos propiedades características del flúido,

no es posible construir modelos mecánicos reducidos. En efecto, si se desea emplear en el modelo y en el prototipo distintos flúidos, y si en el problema intervienen, por ejemplo, los números de Reynolds, de Weber y de Cauchy, se tendrán las relaciones:

$$\frac{\nu_0 \lambda}{k_0 / \rho_0} = 1 \qquad \frac{\nu_0^2 \lambda}{\sigma_0 / \rho_0} = 1 \qquad \frac{\nu_0^2}{\varepsilon_0 / \rho_0} = 1$$

de las cuales, eliminando λ y ν_0 resulta:

$$k_0^2 \cdot \varepsilon_0 = \sigma_0^2 \cdot \rho_0$$

condición que es prácticamente imposible realizar con distintos flúidos. Y por otra parte, si el flúido del modelo y el del prototipo es el mismo, resulta, en todos los casos, $\lambda = 1$.

A conclusiones análogas se llega, combinando otros tres cualesquiera de los parámetros característicos.

V. — APLICACIONES

El presente capítulo será dedicado a la descripción de algunos ejemplos de aplicación del método de experimentación por medio de modelos a la resolución de diversos problemas, escogidos en distintas ramas de la técnica.

RESISTENCIA AL MOVIMIENTO DE CUERPOS SUMERGIDOS. — Cuando un cuerpo está sumergido en un fluido a una profundidad tal que su movimiento no provoca ondas en la superficie, el peso del fluido no tiene influencia en la resistencia. Tal es el caso aproximadamente, de un submarino, un dirigible, etc. Si la velocidad es uniforme y bastante pequeña para poder despreciar la influencia de la compresibilidad del fluido, la resistencia r dependerá evidentemente de la velocidad relativa v del cuerpo y el fluido, de la viscosidad k y densidad ρ de éste, y del tamaño y forma del cuerpo. Si limitamos nuestro estudio a una serie de cuerpos geoméricamente semejantes, de forma dada, podremos definir a cada uno de ellos por cierta dimensión lineal l que se adoptará como módulo para las demás. La función en este caso será por consiguiente:

$$f(r, V, k, \rho, l) = 0$$

La matriz de transformación respecto a un sistema $L-M-T$ es:

$$\begin{array}{c} L \\ M \\ T \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} r & V & k & \rho & l \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

El determinante formado por la 1ª, 2ª, 4ª y 5ª columnas

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0$$

luego, $h=3$, y como hay cinco variables, habrá dos números π , que serán:

$$\pi_1 = r V^{x_1} \rho^{y_1} l^{z_1} \quad \text{y} \quad \pi_2 = k V^{x_2} \rho^{y_2} l^{z_2}$$

Este último será evidentemente el número de Reynolds:

$$\pi_2 = NR = \frac{Vl}{k/\rho}$$

en cuanto al primero, aplicado el procedimiento corriente, resulta ser:

$$\pi_1 = r V^{-2} \rho^{-1} l^{-2}$$

Se tendrá por consiguiente:

$$r = \rho V^2 l^2 \psi(NR)$$

Observemos que si por vía experimental se llega a demostrar que la resistencia global es proporcional a cierta potencia n de la velocidad:

$$r = a \cdot V^n$$

deberá tenerse:

$$\psi(NR) = \psi\left(\frac{Vl}{k/\rho}\right) = \left(\frac{Vl}{k/\rho}\right)^{n-2}$$

Si $n=2$, se tendrá: $\psi(NR)=1$. Es el caso de las llamadas resistencias hidráulicas; la resistencia es independiente de la viscosidad.

La constancia del número de Reynolds nos da para las escalas la relación:

$$\frac{v_0 \cdot \lambda}{k_0/\rho_0} = 1$$

y si el fluido es el mismo para el modelo y para el prototipo,

$$k_0 = 1 \quad \rho_0 = 1 \quad \text{y} \quad v_0 \cdot \lambda = 1$$

El otro número π nos da en iguales condiciones:

$$r_0 = v_0^2 \cdot \lambda^2$$

y de acuerdo con la anterior:

$$r_0 = 1$$

Es decir que las resistencias en el modelo y en el prototipo serán las mismas si las velocidades están en razón inversa de las dimensiones lineales.

Este procedimiento exige velocidades tan grandes para el modelo, que ya no es posible prescindir en éste de la compresibilidad. (Recuérdese lo dicho a propósito del efecto de escala). Así, si un aeroplano se mueve a razón de 360 km/hora, o 100 m/seg, un modelo del mismo a escala 1/10 deberá moverse a razón de 1000 m/seg.

Si se elige para el modelo un flúido que tenga una viscosidad cinemática k/ρ menor que la del flúido del prototipo, la relación

$$\frac{v_0 \lambda}{k_{c,0}} = 1$$

nos muestra que es posible reducir la velocidad del modelo con respecto a la que tendría en el caso de un mismo líquido. Si, por ejemplo, el modelo de un dirigible se hace funcionar en agua, cuya viscosidad cinemática es 13 veces menor que la del aire, se tendrá:

$$\frac{k_0}{\rho_0} = 1/13 \quad v_0 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

La escala de resistencias será ahora:

$$r_0 = v_0^2 \lambda^2 \rho_0 = \frac{\rho_0}{169}$$

y con

$$\rho_0 = \frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire}}} = 773, \quad r_0 = 4,6$$

La resistencia en el modelo será casi cinco veces mayor que en el prototipo.

Si en lugar de agua se adopta para el modelo aire a presión, se obtendrá también un valor de $\frac{k_0}{\rho_0}$ más pequeño, porque k no varía sensiblemente con la presión, en tanto que ρ varía en razón directa

de ella. Este procedimiento ha sido empleado en túneles aerodinámicos en los Estados Unidos; la presión de trabajo llega a 20 atmósferas. Se tiene así:

$$\rho_0 = 20 \quad \text{y} \quad \frac{k_0}{\rho_0} = \frac{1}{20}$$

de donde

$$\nu_0 \cdot \lambda = \frac{1}{20} \quad \text{y} \quad \nu_0 = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

La escala de resistencias será

$$r_0 = \nu_0^2 \cdot \lambda^2 \cdot \rho_0 = \frac{1}{\rho_0^2} \cdot \rho_0 = \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{20}$$

RESISTENCIA DE CUERPOS PARCIALMENTE SUMERGIDOS. RESISTENCIAS DE UN BARCO. — Cuando un cuerpo está parcialmente sumergido, o cuando, estando totalmente sumergido, se mueve bastante cerca de la superficie como para producir en ella ondas y torbellinos, una parte de la resistencia al movimiento se debe a la formación de estas ondas. Como en este fenómeno, según muestra la experiencia, interviene el peso del líquido, la función para este caso contendrá las mismas variables que en el problema anterior, y además el peso específico. (Hacer intervenir el peso específico al lado de la densidad, equivale en realidad a hacer intervenir la intensidad g de la gravedad; algunos autores utilizan directamente este valor). La función será:

$$f(r, V, \mu, \rho, l, \gamma) = 0$$

Habrà en este caso tres números π ; el examen de las dimensiones de las variables nos muestra de inmediato que, éstos son el número de Froude, el de Reynolds y el obtenido en el problema anterior. Luego podremos escribir:

$$r = V^2 \cdot \rho \cdot l^2 \cdot \psi \left(\frac{V^2/l}{\gamma/\rho} \cdot \frac{Vl}{k/\rho} \right)$$

Para que un modelo sea semejante al prototipo se deben cumplir las siguientes relaciones entre las escalas:

$$r_0 = \nu_0^2 \cdot \rho_0 \cdot \lambda^2 \quad \nu_0 \lambda = \frac{k_0}{\rho_0} \quad \frac{\nu_0^2}{\lambda} = \frac{\gamma_0}{\rho_0}$$

Si como se acostumbra en la práctica, se trabaja en el prototipo y en el modelo con el mismo líquido, el agua, $k_0 = \rho_0 = 1$; además se tiene aproximadamente $\gamma_0/\rho_0 = 1$; de donde resultará, de las dos últimas relaciones

$$\nu_0 \lambda = 1 \quad \frac{\nu_0^2}{\lambda} = 1$$

que dan

$$\nu_0 = 1 \quad \lambda = 1$$

No es posible construir en este caso un modelo reducido.

Para que la segunda y tercera de las condiciones de escala sean compatibles con valores de $\lambda \neq 1$, se deberá tener (siempre con $\gamma_0/\rho_0 = 1$):

$$\nu_0 = \lambda^{1/2} \quad \text{y} \quad \lambda^{3/2} = \frac{k_0}{\rho_0}$$

Si se dispone, para el modelo, de un líquido que satisfaga esa condición, las resistencias correspondientes a velocidades homólogas estarán en la relación

$$r_0 = \rho_0 \cdot \lambda^3$$

Lo que hemos hecho, en suma, es ajustar las viscosidades de los líquidos del modelo y del prototipo de modo que las escalas satisfagan a la ley de Froude. Como ese ajuste no es prácticamente posible, no queda otro camino que tratar de suprimir alguno de los números π de la función ψ manteniendo una aproximación razonable.

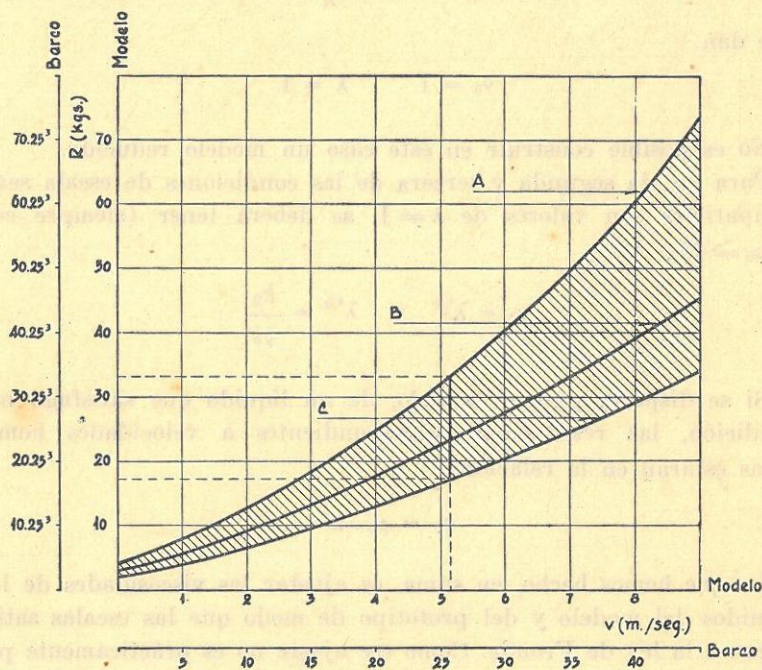
Por medio de experimentos se ha logrado establecer que la resistencia de un barco a las velocidades corrientes es proporcional a V^n en que n es próximo a 1,83. En el ejemplo anterior vimos que si n es igual a 2, la viscosidad no influye, y la resistencia es de tipo hidráulico. Aunque no se trata de casos enteramente iguales, podemos inferir de ese dato que el efecto de la viscosidad, en nuestro problema, es pequeño con relación al del peso. Si despreciamos ese efecto, se cumplirá la ley de Froude, y se tendrá, con $g_0 = 1$:

$$\nu_0 = \lambda^{1/2} \quad r_0 = \rho_0 \cdot \lambda^3 = \rho_0 \cdot D_0$$

si llamamos D al desplazamiento del barco.

En la práctica, aun cuando se admite el efecto de la viscosidad, se utiliza la escala de velocidades anterior, y se tiene en cuenta aquel efecto en la siguiente forma:

Se construye un modelo del barco a estudiar, y remolcándolo en un estanque de agua tranquila se registran las resistencias halladas a distintas velocidades, con lo que se construye una curva *A*.



Conocida el área de la superficie mojada del modelo, se calcula la resistencia debida a la viscosidad, con una fórmula del tipo

$$r_k = f_0 \cdot A \cdot V^n$$

cuyas constantes fueron deducidas por Froude de experimentos realizados con placas planas desplazadas en su propio plano. Registrando los valores de r_k se obtiene una segunda curva *B*; las diferencias de ordenadas entre estas dos curvas dan la parte de la resistencia del modelo debida a la perturbación superficial del líquido.

Esta sigue la ley de Froude; luego si multiplicamos los números de la escala horizontal por $\frac{1}{\lambda^{1/2}}$ y los de la vertical por $\frac{1}{\lambda^3}$ ten-

dremos que, en las nuevas escalas, la diferencia de ordenadas entre *A* y *B* nos da la parte de resistencia del barco debida a la perturbación superficial, a diferentes velocidades.

Se calcula por último la resistencia debida a la viscosidad en el barco, y sus valores correspondientes a distintas velocidades se toman a partir de la curva *B*, hacia abajo, *en las nuevas escalas*, obteniéndose una tercera curva *C*. Las diferencias de ordenadas entre esta curva y la *A* dan las resistencias totales del barco a distintas velocidades.

Si en el estanque de experimentación se utiliza agua dulce, para obtener las resistencias del barco en aguas saladas, se deberá multiplicar la escala vertical, *antes de construir la curva C*, por la re-

lación de las densidades: $\frac{\rho_p}{\rho_m} = 1,025$ aproximadamente.

Este procedimiento es corrientemente adoptado para la determinación de la resistencia de un barco mediante modelos, aunque, como ya dijimos, la hipótesis de que las velocidades homólogas siguen la ley de Froude es solo aproximada.

DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE UNA ESTRUCTURA. — La determinación de las propiedades dinámicas de una estructura por vía matemática, es un problema a menudo difícil y en algunos casos prácticamente imposible. Los casos elementales son fácilmente tratados por medio del análisis; pero a medida que la forma de la estructura se hace más compleja, y que aparecen cargas asimétricas, las dificultades del método teórico aumentan rápidamente.

No obstante son muchos los tipos de estructuras cuyo comportamiento bajo esfuerzos dinámicos debe ser investigado de antemano. Un puente constituido por una viga continua de varios tramos de desigual longitud, sometida a la acción de cargas móviles, que pueden ser en cierto grado oscilantes como las que trasmite una locomotora mal compensada, es un ejemplo de un problema de esa naturaleza, en el cual la solución teórica es difícil.

El método de los modelos permite hallar soluciones cuantitativas que pueden en ciertos casos ser suficientemente exactas.

Así por ejemplo si se desea prever el comportamiento de la estructura bajo la acción de fuerzas periódicas, la característica dinámica que se requiere determinar es la frecuencia natural de vibración de la estructura; de ella se podrá luego deducir la amplitud

de las vibraciones forzadas correspondientes a cada frecuencia de excitación, y en particular, la frecuencia y amplitud de resonancia.

En el problema interviene, por consiguiente, el coeficiente de amortiguación $2n$ (fuerza por unidad de masa y unidad de velocidad) de la estructura, cuyo valor depende de la fricción interna y externa, de la resistencia del aire, etc. Ahora bien, la experiencia indica que este coeficiente, para un gran número de estructuras, es bastante pequeño; para estructuras de edificios de tipo corriente, el decremento logarítmico (o sea, el logaritmo natural de la relación entre las amplitudes de dos oscilaciones consecutivas) suele estar comprendido entre 0,1 y 1. De aquí se deduce que las fuerzas amortiguadoras son muy pequeñas en comparación con las fuerzas elásticas. La teoría de los movimientos oscilatorios forzados permite demostrar que en tal caso, la frecuencia de excitación correspondiente al caso de resonancia, es prácticamente igual a la frecuencia natural del sistema vibrante, supuesto sin amortiguación; con el mayor de los valores asignados al decremento logarítmico, el error relativo sería apenas superior al dos por ciento. Se puede, por consiguiente, en gran número de casos, prescindir de la amortiguación, sin error sensible.

Pasemos ahora a determinar la forma de la función, comenzando por escoger las variables. Un análisis de algunos casos sencillos indica que la frecuencia depende de las propiedades elásticas del material, o sea de ε , y de la masa vibrante, o sea de l y ρ . La función será:

$$f(\omega, l, \varepsilon, \rho) = 0$$

Podrían figurar también como variables, las secciones de los elementos y los momentos de inercia; pero su inclusión es en rigor innecesaria, pues dada la forma de una estructura, esas variables dependen sólo de l , dimensión lineal adoptada como módulo.

La matriz de transformación respecto a un sistema $L-M-T$ es:

$$\begin{array}{c|cccc} & \omega & l & \varepsilon & \rho \\ \hline L & 0 & 1 & -1 & -3 \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 \\ T & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

La 1ª, 2ª y 4ª columnas dan un determinante no nulo; tomaremos como variables independientes ω , l y ρ . Habrá un solo núme-

ro π ; calculados sus exponentes en la forma corriente se tendrá:

$$\pi = \varepsilon \cdot \omega^{-2} \cdot l^{-2} \cdot \rho^{-1}$$

Si se desea construir un modelo de la estructura dada, se deberá respetar la siguiente relación entre las escalas:

$$\frac{\varepsilon_0}{\omega_0^2 \cdot l_0^2 \cdot \rho_0} = 1$$

y si el modelo se hace de igual material que el prototipo ($\varepsilon_0 = \rho_0 = 1$), resultará:

$$\omega^2 l^2 = 1 \quad \therefore \quad \omega = \frac{1}{l}$$

Para el funcionamiento del modelo se tendrán las siguientes escalas:

Para los tiempos

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \lambda$$

velocidades

$$v_0 = 1$$

aceleraciones

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda}$$

fuerzas

$$\varphi_0 = \mu \alpha = \rho_0 \lambda^3 \cdot \frac{1}{\lambda} = \rho_0 \cdot \lambda^2$$

trabajos, energías

$$T_0 = \rho_0 \cdot \lambda^3, \text{ etc.}$$

La medida de la frecuencia natural del modelo, se efectúa por lo común por uno de los dos procedimientos siguientes:

- a) Se somete el modelo a un esfuerzo o carga, que se suprime luego bruscamente, y se registra la oscilación subsiguiente por medio de un vibrógrafo registrador;

b) o bien, para el caso de estructuras más complicadas, se excita la vibración del modelo mediante un oscilador de masas rotatorias excéntricas; el número de revoluciones por segundo, de esas masas es la frecuencia excitadora. Si para cada frecuencia se anota como ordenada, la energía consumida por el motor del oscilador, se obtendrá una curva cuyo máximo será la potencia excitadora de resonancia; la frecuencia correspondiente será la frecuencia natural del modelo. Dividida ésta por la escala geométrica, se tendrá la frecuencia natural del prototipo. También puede determinarse la oscilación de resonancia mediante un deflectómetro.

En todo esto se supone, naturalmente, que la amortiguación del modelo es despreciable, al igual que la del prototipo.

Conocidas las fuerzas periódicas que actúan sobre el prototipo se podrá, comparando la frecuencia de ésta con la de las fuerzas dadas, determinar la amplitud de las vibraciones forzadas que se originan en la estructura y los esfuerzos máximos correspondientes.

Se puede aplicar esta clase de ensayos al estudio de la resistencia de las estructuras de edificios a los efectos destructivos de los terremotos. En muchas regiones del globo se han podido fijar límites al período de las oscilaciones sísmicas, que suele estar comprendido entre 1 seg. y 1,5 seg. La estructura será tanto más eficaz contra esta clase de efectos, cuanto más se aparte de estos valores el período de su vibración natural.

RESISTENCIA DE UN BARCO A UNA EXPLOSIÓN EXTERIOR. — Pertenece a Buckingham la idea de aplicar la teoría de los modelos a la investigación del efecto que causa en el casco de un barco una explosión exterior, problema que, por cierto, es de triste actualidad.

Ante todo el modelo debe guardar con el prototipo una relación de semejanza geométrica rigurosa, que no se limita al barco mismo, sino que se extiende a la forma y tamaño de la carga explosiva y su recipiente, y para explosiones bajo agua, a la profundidad de inmersión. Además, como la resistencia mecánica de las partes de la estructura afectadas por la explosión es un factor preponderante, es preciso que la resistencia de las partes correspondientes guarde estrictamente la correcta relación.

La deformación de la estructura dependerá, no sólo de un parámetro lineal l adoptado como módulo, sino también de la resistencia a la tracción R y de la densidad ρ del material de la estructura,

de la masa M y el tiempo t de deflagración de la carga explosiva; de la densidad δ y módulo de compresibilidad ε del medio (agua). La presión hidrostática puede ser despreciable si la profundidad de inmersión es pequeña.

La función será:

$$f(l, R, \rho, M, t, \delta, \varepsilon) = 0$$

Hay cuatro números π , que se hallan por el procedimiento corriente; la función puede escribirse en la forma:

$$f\left(\frac{\rho}{\delta}, \frac{R}{\varepsilon}, \frac{M}{l^3 \delta}, \frac{R t^2}{l^2 \delta}\right) = 0$$

Las condiciones de escala serán:

$$\rho_0 = \delta_0 \quad R_0 = \varepsilon_0 \quad \mu = \lambda^3 \cdot \delta_0 \quad R_0 \tau^2 = \lambda^2 \cdot \delta_0$$

Si el modelo se construye del mismo material que el prototipo, y se usa agua en él, las dos primeras condiciones se cumplen. Si se emplea el mismo explosivo, y se toman precauciones para que el grado de compacidad de la carga, o sea su densidad, sea el mismo, también se cumple la tercera. En cuanto a la cuarta se puede escribir

$$\frac{\tau^2}{\lambda^2} = \frac{\delta_0}{R_0} = 1 \quad \therefore \quad \tau = \lambda$$

lo que significa que la duración de la deflagración debe disminuir en igual proporción que las dimensiones lineales. Los estudios practicados parecen indicar que esta condición está subordinada a la clase de detonador empleado. De todos modos, cuando se cumpla la condición $\tau = \lambda$, las deformaciones producidas por la explosión en el modelo permitirán calcular las que deben esperarse en el prototipo.

EXPERIMENTOS SOBRE MODELOS DE LECHOS MÓVILES. — El ingeniero inglés Jack Allen publicó hace cuatro años en la revista británica «Dock and Harbour Authority», una descripción de los ensayos efectuados sobre modelos para estudiar la causa y condiciones de los aterramientos observados en el estuario del Río Dee, así como la influencia que podía esperarse de ciertas obras proyectadas para eliminarlos o corregirlos.

Se construyó para el caso un primer modelo del estuario en que las distancias horizontales estaban representadas a la escala 1/5000. Debido a la gran diferencia de valor entre las distancias horizontales y las profundidades, la reproducción de estas últimas en el modelo a igual escala que aquéllas se hacía difícil, y la apreciación de cualquier efecto que comportara la medida de una profundidad habría estado sujeta a un fuerte error. Por esta razón se resolvió, como es de práctica en tales casos, sacrificar la semejanza geométrica adoptando para las profundidades una escala mucho mayor, —1/200—, que la horizontal.

En el problema en examen era necesario reproducir los movimientos de la marea y la corriente del Río Dee. Ahora bien, la altura de la onda de marea en un punto dado del estuario depende de la profundidad h en ese punto, de la velocidad de traslación de la onda, de la distancia l medida a partir de un punto exterior, y del tiempo t medido a partir del instante de la pleamar en dicho punto. Llamando y la altura de la onda, y tomando como variable a determinar la relación y/h , se tendrá la función:

$$f(y/h, l, v, t) = 0$$

Obsérvese que las magnitudes son todas de naturaleza geométrica o cinemática, de modo que se puede tomar como sistema fundamental el L - T , por ejemplo. La matriz será:

$$\begin{array}{c} y/h \quad l \quad v \quad t \\ \begin{array}{c} L \\ T \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

se ve que es de rango 2. Los dos números π son evidentemente:

$$\pi_1 = y/h \quad \pi_2 = v \cdot t/l$$

Del segundo sacamos la relación de escalas:

$$\lambda = v_0 \cdot \tau$$

Pero la velocidad de traslación de una onda de frente grande con relación a la profundidad es proporcional a la raíz cuadrada de ésta. Luego si $v = k\sqrt{h}$:

$$v_0 = h_0^{1/2} \text{ resulta. } \lambda = h_0^{1/2} \cdot \tau$$

Esta relación permite determinar el período de la onda de marea en el modelo, dado el período de la onda natural. Este es de 12,4 horas, o sea 44640 segundos; el del modelo será:

$$t_m = t_p \cdot \tau = 44640 \cdot \lambda \cdot h_0^{-1/2} = 44640 \frac{\sqrt{200}}{5000} = 126,8 \text{ seg.}$$

Para las escalas restantes se tiene:

$$\alpha_0 = \nu_0 \cdot \tau^{-1} = h_0 \cdot \lambda^{-1} \quad \left(= \frac{5000}{200} = 25 \right)$$

$$\varphi_0 = \varphi_0 \cdot \lambda^2 \cdot h_0 \cdot h_0 \lambda^{-1} = h_0^2 \cdot \lambda \quad \left(= \frac{1}{40.000.500} = 2 \cdot 10^{-8} \right)$$

$$Q_0 = \nu_0 \cdot \lambda \cdot h_0 = \lambda h_0^{3/2} \quad \left(= \frac{1}{5.000.200 \sqrt{200}} = \frac{1}{14.200.000} \right); \text{etc.}$$

Por medio de esta última escala se pudo regular el caudal vertido por el río del modelo, de manera que correspondiera a cualquier caudal del Río Dee comprendido entre cero y la máxima creciente registrada en dicho río.

La escala de los tiempos era tal que permitía reproducir todas las mareas de un año en 24 horas de funcionamiento. La onda de marea era producida en el modelo expulsando el agua de un tanque contiguo por medio de un pistón sumergible, conectado a un mecanismo cuya velocidad era controlada con toda exactitud. El aparato permitió reproducir automáticamente, sin error sensible, no sólo la onda diurna con sus disimetrías locales, sino también las variaciones de amplitud de las mareas de sicigias a las de cuadraturas.

Un segundo modelo, construido a escalas 1/40000 y 1/400, permitía obtener más rápidamente, en un ensayo previo, una indicación general de los fenómenos que podían esperarse luego en el modelo mayor.

Representando en estos modelos las obras a construir o a modificar, fué posible obtener muy útiles indicaciones sobre los resultados que podían esperarse de las obras proyectadas.

El problema que acabamos de tratar nos sugiere dos comentarios con los que terminaremos esta exposición.

Uno de ellos se refiere a la posibilidad de aplicar el principio de semejanza al movimiento de una corriente que transporta materia-

les, ya sea en suspensión o por arrastre. El problema, teóricamente posible, es en este caso muy complicado. A las variables que intervienen en el movimiento del fluido se agregan ahora las que caracterizan el material, como el volumen, la densidad y la forma de las partículas, la velocidad de caída y el espesor del lecho. Como el tamaño individual de las partículas varía entre límites muy distantes para cada material es necesario recurrir a parámetros representativos de cada tipo de sedimento. Estos parámetros son el diámetro medio geométrico y la desviación característica, y se deducen de operaciones geométricas sobre los diagramas representativos de la composición del material dado.

Parece ser que, en el estado presente de estas investigaciones, sólo pueden esperarse resultados cualitativos de los ensayos sobre modelos de esta naturaleza.

El otro comentario se refiere a la distorsión de modelos, o sea al empleo de distintas escalas para una misma magnitud fundamental en un mismo modelo. La más frecuente es la distorsión geométrica, de la cual es un ejemplo el modelo del estuario del Dee; si bien pueden presentarse casos de distorsión en la escala de las masas, de los tiempos, etc.

La distorsión geométrica puede obedecer, como en el caso del estuario del Dee, al propósito de facilitar la construcción del modelo, y la medición de las profundidades sin error sensible; y puede también tender a evitar los fenómenos de frotamiento y de tensión superficial, que adquirirían importancia preponderante en los bordes de la masa líquida, si ésta tuviera muy poco espesor.

Otras veces la distorsión geométrica es consecuencia de dificultades de construcción del modelo. Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de un líquido con intervención del frotamiento contra las paredes de un canal o conducto, suele ser muy difícil obtener en el modelo la misma rugosidad relativa que en el prototipo. La escala para las irregularidades de la superficie resulta en general distinta de la que ha servido para determinar las restantes dimensiones del modelo.

Otro ejemplo de distorsión, impuesta por circunstancias especiales, se presenta en los ensayos sobre modelos de lechos móviles, en los cuales resulta a menudo imposible reducir a la escala geométrica del modelo las dimensiones de las partículas del material del lecho. En efecto, si se emplearan partículas muy finas, como correspondería según la escala de reducción geométrica, se presentarían fenómenos de suspensión, o de floculación, que no se producen en el

prototipo; no existiría entonces la analogía entre los fenómenos del modelo y del prototipo, necesaria para la semejanza. Se emplea, por esa causa, un material más grueso, lo que equivale a una verdadera distorsión del modelo, la cual a su vez es causa de otra, porque para reproducir en el modelo los fenómenos de arrastre que se observan en el prototipo, hay que aumentar las pendientes y las profundidades, a fin de obtener las velocidades necesarias para el arrastre de un material proporcionalmente más grueso.

Un caso interesante de distorsión geométrica, que obedece también al propósito de obtener en el modelo fenómenos de igual naturaleza que en el prototipo, suele presentarse en el estudio experimental de un curso de agua.

Supongamos que se trata de reproducir en un modelo las características de una corriente de régimen turbulento. Será preciso, de acuerdo con lo ya dicho, hacer de modo que el régimen en el modelo sea también turbulento. Es lógico suponer, que en los estados de turbulencia, que se caracterizan por una gran agitación hidráulica, el peso del líquido sea un factor preponderante, en tanto que la viscosidad tiene escasa influencia. Resulta, pues, razonable, ajustar las escalas de reducción de acuerdo con las relaciones deducidas de la constancia del número de Froude.

A un régimen turbulento corresponden, en general, valores de la velocidad muy grandes en relación con los de la viscosidad; para un conducto de dimensiones dadas, esto significa que el número de Reynolds alcanzará valores elevados. Un régimen laminar se distingue, en cambio, por valores muy bajos de ese parámetro. Por vía experimental se ha podido determinar que, en un gran número de casos, el valor crítico que separa ambos regímenes es aproximadamente:

$$(NR) = 2100$$

Observemos ahora que, si en el estudio del movimiento se prescinde de la viscosidad, el número de Reynolds no intervendrá en la función que rige el fenómeno; no será por tanto un invariante dimensional respecto a dicha función, y tendrá entonces distinto valor en el prototipo y en el modelo. Podremos determinar por consiguiente para el número de Reynolds, lo mismo que para cualquier otra magnitud, una escala de reducción, que para el caso será: (con $k_0 = \rho_0 = 1$):

$$(NR)_0 = \frac{(NR)_m}{(NR)_p} = \frac{V_m \cdot l_m}{V_p \cdot l_p} = \nu_0 \lambda$$

Ahora bien, como las escalas para nuestro modelo han sido fijadas de acuerdo con la ley de Froude, se tendrá:

$$\nu_0 = \lambda^{1/2}$$

de donde:

$$(NR)_0 = \lambda^{3/2}$$

Se ve que si la escala de reducción es muy pequeña, a un número de Reynolds muy grande en el prototipo (régimen turbulento) puede corresponder un número de Reynolds pequeño —inferior al valor crítico antes citado—, en el modelo, de donde se sigue que el régimen en éste será laminar. Esto sucederá toda vez que la escala de reducción satisfaga la condición:

$$\lambda < \sqrt[3]{\left[\frac{2100}{(NR)_p} \right]^2}$$

Esta dificultad se evita mediante una distorsión del modelo. Comencemos por recordar que, en una sección dada del curso de agua, la velocidad varía en razón directa de la raíz cuadrada del radio medio, y que éste, a su vez, crece con la profundidad, —a igualdad de los restantes factores. Por consiguiente, si hacemos que las profundidades en el modelo sean proporcionalmente mayores que en el prototipo, adoptando para ellas una escala $h_0 > \lambda$, obtendremos para los radios medios una escala también mayor que λ . De aquí resultará:

$$\nu_0 > \lambda^{1/2} \quad \text{y} \quad (NR)_0 > \lambda^{3/2}$$

Se comprende, pues, que es posible, aumentando las profundidades en el modelo, mantener el valor de (NR) en éste, por encima del valor crítico, permitiendo obtener un régimen turbulento, al igual del prototipo.

De esta manera queda restablecida, la analogía entre los fenómenos del prototipo y del modelo, aunque con sacrificio de la semejanza geométrica, y con ella, de la dinámica, por lo cual los resultados del ensayo no pueden ofrecer más que indicaciones cualitativas.

Como medio de agregar a éstas alguna información cuantitativa, se podría tal vez recurrir al expediente de realizar ensayos sobre varios modelos, cada uno con una distinta distorsión, y luego extrapolar los resultados numéricos obtenidos hasta el caso de distorsión nula.

BIBLIOGRAFIA

- HILL, WALTER S. — *Teoría de las magnitudes físicas.*
- JOPPÉRT DA SILVA, M. — *Analyse Dimensional e Semelhança Mecânica.*
- ROUSE, HUNTER. — *Fluid Mechanics.*
- LEVI-CIVITA E AMALDI. — *Lezioni di Meccanica Razionale.*
- BERTRAND, M. J. — *Note sur la similitude en mécanique.* (*Journ. Ecole Politech.* 1848).
- GROAT, B. F. — *Theory of Similarity and Models.* (*Proceedings A. S. C. E.*, Oct. 1930).
- GIBSON, A. H. — *The Principle of Dynamical Similarity.* (*Engineering*, 1924).
- BERNHARD, R. K. — *Dynamic Properties of Structures Determined by Models.* (*Mechanical Engineering*, Oct. 1937).
- ALLEN, JACK. — *Schemes of Improvement for the Cheshire Dee.* (*Dock and Harbour Authority*, Nov.-Dec. 1939).
- ROUSE, HUNTER. — *Criteria for Similarity in the Transportation of Sediment.* (*University of Iowa, Bull.* n° 20).

REFERENCES

1. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1001-1004.
2. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1005-1008.
3. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1009-1012.
4. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1013-1016.
5. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1017-1020.
6. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1021-1024.
7. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1025-1028.
8. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1029-1032.
9. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1033-1036.
10. J. H. Van Vleet, "The Role of the Veterinary Clinician in the Control of Infectious Diseases," *Journal of the American Veterinary Association*, 1967, 142, 1037-1040.

SUMARIO

	Pág.
I - Introducción	7
II - Transformación de unidades	8
III - El teorema de Buckingham	23
IV - Semejanza mecánica	33
Cuadro de escalas de reducción	47
V - Aplicaciones	51
a) Resistencia al movimiento de cuerpos sumergidos	51
b) Determinación de las características dinámicas de una estructura... .	57
c) Resistencia de un barco a una explosión exterior	60
d) Experimentos sobre modelos de lechos móviles	61
— Bibliografía	67

Publicaciones de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas a partir de enero de 1939

SERIE PRIMERA. — Informaciones generales.

1. Anuario 1938-39, mayo 1939	(Nº 120)	\$ 1.50
2. Inauguración de la ampliación del laboratorio de Ensayo de materiales, agosto de 1939	(Nº 124)	—
3. Laboratorio de ensayo de materiales, agosto de 1940	(Nº 131)	—
4. Escuela del Motor	(Nº 132)	—
5. Elección de autoridades y acto de transmisión del decanato	(Nº 135)	—
6. Anuario 1941.	(Nº 145)	\$ 2.00
7. Entrega de publicaciones en acto público por el señor Embajador de Gran Bretaña, Sir Esmond Ovey, el día 6 de octubre de 1941	(Nº 148)	—
8. Digesto 1941	(Nº 149)	\$ 2.00
9. Disposiciones de interés para los estudiantes, 1942	(Nº 153)	\$ 1.00
10. Anuario 1942 . . .	(Nº 156)	\$ 2.00
11. Planes de Estudio	(Nº 160)	\$ 0.30
12. Departamento de Mecánica	(Nº 163)	\$ 2.00
13. Instituto de aeronáutica	(Nº 164)	—
14. Programas de examen, 1943	(Nº 165)	\$ 1.50
15. Programas de ingreso	(Nº 170)	\$ 1.00

SERIE SEGUNDA. — Revista.

1. Trabajos de los ingenieros M. Simonoff y E. A. Arnaboldi. Mayo de 1939	(Nº 121)	\$ 2.40
2. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, J. Pláceres, F. Charola, R. F. Recorder, R. P. Cesco y A. E. Sagastume Berra. Enero de 1940	(Nº 127)	\$ 2.40
3. Trabajos del doctor P. Montel y de los ingenieros J. S. Gandolfo y M. Simonoff. Abril de 1940	(Nº 128)	\$ 2.40
4. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia y G. Knie y de los ingenieros J. S. Gandolfo y A. Dorfman. Octubre de 1940	(Nº 136)	\$ 2.00
5. Trabajos de los ingenieros A. Gray y R. Martínez de Vedia y del doctor E. Sabato. Diciembre de 1940	(Nº 139)	\$ 3.00
6. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, R. Carratalá, D. Vucetich, B. Gross, G. García e ingeniero E. Dickmann. Abril de 1941	(Nº 143)	\$ 3.00
7. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia, A. E. Sagastume Berra y R. P. Cesco y de los ingenieros E. A. Arnaboldi y F. F. Langmann, Diciembre de 1941	(Nº 150)	\$ 3.00
7. Trabajos del doctor A. E. Sagastume Berra, y de los ingenieros A. Escudero y E. A. Arnaboldi, R. Martínez de Vedia y A. Dorfman	(Nº 161)	\$ 4.00
8. Trabajos de los doctores R. J. Ambrosis, F. Vierheller, Antero Bueno, A. E. Sagastume Berra y E. Castellano, y del ingeniero F. F. Langmann. — Bibliografía	(Nº 168)	\$ 4.00

SERIE TERCERA. — Publicaciones Especiales.

*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua. Cuaderno Nº 4, por el ingeniero E. Artaza. Junio de 1939 . . .	(Nº 122)	\$ 3.80
1. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1938), julio 1939	(Nº 123)	—
*. Tercera Reunión Anual de Caminos. Conferencias de los ingenieros T. Sánchez de Bustamante, V. Carri, J. Zuker, A. P. Grisi, A. Kashirski, C. K. Preus, N. Alurralde, M. Fornari, E. Arenas, J. Boiso y doctor A. Zanetta. Septiembre 1939	(Nº 125)	\$ 16.00
2. Estudio de la evolución fluvial que determina el endicamiento del río San Juan, por el ingeniero J. S. Gandolfo. Enero 1940	(Nº 126)	\$ 4.00
3. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1939), abril 1940	(Nº 129)	—
*. Física General, Tomo IV, segunda edición, por el doctor R. G. Loyarte	(Nº 130)	\$ 20.00
4. Lista de Publicaciones. Agosto 1940	(Nº 133)	—

*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 5. Septiembre 1940....	(N° 134)	\$ 5.00
5. Cuarta Reunión Anual de Caminos (I). Discurso inaugural del doctor H. Magliano. Conferencias de los ingenieros A. Lodeiro Blanco, A. J. L. Bolognesi, A. M. Podestá, E. F. Tagle, V. Carri y J. L. Carattino.....	(N° 137)	\$ 5.00
6. Cuarta Reunión Anual de Caminos (II), Conferencias de los ingenieros P. Palazzo, E. Arenas y A. Kashirski	(N° 138)	\$ 5.00
7. Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado, por el ingeniero J. Zuker	(N° 140)	\$ 6.00
8. Saneamiento urbano en la República Argentina, Tercera parte. Obra domiciliaria. Tomo I, por el ingeniero E. Artaza. Abril de 1941	(N° 141)	\$ 20.00
9. Física general. Tomo I, cuarta edición, por el doctor R. G. Loyarte. Abril de 1941	(N° 142)	\$ 15.00
10. La viga placa, por J. J. Montú	(N° 144)	\$ 4.00
11. Determinaciones de detonancia de combustibles y carburantes	(N° 146)	\$ 3.00
12. La Anisotropía óptica por deformación elástica de los medios transparentes y su aplicación a la Fotoelasticimetría, por el ingeniero R. Buich	(N° 147)	\$ 8.00
13. Sistemas hiperestáticos planos, por el ingeniero F. De Medina	(N° 151)	\$ 5.00
14. Vigas de hormigón armado con armadura doble simétrica sometidas a flexión compuesta, por el ingeniero J. R. Castiñeiras	(N° 152)	\$ 1.00
15. Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, por el ingeniero M. Simonoff	(N° 154)	\$ 25.00
16. El proyecto económico de estructuras de hormigón armado, por el ingeniero J. R. Castiñeiras	(N° 155)	\$ 5.00
17. Física general. Tomo II, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte	(N° 157)	\$ 15.00
18. Tablas para vigas con chanchales rectos y parabólicos, para facilitar la resolución de sistemas hiperestáticos, por los ingenieros G. A. Rabuffetti y E. A. Arnaboldi	(N° 158)	\$ 2.00
19. Quinta Reunión Anual de Caminos. Discurso inaugural del ingeniero J. R. Castiñeiras. Conferencias de los doctores C. L. Ruiz y E. Petroni, agrimensor L. de Carli, ingenieros A. P. Grisi, J. Zuker, A. M. Podestá, E. F. Tagle, E. Arenas, A. Kashirski, M. A. Fornari, ingeniero agrónomo A. Arena e ingeniero J. J. Font	(N° 159)	\$ 10.00
20. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 6. Febrero 1943 ..	(N° 162)	\$ 15.00
21. Física general. Tomo III - Calor, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte	(N° 166)	\$ 15.00
22. Electricidad. — I. Electricidad y magnetismo. — II. Electricidad corpuscular, por el ingeniero M. Simonoff	(N° 167)	\$ 18.00
23. Saneamiento urbano en la República Argentina. Segunda parte. Desagües urbanos por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 1. Noviembre 1943 ..	(N° 169)	\$ 4.00
24. Semejanza Mecánica, por el ingeniero C. Berta	(N° 171)	\$ 4.00

Se enviará sin cargo, a quien lo solicite, la publicación n° 133 titulada «Lista de Publicaciones», y que contiene la nómina completa de las ediciones de la Facultad.

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Las publicaciones oficiales de la Facultad se dividen en las tres series siguientes:

SERIE PRIMERA.—*Informaciones generales*

Esta serie comprende:

- a) el *Anuario*, que se publicará cada dos años, con informaciones relativas a las leyes, decretos, ordenanzas del Consejo superior que afecten a la Facultad y las del Consejo académico de la misma y resoluciones del decano de interés general, organización general de la Facultad, carreras que se cursan en ella, planes de estudio, programas de las materias, autoridades y personal docente, etc.
- b) Informaciones sobre la organización y evolución de sus institutos, departamentos, laboratorios, gabinetes, etc.
- c) Ampliaciones de sus edificios, publicando planos, fotografías, presupuestos, partidas acordadas en el presupuesto nacional, donaciones, etc.
- d) Movimiento del personal docente y datos sobre el mismo, visitas realizadas por personas destacadas, etc.
- e) Informes sobre elecciones de autoridades y asambleas de profesores. Discursos académicos.
- f) Noticias sintéticas de carácter general sobre actos de facultades similares nacionales y extranjeras.

SERIE SEGUNDA.—*Revista*

Esta serie, que es continuación de las series matemática, física y técnica, publicadas hasta el 31 de diciembre de 1938, con el título principal de *Contribución al estudio de las Ciencias físicas y matemáticas*, contiene:

- a) Trabajos y conferencias de índole técnico-científica de los miembros del personal docente de la Facultad y de personas extrañas al mismo que el Consejo académico o la Comisión de publicaciones resuelva publicar agrupados en concordancia con la organización general de la Facultad.
- b) Noticias de igual índole y bibliográficas de interés para la Facultad.

SERIE TERCERA.—*Publicaciones especiales*

Esta serie comprende:

- a) Publicaciones especiales.
- b) Textos generales.
- c) Publicaciones didácticas.

Las publicaciones llevarán una numeración general siguiendo la de las anteriores de la Facultad por orden cronológico, de acuerdo con la fecha en que se termine la impresión.

Además, cada serie llevará en el mismo orden la numeración especial que le corresponda. Esta numeración se inicia en el año 1939.

En todos los originales y publicaciones respectivas correspondientes a la segunda serie se hará constar la fecha de entrega a la Comisión para ser impresos.

ADVERTENCIA

Con el fin de evitar extravíos en la correspondencia, rogamos que se nos hagan los envíos a la siguiente dirección:

Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas

Comisión de publicaciones

Av. 1 esq. 47.— LA PLATA
República Argentina

