

**RESÚMENES, DIAPOSITIVAS Y
OTROS DOCUMENTOS
DE COMUNICACIONES EN
ENCUENTROS CIENTÍFICOS I**

Recopilación 1995 - 2012

Eleonora Catsigeras

**Instituto de Matemática y Estadística
“Prof. Ing. Rafael Laguardia” (IMERL)
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República**

<http://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/Conferencias/>

ÍNDICE

(Esta recopilación no es completa)

Autores	Título de la comunicación / Evento	Año	
CATSIGERAS, E; CERMINARA, M.; ENRICH, H	<i>Pesin Formula for C^1 Diffeomorphisms with Dominated Splitting. Talk in the 32° EDAI , Rio de Janeiro, Brasil, julio 2012.</i>	2012	1
CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Pesin's Entropy Formula for C^1 Expanding Maps of the Circle. Talk in XXV Jornadas Venezolanas de Matemática , Cumaná, Venezuela, 26 al 29 de marzo 2012.</i>	2012	2
CATSIGERAS, E; GUIRAUD, P.; MEYRONEINC, A; UGALDE, E	<i>Sobre los conjuntos límites de los mapas contractivos a trozos. Resumen de la comunicación en las XXIV Jornadas Venezolanas de Matemáticas, Barquisimeto Venezuela, 12 al 15 de abril de 2011.</i>	2011	3
CATSIGERAS, E; SHANNON, M	<i>Synchronized dynamics of on-off oscillators with instantaneous coupling interactions - Communication submitted and published in the Book of Abstracts of the XII LAWNP- San Luis de Potosi, Mexico, 2011</i>	2011	4
CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Observable measures. Talk in the International Conference on Dynamical Systems Celebrating the 70th. Anniversary of Jacob Palis, Buzios, RJ Brazil, February 25th. to March 5th, 2010</i>	2010	5
CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Observable asymptotic probabilities on deterministic dynamical systems . Talk in the VIII Escuela de Invierno de Análisis Estocástico y Aplicaciones, Valparaíso, Chile, 19 al 23 de julio de 2010.</i>	2010	6
CATSIGERAS, E; CERMINARA, M.; ENRICH, H	<i>Simultaneous Continuation of Infinitely Many Sinks Near a Quadratic Homoclinic Tangency. Short communication in the III Congreso Latinoamericano de Matemáticos ,Santiago de Chile, Agosto 31 a Septiembre 4, 2009</i>	2009	7

CATSIGERAS, E	<i>Biological Neuronal Networks as Deterministic Dynamical Systems. - Abstract and slides of the talk in "VI Escuela de Invierno de Análisis y Aplicaciones", Valparaíso, Chile, 21 al 25 de julio de 2008</i>	2008	8
CATSIGERAS, E	<i>Biological Neuronal Networks as Deterministic Dynamical Systems - Abstract in the XVI Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics , Punta del Este, Uruguay, December 1st. to 5th., 2008</i>	2008	9
CATSIGERAS, E	<i>Dinámica finito-dimensional discontinua que modela redes neuronales. Propuesta de Tesis de Maestría. Resumen de la presentación en I Jornada de Ingeniería Matemática. I INGEMAT , Montevideo, Uruguay, 22 de diciembre de 2008</i>	2008	10
CATSIGERAS, E;	<i>Mathematical models of Spikes Codes as deterministic Self-Adapting Dynamical Systems. Abstract and slides of the talk in the 7th. International Neural Coding Workshop , with a session in honour of Prof. José Segundo, Montevideo, Uruguay, November 7-12, 2007</i>	2007	11
CATSIGERAS, E	<i>Dinámicas de mapas continuos a trozos y localmente contractivos que modelan redes neuronales. Comunicación presentada en el 1er. Coloquio Uruguayo de Matemática, Montevideo , Uruguay, 19 al 21 de diciembre de 2007</i>	2007	12
CATSIGERAS, E CURIONE, K. MÍGUEZ, M.	<i>El aprendizaje significativo del Cálculo en Facultad de Ingeniería- Presentación en II Foro de Innovaciones Educativas y 1er. Encuentro Regional sobre Tecnologías de la Información y Comunicación, Montevideo , Uruguay, 25 y 26 de abril de 2007</i>	2007	13
CATSIGERAS, E; CURIONE, K; MÍGUEZ, M	<i>Un enfoque constructivista en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad Comunicación presentada en las XII Jornadas Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática, Albacete , España, julio 2005</i>	2005	14
CATSIGERAS, E; ROVELLA, A; BUDELLI, R	<i>Contractive piecewise continuous maps modelling networks of inhibitory neurons. Abstract and slides of the talk in the 9th. Tamagawa Dynamic Brain Forum , Auckland , New Zealand, November 7th. to 9th., 2005</i>	2005	15
CATSIGERAS, E	<i>Cursillo intensivo de Elementos de la Teoría Ergódica preliminar a la XIV Escuela Latinoamericana de Matemática, Balneario Solís, Uruguay, 2005</i>	2005	16

CATSIGERAS, E	<i>Micro-experiencia de enseñanza en Cálculo - Comunicación presentada en el II Congreso de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería, Udelar, Montevideo, Uruguay, 6 al 8 de octubre de 2004</i>	2004	17
CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>SRB measures and ergodicity of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency. Abstract and slides of the talk in the International Conference on Dynamical Systems dedicated to the 60th. Anniversary of Jacob Palis, Rio de Janeiro, Brasil, July 19-28th., 2000</i>	2000	18
CATSIGERAS, E	<i>La Teoría Matemática del Caos Determinista. Artículo de la comunicación presentada en la Mesa Interdisciplinaria del XIV Congreso Latinoamericano de Psicoterapia , Montevideo , Uruguay, octubre 2000</i>	2000	19
CATSIGERAS, E	<i>Homoclinic tangencies near cascades of period doubling. Abstract and slides of the talk in the International Workshop on Dynamical Systems, Trieste, Italy, May 22th. to June 2nd., 1995</i>	1995	20
CATSIGERAS, E	<i>Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación. - Comunicación presentada en la Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos Piriápolis , Uruguay, 23 al 25 de mayo de 1996</i>	1996	21
CATSIGERAS, E.	<i>Persistência do atrator de Feigenbaum em famílias a um parâmetro- Resumo e transparências das palestras na Conferência e Seminário de Sistemas Dinâmicos e Mecânica dos Meios Contínuos, Porto e Lisboa, Portugal, 14-16 julho, 1997</i>	1997	22



1

CATSIGERAS, E; CERMINARA, M.; ENRICH, H	<i>Pesin Formula for C^1 Diffeomorphisms with Dominated Splitting. Talk in the 32° EDAI , Rio de Janeiro, Brasil, julio 2012.</i>	2012	1
---	--	------	---

Pesins Formula for C^1 diffeomorphisms with Dominated Splitting

E. Catsigeras, M. Cerminara and H. Enrich *

July 6th., 2012.

Talk in the 32o. EDAÍ, Rio de Janeiro, Julio 2012

Abstract

We consider C^1 diffeomorphisms with dominated splitting $E \oplus F$ that are topologically expansive and preserve no measure absolutely continuous with respect to Lebesgue. We characterize a never empty set of invariant probabilities (the SRB-like measures), by means of a quasi-physical property, for which the metric entropy is bounded from below by the integral of the sum of the Lyapounov exponents of $df|_F$. Joining this result with Ruelles inequality, we conclude that if all the positive Lyapunov exponents are included in those of $df|_F$, and these latter are all non negative, then any SRB-like measure satisfies the Pesins formula of the entropy.

*The three authors: Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. E-mail: eleonora@fing.edu.uy.



www.mat.puc-rio.br/edai

32º EDAÍ 6 de julho de 2012

Sala L856, Depto. de Matemática, Edifício Cardeal Leme, PUC–Rio.

Matinê: 14h30 – 15h30

Thue-Morse dynamical system

Christian Mauduit (Institut de Mathématiques de Luminy)

We give an introduction to symbolic dynamical systems by exploring the paradigmatic example of the Thue-Morse sequence, introduced by several mathematicians in different contexts since the 19th century, and defined as the limit in $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ of the sequence of finite words $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ defined by the recursion $T_0 = 0$, $T'_0 = 1$ and $T_{k+1} = T_k T'_k$, $T'_{k+1} = T'_k T_k$ for any non negative integer k .

References:

- M. Queffelec, Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis, Lecture Notes in Mathematics 1294, Springer.
- N. Pytheas Fogg, Substitutions in Dynamics, Arithmetics, and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics 1794, Springer.

Palestra 1: 15h45 – 16h45

Pesin's Formula for C^1 diffeomorphisms with Dominated Splitting

Eleonora Catsigeras (Universidad de la República)

We consider C^1 diffeomorphisms with dominated splitting $E \oplus F$ that are topologically expansive and preserve no measure absolutely continuous with respect to Lebesgue. We characterize a never empty set of invariant probabilities (the SRB-like measures), by means of a quasi-physical property, for which the metric entropy is bounded from below by the integral of the sum of the Lyapounov exponents of $df|_F$. Joining this result with Ruelle's inequality, we conclude that if all the positive Lyapunov exponents are included in those of $df|_F$, and these latter are all non negative, then any SRB-like measure satisfies the Pesin's formula of the entropy.

This is a joint work with M. Cerminara and H. Enrich.

Café: 16h45 – 17h15

Palestra 2: 17h15 – 18h15

Sobre expansividade (positiva) e medidas expansivas

Alexander Arbieto (UFRJ)

Apresentaremos consequências da expansividade (positiva). Também introduziremos o conceito de medidas expansivas e apresentaremos algumas consequências deste conceito.

Esta última parte é um trabalho em conjunto com Carlos Morales.

Confraternização: 19h00 – ∞

Garota da Gávea



Para receber informações sobre e divulgar eventos de Sistemas Dinâmicos na região fluminense, inscreva-se no mailinglist:
<http://groups.google.com/group/DinamiCarioca>



Pesin's Formula for C^1 Diffeomorphisms with dominated splitting

Eleonora Catsigeras, Marcelo Cerminara and Heber Enrich

Instituto de Matemática - Universidad de la República - Uruguay

eleonora@fing.edu.uy, cerminar@fing.edu.uy, enrich@fing.edu.uy

Seminario EDAI, Río de Janeiro, 6 de Julio de 2012

$f \in \text{Diff}^1(M) \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_f$ for μ -a.e. $x \in M$ the Lyapunov exponents are denoted by

$$\chi_1(x) \geq \chi_2(x) \geq \dots \geq \chi_{\dim M}(x), \quad \chi_i^+(x) := \max\{\chi_i(x), 0\}$$

Ruelle's Inequality:

$$h_\mu \leq \int \sum_{i=1}^{\dim M} \chi_i^+ d\mu.$$

Definition

$\mu \in PF$ (μ satisfies Pesin's Formula of the Entropy) if

$$h_\mu = \int \sum_{i=1}^{\dim M} \chi_i^+ d\mu.$$

m Lebesgue measure on M

m^u Lebesgue measure along unstable manifolds.

- For $\text{Diff}^{1+\alpha}(M)$

Pesin $\mu \in \mathcal{P}_f$ hyperbolic, $\mu \ll m \Rightarrow \mu^u \ll m^u \Rightarrow \mu \in PF$.

Ledrappier-Young: $\mu \in PF \Rightarrow \mu^u \ll m^u$.

Pugh-Shub: μ ergodic, hyperbolic and $\mu^u \ll m^u \Rightarrow \mu$ is SRB (namely, physical) $\Rightarrow \mu$ describes the asymptotic statistics of a Lebesgue-positive set of orbits.

- **General purpose:** Reformulate the results about measures $\mu \in PF$ for

$$f \in \text{Diff}^1(M).$$

Search for the relations between:

- SRB or physical measures or “SRB-like” measures **statistically** describing the asymptotic behavior **of Lebesgue-a.e.**
- Invariant measures μ that satisfy **Pesin’s Formula of the entropy** ($\mu \in PS$).

- For $\text{Diff}^{1+\alpha}(M)$

Pesin $\mu \in \mathcal{P}_f$ hyperbolic, $\mu \ll m \Rightarrow \mu^u \ll m^u \Rightarrow \mu \in PF$.

Ledrappier-Young: $\mu \in PF \Rightarrow \mu^u \ll m^u$.

Pugh-Shub: μ ergodic, hyperbolic and $\mu^u \ll m^u \Rightarrow \mu$ is SRB (namely, physical) $\Rightarrow \mu$ describes the asymptotic statistics of a Lebesgue-positive set of orbits.

- For $\text{Diff}^1(M)$

Sun-Tian (2012): f with Dom. Split. $E \oplus F$ with $\lambda_F \geq 0, \lambda_E < 0$ $\mu \ll m \Rightarrow \mu \in PS$ (Mañé, 1981)

Qiu (2011): f transitive Anosov: C^1 -generically $\exists ! \mu \in PF$.
Besides: μ is SRB (namely physical). But $\mu \perp m$.

Theorem

Let $f \in \text{Diff}^1(M)$ with Dom. Split. $E \oplus F$:

$$\|df^n|_{E(x)}\| \cdot \|df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n, \quad 0 < C, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Denote the Lyapunov exponents for any Oseledets' regular orbit by:

$$\chi_1 \geq \chi_{\dim F} > \chi_{\dim F+1} \geq \chi_{\dim F + \dim E}.$$

Then, there exist **“SRB-like”** measures, such that

1. They have a *pseudo physical property*: the set of SRB-like measures minimally describe the asymptotic statistics Lebesgue a.e.
2. They satisfy the inequality:

$$h_\mu(f) \geq \int \sum_{i=1}^{\dim F} \chi_i d\mu$$

Moreover: 1 $\Rightarrow$ 2.

3. If besides $\chi_{\dim F} \geq 0 \geq \chi_{\dim F+1}$, then

any SRB-like measure μ satisfies the Pesin's Formula

of the Entropy ($\mu \in PF$)

- Fix $x \in M$ **Sequence of Empirical Probabilities** of x :

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

- $p\omega$ -limit of x :**

$$p\omega(x) := \{\mu \in \mathcal{P} : \exists n_j \rightarrow +\infty \text{ such that } \lim_j \sigma_{n_j,x} = \mu\} \subset \mathcal{P}_f$$

For any given $\mu \in \mathcal{P}_f$

- BASIN OF STATISTICAL ATTRACTION**

$$B(\mu) := \{x \in M : p\omega(x) = \{\mu\}\}.$$

- BASIN OF ϵ -WEAK STATISTICAL ATTRACTION**

$$B_\epsilon(\mu) := \{x \in M : \text{dist}^*(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}.$$

Definition

An invariant measure μ is **SRB OR PHYSICAL** if $m(B(\mu)) > 0$.

An invariant measure μ is **SRB-LIKE OR PSEUDO PHYSICAL** if $m(B_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0$.

Theorem

$f \in \text{Diff}^1(M)$ with Dom. Split. $E \oplus F$, μ is SRB-like.

Then, $h_\mu(f) \geq \int \sum_{i=1}^{\dim F} \chi_i d\mu.$

Lemma 1. Upper bound of the Lebesgue measure m

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. $\forall$ finite partition α with $\text{diam}(\alpha) < \delta$

$\exists$ a sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures and $K > 0$ s.t.:

1) $\nu_n(X) < K \forall X \in \alpha^n = \bigvee_{j=0}^n f^{-j}(\alpha) \forall n \geq 0.$

2) $\forall C \in \mathcal{B}: m(C) \leq K e^{n\epsilon} I(\psi_n, C, \nu_n),$ where

$$I(\psi_n, C, \nu_n) := \int_C e^{\psi_n} d\nu_n, \quad \psi_n(x) := -\log |\det df^n(x)|_{F_x}| = \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x), \quad \psi(x) := -\log |\det df(x)|_{F_x}|.$$

Lemma 2 (Lower bound for the metric entropy)

$\forall \mu \in \mathcal{P}_f, \forall \epsilon, \delta > 0$ there exists a finite partition α satisfying

$\text{diam} \alpha < \delta$ and there exists a sequence $\{C_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{B}$ such that:

3) $\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} C_n \supset B_{\epsilon^*}(\mu)$ for some $\epsilon^* > 0$ for some dist^* in $\mathcal{P}.$

4) $\forall$ sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures, if $\exists K > 0$ s.t.

$\nu_n(X) < K \forall X \in \alpha^n \forall n \geq 0,$ then:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log I(\psi_n, C_n, \nu_n) \leq \epsilon + h_\mu(\alpha) + \int \psi d\mu$$

Theorem

$f \in \text{Diff}^1(M)$ with Dom. Split. $E \oplus F$, μ is SRB-like.

Then, $h_\mu(f) \geq \int \sum_{i=1}^{\dim F} \chi_i d\mu$.

Proof of the Theorem using Lemmas 1 and 2: Let $\mu \in \mathcal{P}_f$ such that

$h_\mu(f) - \int \sum_{i=1}^{\dim F} \chi_i d\mu = -r < 0$. We will prove that $\mu \notin \text{SRB-like}$. • Take $0 < \epsilon < r/4$. Consider $\delta > 0$ by Lemma 1. Construct the partition α and the sequence $\{C_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{B}$ by Lemma 2. Construct the sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures and the constant $K > 0$, by Lemma 1.

• Apply Lemma 2:

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log I(\psi_n, C_n, \nu_n) \leq \epsilon + h_\mu(\alpha) + \int \psi d\mu \leq (r/4) - r$$

• Apply Lemma 1: $m(C_n) \leq K e^{n\epsilon} I(\psi_n, C_n, \nu_n)$. Then:

$$\frac{1}{n} \log m(C_n) \leq \frac{\log K}{n} + \epsilon + \frac{1}{n} \log I(\psi_n, C_n, \nu_n) \quad \text{with } 0 < \epsilon < r/4$$

• Join the two inequalities above:

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log m(C_n) \leq (r/2) - r = -(r/2) < 0$$

• Apply Borel- Cantelli: $m(\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} C_n) = 0$.

• Use property (3) of Lemma 2:

$$m(B_{\epsilon^*}(\mu)) \leq m(\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} C_n) = 0$$

Then μ is not SRB-like. $\square$

Lemma 1 (Upper Bound of the Lebesgue measure m)

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. $\forall$ finite partition α with $\text{diam}(\alpha) < \delta$

$\exists$ a sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures and $K > 0$ s.t.:

1) $\nu_n(X) < K \forall X \in \alpha^n$ **2)** $\forall C \in \mathcal{B}: m(C) \leq K e^{n\epsilon} I(\psi_n, C, \nu_n)$,

where $I(\psi_n, C, \nu_n) := \int_C e^{\psi_n} d\nu_n$, $\psi_n(x) := -\log |\det df^n(x)|_{F_x}|$.

Proof of Lemma 1:

1st. step) Prove Lemma 1 assuming Proposition 3

2nd. step) Prove Proposition 3 independently.

Proposition 3 (Pseudo- F local foliations.- Mañé 1981)

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_0, K, n_0 > 0$, and δ_0 -local foliations $\mathcal{L}$ everywhere s.t.

(A) $\mathcal{L}_i$ is C^1 -trivializable and its leaves are $\dim F$ -dimensional

(B) $\text{dist}(F_{f^n(x)}, T_{f^n(x)} f^n(\mathcal{L}_i(x))) < \epsilon \forall x, \forall n \geq n_0$

(C) and (D) $\forall n \geq 0$ and $\forall x, y$ such that $y \in B_{\delta_0}^n(x)$ (dynamical ball):

(C) $m^{\dim F}(f^n(\mathcal{L}_i(y) \cap B_{\delta_0}^n(x))) \leq K$

(D) $e^{-n\epsilon} K \leq |\det df_y^n|_{T_y(\mathcal{L}(y))}| / |\det df_y^n|_{F_y}| \leq K e^{n\epsilon}$

Lemma 1 (Upper Bound of the Lebesgue measure m)

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. $\forall$ finite partition α with $\text{diam}(\alpha) < \delta$

$\exists$ a sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures and $\exists K > 0$ s.t.:

1) $\nu_n(X) < K \forall X \in \alpha^n$ 2) $\forall C \in \mathcal{B}$: $m(C) \leq K e^{n\epsilon} \int_C e^{\psi_n} d\nu_n$,
where $\psi_n(x) := -\log |\det df^n(x)|_{F_x}|$.

1st. Step: Proof of Lemma 1 assuming Proposition 3.

$\forall A \in \alpha$ take a $\dim F$ - local foliation $\mathcal{L}_A$ of Prop. 3

a $\dim E$ - C^1 -emb. submanifold W_A transversal to $\mathcal{L}_A$.

$\forall X_i \in \alpha^n$ $X_i \subset A_i \in \alpha$. Denote $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{A_i}$. Thus, Fubini's Theorem:

$$m(C) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{z \in W_{A_i}} d\mu^{W_{A_i}} \int_{y \in \mathcal{L}_i(z)} \mathbf{1}_{C \cap X_i} \phi_{A_i} dm^{\mathcal{L}_i(z)}$$

Denote $\hat{y} = f^n(y) \in f^n(\mathcal{L}_i(z) \cap X_i) = \mathcal{L}_i^n(z)$:

$$\sum_{i=1}^{k_n} \int_{z \in W_{A_i}} d\mu^{W_{A_i}} \int_{\hat{y} \in \mathcal{L}_i^n(z)} [\mathbf{1}_C \phi_{A_i}](f^{-n}(\hat{y})) |\det df^{-n}|_{T_{\hat{y}} \mathcal{L}_i^n} dm^{\mathcal{L}_i^n(z)}$$

By (D) of Prop. 3: $|\det df^{-n}|_{T_{\hat{y}} \mathcal{L}_i^n} \leq K e^{n\epsilon} e^{\psi_n(f^{-n}(\hat{y}))}$ Define ν_n :

$$\int h d\nu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{z \in W_{A_i}} d\mu^{W_{A_i}} \int_{\hat{y} \in \mathcal{L}_i^n(z)} [h \phi_{A_i}](f^{-n}(\hat{y})) dm^{\mathcal{L}_i^n(z)}$$

Then, $m(C) \leq K \int_C e^{\psi_n} d\nu_n$ Thus

$$\nu_n(X_i) \leq K \max_{A \in \alpha} (\mu^{W_A} \|\rho_A\|_{1, \infty}) \leq \text{constant}. \quad \square$$

Proposition 3 (Pseudo- F local foliations.- Mañé 1981)

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_0, K, n_0 > 0$, and δ_0 -local foliations $\mathcal{L}$ everywhere s.t.

(A) $\mathcal{L}_i$ is C^1 -trivializable and its leaves are $\dim F$ -dimensional

(B) $\text{dist}(F_{f^n(x)}, T_{f^n(x)} f^n(\mathcal{L}_i(x))) < \epsilon \quad \forall x, \forall n \geq n_0$

(C) and (D) $\forall n \geq 0$ and $\forall x, y$ such that $y \in B_{\delta_0}^n(x)$ (dynamical ball):

(C) $m^{\dim F}(f^n(\mathcal{L}_i(y) \cap B_{\delta_0}^n(x))) \leq K$

(D) $e^{-n\epsilon} K \leq |\det df_y^n| T_y(\mathcal{L}(y))| / |\det df_y^n| F_y| \leq K e^{n\epsilon}$

To prove Proposition 3, first take $\delta > 0$ small enough so any open set V of diameter smaller than 3δ is diffeomorphic by the exponential map $\exp_x$ (for any $x \in V$) to its image in $\exp_x^{-1} T_x M$. Let us construct the (non invariant) foliation $\mathcal{L}$ from a Hadamard Graph.

So, before proving Proposition 3, let us recall what a Hadamard Graph is.

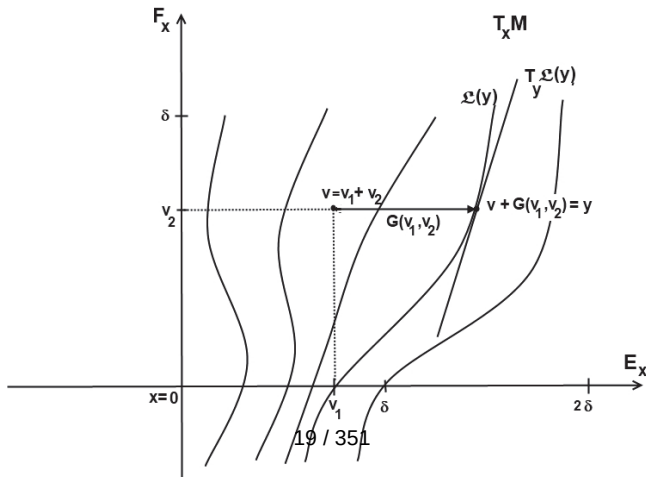
Notation: Fix $x \in M$. Denote $\mathbf{B}_{\delta}^{E_x, F_x}(\mathbf{0}) := \{v \in E_x, F_x : \|v\| \leq \delta\}$,
 $\mathbf{B}_{\delta}^x(\mathbf{0}) = \mathbf{B}_{\delta}^{E_x}(\mathbf{0}) \oplus \mathbf{B}_{\delta}^{F_x}(\mathbf{0}) \subset T_x M$.

$\forall v \in \mathbf{B}_{\delta}^x(\mathbf{0})$: $\pi_{E_x} v = v_1$, $\pi_{F_x} v = v_2$, $\gamma = \max_{x \in M} \{\|\pi_{E_x}\|, \|\pi_{F_x}\|\}$.

Definition: Hadamard Graph G

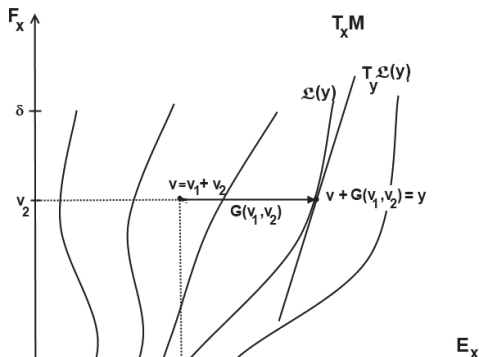
$G : \mathbf{B}_{\delta}^{E_x}(\mathbf{0}) \times \mathbf{B}_{\delta}^{F_x}(\mathbf{0}) \mapsto \mathbf{B}_{\delta}^{E_x}(\mathbf{0})$, $G(v_1, 0) = 0$

$\Phi : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 + G(v_1, v_2) \in \mathbf{B}_{2\delta}^x(\mathbf{0})$ is a C^1 -diff. onto its image.



Definition: Hadamard Graph G

$G : \mathbf{B}_\delta^{E_x}(\mathbf{0}) \times \mathbf{B}_\delta^{E_x}(\mathbf{0}) \mapsto \mathbf{B}_\delta^{E_x}(\mathbf{0})$, $G(v_1, 0) = 0$ and
 $\Phi : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 + G(v_1, v_2) \in \mathbf{B}_{2\delta}^x(\mathbf{0})$ is a C^1 -diff. onto its image.



Dispersion of G is $\text{disp } G = \max_{(v_1, v_2)} \|\partial G(v_1, v_2)/\partial v_2\|$, where
 $\partial G/\partial v_2$ is the Fréchet derivative of $G(v_1, \cdot) : \mathbf{B}_\delta^{F_x}(\mathbf{0}) \mapsto \mathbf{B}_\delta^{E_x}(\mathbf{0})$.

$$T_y \mathcal{L}(y) = (Id|_{F_x} + \partial G/\partial v_2) F_x$$

$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0$ s.t. $\text{disp } G \leq c \Rightarrow \text{dist}(T_y \mathcal{L}(y), F_x) < \epsilon/2 \forall y \in \text{Im}(\Phi)$
 $\exists \delta_0 > 0$ s.t. $\text{dist}(x, y) < \delta_0 \Rightarrow y \in \text{Im}(\Phi), \text{dist}(T_y \mathcal{L}(y), F_y) < \epsilon$

Once one has a Hadamard Graph G with $\text{disp} < c < 1/2$, and its associated foliation $\mathcal{L}$,
 $\text{dist}(E_x, E_y)$, $\text{dist}(F_x, F_y)$ near zero.
 Thus, the *same foliation* is associated to a Hadamard Graph $G^\#$ in the tangent space $T_y M$, satisfying

$$y = \exp_x(v_1 + v_2 + G(v_1, v_2)) = \exp_y(u_1 + u_2 + G^\#(u_1, u_2))$$

$$u_1, u_2 \in \mathbf{B}_\delta^{E_y, F_y}(\mathbf{0}),$$

$$v_1, v_2 \in \mathbf{B}_\delta^{E_x, F_x}(\mathbf{0}),$$

Thus $\pi_{E(y)}(Id|_{F(x)} + \partial G^\# / \partial u_1) \pi_{F(x)}|_{T_y \mathcal{L}(y)} (\pi_{F(y)}|_{T_y \mathcal{L}(y)})^{-1} = \partial G^\# / \partial u_2$.

For any given $\epsilon' > 0$:

$2\|\pi_{E(y)}|_{F(x)}\| < \epsilon'$ if $\text{dist}(x, y) \leq \delta_0$ is small enough. Also

$$\|\pi_{F(x)}|_{T_y \mathcal{L}(y)} (\pi_{F(y)}|_{T_y \mathcal{L}(y)})^{-1}\| < 1 + \epsilon' < 2.$$

$$\Rightarrow \text{disp} G^\# \leq \epsilon' + 2\gamma \text{disp} G$$

$$\mathcal{L} : \Phi(v_1, v_2) = v_1 + v_2 + G(v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{B}_{\delta}^{E_x}(0) \times \mathbf{B}_{\delta}^{F_x}(0)$$

Iterating by f^n the local foliation $\mathcal{L}$

$$f^n(\mathcal{L} \cap B_{\delta_0}^n(x)) : \exp_{f^n(x)}^{-1} f^n \exp_x(v_1 + v_2 + G(v_1, v_2))$$

where $\exp_x(v_1 + v_2 + G(v_1, v_2)) \in B_{\delta_0}^n(x)$, dynamical ball.

(1) • For small $\epsilon' > 0$ fix n_0 so $\|df^n|_{E(z)}\| \|df^{-n}|_{F(f^n(z))}\| < \epsilon' \quad \forall n \geq n_0$

• Reduce $\delta_0 > 0$ so $\exists G_n^*$ defined as follows, and it is a Graph:

$$f^n(\mathcal{L} \cap B_{\delta_0}^n(x)) : u_1 + u_2 + G_n^*(u_1, u_2), \quad \forall 0 \leq n \leq n_0, \quad \forall G \text{ s.t. } \text{disp}(G) < c$$

Lemma

$\forall 0 < c < 1/2 \quad \exists \delta_0, n_0 > 0$ s.t., if $\text{disp} G < c$ then:

G_n^* is a Graph for all $n \geq 0$ and $\text{disp} G_n^* < c$ for all $n \geq n_0$

Proof: 1. $\forall \epsilon' > 0$ (to be fixed later) choose $n_0, \delta_0 > 0$ (depending on $\epsilon' > 0$) as in (1) above.

2. $\forall G$ s.t. $\text{disp} G < c, \forall n \geq 0$ s.t. G_n^* is a Graph and for all $y \in B_{\delta_0}^n$:

$$\|\partial G_n^*(u_1, u_2)/\partial u_2\| \leq \epsilon' + 2\gamma \|df_{E(y)}^n\| (\epsilon' + 2\gamma \|\partial G_x(v_1, v_2)/\partial v_2\| \|df^{-n}|_{F(f^n(y))}\|).$$

3. Apply 2 and (1) with $n = n_0$ to fix $\epsilon' > 0$ (and thus to fix n_0, δ_0) s.t.

$$\|\partial G_x(v_1, v_2)/\partial v_2\| \leq c \Rightarrow \|\partial G_{n_0}^*(u_1, u_2)/\partial u_2\| \leq c$$

4. Apply **(1)** again to deduce that G_n^* is a Graph for all $n \geq 0$.

5. Apply step 2 to deduce that $\text{disp} G_n^* < c$ for all $n \geq n_0$. $\square$

End of the proof of Proposition 3

Proposition 3 (Pseudo- F local foliations.- Mañé 1981)

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_0, K, n_0 > 0$, and a finite number of δ_0 -local foliations $\mathcal{L}_i$ s.t.

(A) $\mathcal{L}_i$ is C^1 -trivializable and its leaves are $\dim F$ -dimensional

(B) $\text{dist}(F_{f^n(x)}, T_{f^n(x)} f^n(\mathcal{L}_i(x))) < \epsilon \quad \forall x, \forall n \geq n_0$

$\forall n \geq 0$ and $\forall x, y$ such that $y \in B_{\delta_0}^n(x)$:

(C) $m^{\dim F}(f^n(\mathcal{L}_i(y) \cap B_{\delta_0}^n(x))) \leq K$

(D) $e^{-n\epsilon} K \leq |\det df_y^n| T_y(\mathcal{L}(y))| / |\det df_y^n| F_y| \leq K e^{n\epsilon}$

Proof: Choose $\delta > 0$ s.t. $\exp_x$ is a diffeo from $\mathbf{B}_\delta^x(\mathbf{0})$ onto its image $\forall x \in M$. Construct each local foliation $\mathcal{L}$ from a Graph $G \Rightarrow$ **(A)** holds.

$$T_y(\mathcal{L}(y)) = (Id + \partial G(v_1, v_2) / \partial v_2) F_x$$

Thus, $\forall 0 < \epsilon' < \epsilon, \exists c > 0$ s. t. $\text{disp}(G) < c \Rightarrow$

$$m^{\dim F}(\mathcal{L}(y)) \leq [(1+c)\delta]^{\dim F} < \epsilon' \quad \textbf{(C')} \quad \text{dist}(T_x(\mathcal{L}(x), F_x)) < \epsilon' \quad \textbf{(B')}$$

Take δ_0, n_0 as in the above lemma: $f^n(\mathcal{L}(y) \cap B_{\delta_0}^n(x))$ is part of the foliation associated to a graph $f_n^* G$ for all $n \geq 0$; and

$$\text{disp} f_n^* G < c \quad \forall n \geq n_0 \quad \textbf{(E)}$$

(E), (C') $\Rightarrow$ (C) holds.

(E), (B') $\Rightarrow$ (B), (D) hold for some constant $K > 0$. $\square$

Lemma 2 (Lower Bound of the Metric Entropy)

$\forall \mu \in \mathcal{P}_f, \forall \epsilon, \delta > 0$ there exists a finite partition α satisfying $\text{diam} \alpha < \delta$ and there exists a sequence $\{C_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{B}$ such that:

3) $\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} C_n \supset B_{\epsilon^*}(\mu)$ for some $\epsilon^* > 0$ for some dist^* in $\mathcal{P}$.

4) $\forall$ sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ of finite measures, if $\exists K > 0$ s.t. $\nu_n(X) < K \forall X \in \alpha^n \forall n \geq 0$, then:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \int_{C_n} e^{\psi_n} d\nu_n \leq \epsilon + h_\mu(\alpha) + \int \psi d\mu, \text{ where}$$

$$\psi := -\log |\det df|_F|, \quad \psi_n := \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j$$

Proof of Lemma 2 Step 1. Construction (1a) Take $\delta_1 > 0$ s.t.

$$\text{dist}(x, y) < \delta_1 \Rightarrow |\psi(x) - \psi(y)| < \frac{\epsilon}{5}.$$

(1b) Take α s.t. $\text{diam}(\alpha) \leq \min(\delta, \delta_1)$, $\mu(\partial X) = 0 \forall X \in \alpha$

(1c) Fix $q \in \mathbb{N}^+$ s.t. $H(\alpha^q, \mu)/q \leq h_\mu(\alpha) + \epsilon/5$.

(1d) Choose $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ dense in $C^0(M, [0, 1])$ and define dist^* in $\mathcal{P}$:

$$\text{dist}^*(\mu_1, \mu_2) := |\mu_1\psi - \mu_2\psi| + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_1\varphi_i - \mu_2\varphi_i|/2^i.$$

(1e) Using (1b), fix $0 < \epsilon^* < \epsilon/5$ such that

$$\mu_n \in \mathcal{P}, \text{ dist}(\mu_n, \mu) \leq \epsilon^* \Rightarrow |H(\alpha^q, \mu_n) - H(\alpha^q, \mu)| \leq \epsilon/5.$$

(1f) Construct $C_n := \{x \in M : \text{dist}^*(\sigma_{n,x}, \mu) < \epsilon^*\}$.

Thus, Assertion (3) of Lemma 2 holds.

To end the proof of Lemma 2, one must prove that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \int_{C_n} e^{\psi_n} d\nu_n \leq \epsilon + h_\mu(\alpha) + \int \psi d\mu$$

Second step. For each fixed $n \geq 0$, consider

$\alpha^n \vee \{C_n\} = \{X_i \cap C_n\}_{1 \leq i \leq k_n}$ and choose one and only one point $x_i \in C_n \cap X_i$ for each $i \leq k_n$ (i.e. $C_n \cap X_i \neq \emptyset$).

$$I_n := \int_{y \in C_n} e^{\psi_n(y)} d\nu_n(y) = \sum_{i=1}^{k_n} e^{n\epsilon/5} e^{\psi_n(x_i)} \nu(C_n \cap X_i)$$

$$I_n \leq K e^{n\epsilon/5} \sum_{i=1}^{k_n} e^{\psi_n(x_i)}$$

Third step. Apply the Equality of Jensen:

$$\log \sum_{i=1}^{k_n} e^{\psi_n(x_i)} = \sum_{i=1}^{k_n} \psi_n(x_i) p_i - \sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i$$

where $p_i = e^{\psi_n(x_i)} / L$, $L = \sum_{i=1}^{k_n} e^{\psi_n(x_i)}$. Thus $\sum_{i=1}^{k_n} p_i = 1$

$$\log I_n \leq \log K + n\epsilon/5 + \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \int p_i \psi d\delta_{f^j(x_i)} - \sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i$$

Fourth step. Define $\mu_n \in \mathcal{P}$ by

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{n-1} \int p_i \delta_{f^j(x_i)} = \sum_{i=1}^{k_n} p_i \sigma_{n,x_i}$$

$$x_i \in C_n \Rightarrow \text{dist}^*(\sigma_{n,x_i}, \mu) \leq \epsilon^* \Rightarrow \text{dist}^*(\mu_n, \mu) \leq \epsilon^*$$

$$\Rightarrow \int \psi d\mu_n \leq \int \psi d\mu + \epsilon/5 \Rightarrow$$

$$\log I_n \leq \log K + 2n\epsilon/5 + n \int \psi d\mu - \sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i$$

To end the proof of Lemma 2, one must prove that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log I_n \leq \epsilon + h_\mu(\alpha) + \int \psi d\mu$$

At the end of the fourth step we have proved that

$$\log I_n \leq \log K + 2n\epsilon/5 + n \int \psi d\mu - \sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \quad \text{where}$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} p_i = 1, \quad \mu_n = \sum_{i=1}^{k_n} p_i \sigma_{n,x_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k_n} p_i \delta_{f^j(x_i)}$$

$$x_i \in C_n \cap X_i \Rightarrow \text{dist}^*(\sigma_{n,x_i}, \mu) < \epsilon^* \Rightarrow \text{dist}^*(\mu_n, \mu) < \epsilon^*$$

Fifth step. Check the following

ASSERTION 5 $\exists n_0 \geq 1$ such that

$$-\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq n\epsilon/5 + nH(\alpha^q, \mu_n)/q \quad \forall n \geq n_0$$

Sixth step. From Assertion 5 conclude the proof of Lemma 2:

$$\text{Assertion 5} \Rightarrow \log I_n \leq \log K + 3n\epsilon/5 + n \int \psi d\mu + nH(\alpha^q, \mu_n)/q$$

$$\text{dist}^*(\mu_n, \mu) < \epsilon^* \Rightarrow |H(\alpha^q, \mu_n)/q - H(\alpha^q, \mu)/q| \leq \epsilon/5 \Rightarrow$$

$$\log I_n \leq \log K + 4n\epsilon/5 + n \int \psi d\mu + nH(\alpha^q, \mu)/q$$

$$H(\alpha^q, \mu)/q \leq h_\mu(\alpha) + \epsilon/5 \Rightarrow$$

$$\log I_n \leq \log K + n\epsilon + n \int \psi d\mu + nh_\mu(\alpha) \quad \forall n \geq n_0 \quad \square$$

Assertion 5.- It is left to prove the following:

$\exists n_0 \geq 1$ such that $-\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq n\epsilon/5 + nH(\alpha^q, \mu_n)/q \quad \forall n \geq n_0$

Proof: $k := \#\alpha$, $\alpha^n = \{X_i\}$, $x_i \in X_i$ Denote $\pi_n := \sum_{i=1}^{k_n} p_i \delta_{x_i} \Rightarrow$

$$H(\alpha^n, \pi_n) = -\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i; \quad \mu_n = \sum_{i=1}^{k_n} p_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{f^j(x_i)};$$

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f^{*j} \pi_n \quad \text{Fix } 0 \leq l \leq q-1;$$

$$\alpha^{n+l} = \left(\bigvee_{j=0}^{l-1} f^{-j} \alpha \right) \vee \left(f^{-l} \left(\bigvee_{j=0}^n f^{-j} \alpha \right) \right) \Rightarrow$$

$$H(\alpha^n, \pi_n) \leq H(\alpha^{n+l}, \pi_n) \leq \sum_{j=0}^{l-1} H(\alpha, (f^*)^j \pi_n) + H(f^{-l} \alpha^n, \pi_n)$$

$$-\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq q \log k + H(\alpha^n, f^{*l} \pi_n)$$

$$-\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq n\epsilon/10 + H(\alpha^n, f^{*l} \pi_n) \quad \text{if } n \geq (10)q \log k(\epsilon)$$

$$n = Nq + s, \quad 0 \leq s \leq q-1:$$

$$H(\alpha^n, f^{*l} \pi_n) \leq \sum_{h=0}^{N-1} H(\alpha^q, (f^*)^{hq+l} \pi_n) + \sum_{j=Nq}^{Nq+s} H(\alpha, f^{*j+l} \pi_n)$$

$$-\sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq n\epsilon/5 + \sum_{h=0}^{N-1} H(\alpha^q, (f^*)^{hq+l} \pi_n) \Rightarrow$$

$$-q \sum_{i=1}^{k_n} p_i \log p_i \leq nq\epsilon/5 + \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{q-1} H(\alpha^q, (f^*)^{hq+l} \pi_n)$$

$$\leq nq\epsilon/5 + \sum_{j=0}^n H(\alpha^q, f^{*j} \pi_n) \leq \frac{nq\epsilon}{27/351} + nH(\alpha^q, \mu_n). \quad \square$$

2

CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Pesin's Entropy Formula for C^1 Expanding Maps of the Circle. Talk in XXV Jornadas Venezolanas de Matemática , Cumaná, Venezuela, 26 al 29 de marzo 2012.</i>	2012	2
-----------------------------	---	------	---

PESIN'S ENTROPY FORMULA FOR C^1 EXPANDING MAPS OF THE CIRCLE

ELEONORA CATSIGERAS AND HEBER ENRICH

Talk in the
XXV Jornadas Venezolanas de Matemáticas, Cumaná, Venezuela,
March 26th. to 29th., 2012

ABSTRACT. For any C^1 expanding map of the circle S^1 we prove that there exist equilibrium states for the potential $\psi = -\log |f'|$. Namely, the system necessarily has invariant measures that satisfy the Pesin's Entropy Formula. We state and prove several C^1 theorems relating SRB measures, SRB-like measures and measures satisfying the Pesin's Entropy Formula.

1. INTRODUCTION

In the SRB and Pesin's Theory for C^1 plus Hölder hyperbolic systems, in particular for C^1 plus Hölder expanding maps on the circle, it is proved that μ is SRB if and only if it satisfies the Pesin's Entropy Formula. And besides, for expanding maps on the circle, this occurs if and only if μ is equivalent to the Lebesgue measure, and there always exists one and only one of such measures.

There is large gap, which we try to reduce with this work, between the C^1 -plus-Hölder theory of SRB measures and Pesin's theories. The behavior exhibited by several C^1 examples shows that the theorems for the C^1 -plus-Hölder systems fail if weakening the hypothesis of regularity of the map to be only C^1 . It is usually said that there is no chance to extend the theory for the C^1 -case. We prove that, if a slight change in the definition of SRB measures is admitted, a substitutive theory can be developed. We state and prove the first theorems of this theory.

Why SRB and Pesin's Theory does not work in the C^1 -scenario? Focusing on C^1 -expanding maps of the circle, first, we recall that there exist transitive examples [Qu96] for which non countably many invariant measures satisfy the Pesin's Formula. So, transitivity does not imply uniqueness of the equilibrium state for the potential $-\log |f'|$.

Besides, the transitive examples of [Qu96] preserve the Lebesgue measure but it is non ergodic. So, transitivity does not imply ergodicity in the C^1 scenario, while for C^1 plus Hölder hyperbolic systems it does.

There also exist examples of C^1 -expanding maps of the circle, for which a single measure satisfies the Pesin's Formula, but it is mutually singular with respect to Lebesgue. This is a large difference with the classical property of C^2 plus Hölder expanding maps. Indeed, this shows that Ledrappier-Young's characterization (with the absolute continuity property with respect to Lebesgue) of those measures that satisfy the Pesin's Entropy Formula, does not hold in the C^1 -scenario.

Nevertheless we propose a substitutive theory, focused (by now) on the space $\mathcal{E}^1$ of all the C^1 -expanding of the circle S^1 , and prove the first theorems to compose this theory.

2. DEFINITIONS

We say that a C^1 -map $f : S^1 \mapsto S^1$ is expanding if

$$|f'(x)| > 1 \quad \forall x \in S^1.$$

We denote by $\mathcal{E}^1$ to the space of all C^1 -expanding map of C^1 .

An equilibrium state for the potential $\psi : -\log |f'|$, if it exists, is an invariant probability measure μ for which

$$h_\mu(f) + \int \psi d\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{P}_f} h_\nu(f) + \int \psi d\nu,$$

where $h_\mu(f)$ denotes the theoretical measure entropy of f with respect to the probability measure μ , and $\mathcal{P}_f$ denotes the space of all the f -invariant probability measures.

We denote by $ES_f \subset \mathcal{P}_f$ to the (a priori maybe empty) set of all the equilibrium states of f for the potential $\psi = -\log |f'|$.

In [CQ01] it is proved that the sup in the above equation of the measures $\mu \in ES_f$, is necessarily equal to zero for all $f \in \mathcal{E}^1$. Therefore μ is an equilibrium state for the potential ψ if and only if it satisfies the following equality:

$$h_\mu(f) = \int \log |f'| d\mu.$$

On the other hand, for any f -invariant measure μ , and for any $f \in \mathcal{E}^1$, it is straightforward to check (applying Birkhoff Ergodic Theorem and Oseledec's Theorem), that

$$\int \log |f'| d\mu = \int \chi^+(x) d\mu,$$

where $\chi^+(x)$ is the (positive) Lyapunov of the orbit of x , which is defined for μ -a.e. $x \in S^1$.

Therefore, $\mu \in ES_f \Leftrightarrow h_\mu(f) = \int \chi^+(x) d\mu$.

The latter Equality is called the Pesin's Formula of the Entropy.

For any point $x \in S^1$ the sequence of empirical probabilities along the future orbit of x is defined by:

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \in \mathcal{P} \quad \forall n \geq 1,$$

where δ_y denotes the Dirac's delta probability supported on the point $y \in S^1$, and $\mathcal{P}$ denotes the space of all the (non necessarily f -invariant) Borel-probabilities. In general, except if x is a fixed point, $\sigma_n(x) \notin \mathcal{P}_f \quad \forall n \geq 2$.

The space $\mathcal{P}$ is endowed with the weak* topology, as a subset of the dual space of $C^0(S^1, \mathbb{R}^+)$. It is well known that $\mathcal{P}$, after endowed with the weak*-topology, is compact, sequentially compact and metrizable, and that its subspace $\mathcal{P}_f$ is compact. We denote by dist^* any chosen metric which induces the weak*-topology on $\mathcal{P}$. We denote by $\lim^*$ the limit of any convergent sequence in $\mathcal{P}$. We define the set

$$p\omega(x) = \{\mu \in \mathcal{P} : \exists n_j \rightarrow +\infty \text{ such that } \lim_{j \rightarrow +\infty}^* \sigma_{n_j}(x) = \mu\}.$$

It is easy to check that $p\omega(x) \subset \mathcal{P}_f$.

The SRB measures, also called physical measures, are defined as those probability measures $\mu \in \mathcal{P}_f$ such that the following set

$$B(\mu) := \{x \in S^1 : p\omega(x) = \{\mu\}\}$$

has positive Lebesgue measure. The set $B(\mu)$ is called the basin of statistical attraction of μ . In general, with this definition, an SRB measure is non necessarily ergodic: there are examples of such $f \in \text{Diff}^\infty(M)$ with dimension of M larger than one. But for $f \in \mathcal{E}^1$ it can be proved that all SRB measures are ergodic (the proof of this fact is not easy).

In [CE11] we define: μ is SRB-like if for all $\epsilon > 0$ the following set

$$A_\epsilon(\mu) := \{x \in S^1 : \text{dist}^*(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}$$

has positive Lebesgue measure. We call the set $A_\epsilon(\mu)$ the basin of ϵ -weak statistical attraction of μ .

It is easy to check that SRB-like measures are f -invariant and that they do not depend of the chosen metric dist^* in the space $\mathcal{P}$ of all the probability measures, provided that it induces the weak*-topology.

Immediately from the above definitions, all the SRB measures, if they exist, are SRB-like. In [CE11] we proved that there always exist at least one SRB-measure. From the definition, notice that SRB-like probabilities preserve a slightly weak physical property which generalizes the physical statistical attraction of SRB measures. It is standard to prove that the SRB-like measures coincide with the SRB measures if these latter exist and if the union of their basins of statistical attraction covers Lebesgue-almost all the orbits. In other case, after the results in [CE11], there still exist SRB-like invariant probabilities that are not SRB. In any case, we prove in [CE11] that the union of the

basins of the statistical (weak)-attraction of all the SRB-like measures (including the SRB measures if they exist) cover Lebesgue-a.e.

3. STATEMENT OF THE RESULTS.

Theorem 1. *For all $f \in \mathcal{E}^1$ there exist equilibrium states for the potential $\psi := \log |f'|$. Namely, the set of invariant measures that satisfy the Pesin's Entropy Formula is non empty.*

Theorem 2. (See also [CQ01] for the C^1 -generic case in $\mathcal{E}^1$.)

For all $f \in \mathcal{E}^1$, if ES_f has a unique measure μ , then μ is necessarily SRB or physical, namely, its basin $B(\mu)$ of statistical attraction has positive Lebesgue measure. Moreover, $B(\mu)$ has full Lebesgue measure. Thus, no other SRB-like or SRB measure exists.

It is well known, from the classic Ruelle's Theorem (which requires more regularity than only C^1) that the space of expanding maps for which $\#ES_f = 1$ includes all the C^1 -plus Hölder systems in $\mathcal{E}^1$, and besides that the unique $\mu \in ES_f$ for those systems is equivalent to the Lebesgue measure. It is also known, after Campbell and Quass Theorem [CQ01], that the above case for which $\#ES_f = 1$, is also the C^1 -generic behavior, and that besides, C^1 -generically such a unique equilibrium state μ is mutually singular with respect to the Lebesgue measure.

The main purpose is to study the non generic (namely, bifurcating) maps in $\mathcal{E}^1 \setminus \mathcal{E}^1$ – plus Hölder for which $\#ES_f > 1$. We recall that the systems are necessarily transitive, since any $f \in \mathcal{E}^1$ is conjugated to a linear expanding map of the circle with degree larger or equal than 2. Nevertheless they are non necessarily ergodic [Qu96]:

Theorem 3. *If ES_f has finitely or countably infinitely many ergodic measures, then all of them are SRB, and the union of the basins of statistical attraction of all of them covers Lebesgue-almost all the orbits. Thus, the set of SRB measure coincides with the set of SRB-like measures*

This latter class of systems has non countably many ergodic measures satisfying the Pesin's Entropy Formula. No C^1 example still exist in this class, as far as we know, but C^0 -examples of topologically expanding maps of the circle, with a similar property of non countably many ergodic measures which are SRB-like, were provided by [M05]).

Theorem 4. *If $f \in \mathcal{E}^1$ has non countably many ergodic measures satisfying the Pesin's Entropy Formula, then there are non countably many SRB-like probability measures that are non SRB.*

Theorem 5. *For any $f \in \mathcal{E}^1$, all the SRB-like measures (including the SRB measures if they exist) satisfy the Pesin's Entropy Formula.*

Acknowledgements: The first author was partially supported by CSIC of Universidad de la República and ANII of Uruguay.

REFERENCES

- [CE11] Catsigeras, E., Enrich, H.: *SRB-like measures for C^0 dynamics*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. **59**, (2011) pp. 151-164
- [CQ01] Campbell, J.; Quas, A.: *A generic C^1 expanding map has a singular SRB measure*. Commun. Math. Phys. **349**, (2001) pp. 221-335
- [K98] Keller, G.: *Equilibrium states in ergodic theory*. London Mathematics Society Student Texts. Cambridge University Press 1998
- [LY85] Ledrappier, F.; Young, L. S.: *The metric entropy of diffeomorphisms. Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*. Annals of Mathematics **122** (1985). pp. 509-574
- [M05] Misiurewicz, M.: *Ergodic natural measures* in Contemporary Mathematics **385** Algebraic and topological dynamics, eds: Kolyada, S.; Manin, Y.; Ward, T., (2005) pp. 1-6 Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
- [Qu96] Quas, A.: *Non ergodicity for C^1 expanding maps and g -measures*. Ergod. Theor. & Dyn. Sys. **16** (1996) pp. 531-543

BOTH AUTHORS: INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA RAFAEL LA-GUARDIA (IMERL), UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY

E-mail address: `eleonora@fing.edu.uy`

E-mail address: `enrich@fing.edu.uy`

Pesin's Entropy Formula for C^1 Expanding Maps of the Circle

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich

Instituto de Matemática - Universidad de la República - Uruguay

eleonora@fing.edu.uy, enrich@fing.edu.uy

XXV Jornadas Venezolanas de Matemática
Cumaná, Venezuela, from March 26th. to 29th., 2012

Definition

A C^1 map $f : S^1 \mapsto S^1$ is **expanding** if

$$|f'(x)| > 1 \quad \forall x \in S^1.$$

Purpose: Extend or adapt known results for $C^{1+\alpha}$ expanding maps to the **C^1 maps**. Search for the relations between:

- SRB or physical measures or measures **statistically describing the asymptotic behavior** of Lebesgue-a.e.
- Equilibrium states for the potential $\psi := -\log |f'|$ or equivalently, invariant measures μ that satisfy **the Pesin's Formula of the Entropy**:

$$h_\mu(f) = \int \chi^+ d\mu,$$

where χ^+ is the **positive Lyapunov exponent**.

Notation: $x \in S^1$ initial state; $\{f^j(x)\}_{j \geq 0}$ future orbit of x , $\mathcal{P}$ space of Borel **probabilities in S^1 endowed with the weak* topology**; $\mathcal{P}_f \subset \mathcal{P}$ subspace of f -invariant probabilities.

Recall: $\mathcal{P}_f$ is nonempty and weak* compact.

- **Sequence $\{\sigma_{n,x}\}_{n \geq 1}$ of Empirical Probabilities** of the future orbit of x :

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

where δ is the Dirac delta.

REMARK: $\sigma_{n,x} \notin \mathcal{P}_f$ **unless** $x \in \text{Per}(f)$.

- **P-omega-limit**, omega limit in the space of probabilities:

$$p\omega(x) := \{\mu \in \mathcal{P} : \exists n_j \rightarrow +\infty \text{ such that } \lim_j \sigma_{n_j,x} = \mu\}.$$

$\Rightarrow \emptyset \neq p\omega(x)$ is weak* compact and contained in $\mathcal{P}_f$

For any given $\mu \in \mathcal{P}_f$

- **BASIN OF STATISTICAL ATTRACTION**

$$B(\mu) := \{x \in S^1 : p\omega(x) = \{\mu\}\}.$$

- **BASIN OF EPSILON-WEAK STATISTICAL ATTRACT.**

$$B_\epsilon(\mu) := \{x \in S^1 : \text{dist}^*(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}.$$

Notation: m is the (non necessarily invariant) Lebesgue measure normalized so $m(S^1) = 1$.

Definition

An invariant measure μ is **SRB OR PHYSICAL** if

$$m(B(\mu)) > 0.$$

An invariant measure μ is **SRB-LIKE OR PHYSICAL-LIKE** if

$$m(B_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Definition

An invariant measure μ is **SRB OR PHYSICAL** if

$$m(B(\mu)) > 0.$$

An invariant measure μ is **SRB-LIKE OR PHYSICAL-LIKE** if

$$m(B_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

SRB = (maybe empty) set of SRB or physical measures

SRB-like = **(never empty)** set of SRB-like or physical-like measures

EQ = set of measures satisfying Pesin's Entropy Formula

= set of equilibrium states μ for the potential $\psi = -\log |f'|$:

$$h_\mu(f) = \int \chi^+ d\mu = \int \log |f'| d\mu.$$

Theorem (Ruelle: Any $C^{1+\alpha}$ case.)

If $f : S^1 \mapsto S^1$ is $C^{1+\alpha}$ expanding, then $\#(EQ) = 1$ and

$$SRB = SRB\text{-like} = EQ = \{\mu \in \mathcal{P}_f : \mu \ll m\}.$$

Theorem (Ruelle: Any $C^{1+\alpha}$ case.)

If $f : S^1 \mapsto S^1$ is $C^{1+\alpha}$ expanding, then

$\#(EQ) = 1$ and $SRB = SRB\text{-like} = EQ = \{\mu \in \mathcal{P}_f : \mu \ll m\}$.

Theorem (Some previously known C^1 cases)

- (Cambpell-Quass 2001) C^1 -generically
 $\# EQ = 1$, $SRB = SRB\text{-like} = EQ$, and $\mu \in EQ \Rightarrow \mu \perp m$.
- (Restatement of Quass 1996) $\exists f$ C^1 -expanding on S^1 such
that $\#(SRB\text{-like}) > 1$ and $\#EQ = \infty$

Theorem (C-E 2012: Any C^1 case)

For any C^1 expanding map $f : S^1 \mapsto S^1$:

- $\#(SRB\text{-like}) \geq 1$, $\mu \in SRB\text{-like} \Rightarrow \mu \in EQ$.
- $\# EQ = 1 \Rightarrow SRB = SRB\text{-like} = EQ$

Theorem (C-E 2012: Any C^1 case)

For any C^1 expanding map $f : S^1 \mapsto S^1$:

- (1) $\#(\text{SRB-like}) \geq 1$
- (2) $\mu \in \text{SRB-like} \Rightarrow \mu \in \text{EQ}$.
- (3) $\# \text{EQ} = 1 \Rightarrow \text{SRB} = \text{SRB-like} = \text{EQ}$

The complete and detailed proof can be found in:

Equilibrium States and SRB-like measures of C^1 Expanding Maps of the Circle, ArXiv:1202.6584v1 [math.DS] Preprint 2012

Route of the Theorem's proof, in 7 steps with 3 lemmas.

- **Step 1. LEMMA 1:**

SRB-like $\neq \emptyset$ and it is the minimal weak compact set $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}_f$ such that*

$$p\omega(x) \subset \mathcal{K} \text{ for } m\text{-a.e. } x \in S^1.$$

Ideas for the proof of Lemma 1: Use the definition of SRB-like measure and the sequential weak*-compactness of $\mathcal{P}$.

Note Lemma 1 implies Assertion (1) of the Theorem.

Theorem (C-E 2012: Any C^1 case)

For any C^1 expanding map $f : S^1 \mapsto S^1$:

- (1) $\#(\text{SRB-like}) \geq 1$
- (2) $\mu \in \text{SRB-like} \Rightarrow \mu \in \text{EQ}$.
- (3) $\# \text{EQ} = 1 \Rightarrow \text{SRB} = \text{SRB-like} = \text{EQ}$

- **Step 2.** Check that (1) and (2) $\Rightarrow$ (3).

Proof: (1), (2) and $\# \text{EQ} = 1 \Rightarrow \text{SRB-like} = \text{EQ} = \{\mu\}$.

Lemma 1 and $\text{SRB-like} = \{\mu\} \Rightarrow \mu \in \text{SRB} = \text{SRB-like}$. □

Note Now it is only left to prove (2).

- **Step 3.** Construct a finite partition $\mathbf{P}$ of S^1 with arbitrarily small diameter and such that

$$\mu(\partial \mathbf{P}) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_f. \quad (*)$$

Note: (*) the ONLY reason why this proof does not work if $\dim > 1$.

- **Step 3.** Finite partition $\mathbf{P}$ such that $\text{diam}(\mathbf{P}) < \alpha$ ($\alpha = \text{expans. constant of } f$), and $\mu(\partial\mathbf{P}) = 0 \ \forall \ \mu \in \mathcal{P}_f$. (*)

- **Step 4. Lemma 2 (lower bound for the entropy)**

★ $\forall$ sequence $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ of **(non invariant)** $\nu_n \in \mathcal{P}$,

★ $\forall \ \mu \in \mathcal{P}_f$ such that $\mu = \lim_i^* \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} (f^*)^j \nu_{n_i}$,
 $(n_i \rightarrow +\infty)$,

$$\limsup_i \frac{1}{n_i} H(\bigvee_{j=0}^{n_i} f^{-j}(\mathbf{P}), \nu_{n_i}) \leq h_\mu.$$

Remark: $\nu_n \notin \mathcal{P}_f$ since Lemma 2 will be applied to convex combinations of the empirical distributions.

Ingredients for the proof of Lemma 2:

- Topological expansivity of f :

$$\text{diam}(\mathbf{P}) < \alpha, \ \mu \in \mathcal{P}_f \quad \Rightarrow \quad h_\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathbf{P}, \mu).$$

- Non decreasing property of H with respect to finer partitions:

$$H(\bigvee_{j=0}^n f^{-j} \mathbf{P}, \nu) \leq \sum_{j=0}^n H(\mathbf{P}, (f^*)^j \nu)$$

- Convexity of H with respect to the probability:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} H(\mathbf{P}, (f^*)^j \nu) \leq H(\mathbf{P}, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^*)^j \nu).$$

- **Step 5. Reformulate the problem via Keller's argument:**
(ref. Keller's book on Equilibrium States, 1998):

$\forall r \geq 0$ define

$$\mathcal{K}_r = \left\{ \mu \in \mathcal{P}_f : h_\mu + \int (-\log |f'|) d\mu \geq -r \right\}.$$

Recall that $\int \log |f'| d\mu = \int \chi^+ d\mu$.

Due to Ruelle's Inequality: $EQ = \mathcal{K}_0 = \bigcap_{r>0} \mathcal{K}_r$.

To prove (2) : SRB-like $\subset$ EQ, **it is enough to prove that**
SRB-like $\subset \mathcal{K}_r \quad \forall r > 0$ (to be proved).

- **Step 6. Lemma 3** For all $\epsilon > 0$

$$m(\{x \in S^1 : \text{dist}^*(\sigma_{n,x}, \mathcal{K}_r) \geq \epsilon\}) \leq e^{-n(r-\epsilon)}$$

Remark: To prove Lemma 3, the **Lemma 2 giving a lower bound of the entropy is essential**. Recall that Lemma 2 was obtained after the construction of a good finite partition $\mathbf{P}$ such that $\mu(\partial \mathbf{P}) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_f$.

- **Step 7. End of the proof of the Theorem:**

It is only left to prove that: $\text{SRB-like} \subset \mathcal{K}_r \quad \forall r > 0$

- From Step 6 **Lemma 3:** For all $0 < \epsilon < r/2$

$$m(\{x \in S^1 : \text{dist}^*(\sigma_{n,x}, \mathcal{K}_r) \geq \epsilon\}) \leq e^{-n(r-\epsilon)} \leq e^{-nr/2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) < +\infty,$$

where $C_n := \{x \in S^1 : \text{dist}^*(\sigma_{n,x}, \mathcal{K}_r) \geq \epsilon\}$.

- Borel-Cantelli Lemma implies $m\left(\bigcap_{n_0 \geq 1} \bigcup_{n \geq n_0} C_n\right) = 0$.

In other words, for m -a.e. $x \in S^1$ there exists $n_0 \geq 1$ such that $x \notin C_n \quad \forall n \geq n_0$.

- Then $\text{dist}^*(\sigma_{n,x}, \mathcal{K}_r) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 : p\omega(x) \subset \{\mu \in \mathcal{P} : \text{dist}^*(\mu, \mathcal{K}_r) \leq \epsilon\} \quad m - \text{a.e. } x \in S^1.$$

$$\Rightarrow p\omega(x) \subset \mathcal{K}_r.$$

- Step 1: SRB-like is the minimal weak*-compact set that contains $p\omega(x)$ for $m - \text{a.e. } x \in S^1$

$$\Rightarrow \text{SRB-like} \subset \mathcal{K}_r \quad \square$$

Thank you very much for your kind attention!



Announcement
Dynamical Systems in Montevideo 2012
August 13th. to 17th., 2012

An international congress in Dynamical Systems will be held in
Montevideo, Uruguay.

It will be a satellite conference of the 4th Latin American Congress
of Mathematicians that will take place in Córdoba, Argentina.

<http://imerl.fing.edu.uy/sdm2012/>

3

CATSIGERAS, E; GUIRAUD, P.; MEYRONEINC, A; UGALDE, E	<i>Sobre los conjuntos límites de los mapas contractivos a trozos. Resumen de la comunicación en las XXIV Jornadas Venezolanas de Matemáticas, Barquisimeto Venezuela, 12 al 15 de abril de 2011.</i>	2011	3
---	---	------	---

Sobre los conjuntos límites de los mapas contractivos a trozos

E. Catsigeras (1),
P. Guiraud (2),
A. Meyroneinc (3),
E. Ugalde (4)

(1) Universidad de la República

Instituto de Matemática- Fac. Ingeniería
eleonora@fing.edu.uy

(2) Universidad de Valparaíso

Departamento de Estadística–CIMFAV, Fac. Ciencias
pierre.guiraud@uv.cl

(3)IVIC

Departamento de Matemáticas
ameyrone@ivic.gob.ve

(4) Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Instituto de Física
ugalde@ifisica.uaslp.mx

Comunicación SD-12, pág 213 del libro de resúmenes de las

XXIV JORNADAS VENEZOLANAS DE MATEMÁTICAS

Asociación Matemática Venezolana
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado

Barquisimeto, abril de 2011

XXIV JORNADAS VENEZOLANAS DE
MATEMÁTICAS

Asociación Matemática Venezolana
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado
Barquisimeto, 12 al 15 de abril de 2011

Índice

Información General	2
Presentación	5
Programa	7
Martes 12 de Abril	7
Miércoles 13 de Abril	12
Jueves 14 de Abril	19
Viernes 15 de Abril	26
Conferencias Plenarias: resúmenes	29
Sesiones: resúmenes	33
Análisis	33
Análisis Numérico y Métodos Computacionales	65
Ecuaciones en Derivadas Parciales y Física-Matemática	91
Educación Matemática e Historia de la Matemática	107
Funciones de Variación Acotada y Aplicaciones	122
Grafos y Combinatoria	154
Lógica y Teoría de Conjuntos	167
Probabilidad y Estadística	185
Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos	198
Topología y Geometría	218

Información General

Con el auspicio de la ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA se realiza la vigésimo cuarta edición de las Jornadas Venezolanas de Matemáticas; esta vez en la ciudad de Barquisimeto y en las instalaciones del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. Como ya es tradición, este evento se organiza en base a un conjunto de sesiones temáticas y conferencias plenarias. A continuación se presenta la información detallada de las actividades que se desarrollan en el marco de las XXIV Jornadas Venezolanas de Matemáticas.

COMITÉ ORGANIZADOR:

Sergio Muñoz, UCLA (Coordinador), (smunoz@ucla.edu.ve)
Alexander Carrasco, UCLA (acarrasco@ucla.edu.ve)
Franca Laveglia, UNEXPO (flaveglia@hotmail.com)
Ramón Vivas, UNEXPO (ramon.alberto.vivas@gmail.com)

COMITÉ DE PROGRAMA:

Neptalí Romero, UCLA (Coordinador) (nromero@ucla.edu.ve)
María Luisa Colasante, ULA (marucola@ula.ve)
Juan Guevara, UCV (juan.guevara@ciens.ucv.ve)
Daniel Nuñez, LUZ (dnunez@luz.edu.ve)
Oswaldo Ruggiero, PUC - Río de Janeiro (rafael.o.ruggiero@gmail.com)
Vladimir Strauss, USB (str@usb.ve)
Wilfredo Urbina, UCV (wilfredo.urbina@gmail.com)

CONFERENCISTAS INVITADOS:

- Marisela Domínguez Torres (UCV)
- Giovanni Ernesto Calderón Silva (ULA)
- José Gregorio Mijares (IVIC)

SESIONES:

- Análisis
Coordinadores:
Marisela Domínguez (UCV, marisela.dominguez@ciens.ucv.ve)
Ramón Bruzual (UCV, ramon.bruzual@ciens.ucv.ve)

SD-12

Sobre los conjuntos límites de los mapas contractivos a trozo

E. Catsigeras , P. Guiraud , A. Meyroneinc , E. Ugalde

Universidad de la República

Instituto de Matemática

eleonora@fing.edu.uy

Universidad de Valparaíso

Departamento de Estadística–CIMFAV, Fac. Ciencias

pierre.guiraud@uv.cl

IVIC

Departamento de Matemáticas

ameyrone@ivic.gob.ve

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Instituto de Física

ugalde@ifisica.uaslp.mx

Genéricamente, el conjunto Ω -límite de un mapa contractivo a trozo sobre un espacio métrico compacto conexo no intersecta el conjunto de discontinuidades y es una unión finita de órbitas periódicas. El caso no genérico aparece menos trivial. Estudiamos la relación entre las propiedades topológicas y dinámicas del Ω -límite y mostramos que de lo contrario del caso genérico, una clasificación de dichos conjuntos necesariamente depende de condiciones sobre la partición y el mapa. Por ejemplo, mostramos que el Ω -límite puede tener un componente único minimal, y ser finito o ser la unión de un Cantor y de un conjunto enumerable vacío, finito o infinito. A pesar de no ser genéricos, estos casos permiten apreciar la complejidad de la dinámica transitoria genérica de tales mapas que puede ser indistinguible del caos en experimentos numéricos.

Referencias

- [1] E. Catsigeras, P. Guiraud, A. Meyroneinc y E. Ugalde. On the limit set of piecewise contracting maps. *en preparación*.
- [2] E. Catsigeras y P. Guiraud. Integrate and Fire Neural Networks, Piecewise Contractive Maps and Limit Cycles. *sometido*, arxiv:1011.1525v1.
- [3] R. Lima, A. Meyroneinc y E. Ugalde. Dynamic modularity in discrete-time models of regulatory networks. *sometido*.

4

CATSIGERAS, E; SHANNON, M	<i>Synchronized dynamics of on-off oscillators with instantaneous coupling interactions - Communication submitted and published in the Book of Abstracts of the XII LAWNP- San Luis de Potosi, Mexico, 2011</i>	2011	4
------------------------------	---	------	---

Synchronized dynamics of on-off oscillators with instantaneous coupling interactions.

Eleonora Catsigeras and Mario Shannon *

August 1st., 2011.

Communication submitted to
“XII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena LAWNP-2011”
to be held on October 10-14, 2011, San Luis Potosí, México”

Abstract

We study a dynamical system with discontinuities, obtained as the evolution on time, in a product Riemannian manifold of large dimension, of any finite number $n \geq 2$ of coupled oscillators of the type “on-off”. We assume that the interactions (couplings) among each individual dynamical system are instantaneous, and classify them in excitatory, inhibitory or null. We analyze the sync modes, provided that the graph of excitatory interactions is large enough and satisfies some particular topological conditions. The main novelties with respect to previous results, in which we were inspired, are that we do not impose any particular formula for the vector fields governing the dynamics of each individual oscillator during their “off” phases, the number of oscillators in the system may be any $n \geq 2$, and the individual dynamics while are not coupled, do not need to be identical.

1 Statement of the subject of research

We consider a dynamical system $\Phi(\mathbf{x}, t)$ with non isolated discontinuities, evolving with continuous positive time t , from each initial state $\mathbf{x}$ in a product Riemannian manifold M .

$$M = \prod_{i=1}^n M_i, \quad \phi : M \times \mathbb{R}^+ \mapsto M$$

$$\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}, \quad \Phi(\mathbf{x}, t_1 + t_2) = \Phi(\Phi(\mathbf{x}, t_1), t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \mathbf{x} \in M.$$

The system is obtained from considering $n \geq 2$ coupled oscillators of the “on-off type”, that are coupled by instantaneous interactions at the “on” instants. Each oscillator $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, when uncoupled with the others, and during its “off” phase, is described by the state $x_i \in M_i$ which evolves along the integral curve of a vector field $F_i \in \mathcal{X}^1(M_i)$. The signed and bidirectional interactions among the oscillators introduce discontinuities in Φ , at those points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ that drop on a set $\Delta \subset M$ which is the union of n codimension-one submanifolds topologically embedded in M , and transversal to the orbits by Φ .

This abstract dynamical system Φ , evolving on an arbitrarily large-dimensional manifold M , and exhibiting non isolated discontinuities along $\Delta \subset M$, comes from other sciences. In fact, they model, among other examples, networks of some types of artificial or biological neurons, and of light coupled electronic oscillators (LCO).

*Both authors: Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay.
E-mails: eleonora@fing.edu.uy, marios Shannon@hotmail.com – E.C. is partially financed by CSIC-Univ. de la República and ANII-Uruguay.

Each oscillator $i \in \{1, \dots, n\}$, when uncoupled from the others, is assumed to evolve accordingly to a dynamics defined by a flow without singularities on an open Riemannian manifold M_i , embedded in a compact manifold of larger or equal dimension. It is called an oscillator because it exhibits at least one periodic attractor A_i of period $T_i > 0$. The initial condition, and all the future orbits of each oscillator i (even after they are perturbed by the coupling with the other oscillators), are assumed to lay, always, in the union of the open basins of attraction of its periodic attractors. So, each Riemannian manifold M_i is restricted to that open set.

The “on” and the “off” states of each oscillator i are defined, in our abstract context, just conventionally, as an agreement of notation to the purpose of defining later, the instantaneous action from the oscillator i , to any other oscillator j . This action from i to j is produced only at the times when i “turns on”. But, in our general context in this work, we are not assuming any particular change in the dynamics of the oscillator i , when it is “turned on”, in relation to when it is “turned off”. In other words, any additional conditions in the evolution of the oscillator i during its “on” phases, can be added freely. For instance, to apply the results to biological or artificial neurons, it can be assumed that the oscillator “spikes” when it turns on. Other characteristic dynamical behavior can be imposed during when the oscillator turns on, to model biophysical, ecological, mechanical or electronic oscillators, or controlled clock systems applied in communications. The large restriction is the results of this paper resides only in the instantaneous character of the couplings among the oscillators, namely that the interactions between the different dynamical units are assumed to be impulsive.

In our general context most states $x_i \in M_i$ are, by definition, called “off states” of the oscillator i . On the other hand, the “on” states are defined as follows: there exists a codimension-one embedded submanifold $\Delta_i \subset M_i$, such that $\#(A_i \cap \Delta_i) = 1$, which is called the “threshold level” of the oscillator i , and such that if $x_i(t) \in \Delta_i$, then the oscillator i instantaneously “turns on” at time t . If an oscillator i is coupled to an oscillator $j \neq i$, and at the times t such that $x_i(t) \in \Delta_i$ (namely when i “turns on”), it instantaneously injects a discontinuity jump $\epsilon_{i,j} \in T_{x_j(t)}M_j$ in the state $x_j(t) \in M_j$ of the oscillator j . This instantaneous interaction is void if the respective discontinuity jump $\epsilon_{i,j} : M_j \mapsto T_{x_j(t)}M_j$, which depends on $x_j(t)$, is the identically null map. If an interaction is not void, it is called “excitatory” if the discontinuity jump $\epsilon_{i,j}$ approaches the state x_j of the oscillator j to its “on” state. Namely, the instantaneous injection of the discontinuity $\epsilon_{i,j}$ approaches x_j to the codimension one manifold $\Delta_j \subset M_j$. In other words, if the interaction from i to j is excitatory, then, the on-state of the oscillator i produces that j reaches sooner its own threshold level, and so j will also “turn on” sooner. Analogously, it is defined the “inhibitory” interaction, when the discontinuity jump $\epsilon_{i,j}$ makes the state x_j to become suddenly farer from its threshold level, and thus the oscillator j will be delayed to turn on.

2 The synchronization theorem.

We analyze the dynamics of the composed dynamical system on M described above, discussing according to the bi-directed and signed graph of interactions among the oscillators. Under certain configurations of the subgraph of excitatory interactions, and under the assumptions that the number n of oscillators which are mutually coupled in that subgraph, is large enough, and that the minimum excitatory interaction is strong enough, we prove the following result:

The composed system synchronizes the on phases, even if the oscillators are mutually very different, and ϵ -quasi synchronizes all the phases, if the periods of all the oscillators are similar.

The “ ϵ -quasi synchronization of all the phases” is defined as follows: For each initial condition there exists a transitory time $t_0 \geq 0$, such that for all pair of oscillators i, j , after an homeo-

morphic rescaling of times $s_{i,j}$ which is ϵC^0 -near the identity, the equality $x_i(t) = x_j(s_{i,j}(t))$ holds for all $t \geq t_0$. We also prove, even if the oscillators are very different, that the composed system acquires its own periodic or quasi periodic behavior, with its own period or quasi-period T . This period, in the case of synchronization of the on states, is usually different and not a multiple of the periods T_i of the individual oscillators, even if, in some particular cases T may be near the period of some “dominant” oscillator of the network.

The route of our proof follows the ideas introduced in [7].

3 Conclusions

The main novelty of our results, in relation to the previous ones [6], [9], [7], [11], in which we were inspired, is that the individual oscillators are not assumed to be identical, and principally that they may evolve in very general manifolds M_i of any finite dimensions d_i , and almost no condition is imposed to the individual dynamics of each of them. In [2], [4], [8], [13], [14], are studied systems composed by two oscillators instantaneously coupled, while in [1], [3], [5], [12], are analyzed the attractors, and in particular the synchronization modes, of large networks of heterogeneous oscillators under some particular hypothesis.

In the present work, each oscillator (if were isolated from the others) is just assumed to behave dynamically as the integral flow of any C^1 vector field $F_i \in \mathcal{X}^1(M_i)$, just provided to exhibit a periodic attractor, with an open local basin, and such that the orbits in this basin are transversal to the codimension one manifold $\Delta_i \subset M_i$ defined above. The second largest difference with some of those previous works, is that in the present communication, we do not assume any particular formulation of the family $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ of vector fields, also nor any particular formulation nor regularity, of the interaction maps $\epsilon_{i,j}$. On the contrary, in most of the previous works, the interaction maps are usually assumed to be constants, and also highly regular or tight numerical conditions are imposed to the set of vector fields F_i .

As in [15], we also consider the possible existence of different sync modes with different basins of attractions. In other words, the composed system of the coupled oscillators may exhibit many different periodic sync states, and different periods, depending on the initial condition $\mathbf{x} \in \Pi_{i=1}^n M_i$.

The main restriction in our hypothesis is that the couplings are assumed to have zero delay. It is open the problem to extend the results in the case in which the couplings have a positive delay time, as defined for instance in [10]. It remains open the problem of extending our abstract results, if possible, for networks of coupled on-off oscillators that interact not instantaneously and with some positive delays.

Some of the results so obtained can be also extended if the attractors of the different dynamical units are not periodic. For instance, some of the tools in the proofs of our synchronization result, may be extended to study the synchronization or quasi synchronization, of many dynamical subsystems that exhibit identical or maybe similar non periodic attractors, in particular chaotic attractors, provided that the individual units are coupled by instantaneous interactions.

References

- [1] Budelli R; Catsigeras E; Rovella A; Gómez L: Dynamical behavior of pacemaker neurons networks. *Journal of Nonlinear Analysis*, Vol. 30 No. 3 , pp 1633-1638 (1998)
- [2] Budelli R, Torres J, Catsigeras E, Enrich H: Two neurons network, I: Integrate and fire pacemaker models. *Biol. Cybern.* Vol. 66, pp. 95-110.(1991)

- [3] Catsigeras, E: Chaos and stability in a model of inhibitory neuronal network. *Int. Journ. of Bif. and Chaos*
- [4] Catsigeras E, Budelli R: Limit cycles of a bineuronal network model. *Physica D*, Vol. 56, pp. 235-252. (1992)
- [5] C  ssac, B: A discrete time neural network model with spiking. *J. Math. Biol.* Vol. 54, pp. 311-345 (2008)
- [6] Carroll, TL; Heagy, J; Pecora LM: Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators. *Physics Letters A* 186 pp. 225-229 (1994)
- [7] Catsigeras, E; Guiraud, P: Integrate and Fire Neural Networks, Piecewise Contractive Maps and Limit Cycles.(Submitted.) Preprint in ArXiv 1011.1525v1 and PREMAT 2011/129 (2010)
- [8] Kahan, S; Hernández, G; Cabeza, C; Martí, AC: Attractors on Piecewise Analytical Pulse-Coupled Oscillators. Preprint Papers in Physics. (2010)
- [9] Mirollo, R; Strogatz, S: Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.50, N 6, pp. 1645-1662 (1990)
- [10] Masoller, C; Torrent, MC; García-Ojalvo, J: Dynamics of globally delay-coupled neurons displaying subthreshold oscillations. *Phil. Trans. R. Soc. A* 28 August 2009 vol. 367 no. 1901 3255-3266 (2009)
- [11] Pikovsky, A; Rosenblum, M: Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators. *Physica D* Vol 238, No. 1, pp. 2737 (2009).
- [12] Pikovsky, A; Rosenblum, M: Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables. *Physica D* Vol. 240, No. 9-10, pp. 872-881 (2011).
- [13] Rubido, N; Cabeza, C; Kahan, S; Ramírez Ávila, GM; Martí, AC: Synchronization regions of two pulse-coupled electronic piecewise linear oscillators. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 2011, Vol. 62, No. 1, Pages 51-56 (2011)
- [14] Rubido, N; Cabeza, C; Martí, AC; Ramírez Ávila, GM: Experimental results on synchronization times and stable states in locally coupled light-controlled oscillators. *Phil. Trans. Royal Soc. A* 28. Vol. 367, No. 1901, pp. 3267-3280. (2009)
- [15] Wiley, D; Strogatz, SH; Girvan, M: The size of the sync basin. *Chaos* Vol. 16, No. 1, 8 pp. (2006)

XII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena (LAWNP-2011)

October 10 to October 14, 2011,
San Luis Potosi, Mexico

BOOK OF ABSTRACTS

Local organizers: M. Aldana ^(1,2), R. Rechtman ^(1,2), D. Sanders ^(2,3), E. Ugalde ^(2,4), J. L. Arauz Lara ⁽⁴⁾

(1) Instituto de Ciencias Físicas de UNAM

(2) Centro de Ciencias de la Complejidad UNAM

(3) Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM

(4) Instituto de Física, UASLP

Local organizing committee

Maximino Aldana *Instituto de Ciencias Físicas, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico*

Jose Luis Arauz Lara *Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Mexico*

Raúl Rechtman *Centro de Investigación en Energía, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico*

David Sanders *Facultad de Ciencias, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico*

Edgardo Ugalde *Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico*

International Advisory Committee

Celia Anteneodo *Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brazil*

Valentin Afraimovich *Instituto de Física Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Mexico*

Franco Bagnoli *Dipartimento di Energetica, Università degli Studi di Firenze, Italy*

Sergio Cannas *Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina*

Dante Chialvo *Northwestern University, USA*

Mario Cosenza *Centro de Física Fundamental, Facultad de Ciencias Universidad de los Andes, Venezuela*

Germinal Cocho *Instituto de Física, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico*

Marcos G.E. da Luz *Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Brazil*

Stéphan Fauve *Physique Non Linéaire, Laboratoire de Physique Statistique, France*

Jason Gallas *Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil*

Holger Kantz *Max-Planck-Institut für the Physik komplexer Systeme, Germany*

Raymond Kapral *Chemical Physics Theory Group University of Toronto, Canada*

Stuart Kauffman *University of Vermont, USA*

Marcelo Kuperman *Grupo de Física Estadística e Interdisciplinaria, Centro Atómico Bariloche, Argentina*

Ricardo Lima *Dream and Science Factory, France, Institute for Complexity Science, Portugal*

Katja Lindenberg *Department of Chemistry and Biochemistry, University of California San Diego, USA*

Pablo A. Marquet *Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile*

Arturo Martí *Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Montevideo, Uruguay*

Gustavo Martínez-Mekler *Instituto de Ciencias Físicas, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico*

Cristina Masoller *Department de Física e Enginyeria Nuclear, ETSEIAT, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain*

Cristian Moukarzel *Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Mérida, Instituto Politécnico Nacional, Mexico*

Silvina Ponce-Dawson *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de*

Buenos Aires, Argentina

Marcelo Ramírez Centre Interdisciplinaire de Phénomènes Non-linéaires et de Systèmes Complexes, Bruxelles, Belgique

Christopher Stephens Instituto de Ciencias Nucleares, Centro de Ciencias de la Complejidad, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico

Enrique Tirapegui Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Chile

Angelo Vulpiani Dipartimento di Fisica Università di Roma "La Sapienza", Italy

Horacio Wio Instituto de Física de Cantabria Universidad de Cantabria, Spain

The XII Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena (LAWNP2011), will be held in San Luis Potosi, Mexico, from October 10 to October 14, 2011.

This international conference will be the twelfth in a series of Latin American Workshops that have taken place every two years to discuss different aspects of nonlinear phenomena. The previous meetings took place in Buzios, Brazil in 2009, Arica, Chile in 2007, Bariloche, Argentina in 2005, Salvador, Brazil in 2003, Cocoyoc, Mexico in 2001, Cordoba, Argentina in 1999, Canela, Brazil in 1997, Bariloche, Argentina in 1995, Mar del Plata, Argentina in 1993, Santiago, Chile in 1990, and Mar del Plata, Argentina in 1988.

The workshop will center on nonlinear dynamics, in particular spatially-extended dynamics, and out-of-equilibrium phenomena. A partial lists of subjects follows: space-time chaos, synchronization, pattern formation, coherent structures, morphogenesis and developmental biology, far from equilibrium phase transitions, granular materials, inelastic gases, coarsening, aging, nanomachines, reaction kinetics, instabilities and bifurcations, nonlinear fluid dynamics, dynamics of complex systems, and dynamics on complex networks.

The Local Organizing Committee acknowledges the help and support of the members of the International Advisory Committee and of all the participants. The support of the following is gratefully acknowledged:

- Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, Mexico
- Centro de Ciencias de la Complejidad through the Thematic Network on Complexity, Science and Society (C3)
- Centro Latino-Americano de Física (CLAF)
- Sociedad Mexicana de Física (SMF)
- Proyecto Universitario de Fenómenos no Lineales y Mecánica (FENOMECA), Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico
- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)
- Centro de Investigación en Energía, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico

Invited Talks

Afraimovich, Valentin

Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México.

Sequential behavior in dynamical networks

Complex networks such as the neuronal ones composed of neurons coupled by chemical synapses are known to exhibit a large variety of activity forms. Recent neurophysiological experiments have shown that neuronal processes are often accompanied by short transitive activity of individual elements or small groups of elements. Such a behavior is called the sequential dynamics. In the framework of dynamical systems theory this behavior is related to the existence of a collection of metastable invariant sets joint by heteroclinic trajectories in the phase space. The sequential dynamics can be treated as a process of successive switching among these sets. Such a treatment allows one to explain the temporal order in which elements become activated and to single out the parameters of the system responsible for its prediction (see cited articles and the references therein). In the talk it is supposed to tell about both the situation where metastable sets are just equilibrium points or limit cycles and where they are more complex sets.

References:

1. M.K. Muezzinoglu, I. Tristan, R. Huerta, V.S. Afraimovich, M.I. Rabinovich. Transients Versus Attractors in Complex Networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 20, No. 6, 1653-1675, 2010.
2. M.I. Rabinovich, V.S. Afraimovich, P. Varona. Heteroclinic Binding. *Dynamical Systems*. Vol 25, No. 3, 433-442, 2010.
3. V. Afraimovich, M.K. Muezzinoglu, T. Young, M.I. Rabinovich. NONLINEAR DYNAMICS OF MENTAL PROCESSES: EMOTION-COGNITION INTERACTION. *Bulletin of Mathematical Biology*. Vol 73, No. 2, 266-284, 2010.

Albano, Ezequiel[1,2] and Baglieto, Gabriel[1]

[1] *Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos. CCT La Plata. CONICET, UNLP, La Plata, Argentina.* [2] *Departamento de Física, F. de Ciencias Exactas, UNLP, La Plata, Argentina.*

On the collective behavior of self-driven individuals

The study of flocking behavior has attracted interdisciplinary interest due not only to their fascinating characteristics and their ubiquity in all scales, but also for their complex nature. Modeling of swarming and flocking contributes to the understanding of natural phenomena and becomes relevant for many practical and technological applications, e.g. collective robotic motion, design and control of artificial micro swimmers, etc. [1-7]. Within this broad context, the Vicsek Model (VM) [2], which considers individuals that try to adopt the direction of movement of their interacting neighbors, under the influence of some noise, e.g. due to the environment, has gained large popularity becoming an archetypical model for the study of the onset of order upon the interactive displacement of self-driven individuals. The simple rules of the VM guarantee the observation of a rather complex and interesting critical behavior: an ordered phase of collective motion is found for low enough levels of noise, while a disordered phase is observed at high noise. However, the nature of the phase transition between those phases could be of first- or second-order, depending on the type of considered noise [4,5,7]. The aim of this paper is to investigate the structural characteristics of the networks formed among the self-driven individuals during the far-from equilibrium stationary states of the VM. We expect that the proposed study will shed some light on some poorly understood characteristics of the VM, such as the origin of

Talks and posters

Almendral Sanchez, Juan Antonio

Unveiling Protein Functions through the Dynamics of the Interaction Network

Cutting-edge technologies are adding sequences to the databases faster than the pace at which insights into their function can be gained. As a consequence, the vast majority of known proteins have not been characterized experimentally, and their function is yet unknown. To predict the function of a protein, two main strategies have been followed so far. The first one relies on the analysis of the protein itself, and the second is based on high-throughput techniques. High-throughput protein-protein interactions detection experiments allow nowadays a representation of the global cell functioning in terms of a network, with nodes representing proteins and edges representing the detected mutual interactions. Notwithstanding the accomplishments of these analyses, it is important to highlight that most high-throughput methods can suffer from high false positive and false negative rates and, therefore, functional assignments that are based on these tools may lead to misclassifications. Several past studies attempted already to determine to what extent the function of a protein depends on the way it is interacting with the others in the protein interaction network (PIN). However, the use of such network representation for prediction requires the determination of the specific scale of the PIN that one has to consider for unveiling the individual protein function. And, in this latter framework, the current state of the art includes two types of approaches. From one side, several direct annotation schemes have been devised, with the common inspiration of analyzing the local scale features of the PIN. From the other side, more recent module assisted techniques have attempted to use the extra knowledge arising from the mesoscale of clustered structures of the PIN, by first identifying dense agglomerates in the network that are loosely connected to other areas of the graph, and then to use this topological information for predictions on the protein specific function. The approach we put forward constitutes a third, novel, strategy. We provide evidence that an alternative source of information is, in fact, the one arising from the analysis of how the modular PIN structure actually organizes the synchronization dynamics of an ensemble of oscillators. In particular, we show how the combination of synchronization features emerging in the PIN structure with a rudimentary classification of proteins based on expert manual assignment, allows, indeed, to gather information on misclassification problems, as well as to offer a more accurate function assignment that is consistent with more recent (and better refined) manual annotation of these protein functions. Not less important is the ability of the approach we introduce to assess the coupling of different functional categories, to determine how closely associated they are, and which proteins participate in both of them.

Authors: *Juan A. Almendral, I. Sendia Nadal, Y. Ofran, J.M. Buldu, I. Leyva, D. Li, S. Havlin, S. Boccaletti*

Affiliation: Complex Systems Group, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, Spain Complex Systems Group, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, Spain The Mina & Everard Goodman Faculty of Life Sciences, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel Complex Systems Group, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, Spain Complex Systems Group, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, Spain Department of Physics, Minerva Center, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel Department of Physics, Minerva Center, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel Computational Systems Biology Group, Center for Biomedical Technology, Madrid, Spain

dom are coupled through a mean field that evolves self-consistently. Based on the linear stability of period-one and period-two orbits of the coupled maps, we construct coherent states in which the degrees of freedom are synchronized and the mean field stays fixed. Nontwist systems exhibit global bifurcations in phase space known as separatrix reconnection. Here we show that the mean-field coupling leads to dynamic, self-consistent reconnection in which transport across invariant curves can take place in the absence of chaos due to changes in the topology of the separatrices. In the context of self-consistent chaotic transport we study two novel problems: suppression of diffusion and breakup of the shearless curve. For both problems we construct a macroscopic effective diffusion model with time-dependent diffusivity.

Authors: *L. Carbajal [1], D. del-Castillo-Negrete [2], J. J. Martinell [3].*

Affiliation: [1] Physics of Plasmas department ICN-UNAM, Mexico City, Mexico. [2] Fusion Energy Division ORNL, Oak Ridge, TN, USA. [3] Physics of Plasmas department ICN-UNAM, Mexico City, Mexico.

Catsigeras García, Eleonora

Synchronized dynamics of on-off oscillators with instantaneous coupling interactions.

We study a dynamical system with discontinuities, obtained as the evolution on time, in a product Riemannian manifold of large dimension, of any finite number n^2 of coupled oscillators of the type “on-off”. We assume that the interactions (couplings) among each individual dynamical system are instantaneous, and classify them in excitatory, inhibitory or null. We analyze the sync modes, provided that the graph of excitatory interactions is large enough and satisfies some particular topological conditions. The main novelties with respect to previous results, in which we were inspired, are that we do not impose any particular formula for the vector fields governing the dynamics of each individual oscillator during their “off” phases, the number of oscillators in the system may be any n^2 , and the individual dynamics while are not coupled, do not need to be identical.

Authors: *E. Catsigeras [1] and M. Shannon [2]*

Affiliation: [1] Instituto de Matemática. Universidad de la República. Uruguay eleonora@fing.edu.uy
[2] Instituto de Matemática. Universidad de la República. Uruguay mariosshannon@hotmail.com

Cervantes, Fernando

Multifractal characterization of the porous structure of sodium silicate gels

A distinctive feature of silicate gels is the porosity of its structure, in these gels the connectivity, spatial and size distribution of pores depend on the complexity of the conditions during the polymerization process. In general, the porous structure of the gel does not exhibit an obvious order [1]. However, through multifractal analysis, one can determine a number of correlations in it. These correlations generally can be described by scaling relations, i.e., they show a power law dependence. As reported in the literature structures resulting from aggregation processes show a complex multifractal structure in general [2,3]. In this work we characterize the complexity of the porous structure in sodium silicate gels through the mass fractal dimension, multifractal spectrum, lacunarity index, etc. Silicate gels were prepared by neutralizing a solution of sodium metasilicate with another solution of acetic acid, both in concentration 1M. Additionally, ferromagnetic particles were dispersed in these gels and a static magnetic field was applied during the polymerization process. The digital image analysis showed that the porous structure of the samples presents multifractal characteristics.

5

CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Observable measures. Talk in the International Conference on Dynamical Systems Celebrating the 70th. Anniversary of Jacob Palis, Buzios, RJ Brazil, February 25th. to March 5th, 2010</i>	2010	5
-----------------------------	--	------	---

Observable measures.

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich *

Presented to the International Conference on Dynamical Systems.
Celebrating the 70th anniversary of Jacob Palis.
Búzios, Rio de Janeiro, from February 25th to March 5th, 2010.

Abstract

For continuous maps on a compact manifold M , particularly for those that do not preserve the Lebesgue measure m , we define the *observable invariant probability measures* as a generalization of the physical measures. We prove that any continuous map has observable measures and characterize those that are physical in terms of the observability. We prove that there exists physical measures whose basins cover Lebesgue a.e, if and only if the set of all observable measures is finite or infinite numerable. We define for any continuous map, its *generalized attractors* using the set of observable invariant measures where there is no physical measure and prove that any continuous maps defines a decomposition of the space in up to infinitely many generalized attractors whose basins cover Lebesgue a.e.

1 Introduction

It is an old problem to find out “good” probability measures for maps $f: M \mapsto M$, meaning for that, an invariant probability that resume in some sense, the asymptotic dynamics by future iterations of the map. Sometimes, the map is born with a good measure, as in the case of billiards. But this is not true in general, and it is not an easy question to determine, in general, a single or a few probability measures representing the dynamics of the map.

There have been proposed several ideas to define a “good” invariant probability measure μ :

1. Lebesgue a.e. point in a set is generic with respect μ , that is, $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_f^j(x)$, where the convergence is in the weak* topology of the space $\mathcal{P}$ of probabilities on M .
2. The conditional measures of μ on unstable manifolds are absolutely continuous respect to the Lebesgue measure along those manifolds.
3. μ verifies the Pesin’s formula: $h_\mu(f) = \int \sum_i \lambda_i^+(x) \dim E_i(x) d\mu(x)$, where $\dim E_i(x)$ is the multiplicity of $\lambda^+(x)$ in the Oseledec’s decomposition.
4. The measure is the limit of measures which are invariant under stochastic perturbations.

A measure verifying 4 or 1 “concentrates” on points which are more visited.

We will call physical measure, a probability measure verifying 1, and denote stochastically stable, a probability measure verifying 4. We will call SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) measure a probability verifying 2. And we denote as a Pesin measure, a probability verifying 3.

*Both authors: Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. E-mails: eleonora@fing.edu.uy and enrich@fing.edu.uy Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

In this work, we address ourselves to propose another concept of “good” probabilities, which we call observable measures, that are particularly meaningful for non differentiable maps.

The following purposes motivated this work: Characterize the continuous homeomorphism f conjugated to transitive Anosov (topologically chaotic), that have a physical measure attracting the time average of Lebesgue almost all orbit. If not possible, at least generalize as much as possible the result in [CE01]. In any case, the main question is:

Is it possible to describe probabilistically in the space, in some *minimal way*, the asymptotic behavior of the time averages of Lebesgue a.e. orbit? We could answer to this question in Theorem 2.5. Generalized ergodic attractors and observable measures always exist for any continuous map. (Theorems 2.3 and 2.8). On the other hand, physical measures and ergodic attractors do not always exist. It is largely known the difficulties to characterize, or just find, non hyperbolic or non $C^{1+\alpha}$ maps that do have physical measures. This is a hard problem even in some systems whose iterated topological behavior is known. ([C93], [E98], [H00], [HY95]). The difficulties appear when applying the known techniques for constructing the physical measures in a hyperbolic setting, to a weaker hyperbolic context ([Pe77], [S72], [A67], [PS04], [V98], [BDV00]).

The following open question refers to the existence and finiteness of physical measures and to the convergence of the sequence of time averages of Lebesgue a.e. orbit. It is posed in [P99] and leads to a global understanding of the dynamics from an ergodic viewpoint:

1.1 Palis Conjecture *Most dynamical systems have up to finitely many physical measures (or ergodic attractors) such that their basins of attraction cover Lebesgue almost all points.*

This conjecture admits the following equivalent statement, that seems weaker. (In fact, the definition 2.1 of observability is certainly weaker than the definition 2.2 of physical measures.)

1.2 Equivalent formulation of Palis Conjecture: *The set of observable measures for most dynamical systems is finite.*

Note: To prove the equivalence of statements 1.1 and 1.2 it is enough to join our Theorems 2.3.b and 2.5.

2 Statement of the results.

Let $f: M \mapsto M$ be a continuous map in a compact, finite-dimensional manifold M . Let m be the Lebesgue measure normalized to verify $m(M) = 1$, and not necessarily f -invariant. We denote $\mathcal{P}$ the set of all Borel probability measures in M , provided with the weak* topology, and a metric structure inducing this topology. For any point $x \in M$ we denote $p\omega(x)$ to the set of the Borel probabilities in M that are the partial limits of the (not necessarily convergent) sequence

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

where δ_y is the Delta de Dirac probability measure supported in $y \in M$.

The set $p\omega(x) \subset \mathcal{P}$ is the collection of the spatial probability measures describing the asymptotic time average, provided the initial state is x . If the sequence (1) converges then the set $p\omega(x) = \{\mu_x\}$. But we will consider also the opposite case of the maps such that, for Lebesgue a.e. $x \in M$, the sequence (1) is not convergent.

The phenomena exhibited when (1) is not convergent are similar to the time-delayed specification properties studied by Bowen in ([BR75]), but here they are seen on the time average probabilities, instead on the points along the orbit.

We define:

Definition 2.1 (Observable probability measures.) A probability measure $\mu \in \mathcal{P}$ is *observable* if for all $\epsilon > 0$ the set $A_\epsilon = \{x \in M : \text{dist}^*(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}$ has positive Lebesgue measure $m(A_\epsilon) > 0$.

The set $A_\epsilon = A_\epsilon(\mu) \subset M$ is called the ϵ -basin of partial attraction of the probability μ .

We note that the definition above is independent of the choice of the distance in $\mathcal{P}$, provided that the metric structure induces its weak* topology. We also remark that observable measures are f -invariant, and that usually at most a few part of the space of invariant measures for f are observable measures.

Definition 2.2 (Physical probability measures.) A probability measure $\mu \in \mathcal{P}$ is *physical* (even if it is not ergodic), if the set $B = \{x \in M : p\omega(x) = \{\mu\}\}$ has positive Lebesgue measure $m(B) > 0$.

If μ is physical, the set $B = B(\mu) \subset M$ is called the *basin of attraction* of μ .

From the definitions above note that physical measures and observable measures are f -invariant. All physical measure is observable but not all observable measure is physical.

We prove the following starting results:

Theorem 2.3 (Existence of observable measures and physical measures.)

a) For any continuous map f , the set $\mathcal{O}$ of all observable probability measures for f is non-empty and weak*-compact.

b) $\mathcal{O}$ is finite or countably infinite if and only if there exist (resp. finitely or countable infinitely many) physical measures of f attracting (i.e. the union of their basins of attraction cover) Lebesgue almost all orbits.

Definition 2.4 (Basin of attraction.)

The *basin of attraction* $B(\mathcal{K})$ of a compact subset $\mathcal{K}$ of the space $\mathcal{P}$ of all the Borel probability measures in M , is the (maybe empty) subset of M defined as:

$$B(\mathcal{K}) = \{x \in M : p\omega(x) \subset \mathcal{K}\}$$

If the purpose is to study the asymptotic to the future time average behaviors of Lebesgue almost all points in M , then the set $\mathcal{O}$ of all observable measures for f is the exact necessary and sufficient solution. In fact we have the following:

Theorem 2.5 (Attracting minimality property of the set of observable measures.)

The set $\mathcal{O}$ of all observable measures for f is the minimal compact subset of the space $\mathcal{P}$ whose basin of attraction has total Lebesgue measure.

Due to the conjecture in 1.1 and Theorem 2.3, we are interested in partitioning the set $\mathcal{O}$ of observable measures, or to reduce it as much as possible, into different compact subsets whose basins of attractions have positive Lebesgue measure. Due to results in Theorem 2.5, no proper compact part of $\mathcal{O}$ has a total Lebesgue basin. We define:

Definition 2.6 (Generalized Attractors - Reductions of the space $\mathcal{O}$.) A *generalized attractor* $(A, \mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \times \mathcal{O}$, (or a *reduction* $\mathcal{A}$ of the space $\mathcal{O}$ of all observable measures for f), is a compact subset $(A, \mathcal{A})$ such that the basin of attraction $B(\mathcal{A}) = \{x \in M : p\omega(x) \subset \mathcal{A}\}$ has positive Lebesgue measure in M , and A is the (minimal) compact support in M of all the probability measures in $\mathcal{A}$. We call $(A, \{\mu\})$ an *attractor* if it is a generalized attractor with a single invariant probability μ , i.e. μ is a physical measure.

To illustrate the difference between generalized attractor and attractor in the usual topological sense, take the C^2 almost Anosov, conjugated to a transitive Anosov in the torus, with a fixed non hyperbolic saddle p_0 with weak expansive direction and strong contraction. It has a unique generalized attractor supported on p_0 . Even if topologically chaotic (conjugated to Anosov), statistically in the mean p_0 acts like a sink.

In spite a system could not exhibit a physical measure, still the reductions of the space of observable measures divide the manifold in the basins of *generalized attractors*.

Definition 2.7 Irreducibility

A generalized attractor $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ is *irreducible* if it does not contain proper compact subsets that are also generalized attractors.

It is *trivial* or *trivially irreducible* if its diameter in $\mathcal{P}$ is zero, or in other words, if $\mathcal{A}$ has a unique observable measure μ .

Note that physical measures are trivially irreducible and conversely.

The following result is much weaker but related with the Palis' conjecture stated in paragraph 1.1:

Theorem 2.8 (Decomposition Theorem)

For any continuous map $f: M \mapsto M$ there exist a collection of (up to countable infinitely many) generalized attractors whose basins of attraction are pairwise Lebesgue-almost disjoint and cover Lebesgue-almost all M .

The continuous maps divide in two disjoint classes:

- The generalized attractors of the decomposition are all irreducible and then the decomposition is unique.
- For all $\epsilon > 0$ there exist a decomposition for which the reducible generalized attractors have all diameter (in the weak* space of probabilities), smaller than ϵ (and thus, for a rough observer, all the reducible generalized attractors of the decomposition act as physical measures).

Acknowledgements.

We thank the invitation of the organizers and scientists of the International Conference on Dynamical Systems and congratulate Jacob Palis in his 70th anniversary.

References

- [A67] D.V.Anosov: *Geodesic flow on closed Riemannian manifolds of negative curvature*. Proc.Steklov.Inst.Math **90** 1967.
- [A01] V. Araújo: *Infinitely many stochastically stable attractors*. Nonlinearity **14**. 2001. pp. 583-596
- [BDV05] C. Bonatti, L. Díaz, M. Viana: *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **102**. 2005.
- [BDV00] C. Bonatti, M. Viana: *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contractive*. Israel J. Math. **115**. 2000. pp. 157-194
- [B71] R. Bowen: *Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms*. Trans. Amer.Math.Soc. **154**. 1971. pp. 377-397
- [BR75] R.Bowen, D.Ruelle: *The ergodic theory of Axiom A flows*. Invent.Math. **29**. 1975. pp. 181-202
- [C93] M.Carvalho: *Sinai-Ruelle-Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms*. Ergod. Th. and Dyn. Sys. **13**. 1993. pp. 21-44
- [CE01] E.Catsigeras, H.Enrich: *SRB measures of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency*. Disc. and Cont. Dyn. Sys. **7**. 2001. pp. 177-202
- [Co98] E. Colli: *Infinitely many coexisting strange attractors*. Ann. de l'IHP.An. non linéaire **15**. 1998. pp. 539-579
- [E98] H.Enrich: *A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms*. Ergod. Th. and Dyn. Sys. **18**. 1998. pp. 567-608
- [HY95] H.Hu, L.S.Young : *Nonexistence of SRB measures for some diffeomorphisms that are almost Anosov* Ergod. Th. and Dyn. Sys. **15** 1995. pp. 67-76

- [H00] Hushi Hu : *Conditions for the existence of SRB measures for Almost Anosov diffeomorphisms*. Trans. Amer.Math.Soc. **352** 2000. pp. 2331-2367
- [LY85a] Ledrapiér, L. S. Young: *The metric entropy of diffeomorphisms. Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*. Annals of Mathematics **122** 1985. pp. 509-574
- [LY85b] Ledrapiér, L. S. Young: *The metric entropy of diffeomorphisms. Part II: Relations between entropy, exponents and dimension*. Annals of Mathematics **122** 1985. pp. 540-539
- [Le80] J. Lewowicz : *Lyapunov functions and topological stability*. Journ. of Diff. Eq. **38** 1980. pp. 192-209
- [M89] R.Mañé: *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag. 1989.
- [P99] J.Palis: *A global view of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*. Astérisque **261** 1999. pp. 339-351
- [Pe77] Ya.B.Pesin: *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*. Russian Math. Surveys **32** 1977. pp. 55-112
- [PS82] Ya.B.Pesin, Ya.G.Sinai: *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors*. Ergod. Th. and Dyn. Sys. **2** 1982. pp. 417-438
- [PS89] C.Pugh, M.Shub: *Ergodic Attractors*. Trans. Amer.Math.Soc. **312** 1989 pp. 1-54
- [PS04] C.Pugh, M.Shub: *Stable ergodicity*. Bull. Amer.Math.Soc. **41** 2004. pp. 1-41
- [R76] D.Ruelle: *A measure associated with axiom A attractors*. Amer. Journ. of Math. **98** 1976. pp. 619-654
- [S72] Ya.G.Sinai: *Gibbs measure in ergodic theory*. Russ. Math. Surveys **27** 1972. pp. 21-69
- [V98] M. Viana: *Dynamics: a probabilistic and geometric perspective*. Proceedings of the International Congress of Mathematics at Berlin. Doc. Math. Extra **Vol. I** 1998 pp. 395-416
- [Y] L. S. Young: *What are SRB measures and which dynamical systems have them?* J. Stat. Phys. **108-5** 2002 pp. 733-754

Observable Measures

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich

Instituto de Matemática - Universidad de la República - Uruguay

eleonora@fing.edu.uy, enrich@fing.edu.uy

International Conference on Dynamical Systems.

Celebrating the 70th. anniversary of Jacob Palis.

Búzios, Rio de Janeiro, from February 25th. to March 5th., 2010

"Good" invariant probabilities

They resume in some minimal sense, the asymptotic dynamics.

- **Physical measure μ :** The point x in a **positive Lebesgue measure set**, is generic with respect μ , i.e:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_f^j(x)$$

- **Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) measure μ :** The conditional measures of μ on unstable manifolds are **absolutely continuous respect to the Lebesgue measure** along those manifolds.
- **The probability μ verifies the Pesin's formula:**

$$h_\mu(f) = \int \sum_i \lambda_i^+(x) \dim E_i(x) d\mu(x)$$

Palis' conjecture

*Most dynamical systems have up to **finitely many physical measures** (or ergodic attractors) such that their basins of attraction cover Lebesgue a.e.*

Equivalent formulation of Palis' Conjecture: The set of **observable measures** (to be adequately defined) for most dynamical systems is finite.

Notations.

- $f: M \mapsto M$ is a continuous map in a compact, finite-dimensional manifold M .
- m be the Lebesgue measure normalized to verify $m(M) = 1$, (not necessarily f -invariant).
- $\mathcal{P}$ the set of all Borel probability measures in M , provided with a **metric structure** inducing the weak* topology. The set of f invariant probabilities is $\mathcal{P}_f$
- For any point $x \in M$: $p\omega(x)$
 is the set of the Borel probabilities in M that are the **partial limits** of the (not necessarily convergent) **sequence of empiric distribution**:

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

Definition of observable measure.

Definition

A probability measure $\mu \in \mathcal{P}$ is *observable* if for all $\epsilon > 0$ the set

$$A_\epsilon = \{x \in M : \text{dist}^*(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}$$

has **positive Lebesgue measure** $m(A_\epsilon) > 0$.

The set $A_\epsilon = A_\epsilon(\mu) \subset M$ is called *the ϵ -basin of partial attraction* of the probability μ .

Remarks: The definition above is independent of the choice of the distance in $\mathcal{P}$, (inducing the weak* topology). Observable measures are f -invariant. The Lebesgue measure of A_ϵ is **positive for all** $\epsilon > 0$, but may be zero for $\epsilon = 0$.

Definition

(Physical probability measures.) A probability measure $\mu \in \mathcal{P}$ is physical (even if it is not ergodic), if the set

$B = \{x \in M : p\omega(x) = \{\mu\}\}$ has positive Lebesgue measure $m(B) > 0$.

If μ is physical, the set $B = B(\mu) \subset M$ is called the basin of attraction of μ .

Remark: Any physical measure is observable but not all observable measure are physical.

Theorem

Existence of observable measures.

- a) *For any continuous map f , the set $\mathcal{O}$ of observable measures of f is not empty and weak*-compact.*
- b) *$\mathcal{O}$ is finite or countably infinite if and only if there exist (resp. finitely or countable infinitely many) physical measures whose basins of attraction cover Lebesgue a.e.*
- c) *There exists a unique physical measure whose basin is Lebesgue a.e. if and only if the set of observable measures has a unique probability.*

Minimality of the set of observable measures

Definition: The *basin of attraction* $B(\mathcal{K})$ of a compact subset $\mathcal{K}$ of the space $\mathcal{P}$ of all the Borel probability measures in M , is the (maybe empty) subset of M defined as:

$$B(\mathcal{K}) = \{x \in M : p\omega(x) \subset \mathcal{K}\}$$

If the purpose is to study the asymptotic to the future time average behaviors of Lebesgue almost all points in M , then **the set $\mathcal{O}$ of all observable measures for f is the exact necessary and sufficient set of probabilities.**

Theorem

The set $\mathcal{O}$ of all observable measures for f is the minimal compact subset of the space $\mathcal{P}$ whose basin of attraction has total Lebesgue measure.

Generalized Attractors.

Due to our motivation in the conjecture of Palis we are interested in partitioning the set $\mathcal{O}$ of observable measures, or to reduce it as much as possible, into different compact subsets whose basins of attractions have positive Lebesgue measure. But due to the Theorem of minimality, no proper compact part of $\mathcal{O}$ has a total Lebesgue basin.

Definition

(Generalized Attractors - Reductions of the space $\mathcal{O}$.) A *generalized attractor* $(A, \mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \times \mathcal{O}$, is a compact subset such that **the basin of attraction**

$$B(\mathcal{A}) = \{x \in M : p\omega(x) \subset \mathcal{A}\} \subset M$$

has positive Lebesgue measure.

- A is the (minimal) compact support in M of all the probability measures in $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$ is also called a “reduction” of the set of observable measures.
- In particular we call $(A, \{\mu\})$ an *attractor* if it is a generalized attractor with a single invariant probability μ , i.e. μ is a physical measure.

Examples: Conjugated to transitive Anosov 1.

- To illustrate the difference between generalized attractor and topological attractor: consider the C^2 almost Anosov, conjugated to a transitive Anosov in the two-torus, with a fixed non hyperbolic saddle p_0 with weak expansive direction (topologically expanding but with eigenvalue 1) and strong (hyperbolic) contraction. It has a unique generalized attractor supported on p_0 . (Hu and Young Ergod.Th.&Dyn.Sys. 15-1995) Even if topologically chaotic (conjugated to Anosov), statistically in the mean (i.e. attracting the sequences of empiric distributions) p_0 **acts like a sink.**

Examples: Conjugated to transitive Anosov 2.

- On the opposite situation, the example of Lewowicz (Journal of Diff.Eq. 38, 1980) in the two-torus, is a real analytic diffeomorphism, conjugated to a transitive Anosov, but non hyperbolic:

$$x = x + y + \sin(2\pi x), \quad y = y + \sin(2\pi x)$$

It preserves the Lebesgue measure m which is besides ergodic (C.E.2001, Disc.Cont.Dyn.Sys.7): therefore, in this example, m is a physical measure and the unique observable measure.

- **Open question:** Characterize the non singular homeomorphisms (or at least the C^1 diffeomorphisms that are not $C^{1+\alpha}$) in the torus, that are conjugated to transitive Anosov and have a unique physical measure attracting Lebesgue a.e.

Examples: C^1 expanding maps 1.

- It is well known that $C^{1+\alpha}$ expanding maps have a single physical measure attracting Lebesgue a.e. that is absolute continuous respect to Lebesgue (Ruelle).
- If f is not $C^{1+\alpha}$ but is C^1 and expanding, then generically it also has a single physical measure attracting Lebesgue a.e., but it is **mutually singular respect to Lebesgue**.
(Campbell and Quas, Commun.Math.Phys. 349, 2001).
- In this last case the physical measure verifies the Pesin's formula of the entropy (C.E.2010, using ideas of the book of Keller, 1998)

Examples: C^1 expanding maps 2.

- There exist C^1 expanding maps in the circle, that have no physical measure attracting Lebesgue a.e. : the Lebesgue measure is invariant but not ergodic (Quas, Ergod.Th. & Dyn.Sys.16 (1996). Thus, in this example the set of observable measures contains more than one probability, and is exactly the closure of the set of the ergodic components of the Lebesgue measure.

In spite a system could not exhibit a physical measure, still the reductions of the space of observable measures divide the manifold in the basins of **generalized attractors**.

Definition

Irreducibility

A generalized attractor $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ is *irreducible* if it does not contain proper compact subsets that are also generalized attractors.

It is *trivial* or *trivially irreducible* if its diameter in $\mathcal{P}$ is zero, or in other words, if $\mathcal{A}$ has a unique observable measure μ . (Physical measures are trivially irreducible and conversely.)

The following result is much weaker but related with the Palis' conjecture:

Theorem

(Decomposition Theorem)

For any continuous map $f: M \mapsto M$ there exist a collection of (up to countable infinitely many) generalized attractors whose basins of attraction are pairwise Lebesgue-almost disjoint and cover Lebesgue-almost all M .

The continuous maps divide in two disjoint classes:

- *The generalized attractors of the decomposition are all irreducible and then the decomposition is unique.*
- *For all $\epsilon > 0$ there exist a decomposition for which the reducible generalized attractors have all diameter (in the weak* space of probabilities), smaller than ϵ (and thus, for a rough observer, all the reducible generalized attractors of the decomposition act as physical measures).*

6

CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>Observable asymptotic probabilities on deterministic dynamical systems . Talk in the VIII Escuela de Invierno de Análisis Estocástico y Aplicaciones, Valparaíso, Chile, 19 al 23 de julio de 2010.</i>	2010	6
-----------------------------	--	------	---

Observable asymptotic probabilities on deterministic dynamical systems

Eleonora Catsigeras, Heber Enrich *

Talk in the
VIII Escuela de Invierno de Análisis Estocástico
y Aplicaciones,
Valparaíso, Chile, 2010

*Affiliation of the authors:

Inst. de Matemática, Fac. de Ingeniería, Univ. de la República, Uruguay.
Postal Address: J. Herrera y Reissig 565. CP 11300 Montevideo, Uruguay.
E-mails: eleonora@fing.edu.uy, enrich@fing.edu.uy

Observable asymptotic probabilities on deterministic dynamical systems

Eleonora Catsigeras, Heber Enrich

Abstract

We first prove that any continuous deterministic dynamical system defined on a compact metric space, has at least one observable probability measure, which is not necessarily ergodic but is intrinsic to the system.

Observable measures describe the asymptotic behavior of the system. They are defined after an arbitrary probability distribution m is given and fixed as a reference, and after assuming that the initial states of the system distribute according with the probability m .

Usually the reference probability m is a normalized finite Lebesgue measure derived from a volume form, if the space is a finite dimensional riemannian manifold.

We do not restrict the system to be conservative, that is, it does not necessarily preserve

the reference probability μ . In most known non conservative examples the observable probabilities, obtained asymptotically in the future, are mutually singular with the reference measure.

We prove that the set of all observable probabilities is weak* compact. We define the global attractor A as the minimal compact support of all the observable probabilities.

Our second result states that the statistical basin of attraction of A , covers μ -almost all the space.



VIII Escuela de Invierno de Análisis Estocástico y Aplicaciones – Valparaíso 2010

Programa

Mini Cursos:

- **Pierre Collet**; Département de Physique Théorique, École Polytechnique, Francia.
Título : ***Dynamical Systems and Stochastic Processes***
Horario : Lunes 19 y martes 20 de julio de 10:00 a 11:30 horas y Miércoles 21 de 12:00 a 13:30 horas.
- **Madalin Guta**; School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, Inglaterra.
Título: ***An introduction to Quantum Statistics***
Horario: Lunes 19 de Julio de 15:00 a 16:30 horas. Miércoles 21 y jueves 22 de julio de 10:00 a 11:30 horas.
- **Michèle Thieullen**; Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI, Francia. Título: ***Probabilistic Methods in Neuroscience***
Horario: Lunes 19, Martes 20 y Jueves 21 de julio de 12:00 a 13:30 horas.

Conferencias: Probabilidades y Estadística.

- **Rolando de la Cruz**; Depto. de Salud Pública, P. Universidad Católica de Chile.
Título: ***Flexible Modeling of Random Effects in Nonlinear Mixed-Effects Models***
Horario: Martes 20 de julio de 15:00 a 15:45 horas
- **Víctor Leiva**; Universidad de Valparaíso – Chile.
Título: ***Modelamiento Estadístico Basado en Distribuciones Birnbaum-Saunders: Algoritmo EM, Robustez y Aplicaciones***
Horario: Martes 20 de julio de 15:45 a 16:30 horas
- **Mariela Sued**; Universidad de Buenos Aires, Argentina.
Título: ***Estimadores de posición para muestras con datos faltantes***
Horario: Martes 20 de julio de 17:00 a 17:45 horas
- **Renato Gava**; Universidad de Sao Paulo, Brasil
Título: ***El Proceso K.***
Horario: Martes 20 de julio de 17:45 a 18:15 horas.

Organizan





Sesión Especial: “Sistemas Dinámicos”

- **Eleonora Catsigeras**; Universidad de La República, Uruguay.
Título: ***Observable asymptotic probabilities on deterministic dynamical systems***
Horario: Jueves 22 de 15:00 a 15:45 horas
- **Arnaud Meyroneinc**; Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Venezuela.
Título: ***Sistemas de funciones iteradas especificados por redes: Modularidad en redes de regulaciones genéticas***
Horario: Jueves 22 de julio de 15:45 a 16:30 horas
- **Edgardo Ugalde**; Universidad Autónoma de San Luis de Potosí, México.
Título: ***Estados de equilibrio para redes unidimensionales***
Horario: Jueves 22 de julio de 17:00 a 17:45 horas

Sesión Especial: “Mat Bío”

- **Nelson Barrera**; P. Universidad Católica de Chile.
Título: ***Stochastic collisions between micelle embedded membrane proteins and gas molecules in vacuum***
Horario: Lunes 19 de julio de 16:30 a 17:15 horas
- **Justin Benesch**, Universidad de Oxford, Inglaterra.
Título: ***Measuring and Modelling the Structure and Dynamics of Heterogeneous Protein Assemblies***
Horario: Lunes 19 de julio de 17:15 a 18:00 horas

Tertulia Filosófica

Tema: ***“Debate sobre la causalidad en Física”***
Coordinador: Prof. **Wilfredo Quezada**, P. Universidad Católica de Chile.
Horario: Miércoles 21 de julio de 15:00 a 18:00 horas

LUGAR: Instituto de Sistemas Complejos de Valparaíso, Artillería 470, Cerro Artillería, Playa Ancha, Valparaíso



7

CATSIGERAS, E; CERMINARA, M.; ENRICH, H	<i>Simultaneous Continuation of Infinitely Many Sinks Near a Quadratic Homoclinic Tangency. Short communication in the III Congreso Latinoamericano de Matemáticos , Santiago de Chile, Agosto 31 a Septiembre 4, 2009</i>	2009	7
---	--	------	---

Simultaneous Continuation of Infinitely Many Sinks Near a Quadratic Homoclinic Tangency.

Eleonora Catsigeras, Marcelo Cerminara, Heber Enrich *

Short Communication to the
III Congreso Latinoamericano de Matemáticos.
Chile Agosto 2009

Abstract

We consider $f \in \text{Diff}^3(M)$ on a surface M , exhibiting infinitely many sinks near the generic unfolding of a quadratic homoclinic tangency Q_0 of a dissipative saddle. We prove that f belongs to an infinite dimensional submanifold $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$ such that the infinitely many sinks of f have, along $\mathcal{M}$, simultaneous isotopic continuations. Complementary, if f is perturbed along a one-parameter family that unfold generically the tangency Q_0 , then at most a finite number of those sinks have continuation.

1 Statement of the results

Let M be a two-dimensional C^∞ compact, connected riemannian manifold, and let $f_{t|t|<\varepsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ be a one-parameter family of C^3 diffeomorphisms on M . We assume that f_0 has a saddle periodic point P_0 and that it is dissipative in P_0 . We also assume that the diffeomorphism f exhibits at Q_0 a quadratic tangency between the stable and unstable manifold of P_0 and that the family unfolds it generically for $t > 0$. The Theorems of Newhouse and Robinson [N 1970], [N 1974], [N 1979], [R 1983], assert that, given $\varepsilon > 0$, there exists an open interval $I \subset (0, \varepsilon)$ and a residual set $J \subset I$, of values of the parameter t , such that:

For all $t \in I$, f_t has a hyperbolic maximal subset $\Lambda(f_t)$ with persistence of homoclinic quadratic tangencies in an open set $V \subset M$ isolated from $\Lambda(f_t)$.

*Affiliation of the three authors:

Inst. de Matemática, Fac. de Ingeniería, Univ. de la República, Uruguay.

Postal Address: J. Herrera y Reissig 565. CP 11300 Montevideo, Uruguay.

E-mails: eleonora@fing.edu.uy, cerminar@fing.edu.uy, enrich@fing.edu.uy

For all $t \in J$, f_t exhibits infinitely many simultaneous sinks.

Let us suppose that $g_0 \in \text{Diff}^3(M)$ exhibits a sink S_0 . Consider $g_1 \in \text{Diff}^3(M)$. We say that the sink S_1 of g_1 is the isotopic continuation of S_0 if there exists an isotopy $\{g_t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Diff}^3(M)$ such that for all $t \in [0, 1]$ there exists a sink $S_t = S(g_t)$ of g_t , and the transformation $t \in [0, 1] \mapsto S_t \in M$ is of C^1 class.

Now, we state our first main result:

THEOREM 1 *Let $f_0 \in \text{Diff}^3(M)$ exhibit a quadratic homoclinic tangency Q_0 of a dissipative saddle point P_0 on the surface M . Let $\{\tilde{f}_t\}_{-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ be a one-parameter family, which generically unfolds the tangency at Q_0 exhibited by f_0 .*

Then, there exist an open set $V \subset M$, an open interval $I \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, and a residual set $J \subset I$, such that, for all $f_\infty \in \{\tilde{f}_t : t \in J\}$:

1. f_∞ exhibits infinitely many coexisting sinks $S_i(f_\infty)$, $i \in \mathbb{N}$.
2. There exists a C^1 infinite-dimensional manifold $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$, such that:
 - (a) $f_\infty \in \mathcal{M}$
 - (b) If $g \in \mathcal{M}$ then g exhibits the isotopic continuation $S_i(g) \in V$ of the infinitely many sinks $S_i(f_\infty)$.

Theorem 1 states a condition for the simultaneous isotopic continuation of infinitely sinks: to move the diffeomorphism f_∞ along the infinite-dimensional manifold $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$. Our next Theorem 2 provides an opposite result: if moving the diffeomorphism along the given family $\tilde{f}_t$, such a simultaneous continuation is not possible.

THEOREM 2 *In the hypothesis of Theorem 1, the sets $V \subset M$, $J \subset I$ and the diffeomorphism $f_\infty \in \{\tilde{f}_t : t \in J\}$, can be constructed such that f_∞ verifies the thesis 1. and 2. of Theorem 1, and besides:*

If $t \in I$ and $f_t \neq f_\infty$, then $\tilde{f}_t$ exhibits, at most, a finite number of simultaneous isotopic continuations of the sinks $S_i(f_\infty)$.

From Theorem 2, we conclude that, if there exists some *maximal dimension*-manifold $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$, verifying the thesis a. and b. of Theorem 1, then $\mathcal{M}$ has at least codimension one. On the other hand, in our proof of Theorem 1, we construct the manifold $\mathcal{M}$ of infinite dimension but also of infinite codimension.

An open question, which we can precise now, is the following:

REMARK 1.1 Let $f_\infty \in \text{Diff}^3(M)$ and $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$, verifying parts a. and b. of Theorem 1.

Has $\mathcal{M}$ necessarily infinite codimension?

2 Route of the proofs.

To prove Theorem 1 we follow six Steps:

Step 1: Applying Newhouse Theorem of persistence of homoclinic tangencies [N 1970], consider an open set $\mathcal{N} \subset \text{Diff}^3(M)$ such that for all $f \in \mathcal{N}$:

There exists a hyperbolic maximal set $\Lambda(f)$, an open neighborhood $U \subset M$ of $\Lambda(f)$, an open neighborhood $V \subset U$ isolated from $\Lambda(f)$, and a C^1 line of quadratic tangencies $L(f) \subset V$ between the stable and unstable manifolds of $\Lambda(f)$, such that f exhibits persistence of homoclinic tangencies along $L(f)$. This last means that, for a dense subset of diffeomorphisms f in $\mathcal{N}$, there exists in $L(f) \subset V$ a homoclinic tangency point of a saddle of $\Lambda(f)$.

Construct any sequence $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of diffeomorphisms, along the given one-parameter family, such that $f_i \in \mathcal{N}$ and f_i has a homoclinic tangency Q_i of a periodic saddle $P_i \in \Lambda(f_i)$.

Step 2: Consider, as in [PT 1993] and [M 1973], trivializing coordinates of the local stable and unstable foliations in the neighborhood U of $\Lambda(f)$, for all $f \in \mathcal{N}$. Prove a strong dissipative property of $\Lambda(f)$, from the dissipative hypothesis of the first saddle P_0 . Conclude, using the r -normality, that the stable foliation is of class C^3 , while the unstable foliation is $C^{1+\theta}$.

Step 3: Compute the iteration $f^n|_V$ in the trivializing coordinates, as in [PT 1993], but adapting the computations, so the coordinates are chosen only once in the neighborhood U of $\Lambda(f)$, and are independent of the saddle point P_i . Generalizing to a wider context those computations in [PT 1993], prove the following key result:

Given $\epsilon > 0$, if the number n of iterates is large enough, then for all $f \in \mathcal{N}$ there exists a rectangle $V_{i,n} \subset V$ such that $f^n|_{V_{i,n}}$ is diffeomorphically conjugated to a C^1 -perturbation F of the quadratic family:

$$F(x, y) = (y^2, y^2 + \mu) + G(x, y), \quad \forall (x, y) \in [-4, 4]^2$$

for some constant $\mu \in [-4, 4]$ and some map G of C^1 -class such that $\|G\|_{C^3} < \epsilon$.

Step 4: From the key result above, if $\mu \in (-3/8, 1/8)$, the unique attracting fixed point of the quadratic map $(x, y) \mapsto (y^2, y^2 + \mu)$ persists as a sink for all its perturbations F , and so for the diffeomorphism $f^n|_{V_{i,n}}$ which is diffeomorphically conjugated with F . Conclude this result *uniformly for all $f \in \mathcal{N}$* . From the computations, get to a sufficient open condition for the diffeomorphisms $f \in \mathcal{N}$ to exhibit a sink $S_i \in V$ of period n , after unfolding the tangency Q_i .

Step 5: Construct infinite dimensional manifolds $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ such that, independently of i , and independently of how many sinks $\{S_i\}_{1 \leq i} \subset V$ a diffeomorphism $f \in \mathcal{M}$ has (if it has some sinks), all the diffeomorphisms $g \in \mathcal{M}$ exhibit isotopic continuations of all the sinks $S_i \in V$ of f . This is possible because the sufficient condition obtained in Steps 4 and 5, that allows the construction of the sinks, are

uniform for all $f \in \mathcal{N}$. In the Lemmas that prove that uniformity, we use the C^3 smoothness of the stable foliation.

Step 6: Along the given one-parameter family $\tilde{f}_t$, construct f_∞ exhibiting infinitely many sinks, reproducing the proof of Newhouse and Robinson [N 1974], [R 1983]. Join with the result of Step 5, and conclude the thesis of Theorem 1.

The proof of Theorem 2 follows applying the same six Steps as above, after observing two facts:

First: The Step 4 in the proof above, can be also stated as follows:

If $\mu \notin [-1, 1]$, then, neither exist an attracting fixed point of the quadratic map $(x, y) \mapsto (y^2, y^2 + \mu)$, nor exist for its perturbations F . So we prove the following claim:

For any $g \in \mathcal{N}$, if the diffeomorphism $g^n|_{V_{i,n}}$, after applying the computations in Step 3, approaches to $(x, y) \mapsto (y^2, y^2 + \mu)$ for some $\mu \notin [-1, 1]$, then g has not a fixed point being a sink in $V_{i,n}$. If some $f \in \mathcal{N}$ has such a sink $S_i(f) \subset V$ of period n , then $S_i(f)$ has not an isotopic continuation to a sink of g .

Second: Prove that, along the given family $\{\tilde{f}\}_t$, if $\tilde{f}_{t_1} = f_\infty$, then for $t \neq t_1$ the diffeomorphism $\tilde{f}_t$ verifies the assumption for g in the claim above.

References

- [M 1973] de Melo. *Structural stability of diffeomorphisms on two-manifolds*. Inventiones Math **21** (1973), pp 233-246.
- [N 1970] S. Newhouse. *Non density of Axiom A on S^2* . Proc. A.M.S. Symp. Pure Math. **14** (1970), pp 191-202.
- [N 1974] S. Newhouse. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*. Topology **13** (1974), pp 9-18.
- [N 1979] S. Newhouse. *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*. Publ. IHÉS **50** (1979), pp 101-151.
- [PT 1993] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics of homoclinic bifurcations*. University Press, Cambridge (1993).
- [R 1983] C. Robinson. *Bifurcation to infinitely many sinks*. Comm Math Phys. **90** (1983), pp 433-459.

**Comunicación en el
III Congreso Latinoamericano de Matemáticos
August 31th.-September 4th. 2009**

**SIMULTANEOUS CONTINUATION OF
INFINITELY MANY SINKS
NEAR A QUADRATIC HOMOCLINIC TANGENCY**

**Eleonora Catsigeras
Marcelo Cerminara
Heber Enrich**

**Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República
URUGUAY**

eleonora@fing.edu.uy

ASSUMPTIONS:

- M is a 2-dimensional compact manifold

- $f_0 \in \text{Diff}^3(M)$ has a DISSIPATIVE SADDLE point P_0 with
a HOMOCLINIC QUADRATIC TANGENCY POINT Q_0

- $\{\tilde{f}_t\}_{- \epsilon \leq t \leq \epsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ is a one-parameter family

GENERICALLY UNFOLDING THE HOMOCLINIC TANGENCY.

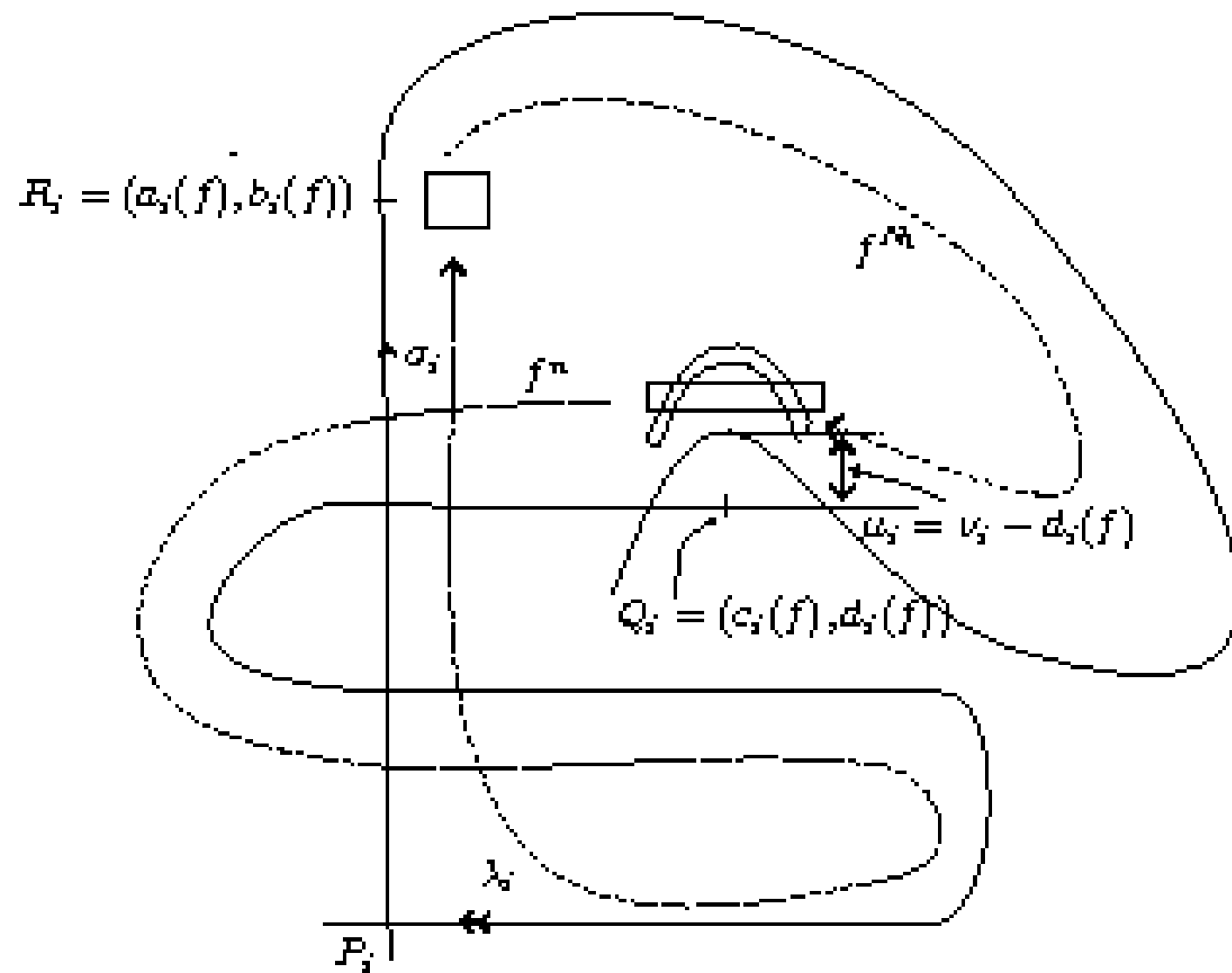
ASSUMPTIONS:

- M is a 2-dimensional compact manifold

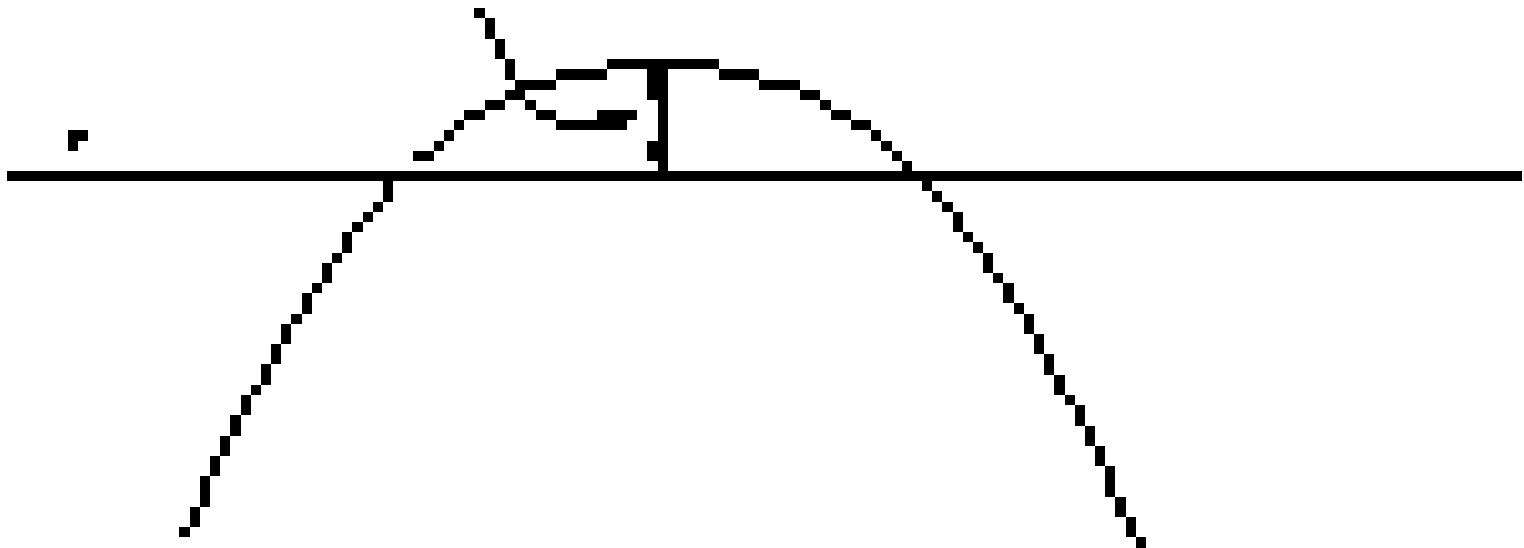
- $f_0 \in \text{Diff}^3(M)$ has a DISSIPATIVE SADDLE point P_0 with
a HOMOCLINIC QUADRATIC TANGENCY POINT Q_0

- $\{\tilde{f}_t\}_{-\epsilon \leq t \leq \epsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ is a one-parameter family

GENERICALLY UNFOLDING THE HOMOCLINIC TANGENCY.



$$t = \mu_1(f)$$



ASSUMPTIONS:

- M is a 2-dimensional compact manifold
- $f_0 \in \text{Diff}^3(M)$ has a dissipative saddle periodic point P_0 with a homoclinic quadratic tangency Q_0
- $\{\tilde{f}_t\}_{-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ is a one-parameter family generically unfolding the homoclinic tangency

Theorems of Newhouse 1970, 1974, 1979 and Robinson 1983:

there exists an open interval $I \subset (0, \varepsilon)$ and a residual set $J \subset I$, of values of the parameter t , such that:

For all $t \in I$, f_t has a hyperbolic maximal subset $\Lambda(f_t)$ with persistence of homoclinic quadratic tangencies in an open set $V \subset M$ isolated from $\Lambda(f_t)$.

For all $t \in J$, f_t exhibits infinitely many simultaneous sinks.

ASSUMPTIONS:

- M is a 2-dimensional compact manifold
- $f_0 \in \text{Diff}^3(M)$ has a dissipative saddle periodic point P_0 with a homoclinic quadratic tangency Q_0
- $\{\tilde{f}_t\}_{-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon} \subset \text{Diff}^3(M)$ is a one-parameter family generically unfolding the homoclinic tangency

Theorems of Newhouse 1970, 1974, 1979
and Robinson 1983:

For all $t \in J$, f_t exhibits infinitely many simultaneous sinks.

OPEN QUESTION:

HAVE THE INFINITELY MANY COEXISTING SINKS
SIMULTANEOUS CONTINUATIONS
IN SOME OPEN NEIGHBORHOOD IN THE FUNCTIONAL SPACE?

?

THEOREM 1: There exists an open interval $I \subset (0, \varepsilon)$ of parameter values, and a residual subset $J \subset I$ such that:

For all $t \in J$

1. f_t exhibits infinitely many coexisting sinks $S_i(f_t)$
(Newhouse-Robinson)

2. There exists a infinite-dimensional manifold $\mathcal{M} \subset \text{Diff}^3(M)$ such that:

$$f_t \in \mathcal{M}$$

If $g \in \mathcal{M}$ then g exhibits the isotopic continuation $S_i(g)$ of the infinitely many sinks $S_i(f_t)$.

THEOREM 2:

the sets $J \subset I$ and the diffeomorphism $f_\infty \in \{f_t : t \in J\}$, can be constructed such that f_∞ verifies the thesis 1. and 2. of Theorem 1, and

besides:

If $t \in I$ and $f_t \neq f_\infty$, then f_t exhibits, at most, a finite number of simultaneous isotopic continuations of the sinks $S_i(f_\infty)$.

Route of the proofs of Theorems 1 and 2

In SIX STEPS:

STEP 1:

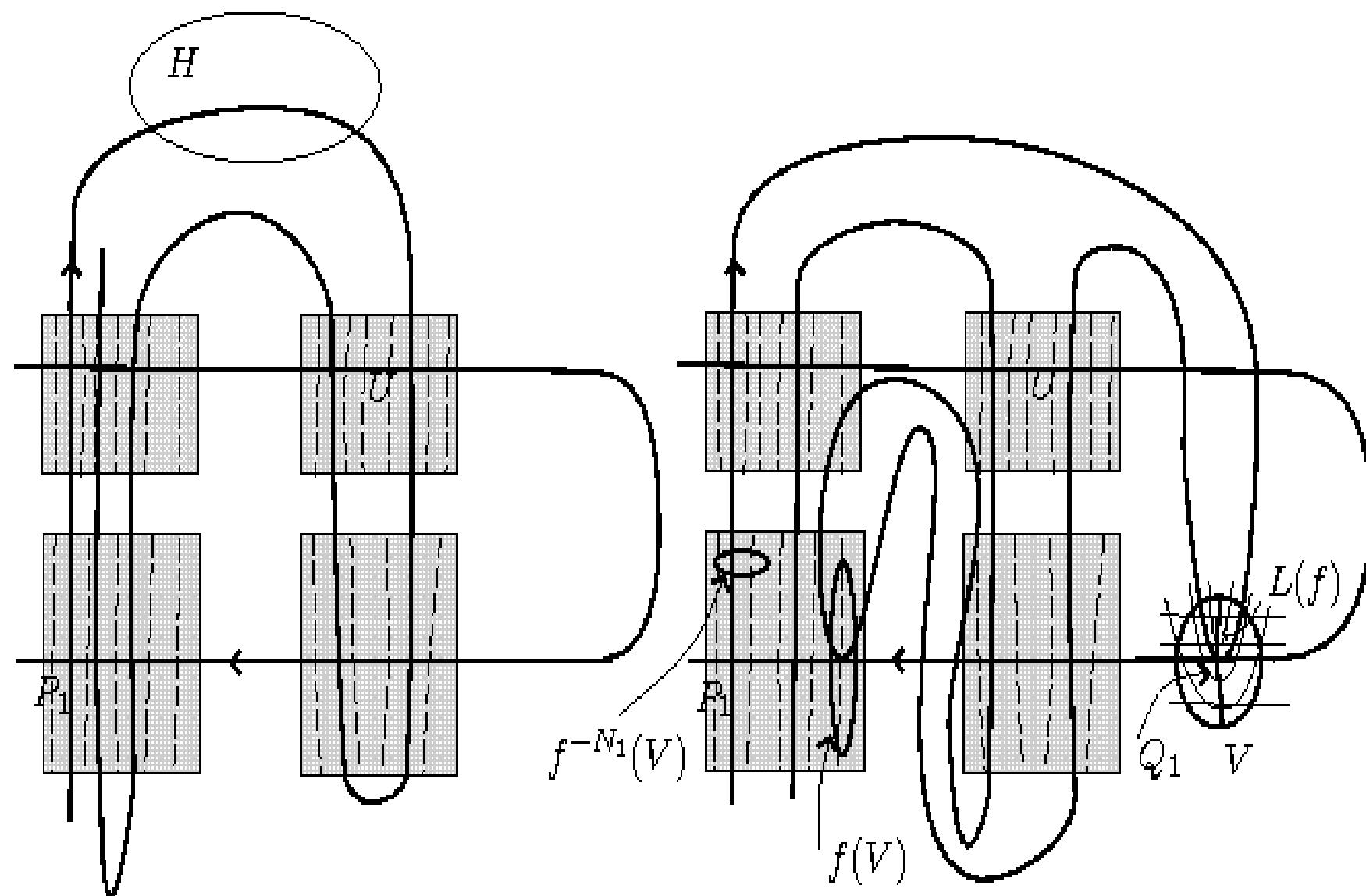
Apply Newhouse Theorem:

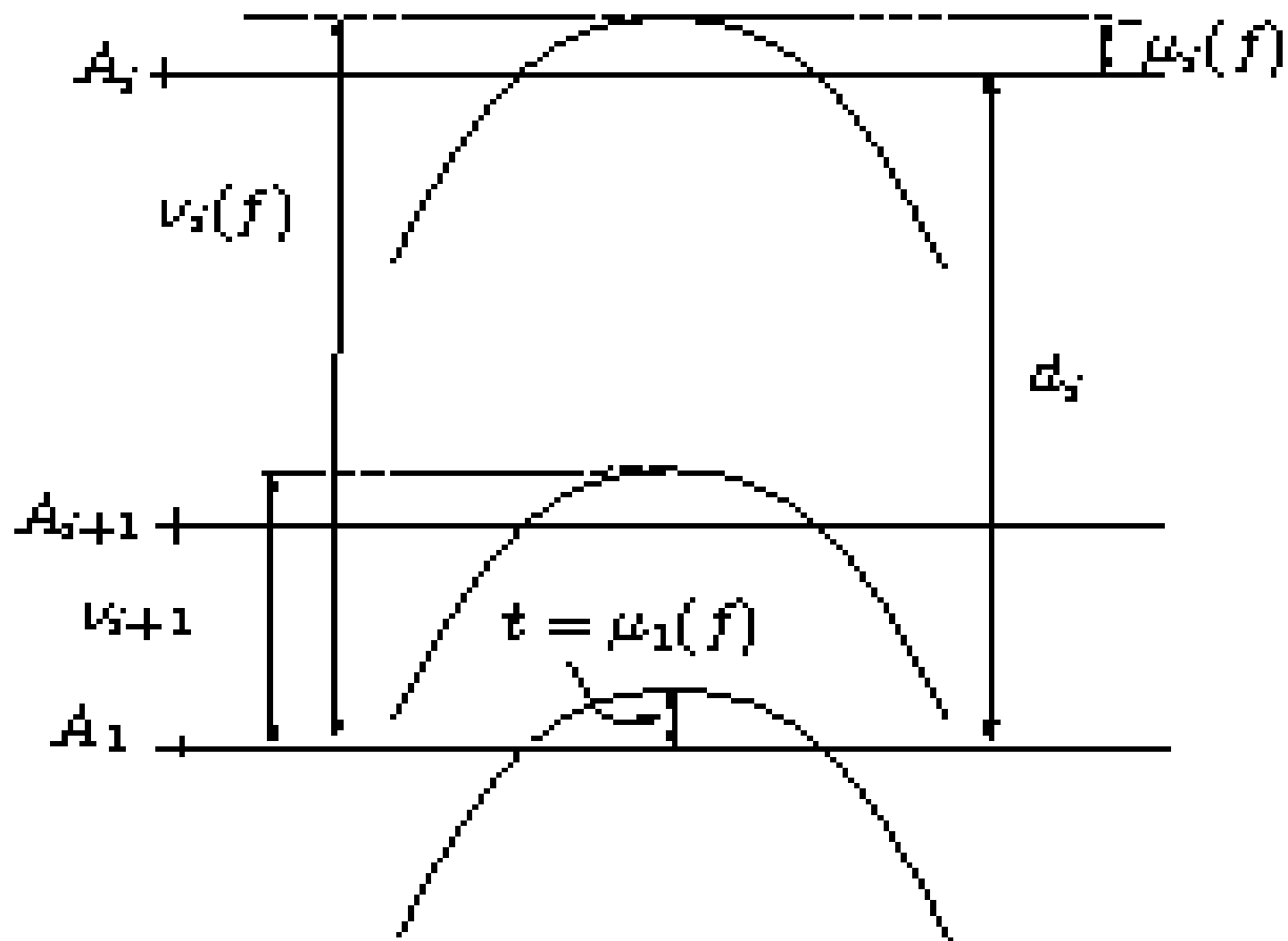
open set $\mathcal{N} \subset \text{Diff}^3(M)$
for all $f \in \mathcal{N}$: There exist

hyperbolic maximal set $\Lambda(f)$
an open neighborhood $U \subset M$ of $\Lambda(f)$,
open set $V \subset M$ isolated from $\Lambda(f)$

C^1 line of quadratic tangencies

$L(f) \subset V$ between the stable and unstable manifolds of $\Lambda(f)$, such that f exhibits persistence of homoclinic tangencies along $L(f)$





STEP 2:

Consider TRIVIALIZING COORDINATES OF THE INVARIANT FOLIATIONS in the neighborhood

$$U \subset M \text{ of } \Lambda(f)$$

Use dissipative hypothesis of the given hyperbolic periodic point exhibiting a quadratic homoclinic tangency in $f^{\text{sub}0}$, to obtain STRONG DISSIPATIVE CONDITION of the hyperbolic set for all

$$f \in \mathcal{N} \subset \text{Diff}^3(M)$$

Apply r -normality to conclude that

The STABLE LOCAL FOLIATION is C^3

while the unstable foliation is not necessarily more than $C^{1+\varepsilon}$

STEP 2:

Consider TRIVIALIZING COORDINATES OF THE INVARIANT FOLIATIONS in the neighborhood

$$U \subset M \text{ of } \Lambda(f)$$

Use dissipative hypothesis of the given hyperbolic periodic point exhibiting a quadratic homoclinic tangency in $f^{\text{sub}0}$, to obtain STRONG DISSIPATIVE CONDITION of the hyperbolic set for all

$$f \in \mathcal{N} \subset \text{Diff}^3(M)$$

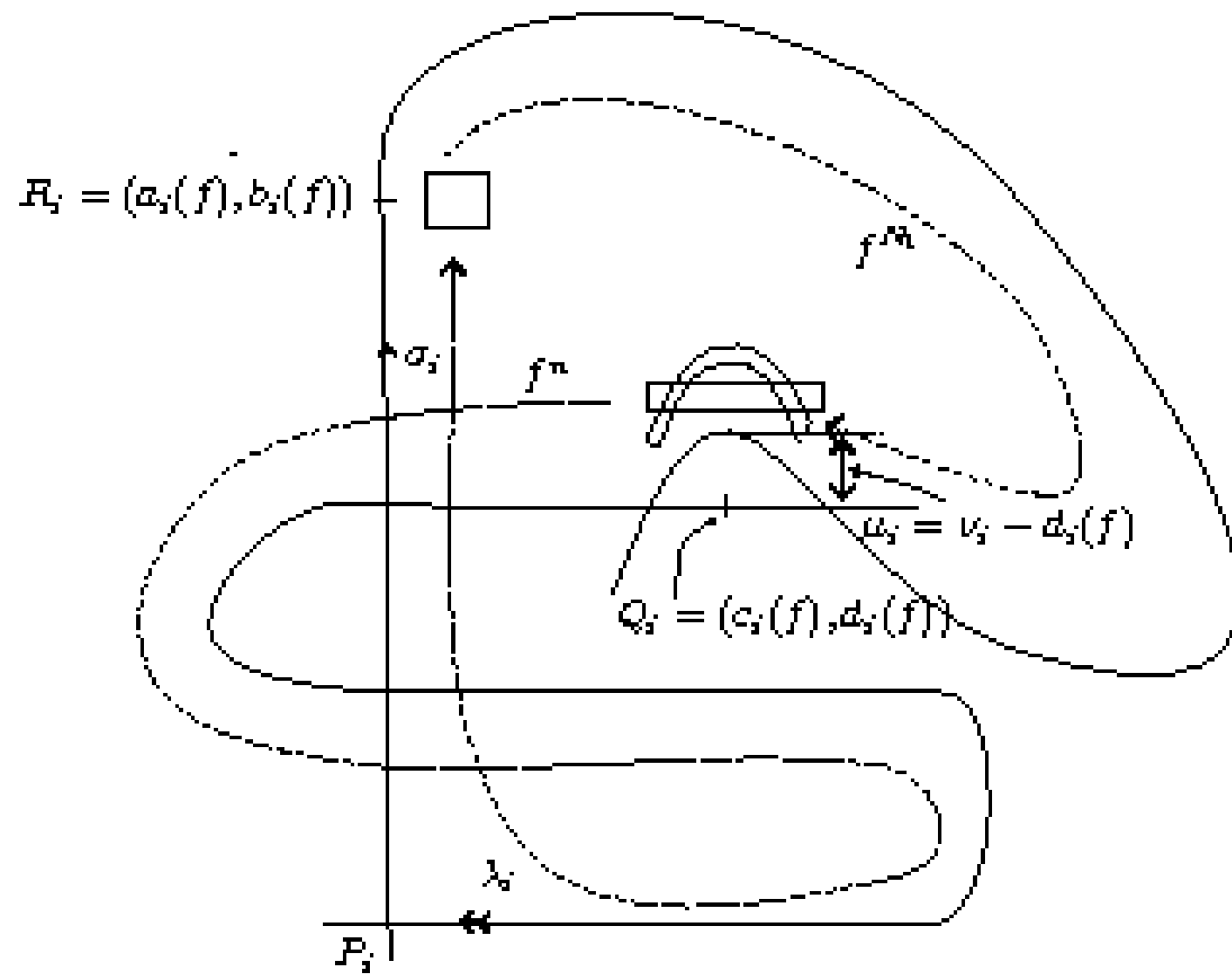
Apply r -normality to conclude that

The STABLE LOCAL FOLIATION is C^3

while the unstable foliation is not necessarily more than $C^{1+\varepsilon}$

STEP 3:

Compute the iteration of f in the trivializing coordinates as in [PT 1993] (up to non trivial adaptations, using C3 differentiability), to conclude the following :



STEP 3:

Compute the iteration of f in the trivializing coordinates as in [PT 1993] (up to non trivial adaptations, using C3 differentiability), to conclude the following :

LEMMA

(Uniform approximation to the quadratic family):

The open sets $\mathcal{N} \subset \text{Diff}^3(M)$ and $V \subset M$ can be chosen so:

Given $\varepsilon > 0$ and the periodic saddle $P_i(f) \in \Lambda(f)$, (such that some $f_i \in \mathcal{N}$ has a quadratic homoclinic tangency $Q_i \in V$), there exists $N \geq 1$ such that:

- For all $f \in \mathcal{N}$ and for all $n \geq N$ there exists a rectangle
 $V^* = V^*(\varepsilon, i, n, f) \subset V$ such that

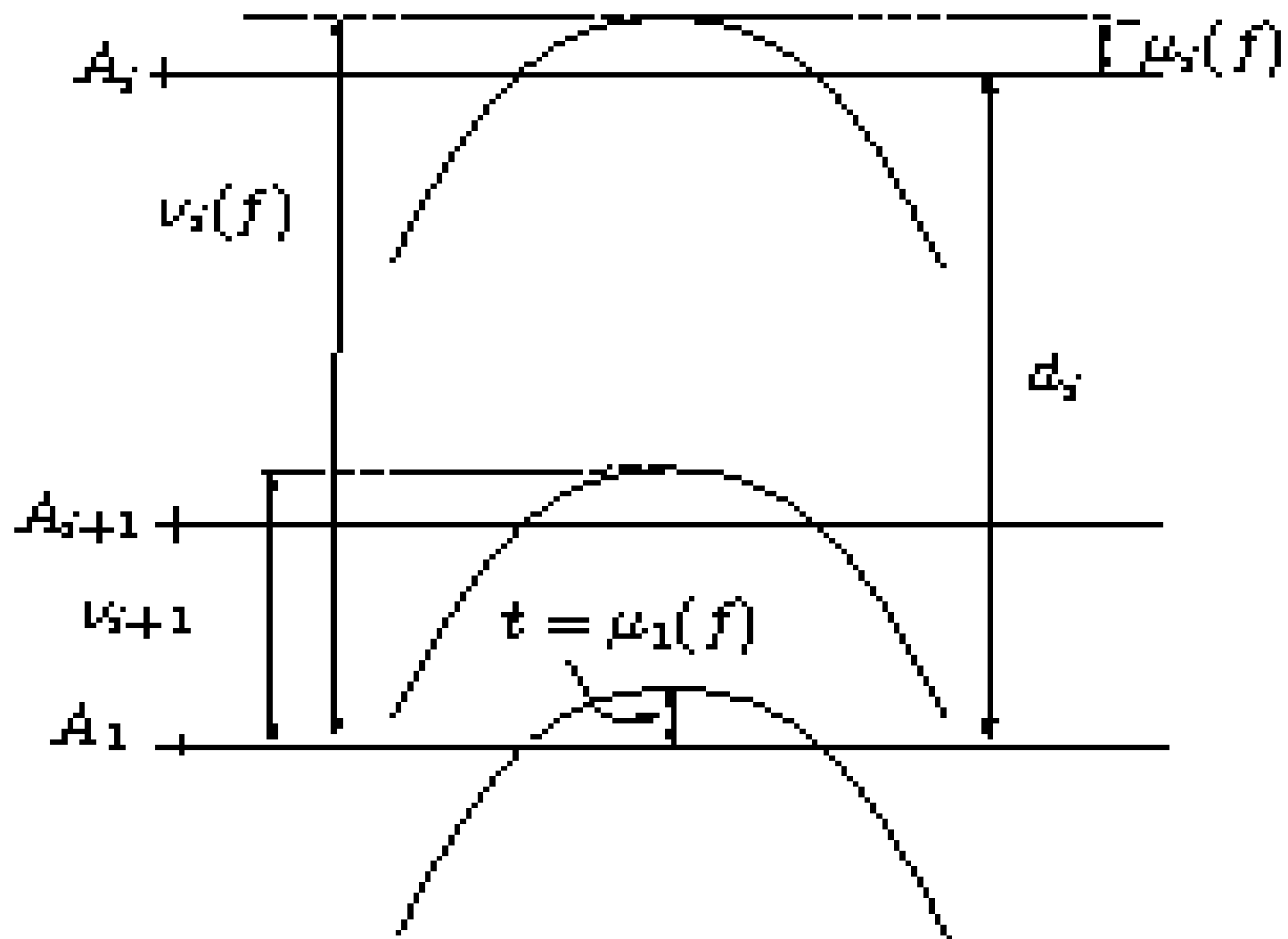
$$f^n|_{V^*}$$

is diffeomorphically conjugated to

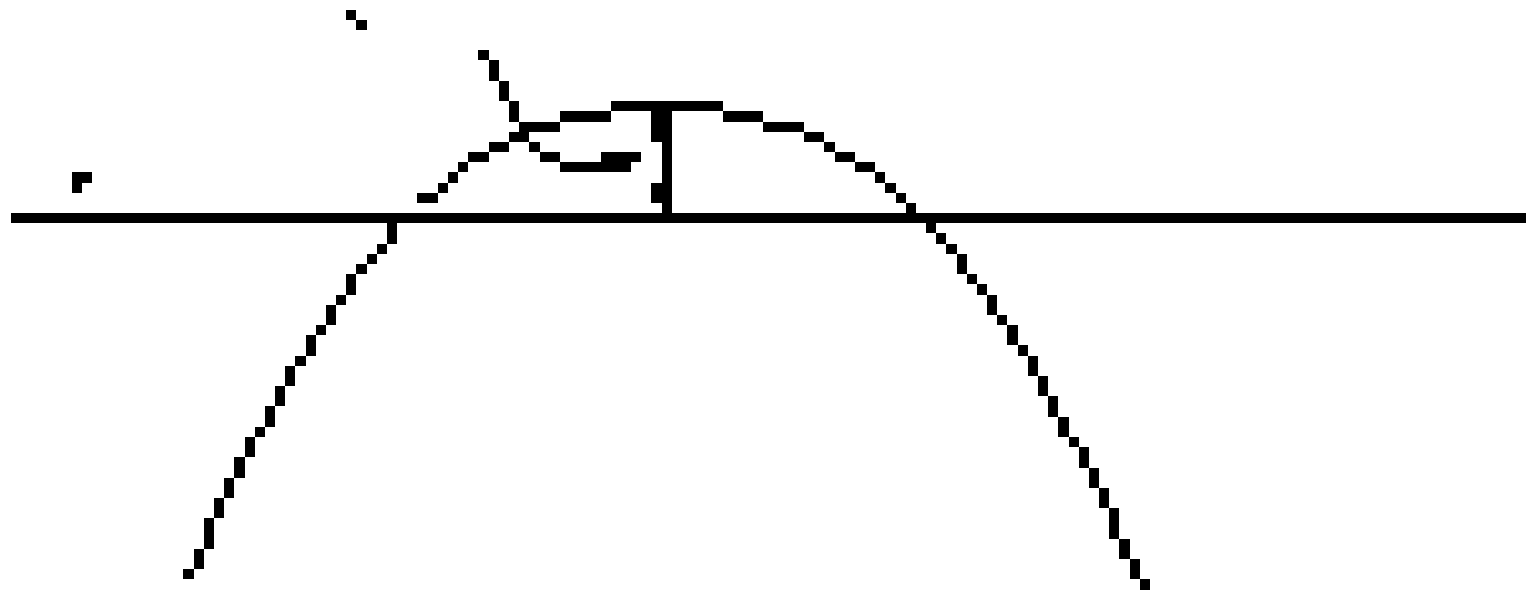
$$F(x, y) = (y^2, y^2 + \mu) + G(x, y), \quad \forall (x, y) \in [-4, 4]$$

where $\mu = \mu(P, n, f) \in [-4, 4]$ and G is a C^3 map

$$\|G\|_{C^3} < \varepsilon.$$



$$t = \mu_1(f)$$



LEMMA

(Uniform approximation to the quadratic family):

- For all $f \in \mathcal{N}$ and for all $n \geq N$ there exists a rectangle
 $V^* = V^*(\varepsilon, i, n, f) \subset V$ such that

$$f^n|_{V^*}$$

is diffeomorphically conjugated to

$$F(x, y) = (y^2, y^2 + \mu) + G(x, y), \quad \forall (x, y) \in [-4, 4]$$

where $\mu = \mu(P, n, f) \in [-4, 4]$ and G is a C^3 map

$$\|G\|_{C^3} < \varepsilon.$$

STEP 4

Consequences of Lemma:

Fix adequate $\varepsilon_0 > 0$ $P_i(f)$

obtain a REAL FUNCTIONAL INEQUATION

$$\mu(i, n, f) \in \left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right) \quad (4a)$$

Due to Lemma in STEP 3 and the properties of the 1-dimensional quadratic family:

- *If $f \in \mathcal{N}$ verifies INEQUATION (4a) then f has a sink $S_i(f)$ of period n .*
- *If f and g verify INEQUATION (4a) for the same values of i, n , then the sink $S_i(g)$ is the isotopic continuation of the sink $S_i(f)$*

STEP 4

Consequences of Lemma:

$$\mu(i, n, f) \notin [-1, 1] \quad (4b)$$

- *If f verifies INEQUATION (4a) and g verifies (4b) (for the same values of i, n , then the sink $S_i(f)$ of f has no isotopic continuation to a sink of g .*

STEP 5:

For each $f_1 \in \mathcal{N}$ fixed (for instance in the given one-parameter family), construct a local infinite dimensional manifold $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ (we did it of infinite codimension)

and foliate $\mathcal{N}_1$ with submanifolds $\mathcal{M}_k$ (for real values of k near 0) of codimension one in $\mathcal{N}_1$, such that:

$$f \in \mathcal{M}_k \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}_1, \text{ **and**}$$

$$\mu(i, n, f) = \mu(i, n, f_1) + k \quad \text{for all } i, n.$$

STEP 5:

Conclude that

For all $f \in \mathcal{M}_0$ there exists the isotopic continuations of all the sinks $S_i(f_1)$ constructed

from the Inequality (4a) for f_1

STEP 6 (CONCLUSIONS):

End of the proof of Theorem 1:

*construct a nested sequence of open real intervals $[t_i^-, t_i^+]$: $i \geq 1$
of parameter values of the given family $\{f_t\}$
such that*

$t \in (t_i^-, t_i^+) \Rightarrow f_t$ exhibits a sink of period n_i

Take $F = f_T$ $T \in \cap_{i \geq 1} [t_i^-, t_i^+]$ and

the manifold $M \subset \text{Diff}^3(M)$ constructed in step 5.

*CONCLUSION Theorem 1,
F and all $f \in \mathcal{M}$ have infinitely many
coexisting sinks $S_i(f)$ such that are all
the isotopic continuation of $S_i(F)$*

STEP 6 (CONCLUSIONS):

End of the proof of Theorem 2:

For $f_t \neq F$ in the given one-parameter family compute inequation (4b) to verify it for all i, n except at most a finite number of values of i, n .

*CONCLUSION along
the given one parameter family $f_t \neq F$
has at most a finite number of simulta-
isotopic continuation of $S_i(F)$*

8

CATSIGERAS, E	<i>Biological Neuronal Networks as Deterministic Dynamical Systems. - Abstract and slides of the talk in “VI Escuela de Invierno de Análisis y Aplicaciones”, Valparaíso, Chile, 21 al 25 de julio de 2008</i>	2008	8
---------------	--	------	---

Biological neuronal networks as deterministic dynamical systems.

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/ eleonora

**Abstract and slides of the talk in
VI Escuela de Invierno de Análisis y Aplicaciones,
Valparaíso, Chile, 2008**

ABSTRACT

The network of $n \geq 2$ synaptically connected neurons can be modeled as a deterministic system, whose actual state is modified by the probabilistic incidence of external excitations. It can be mathematically studied with the theoretical tools of the Dynamical Systems Theory in a qualitative description, rather than using a quantitative method. Also Ergodic Theory known results are applicable.

The abstract mathematical tools provide rigorously proved properties of some n -neurons system models (also for large values of n) and the qualitative tasks of its spike trains. For instance, some systems are mathematically proved to exhibit several characteristic structurally stable limit cycles in the evolution of its internal spikes.

Those limit cycles are not modified by the external small random perturbations, but the system can jump from one cycle to other when an external excitation spikes some of the sensorial neurons of the system. The system has a response capable of processing a large amount of information from the environment, as a probabilistically generated external excitation is added to the system.

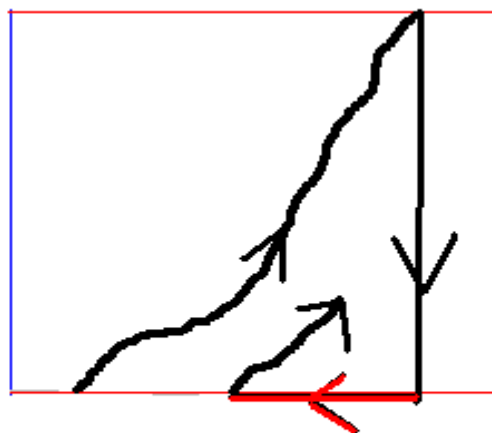
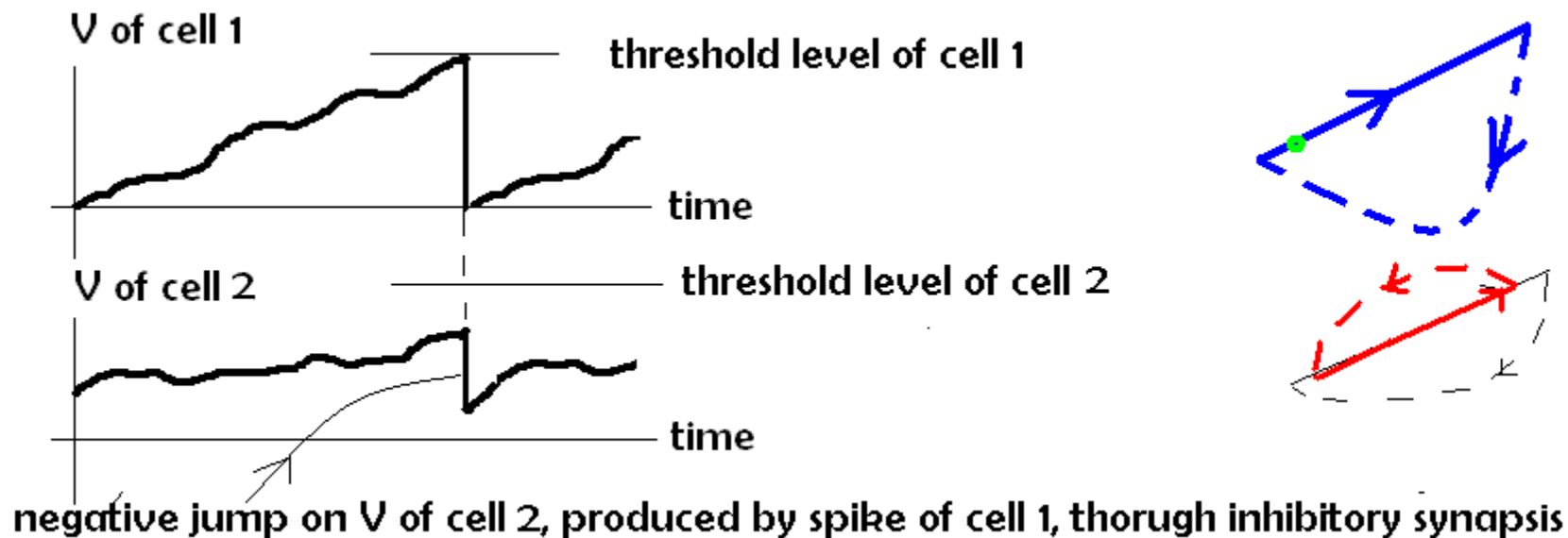
It is a known mathematical theorem of the Ergodic Theory that each deterministic (not random) system does define a self characteristic probabilistic distribution know as the measure of maximal entropy or of topological entropy of the system. This probabilistic measure is such that, if the external excitation is added to the system with such a distribution, the system should optimize the information that can internally process.

BIOLOGICAL NEURONAL NETWORKS AS DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS

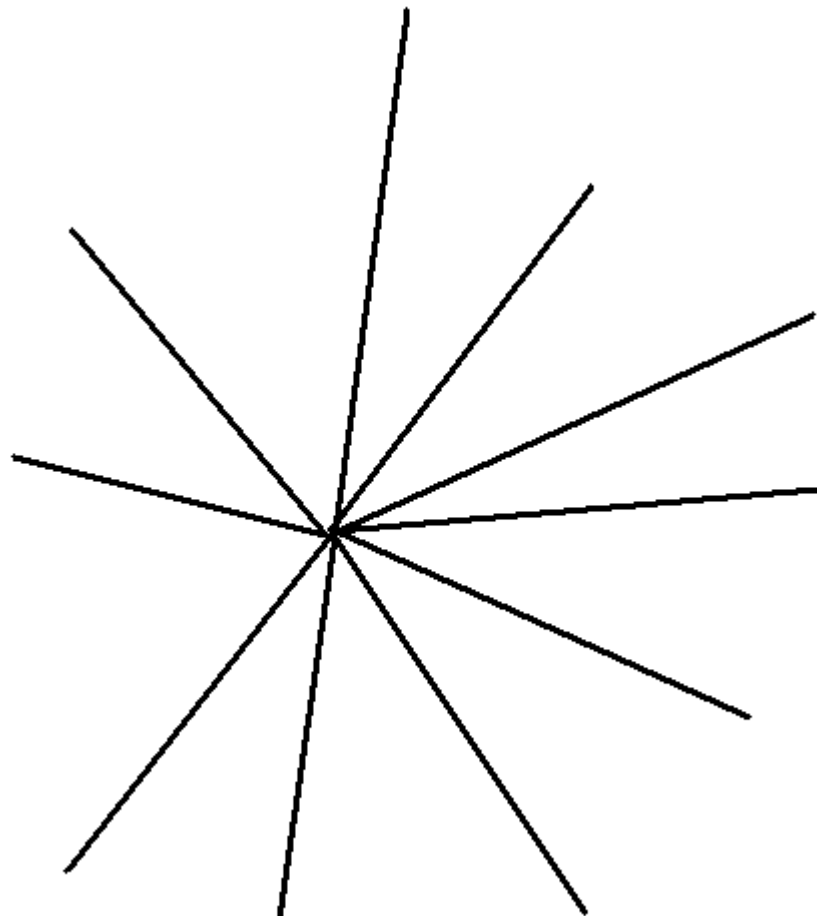
Eleonora Catsigeras
Universidad de la República
Uruguay

eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/~eleonora

**VI Escuela de Invierno de Análisis Estocástico y
Aplicaciones. Valparaíso. Julio 2008**



Dynamical system of 2 cells: flux in a 2-dimensional TORUS:
Discontinuity in the V level of cell 2 (red) when cell 1's spike is produced.



n neurons:

n independent axis = n dimensions.

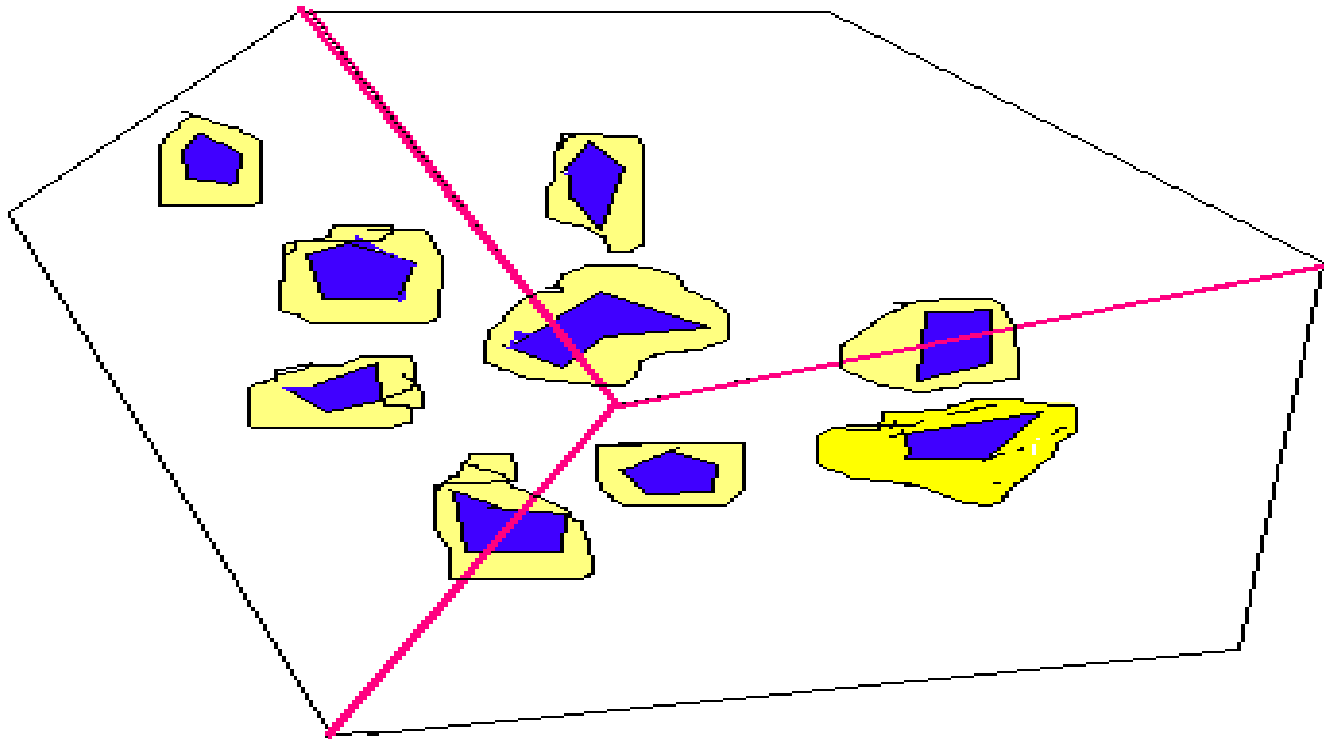
**flux in a n-dimensional TORUS
(Budelli 1998)**

**POINCARÉ SECTION: FIRST
RETURN MAP:**

**it is a discrete dynamical system
in a n-1 dimensional ball with
discontinuities over a n-2
dimensional surface, of finite jumps.**

**A PIECEWISE CONTINUOUS
DISCRETE (n-1) dimensional
DYNAMICAL SYSTEM
in a topological ball.**

- For n neurons: dynamics in a n -dimensional cube.
- G = First return map to the backward faces of the cube.
- $F = G \circ G$ = Second return map.
- F^k = $2k$ -th. return map.



In blue: Atoms of generation k of the return map F

In yellow: Atoms of an extension of F . Any map perturbed from F has its atoms in the blue and yellow regions.

In red: the discontinuity lines of F .

- **F is piecewise continuous** (discontinuity $(n-2)$ -dimensional surfaces).
- **F is contractive in each continuous piece** (with a well chosen metric in the $(n-1)$ dimensional dominium of F). This is due to inhibitory synapsis hypothesis.
- **F has the separation property:**
Atoms of the same generation are pairwise disjoint, so there is a positive minimum distance between them (if the neurons are not very different).

THEOREM 1 (Budelli-Catsigeras-Rovella 2005):

Contractive piecewise continuous maps

F in $n - 1 \geq 2$ dimensions

that have the separation property

generically **exhibit** persistent limit cycles

(i.e. a periodic attractors that persists under small perturbations of the map F).

COROLLARY:

Generic networks of $n \geq 3$ inhibitory neurons

have persistent periodic behaviours

(up to many periodic attractors (limit cycles), and of finite but “unbounded!!!” period).

CONCLUSIONS:

1) **EXTERIOR SIGNALS DO CHANGE THE BEHAVIOR** (spike train codes) OF THE SYSTEM of n neurons, and allow:

 **categorize the inputs**
make decisions

between large number of possibilities if the system has n neurons ($n \sim 10 \exp 12$),

2) **Period of spike train codes are theoretically as large as needed (finite but UNBOUNDED)** so, in practice (not asymptotically) they may be VIRTUALLY chaotic.

Long periods of LIMIT CYCLES OF SPIKE TRAINS allow the system:

 **long term memory functions**
categorize many different inputs
have a scenario of many (finitely many but a large number) of decisions

CONCLUSIONS:

3) INSIGNIFICATIVE PERTURBATIONS OF THE SYSTEM DO NOT CHANGE THE NUMBER NOR THE CHARACTERISTICS OF SPIKE TRAIN PERIODIC LIMIT CYCLES OF THE SYSTEM. **(THE SYSTEM IS STRUCTURABLY STABLE)**

4) SIGNIFICATIVE CHANGES IN THE PARAMETERS OF THE SYSTEMS for instance: some decreasing in the number of neurons, or in the number of synapsis, (as those occuring during childhood), also some changes of the numerical coefficients modeling the chemical reactions in the membranes of the cells, etc

DO CHANGE

the quantity, characteristics, size of its basins, and periods of the limit cycles of spike trains, and thus also CHANGE

the **maximal entropy** capability of the system, and
the **INTERNAL PROBABILITY DISTRIBUTION OF MAXIMAL ENTROPY**
and the **THEORETICAL INPUT SIGNALS** that the system can process optimally.

9

CATSIGERAS, E	<i>Biological Neuronal Networks as Deterministic Dynamical Systems - Abstract in the XVI Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics , Punta del Este, Uruguay, December 1st. to 5th., 2008</i>	2008	9
---------------	--	------	---

Biological neuronal networks as deterministic dynamical systems.

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy

Abstract in the
XVI Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear
Physics,
MEDYFINOL 2008,
Punta del Este, Uruguay, 2008

ABSTRACT

The network of $n \geq 2$ synaptically connected neurons can be modeled as a deterministic system, and thus studied with the theoretical tools of the Dynamical Systems Theory in a qualitative description, rather than using a quantitative method. Also Ergodic Theory known results are applicable.

The abstract mathematical tools provide rigourously proved properties of some n -neurons system models and the qualitative tasks of its spike trains. Some systems are mathematically proved to exhibit several characteristic structurally stable limit cycles in the evolution of its internal spikes. Those limit cycles are not modified by the external small random perturbations, but the system can jump from one cycle to other when an external excitation spikes some of the sensorial neurons of the system. The system has a response capable of processing a large amount of information from the environment.

XVI Reunión de Mecánica Estadística de No equilibrio y Física No lineal
XVI Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics

MEDYFINOL'08

Hotel Club del Lago, Punta del Este, Uruguay
 December 1-5, 2008

Organizing Committee

Orazio Descalzi	Universidad de los Andes, Chile
Arturo Martí	Universidad de la República, Uruguay
Cristina Masoller	Universitat Politècnica de Catalunya, Spain
Osvaldo A Rosso	Universidad de Buenos Aires, Argentina

International Advisory Committee

Miguel Arizmendi	Universidad de Mar del Plata, Argentina
Marcia Barbosa	Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Brazil
Helmut Brand	University of Bayreuth, Germany
Juan Luis Cabrera	Centro de Física I.V.I.C., Venezuela
Patricio Cordero	Universidad de Chile, Chile
Celso Grebogi	University of Aberdeen, United Kingdom
Roberto Iglesias	Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Brazil
Hilda Larrondo	Universidad de Mar del Plata, Argentina
Michel Moreau	Université Paris VI, France
Angel Plastino	Universidad Nacional de la Plata, Argentina
Araceli Proto	Universidad de Buenos Aires, Argentina
Marta Rosen	Universidad de Buenos Aires, Argentina
Raúl Rechtman	Universidad Nacional Autónoma de México, México
Enrique Tirapegui	Universidad de Chile, Chile
Raúl Toral	Universitat Illes Balears, Spain
Constantino Tsallis	Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Brazil
Horacio Wio	Universidad de Cantabria, Spain

Acknowledgements

We wish to thank the following institutions for their contribution to the success of this conference:

- Centro Latinoamericano de Física (CLAF)
- Office Naval Research Global (USA)
- European Physical Society, Interdivisional Group of Physics for Development (IGPD)
- The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Italy
- Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Chile
- Anillo de Ciencia y Tecnología ACT15, Chile
- Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC), Uruguay
- Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas (PEDECIBA), Uruguay.

PROGRAM

Sunday, November 30

17:00 – 20:00 Registration

Monday, December 1

08:00 – 09:00 Registration

08:55 – 09:00 Opening Remarks

Chair: **Cristina Masoller**

- 09:00 – 09:30 **Ezequiel Albano** (La Plata, Argentina): *Dynamic Behavior of the 1D Ising Ferromagnet with long-range interactions*
- 09:30 – 10:00 **Ian Levin** (Porto Alegre, Brazil): *Collision-less relaxation in non-neutral plasmas and gravitational systems*
- 10:00 – 10:30 **Andrea Rapisarda** (Catania, Italy): *Chaos and nonergodic dynamics in long-range interacting systems*

10:30 – 11:00 Coffee break

Chair: **Arturo Marti**

- 11:00 – 11:30 **Katja Lindenberg** (San Diego, USA): *Continuous time random walk for open systems: Fluctuation theorems and counting statistics*
- 11:30 – 12:00 **Alexander Blumen** (Freiburg, Germany): *Continuous time quantum walks on complex networks*
- 12:00 – 12:30 **Manuel Caceres** (Bariloche, Argentina): *Evolutionary formalism from random Leslie matrices*
- 12:30 – 13:00 **Gerardo Garcia-Naumis** (UNAM, Mexico): *Thermal relaxation and low frequency vibrational anomalies in simple models of glasses: a study using non-linear Hamiltonians*

13:00 – 14:00 Lunch

Chair: **Orazio Descalzi**

- 15:00 – 15:30 **Hernan Solari** (Buenos Aires, Argentina): *Lessons from a mathematical model for the big Yellow Fever epidemic (Buenos Aires, 1871)*
- 15:30 – 16:00 **Marcel Clerc** (Santiago, Chile): *Interaction and coarsening dynamics of dissipative soliton in parametrically driven Newtonian fluid*
- 16:00 – 16:30 **Harald Pleiner** (Mainz, Germany): *Influence of sedimentation on convective instabilities in colloidal suspensions*
- 16:30 – 17:00 **Helmut Brand** (Bayreuth, Germany): *Influence of boundary conditions on localized solutions of the cubic-quintic Complex Ginzburg-Landau Equation*

17:00 – 17:30 Coffee break

Chair: **Osvaldo Rosso**

- 17:30 - 17:50 **Orazio Descalzi** (Santiago, Chile): *Noise induces partial annihilation of colliding dissipative solitons*
- 17:50 - 18:10 **David Laroze** (Arica, Chile): *Amplitude equation for stationary convection in viscoelastic ferrofluid*
- 18:10 - 18:30 **Hector Mancini** (Pamplona, Spain): *Dynamics, control and synchronization in Benard-Marangoni convective patterns*
- 18:30 - 18:50 **Marta Rosen** (Buenos Aires, Argentina): *Rayleigh-Plateau instability produced with gravity oscillation*
- 18:50 - 19:10 **Alexey Snezhko** (Argonne, USA): *Pattern formation and complex dynamics in driven magnetic granular ensemble*
- 19:10 - 19:30 **Günter Radons** (Chemnitz, Germany): *Lyapunov modes in extended systems*
- 19:30 - 19:50 **Daniel A. Vega** (Bahía Blanca, Argentina): *Block copolymer pattern alignment induced by substrate topography*

20:30 **Welcome drink**

Tuesday, December 2

08:30 - 09:00 **Registration**

Chair: **Miguel Arismendi**

- 09:00 - 09:30 **Peter Hanggi** (Augsburg, Germany): *The ring of Brownian motion: Stochastic resonance and ex(e/o)rcising demons with Brownian motors*
- 09:30 - 10:00 **Marcia Barbosa** (Porto Alegre, Brazil): *The generic mechanism for water-like anomalies*
- 10:00 - 10:30 **Roberto F. S. Andrade** (Bahia, Brazil): *Scaling properties of fluid flow in a porous media: a model based on Apollonian packing*

10:30 - 11:00 **Coffee break**

Chair: **Marcia Barbosa**

- 11:00 - 11:30 **Gabriel Mindlin** (Buenos Aires, Argentina): *The physics and neural control of birdsong*
- 11:30 - 12:00 **Dante Chialvo** (Chicago, USA): *Galileo was right, also about tonal consonance*
- 12:00 - 12:30 **Miguel Arismendi** (Mar del Plata, Argentina): *Converting genetic network oscillations into somite spatial pattern*
- 12:30 - 13:00 **Maximino Aldana** (Morelos, Mexico): *Critical dynamics in genetic networks: examples from four kingdoms*

13:00 - 14:00 **Lunch**

14: 00 **Poster Session I**

Chair: **Raul Rechmann**

- 15:00 - 15:30 **Celso Grebogi** (Aberdeen, UK): *Fractal skeletons: the universality in death by starvation*
- 15:30 - 16:00 **Frank Schweitzer** (Zurich, Switzerland): *Non-linear voter models: The transition from invasion to coexistence*

- 16:00 – 16:30 **Emilo Hernandez-Garcia** (Mallorca, Spain): *Species clustering in models of biological competition*
- 16:30 – 17:00 **Francesc Sagues** (Barcelona, Spain): *Physics of colloids: from collective assemblies to single swimmers*

17:00 – 17:30 Coffee break & Poster Session I

Chair: **Gabriel Mindlin**

- 17:30 – 17:50 **Miguel Hoyuelos** (Mar del Plata, Argentina): *Nonequilibrium entropy of Markov processes*
- 17:50 – 18:10 **Adriano Batista** (Campina Grande, Brazil): *AC-driven Duffing oscillators under correlated noise and non-Markovian dissipation*
- 18:10 – 18:30 **Veronica Marconi** (Córdoba, Argentina): *Novel ratchet effects for the motion of elastic interfaces*
- 18:30 – 18:50 **María Florencia Carusela** (Buenos Aires, Argentina): *Induced current in classical and quantum damped ratchets*
- 18:50 – 19:10 **Itzhack Dana** (Ramat-Gan, Israel): *Quantum-resonance ratchets: theory and experiment*
- 19:10 – 19:30 **Jaime Cisternas** (Santiago, Chile): *Stochastic model calculation for the carbon monoxide oxidation on iridium(111) surfaces*

21:30 – 23:00 Poster Session I

Wednesday, December 3

08:30 – 09:00 Registration

Chair: **Sergio Cannas**

- 09:00 – 09:30 **Eleonora Catsigeras** (Montevideo, Uruguay): *Biological neuronal networks as deterministic dynamical systems*
- 09:30 – 10:00 **Marcelo Magnasco** (New York, USA): *Dynamical and statistical criticality in a model of neural tissue*
- 10:00 – 10:30 **Jürgen Kurths** (Potsdam, Germany): *Dynamics on complex networks with time varying topology*

10:30 – 11:00 Coffee break

Chair: **Eleonora Catsigeras**

- 11:00 – 11:30 **Theo Geisel** (Goettingen, Germany): *Self-organized criticality in neuronal systems*
- 11:30 – 12:00 **Sergio Cannas** (Cordoba, Argentina): *Emergent self-organized complex network topology out of stability selection pressure*
- 12:00 – 12:30 **Kunihiko Kaneko** (Tokyo, Japan): *Dynamical systems problems inspired by biology*
- 12:30 – 13:00 **Adi Bulsara** (San Diego, USA): *Coupling nonlinear oscillators for fun and profit*

13:00 – 14:00 Lunch

Chair: **Alejandra Figliola**

- 15:00 - 15:30 **Silvina Ponce -Dawson** (Buenos Aires, Argentina): *Propagation of calcium waves and synaptic plasticity*
- 15:30 - 16:00 **Gustavo Martinez-Mekler** (Cuernavaca, México): *Calcium network dynamics and sperm motility*
- 16:00 - 16:30 **Mario Cosenza** (Mérida, Venezuela): *Generalized synchronization of chaos in autonomous systems*
- 16:30 - 17:00 **Claudio Mirasso** (Mallorca, Spain): *Delayed but still in time: a neural mechanism for zero lag long range synchronization in the brain*

17:00 - 17:30 Coffee break and Poster Session II

Chair: **Silvina Ponce - Dawson**

- 17:30 - 17:50 **Alejandra Figliola** (Buenos Aires, Argentina): *About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series*
- 17:50 - 18:10 **Hilda Larrondo** (Mar del Plata, Argentina): *Quantifiers for stochasticity of chaotic pseudo random number generators*
- 18:10 - 18:30 **Maria Carmen Romano** (Aberdeen, UK): *Traffic jams in the cell: lost in translation*
- 18:30 - 18:50 **Guillermo Solovey** (Buenos Aires, Argentina): *Multiple scales in calcium signals*
- 18:50 - 19:10 **Alexandre Souto Martinez** (São Paulo, Brazil): *Generalized continuous and discrete population dynamics models*
- 19:10 - 19:30 **Raul Rechtman** (Morelos, Mexico): *Complexity of the wind tree model*

21:30 - 23:00 Poster Session II

Thursday, December 4

08:30 - 09:00 Registration

Chair: **Celia Anteneodo**

- 09:00 - 09:30 **Damián Zanette** (Bariloche, Argentina): *Beyond networks: opinion formation in triplet-based social structures*
- 09:30 - 10:00 **Marcel Ausloos** (Liege, Belgium): *Entropy correlation distance method applied to the Gross Domestic Product of rich countries*
- 10:00 - 10:30 **Marta Gonzalez** (Boston, USA): *Understanding individual human mobility patterns*

10:30 - 11:00 Coffee break

Chair: **Damian Zanette**

- 11:00 - 11:30 **Celia Anteneodo** (Rio, Brazil): *Unraveling the stochastic dynamics of financial markets*
- 11:30 - 12:00 **Jose Roberto Iglesias** (Porto Alegre, Brazil): *Crime and punishment: the economic burden of impunity*
- 12:00 - 12:30 **Raul Donangelo** (Montevideo, Uruguay): *Early warnings of catastrophic changes in ecosystems*

12:30 - 13:00 **Jason Gallas** (Porto Alegre, Brazil): *Cascades of hubs and spirals in phase diagrams of simple flows*

13:00 - 14:00 **Lunch**

14: 00 **Poster Session III**

Chair: **Jose Roberto Iglesias**

15:00 - 15:20 **Guillermo Cecchi** (New York, USA): *Topological effects of synaptic time-dependent plasticity*

15:20 - 15:40 **Pablo Balenzuela** (Buenos Aires, Argentina): *Critical functional networks: Similarities between brain dynamics and Ising model*

15:40 - 16:00 **Guillermo Ortega** (Madrid, Spain): *Complex network analysis of human electrocorticographic data*

16:00 - 16:20 **Leonardo Brunnet** (Porto Alegre, Brazil): *Coordinated motion influences typical scales of cell sorting*

16:20 - 16:40 **Marco Idiart** (Porto Alegre, Brazil): *A process of k -max winner take all mediates tuning orientation on cells of the visual cortex*

16:40 - 17:00 **Jorge Mazzeo** (Buenos Aires, Argentina): *Multiscale characteristics of cell proliferation in the developing central nervous system of chick embryos*

17:00 - 17:30 **Coffee break and Poster Session III**

Chair: **Pablo Balenzuela**

17:30 - 17:50 **Raul Montagne** (Recife, Brazil): *Quasi-long-range order in active nematics and background flux*

17:50 - 18:10 **Hugues Chaté** (Saclay, France): *Modeling and understanding active matter: variations on the Vicsek model*

18:10 - 18:30 **Angel Plastino** (Buenos Aires, Argentina): *Aspects of quantum phase transitions*

18:30 - 18:50 **Araceli Proto** (Buenos Aires, Argentina): *Consequences of the dynamical properties of the specific heat in semi quantum nonlinear hamiltonians*

18:50 - 19:10 **Leszek Szybisz** (Buenos Aires, Argentina): *Spontaneous symmetry breaking and first-order phase transitions of adsorbed fluids*

19:10 - 19:30 **Nicolas Wschebor** (Montevideo, Uruguay): *Non-perturbative renormalization group approach to out-of-equilibrium problems*

21:30 - 23:00 **Poster session III**

Friday, December 5

08:30 - 09:00 Registration

Chair: **Francisco Tamarit**

09:00 - 09:30 **Jose R. Rios Leite** (Recife, Brazil): *Time delays in the synchronization of chaotic systems*

09:30 - 10:00 **Tom Gavrielides** (New Mexico, USA): *Mutually coupled semiconductor lasers with rotated optical feedback*

10:00 – 10:30 **Jorge Tredicce** (Nice, France): *Cavity soliton laser based on mutually coupled semiconductor microresonators*

10:30 – 11:00 Coffee break

Chair: **Araceli Proto**

11:00 – 11:30 **Francisco Tamarit** (Córdoba, Argentina): *The storage capacity of a bidimensional Hopfield neural network with complex topology*

11:30 – 12:00 **Ricardo Velluti** (Montevideo, Uruguay): *Auditory neuronal networks in sleep and wakefulness*

12:00 – 12:30 **Alessandro Villa** (Grenoble, France): *Spatiotemporal patterns of activity in cerebral neural networks: a dynamical systems perspective*

12:30 – 13:00 **Claudio Dorso** (Buenos Aires, Argentina): *Community detection in networks*

13:00 – 14:00 Lunch

Chair: **Angel Plastino**

15:00 – 15:20 **Inés Caridi** (Buenos Aires, Argentina): *Clusters in networks with incomplete information: The disappeared in Argentina (1975-1984)*

15:20 – 15:40 **Silvia London** (Bahia Blanca, Argentina): *Convergence across the American countries*

15:40 – 16:00 **Panayotis Panayotaros** (Ciudad de Mexico): *Localized coherent structures in the discrete NLS equation*

16:00 – 16:20 **Jose Suarez-Vargas** (Venezuela): *Synchronization transitions and multistability in the route to oscillation death of coupled nonlinear oscillators*

16:20 – 16:40 **Carlos Argolo** (Alagoas, Brazil): *The threshold of coexistence of a predator-prey probabilistic model in a fractal and in a square lattice*

16:40 – 17:00 **Cesar Sampaio** (Recife, Brazil): *Dynamics of the volatility distributions on Complex Networks*

17:00 – 17:10 Closing Remarks

TALKS

(Alphabetical order)

(INVITED) Ezequiel V. Albano, D. Rodríguez, M. Bab, Instituto de Investigaciones Fisicoquímicas Teóricas y Aplicadas (INIFTA), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
ealbano@inifta.unlp.edu.ar, ezequielalb@yahoo.com.ar

Dynamic behavior of the 1D Ising ferromagnet with long-range interactions

The dynamic behavior of the Ising model, with power-law decaying interactions of the form $1/r^{d+\sigma}$, is simulated in $d=1$ dimension for $\sigma=0.75$, by using the Monte Carlo method. This value of σ is selected because we expect that critical exponents will be far from both the mean-field values $\sigma=0.5$ and the strong Kosterlitz-Thouless behavior. Both the standard relaxation of ordered configurations and the short-time dynamics of disordered configurations are studied and rationalized in terms of scaling arguments. By measuring the time dependence of physical observables, such as the magnetization, susceptibility, Binder cumulant, correlation function, etc, the critical temperature and all the relevant critical exponents can be determined, including the static (β, γ, μ) and the dynamic (z) ones. Also, the scaling exponent of the initial increase of the magnetization is evaluated. Based on this evidence we conclude that the study of the dynamic behavior of the system allows the complete characterization of its critical properties.

(INVITED) Maximino Aldana, Instituto de Ciencias Físicas, UNAM, Morelos, México
max@fis.unam.mx, maxaldana@yahoo.com

Critical dynamics in genetic networks: examples from four kingdoms

The coordinated expression of the different genes in an organism is essential to sustain functionality under the random external perturbations to which the organism might be subjected. To cope with such external variability, the global dynamics of the genetic network must possess two central properties. (a) It must be robust enough as to guarantee stability under a broad range of external conditions, and (b) it must be flexible enough to recognize and integrate specific external signals that may help the organism to change and adapt to different environments. This compromise between robustness and adaptability has been observed in dynamical systems operating at the brink of a phase transition between order and chaos. Such systems are termed critical. Thus, criticality, a precise, measurable, and well characterized property of dynamical systems, makes it possible for robustness and adaptability to coexist in living organisms. In this talk investigate the dynamical properties of the gene transcription networks reported for *S. cerevisiae*, *E. coli*, and *B. subtilis*, as well as the network of segment polarity genes of *D. melanogaster*, and the network of flower development of *A. thaliana*. By analyzing hundreds of microarray experiments to infer the nature of the regulatory interactions among genes, and implementing these data into the Boolean models of the genetic networks, I will show that, to the best of the current experimental data available, the five networks under study indeed operate close to criticality. The generality of this result suggests that criticality at the genetic level might constitute a fundamental evolutionary mechanism that generates the great diversity of dynamically robust living forms that we observe around us.

(INVITED) Eleonora Catsigeras, Ins. de Matemática. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay
eleonora@fing.edu.uy

Biological neuronal networks as deterministic dynamical systems

The network of $n \gg 2$ synaptically connected neurons can be modeled as a deterministic system, and thus studied with the theoretical tools of the Dynamical Systems Theory in a qualitative description, rather than using a quantitative method. Also Ergodic Theory known results are applicable. The abstract mathematical tools provide rigorously proved properties of some n -neurons system models and the qualitative tasks of its spike trains. Some systems are mathematically proved to exhibit several characteristic structurally stable limit cycles in the evolution of its internal spikes. Those limit cycles are not modified by the external small random perturbations, but the system can jump from one cycle to other when an external excitation spikes some of the sensorial neurons of the system. The system has a response capable of processing a large amount of information from the environment.

(INVITED) Guillermo A. Cecchi, The Rockefeller University, New York, USA
guille@babel.rockefeller.edu, gcecchi@us.ibm.com

Topological effects of synaptic time-dependent plasticity

Connections between individual neurons in the brain arise first from the spatial distribution of axons and dendrites within neural tissue. Local synaptic modification rules are known to shape patterns of connectivity in local neural tissue and local microcircuit topology. Global brain network topology, however, is believed to emerge largely from patterned area to area connectivity determined during development. One proposal for a rule governing this level of organization, the "no strong loops hypothesis", considered only patterning mechanisms to implement its specific area to area network topological constraint. Here, we show that the local Spike Timing-Dependent Plasticity (STDP) rule has the effect of reducing the trans-synaptic weights of closed loops of any length within a simulated network of neurons. We further prove analytically that anti-loop learning and STDP are equivalent for the case of a linear network. Thus a notable local synaptic learning rule yields structures dominated by feed-forward connections at their largest scale. Given its widespread occurrence in the brain, we propose that STDP must be involved in eliminating long range synaptic loops among individual neurons across all brain scales, up to, and including, the scale of global brain network topology.

Hugues Chaté, CEA-Saclay, SPEC, France
hugues.chate@cea.fr

Modeling and understanding active matter: variations on the Vicsek model

The model introduced by Vicsek et al. in which self-propelled particles align locally with neighbors is, because of its simplicity, central to most studies of collective motion or "active" matter. After reviewing briefly its main properties, we show how it can be expanded into three main directions: changing the symmetry of the particles and/or of their interactions, adding local cohesion, and taking into account the fluid in which the particles move.

List of Participants

Ezequiel Albano, La Plata, Argentina	ealbano@inifta.unlp.edu.ar
Jose Manuel Albornoz, Venezuela	albornoz@ula.ve
Maximino Aldana, Morelos, México	max@fis.unam.mx, maxaldana@yahoo.com
Julia Alonso, Montevideo, Uruguay	julialon@fing.edu.uy
Hércules Alves de Oliveira, Paraná, Brazil	haoj02@yahoo.com.br
Marcelo Alves Pereira, São Paulo, Brazil	map_fm@yahoo.com
Fernandes Silva Andrade, Bahia, Brazil	randrade@ufba.br
Celia Anteneodo, Rio de Janeiro, Brazil	celia@fis.puc-rio.br, celia@cbpf.br
Miguel Arizmendi, Mar del Plata, Argentina	arizmend@fi.mdp.edu.ar
Carlos Argolo, Alagoas, Brazil	argolo@cefet-al.br
Ezequiel Arneodo, Buenos Aires, Argentina	enogmelimon@gmail.com
Vladimir Assis, Recife, Brazil	vladimirdeassis@yahoo.com.br
Marcel Ausloos, Liege, Belgium	Marcel.Ausloos@ulg.ac.be
Pablo Balenzuela, Buenos Aires, Argentina	balen@df.uba.ar
Marcia Barbosa, Porto Alegre, Brazil	marcia.barbosa@ufrgs.br
Adriano Batista, Campina Grande, Brazil	aabatis@yahoo.com
Luz Bavassi, Buenos Aires, Argentina	luzbavassi@gmail.com
Federico Benitez, Montevideo, Uruguay	Federico@fisica.edu.uy
Alexander Blumen, Freiburg, Germany	blumen@physik.uni-freiburg.de
Italo Bove, Montevideo, Uruguay	italo@fing.edu.uy
Sebastián Bouzat, Bariloche, Argentina	bouzat@cab.cnea.gov.ar
Helmut Brand, Bayreuth, Germany	brand@uni-bayreuth.de
Juan Gabriel Brida, Bolzano, Italy	JuanGabriel.Brida@unibz.it
Leonardo Brunnet, Porto Alegre, Brazil	leon@if.ufrgs.br
Luciana Bruno, Buenos Aires, Argentina	lbruno@df.uba.ar
Adi Bulsara, San Diego, USA	bulsara@spawar.navy.mil
Cecilia Cabeza, Montevideo, Uruguay	cecilia@fisica.edu.uy
Manuel Cáceres, Bariloche, Argentina	caceres@cab.cnea.gov.ar
Sergio Cannas, Córdoba, Argentina	cannas@famaf.unc.edu.ar
Andrea Romina Cardo, Argentina	rcardo@ungs.edu.ar
Inés Caridi, Buenos Aires, Argentina	inescaridi@yahoo.com.ar
María F. Carusela, Buenos Aires, Argentina	flor@ungs.edu.ar
Eleonora Catsigeras, Montevideo, Uruguay	eleonora@fing.edu.uy
Guillermo A. Cecchi, New York, USA	guille@babel.rockefeller.edu
Hugues Chaté, Saclay, France	hugues.chate@cea.fr
Ariel Chernomoretz, Buenos Aires, Argentina	ariel@df.uba.ar
Dante R. Chialvo, Chicago, USA	d-chialvo@northwestern.edu
Jaime Cisternas, Santiago, Chile	jcisternas@uandes.cl
Marcel Clerc, Santiago, Chile	marcel@galileo.dfi.uchile.cl
Alvaro Corvalan, Buenos Aires, Argentina	rcardo@ungs.edu.ar
Mario G. Cosenza, Mérida, Venezuela	mcosenza@ula.ve
Felipe Costa, Brazil	fdenardin@gmail.com
Ezequiel Costa Siqueira, Brazil	ecosta@ifi.unicamp.br
Gustavo Cruz-Pacheco, México	cruz@mym.iimas.unam.mx
Itzhack Dana, Ramat-Gan, Israel	dana@mail.biu.ac.il
Bertrand Delamotte, Paris, France	delamotte@lptl.jussieu.fr

Orazio Descalzi, Santiago, Chile	odescalzi@miuandes.cl
Marcelo Desposito, Buenos Aires, Argentina	mad@df.uba.ar
Ricardo Egydio de Carvalho, Sao Paolo, Brazil	regydio@rc.unesp.br
Raul Donangelo, Montevideo, Uruguay	donangel@fing.edu.uy
Claudio Dorso, Buenos Aires, Argentina	codorso@df.uba.ar
Daniel Escaff, Santiago, Chile	escaffnetmail@yahoo.com
Ariel Fernández, Montevideo, Uruguay	arielfer@fing.edu.uy
Alejandra Figliola, Buenos Aires, Argentina	afigliol@ungs.edu.ar
Jason A. C. Gallas, Porto Alegre, Brazil	Jason.gallas@gmail.com
Gerardo Garcia Naumis, IF-UNAM, México	naumis@fisica.unam.mx
Tom Gavrielides, New Mexico, USA	Tom.gavrielides@london.af.mil
Theo Geisel, Goettingen, Germany	geisel@ds.mpg.de
Lendert Gelens, Brussels, Belgium	lendert.gelens@vub.ac.be
Mauricio Girardi, Brazil	mauricio.girardi@unipampa.edu.br
Sebastián Gonçalves, Porto Alegre, Brazil	sgonc@if.ufrgs.br
Marta González, Boston, USA	marta.gonzalez.v@gmail.com
Celso Grebogi, Aberdeen, UK	grebogi@abdn.ac.uk
Pablo Gutiérrez, Santiago, Chile	pagutier@gmail.com
Peter Hänggi, Augsburg, Germany	Hanggi@Physik.Uni-Augsburg.DE
Emilio Hernández-García, Mallorca, Spain	emilio@ifisc.uib.es
Miguel Hoyuelos, Mar del Plata, Argentina	hoyuelos@mdp.edu.ar
Martin Horsch, Stuttgart, Germany	horsch@itt.uni-stuttgart.de
Santiago Ibáñez, Buenos Aires, Argentina	sibanez@itba.edu.ar
Marco Idiart, Porto Alegre, Brazil	idiart@if.ufrgs.br
José R. Iglesias, Porto Alegre, Brazil	iglesias@if.ufrgs.br
Kunihiko Kaneko, Tokyo, Japan	kaneko@complex.c.u-tokyo.ac.jp
Ana Korol, Rosario, Argentina	korol@ifir.edu.ar
Jürgen Kurths, Potsdam, Germany	Juergen.kurths@pik-potsdam.de
Cecilia Lagorio, Mar del Plata, Argentina	clagorio@mdp.edu.ar
Davil Laroze, Tarapacá	David.laroze@gmail.com
Hilda Larrondo, Mar del Plata, Argentina	larrondo@fi.mdp.edu.ar
Edson Denis Leonel, Rio Claro, Brazil	edleonel@rc.unesp.br
Yan Levin, Porto Alegre, Brazil	levin@if.ufrgs.br
Katja Lindenberg, San Diego, USA	klindenberg@ucsd.edu
Silvia London, Bahía Blanca, Argentina	slondon@uns.edu.ar
Marcelo Magnasco, New York, USA	magnasco@rockefeller.edu
Hector Mancini, Pamplona, Spain	hmancini@fisica.unav.es
Veronica Marconi, Cordoba, Argentina	vmarconi@famaf.unc.edu.ar
Gustavo Martinez-Mekler, México	gmmecker@yahoo.com.mx
Arturo Martí, Montevideo, Uruguay	marti@fisica.edu.uy
Cristina Masoller, Terrassa, Spain	cristina.masoller@upc.edu
David Matesanz, Oviedo, Spain	matesanzdavid@uniovi.es
Jorge Mazzeo, Buenos Aires, Argentina	jrmazzeo@gmail.com
Diego F. Mendes de Oliveira, Brazil	dfmo@rc.unesp.br
Mario Migueles, Mar del Plata, Argentina	mariomigueles@yahoo.com.ar
Gabriel Mindlin, Buenos Aires, Argentina	gabo@df.uba.ar
Claudio Mirasso, Mallorca, Spain	claudio@ifisc.uib.es
Roberto Monetti, Garching, Germany	monetti@mpe.mpg.de
Raul Montagne, Recife, Brazil	montagne57@gmail.com.br

Fernando Montani, Italy
 Juan Andrés Muniz, Montevideo, Uruguay
 Luís Gustavo Nogueira Martins, Brazil
 Ana Paula Oliveira Müller, Brazil
 Guillermo Ortega, Madrid, Spain
 Panayotis Panayotaros, Mexico
 Marcela Peláez, Montevideo, Uruguay
 Rodrigo Pereira, Paraná, Brazil
 Veronica Perez Schuster, Argentina
 Juan Carlos Perfetto, Argentina
 Angel Plastino, La Plata, Argentina
 Harald Pleiner, Mainz, Germany
 Silvina Ponce-Dawson, Bs. As., Argentina
 Araceli Proto, Buenos Aires, Argentina
 Günter Radons, Chemnitz, Germany
 Paulo Ramos, Recife, Brazil
 Andrea Rapisarda, Catania, Italy
 Raul Rechtman, Morelos, México
 Francisco Oscar Redelico, Argentina
 Jorge Alberto Revelli, Santander, Spain
 José R. Rios Leite, Recife, Brazil
 Wiston Risso, Bolzano, Italy
 Aranildo Rodrigues, Recife, Brazil
 Maria Carmen Romano, Aberdeen, UK
 Marta Rosen, Buenos Aires, Argentina
 Mariel Rosenblatt, Argentina
 Nicolás Rubido, Montevideo, Uruguay
 Osvaldo Rosso, Buenos Aires, Argentina
 Francesc Sagués, Barcelona, Spain
 Cesar Sampaio, Recife, Brazil
 Charles Santana, Brazil
 Guillermo Savino, Tucumán, Argentina
 Salvador Sartarelli, Argentina
 Eduardo Serrano, Argentina
 Roberto da Silva, Porto Alegre, Brazil
 Hernan Solari, Buenos Aires, Argentina
 Frank Schweitzer, Zurich, Switzerland
 Alexey Snezhko, Argonne Nat. Lab, USA
 Guillermo Solovey, Buenos Aires, Argentina
 Alexandre Souto Martinez, Brazil
 Jose Suarez-Vargas, Venezuela
 Leszek Szybisz, Buenos Aires, Argentina
 Francisco Tamarit, Córdoba, Argentina
 César Abraham Torrico Chávez, Brazil
 Jorge Tredicce, Nice, France
 Federico Vazquez, Mallorca, Spain
 Daniel Vega, Bahía Blanca, Argentina
 Ricardo Velluti, Montevideo, Uruguay
 Alessandro Villa, Grenoble, France

fmontani@gmail.com
 jmuniz@fisica.edu.uy
 lgnm.sm@gmail.com
 apmuller@if.ufrgs.br
 gjortega.hlpr@salud.madrid.org
 panos@mym.iimas.unam.mx
 macacela@gmail.com
 pereira@fisica.ufpr.br
 verops@gmail.com
 jperfet@fi.uba.ar
 plastino@fisica.unlp.edu.ar
 pleiner@mpip-mainz.mpg.de
 silvina@df.uba.ar
 aproto@fi.uba.ar, aproto@dyses.org.ar
 radons@physik.tu-chemnitz.de
 paulogustavo@df.ufpe.br
 andrea.rapisarda@ct.infn.it
 rrs@cie.unam.mx
 francisco_redelico@uca.edu.ar
 revelli@ifca.unican.es
 rios@df.ufpe.br
 Wiston.Risso@unibz.it
 proj.brain@gmail.com
 m.romano@abdn.ac.uk
 mrosen@fi.uba.ar
 mrosen@ungs.edu.ar, mrosen@dm.uba.ar
 nrubido@fisica.edu.uy
 oarosso@cirruscomms.com.au
 f.sagues@ub.edu
 cesampaiof@gmail.com
 charles.santana@gmail.com
 gsavino@herrera.unt.edu.ar
 asartare@ungs.edu.ar
 eserrano@unsam.edu.ar
 rdasilva@inf.ufrgs.br
 solari@df.uba.ar
 fschweitzer@ethz.ch
 snezhko@anl.gov
 gsolovey@df.uba.ar
 asmartinez@usp.br
 jjsuarez@ivic.ve
 szybisz@tandar.cnea.gov.ar
 tamarit@famaf.unc.edu.ar
 abrahamchavez@yahoo.es
 Jorge.tredicce@inln.cnrs.fr
 federico@ifisc.uib.es
 dvega@criba.edu.ar
 ricardo.velluti@gmail.com
 avilla@neuroheuristic.org

Miguel Vizcardo, Arequipa, Perú

Guilherme Welter, Brazil

Nicolas Wschebor, Montevideo, Uruguay

Damián Zanette, Bariloche, Argentina

mvizcard@fisica.ciens.ucv.ve

jcmombach@gmail.com

nicws@fing.edu.uy

zanette@cab.cnea.gov.ar

10

CATSIGERAS, E	<i>Dinámica finito-dimensional discontinua que modela redes neuronales. Propuesta de Tesis de Maestría. Resumen de la presentación en I Jornada de Ingeniería Matemática. I INGEMAT , Montevideo, Uruguay, 22 de diciembre de 2008</i>	2008	10
---------------	--	------	----

Dinámica finito dimensional discontinua que modela redes neuronales

Eleonora Catsigeras

PROPUESTA DE TESIS DE MAESTRÍA

**Resumen de la presentación en
I Jornadas de Ingeniería Matemática.
I INGEMAT,
Montevideo, Uruguay, 2008**

Identificación del proponente

- Nombre del tutor: Eleonora Catsigeras
- Nombre del cotutor: Ruben Budelli
- Último título obtenido: E. Catsigeras: Doctora en Ciencias (Matemática) IMPA. Brasil.
- Lugar de trabajo: E. Catsigeras: IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay.
R. Budelli: Departamento de Biomatemática. Facultad de Ciencias. Universidad de la República. Uruguay.
- Área de trabajo: E. Catsigeras: Matemática. Subárea: Sistemas Dinámicos.
R. Budelli: Biomatemática. Neurociencias.
- Información de contacto: eleonora@fing.edu.uy

Identificación de la propuesta de proyecto de tesis

- Título del proyecto de tesis: Dinámica finito-dimensional discontinua que modela redes neuronales.

- Área temática del conocimiento de la propuesta: Matemática. Subárea: Sistemas Dinámicos

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Diversos modelos de redes neuronales [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] explican el comportamiento dinámico del sistema de neuronas marcapasos a través del flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales cuyo mapa de Poincaré, o cuyo mapa a tiempo constante, o cuya aproximación a tiempo constante, es una transformación discontinua en un espacio n -dimensional. Las discontinuidades se encuentran en la frontera topológica de una cantidad finita de piezas de continuidad.

La teoría de sistemas dinámicos (dinámica topológica, medidas invariantes, subvariedades invariantes, atractores topológicos y medibles, estabilidad de ciclos límites, caos topológico y medible, bifurcaciones y estabilidad estructural) provee de resultados teóricos de dinámicas, en mayor parte bajo hipótesis de continuidad y diferenciabilidad, esperándose que algunos de esos resultados, con adaptaciones a estudiar, sean también válidos para ciertos sistemas con discontinuidades no aisladas.

Se pretende en esta tesis de maestría investigar en la literatura científica actual los resultados matemáticos existentes sobre el tema del título, publicados o en desarrollo, relacionarlos entre sí, estudiarlos en detalle, organizarlos y adaptarlos a un contexto unificado, y extenderlos en lo posible a sistemas más generales.

Se pretende también, comparar los resultados teóricos matemáticos existentes o a obtener, con los resultados fisiológicos encontrados o esperados en neurociencias.

- Posibles aplicaciones científicas: Neurociencias. Síntesis de sistemas dinámicos caóticos, periódicos o cuasi periódicos mediante el acoplamiento de una cantidad finita de osciladores.
- Posibles aplicaciones productivas y/o sociales: Las generales de la producción científica teórica.
- Metodología: Está planteada en función de los objetivos expuestos en los últimos tres párrafos del "Resumen".

La metodología es la general a una tesis de Maestría en Matemática, que aunque es aplicable a la Neurociencias, abarca conocimientos matemáticos teóricos.

- Referencias bibliográficas:

1. R. Budelli, J. Torres, A. Rovella, E. Catsigeras, H. Enrich: *Two neurons networks I: Integrate and fire pacemakers models*. Biol. Cybern. No. 66, pp 95-110 (1991).
2. E. Catsigeras, R. Budelli: *Limit cycles of a bineuronal network model*. Physica D., No. 56. pp 235-252 (1992).
3. R. Budelli, E. Catsigeras, A. Rovella, L. Gómez: *Dynamical behaviour of pacemaker neurons networks*. Proc. of the Second Congress of Nonlinear Analysts. Elsevier Science (1996).
4. B. Cessac: *A discrete time neural network model with spiking*. Journal Math. Biol. Vol. 54, No. 3, pp 311-345 (2008)
5. B. Cessac, T. Viéville: *On Dynamics of integrate and fire neural networks with conductance based synapses*. ArXiv [phys-bio-ph] 0709.4370v3 (2008).
6. E. Catsigeras, A. Rovella, R. Budelli: *Contractive piecewise continuous maps modeling networks of inhibitory neurons*. ArXiv [q-bio NC] 0805.2695v1 (2008).
7. R. Budelli, E. Catsigeras, P. Guiraud: *Dynamics of a Multidimensional Leaky Integrate and Fire Model of Neural Networks*. Work in progress. (2008).

- Perfil esperado del estudiante: Conocimientos básicos de topología general, análisis real (teoría de la medida), teoría de los sistemas dinámicos deterministas (dinámica topológica y diferenciable) e introducción a la teoría ergódica.

- Lugar y Fecha de la propuesta: Montevideo, 31 de octubre de 2008.



JORNADA de INGENIERÍA MATEMÁTICA 2008

Lunes 22 de diciembre de 2008

Salón B11 - Aulario Faro

Facultad de Ingeniería, Universidad de
la República

Índice de propuestas de Tesis

- Accinelli, E.; Teoría de juegos.
- Accinelli, E.; Equilibrio general.
- Accinelli, E.; Optimización dinámica.
- Canale, E.; Búsqueda masiva de grafos de gran orden con grado y diámetro fijos.
- Canale, E.; Búsqueda masiva de grafos dirigidos de gran orden con grado y diámetro fijos.
- Canale, E., Monzón, P.; Clasificación de puntos de equilibrio del modelo de Kuramoto generalizado.
- Catsígeras, E. Budelli, R.; Dinámica finito-dimensional discontinua que modela redes neuronales.
- Monzón, P.; Conductas colectivas, sincronización, coordinación: modelado, simulación y aplicaciones.
- Muniz, G.; Efecto de valores faltantes (*missing values*) en estudios estadísticos de los adultos mayores.
- Najson, F.; Desarrollo de método/s para determinar la estabilizabilidad y/o estabilización via *feedback* de sistemas lineales conmutados.
- Najson, F., Maderna, E.; Desarrollo de método/s para obtener soluciones optimales o sub-optimales en problemas de control óptimo lineales con restricciones y costos cuadráticos.
- Tuffin, B.; Multi-homing in a competitive wireless telecommunication environment
- Usera, G.; Desarrollo de métodos MOF (*Moment of Fluid*).
- Wschebor, M.; Valores extremos de campos aleatorios en modelación de ondas marinas.

Proponente: Dra. Eleonora Catsígeras (eleonora@fing.edu.uy); Dr. Ruben Budelli

Lugar de trabajo: IMERL - Facultad de Ingeniería / Departamento de Biomatemáticas - Facultad de Ciencias

Título propuesto: Dinámica finito-dimensional discontinua que modelan redes neuronales.

Área Temática: Sistemas Dinámicos

Resumen: Diversos modelos de redes neuronales [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] explican el comportamiento dinámico del sistema de neuronas marcapasos a través del flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales cuyo mapa de Poincaré, o cuyo mapa a tiempo constante, o cuya aproximación a tiempo constante, es una transformación discontinua en un espacio n -dimensional. Las discontinuidades se encuentran en la frontera topológica de una cantidad finita de piezas de continuidad. La teoría de sistemas dinámicos (dinámica topológica, medidas invariantes, subvariedades invariantes, atractores topológicos y medibles, estabilidad de ciclos límites, caos topológico y medible, bifurcaciones y estabilidad estructural) provee de resultados teóricos de dinámicas, en mayor parte bajo hipótesis de continuidad y diferenciabilidad, esperándose que algunos de esos resultados, con adaptaciones a estudiar, sean también válidos para ciertos sistemas con discontinuidades no aisladas. Se pretende en esta tesis de maestría investigar en la literatura científica actual los resultados matemáticos existentes sobre el tema del título, publicados o en desarrollo, relacionarlos entre sí, estudiarlos en detalle, organizarlos y adaptarlos a un contexto unificado, y extenderlos en lo posible a sistemas más generales. Se pretende también, comparar los resultados teóricos matemáticos existentes o a obtener, con los resultados fisiológicos encontrados o esperados en neurociencias.

El resto de la propuesta puede leerse en

<https://sites.google.com/site/ingenieriamatematica/Home/>



MAESTRÍA EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

Página web:

<https://sites.google.com/site/ingenieriamatematica/Home/>

Contacto: ingenieria.matematica@fing.edu.uy

Jornada de Ingeniería Matemática - 22 de diciembre 2008

FACULTAD DE INGENIERIA - Salón B11 - Aulario

- 8:00 a 9:00. Registro de participantes y Bienvenida
- 9:00 a 9:40. Dr Gonzalo Perera - Vicepresidente de ANTEL: "Visiones de un matemático en el gobierno/sector publico productivo"
- 09:50 - 10:10. Mag. Laura Aspirot: Regresión no paramétrica para datos funcionales no estacionarios (Estadística- Telecomunicaciones)
- 10:10 - 10:30. Tesis 1: H. Enrich: Flujo de fluidos estratificados (Fluidos - Sistemas dinámicos)
- 10:30 - 10:50. Tesis 2: G. Usera: Desarrollo de métodos MOF (Moment of Fluid) (Fluidos - Métodos numéricos)

10:50 - 11:20. Pausa Café

- 11:20 - 11:40. Tesis 3: Eleonora Catsigeras: Dinámica finito-dimensional discontinua que modela redes neuronales. (Sistemas dinámicos- neurociencias)
- 11:40 - 12:00. Tesis 4: Héctor Cancela: Efficient evaluation of Diameter Constrained Network Reliability measures (Informática)
- 12:00 - 12:20. Tesis 5: Elvio Accinelli. La teoria de juegos para modelar la evolucion por imitacion (Economía matemática)

Almuerzo: 12:20 a 14:00

- 14:00 - 14:20. Tesis 6: Mario Wschebor: Valores extremos de campos aleatorios en modelación de olas marinas (Probabilidades)
- 14:20 - 14:40. Tesis 7: Felipe Cucker: Sobre la condición de matrices triangulares. (Análisis Numérico)
- 14:40 - 15:00. Tesis 8: Marco Scavino: Análisis de Valores Extremos para Modelos Espaciales de Lluvias en el Estado de Guanajuato, México (Estadística)

15:00 - 15:30. Pausa Café

- 15:30 - 15:50. Tesis 9: Eduardo Canale: Clasificación de puntos de equilibrio de grafos del modelo de Kuramoto generalizado (Grafos - Control)
- 15:50 - 16:10. Tesis 10: Pablo Monzón: Conductas colectivas, sincronización, coordinación: modelado, simulación y aplicaciones (Modelado de sistemas - Control)
- 16:10 - 16:30. Tesis 11: Ezequiel Maderna: Desarrollo de método/s para obtener soluciones optimales o sub-optimales en problemas de control óptimo lineales con restricciones y costos cuadráticos. (Control - Control Óptimo)
- 16:30 - 16:50. Tesis 12: Federico Najson: Desarrollo de método/s para determinar la estabilizabilidad y/o estabilización via feedback de sistemas lineales conmutados. (Teoría de estabilidad - Control)

Mesa redonda: Ingeniería + Matemática = ¿Inteligencia para el Uruguay productivo?

- 18:00 - 19:30 La maestría en Ingeniería matemática: Expositor: Dr. Ing. Raul Tempone. Moderador: Dr. Gonzalo Perera, Comentaristas: Dr. Rodrigo Arocena (Rector de la UdelaR), Ing. Omar Braga (SACEEM), Dr. Ing. Ismael Piedra Cueva (Decano de FING), Ing. Javier Rodríguez (CSI).

11

CATSIGERAS, E;	<i>Mathematical models of Spikes Codes as deterministic Self-Adapting Dynamical Systems. Abstract and slides of the talk in the 7th. International Neural Coding Workshop , with a session in honour of Prof. José Segundo, Montevideo, Uruguay, November 7-12, 2007</i>	2007	11
----------------	--	------	----

Mathematical models of Spikes Codes as deterministic self-adapting dynamical systems.

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/ eleonora

**Abstract and slides of the talk in the
7th. International Neural Coding Workshop
in honour of Prof. José Segundo,
Montevideo, Uruguay, 2007**

ABSTRACT

In a scale level of a whole system the network of several interacting neurons can be modeled as a deterministic system, whose actual state is modified by the probabilistic incidence of external excitations. It can be mathematically studied with the theoretical tools of the Dynamical Systems Theory in a qualitative description, rather than using a quantitative method. Also Ergodic Theory known results are applicable.

Those abstract mathematical tools provide rigourously proved properties of some n -neurons system models (with n as large as wanted) and the qualitative tasks of its spike trains. For instance, some systems are mathematically proved to exhibit several characteristic structural stable limit cycles while its evolution is just remaining from its internal spikes, in the meanwhile it is not modified by the external excitation spikes of the sensorial neurons of the system. But at the same time, the same system can have a response capable of processing a large amount of information while a probabilistically generated external excitation is added to the system.

It is a known mathematical theorem of the Ergodic Theory that each deterministic (not random) system does define a self characteristic probabilistic distribution (know as "measure of maximal entropy or of topological entropy of the system") such that, if external excitation were added to the system according to that theoretical probabilistic distribution, the system should optimize the information that is internally processed.

These slides can be downloaded from the web page:

<http://eleonora.wikispaces.com/NeuralCoding07>

MATHEMATICAL MODELS OF SPIKE CODES AS DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS

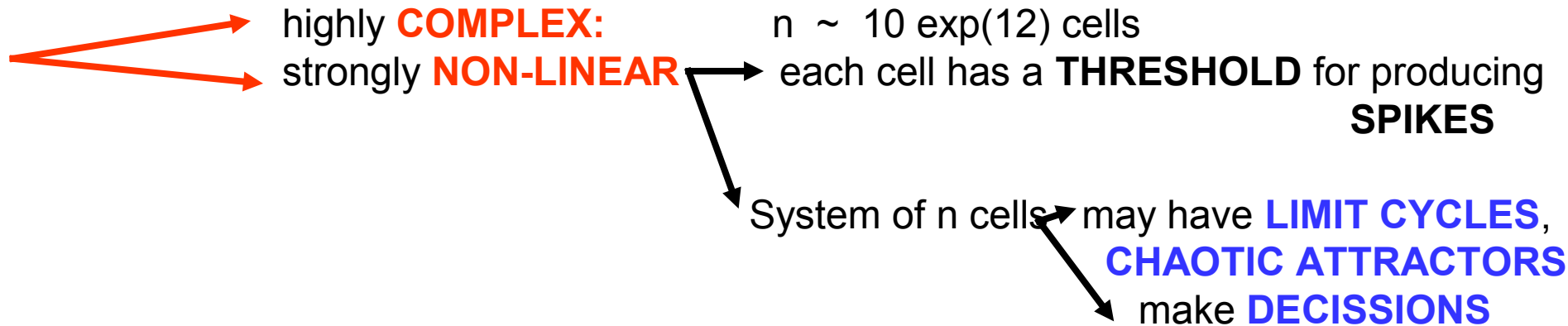
Eleonora Catsigeras
Universidad de la República
Uruguay

eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/~eleonora

Neural Coding 2007. Montevideo
in honour of Prof. José Segundo

NERVOUS SYSTEMS OF n NEURONS WITH UP TO $n(n-1)$ SYNAPSIS:

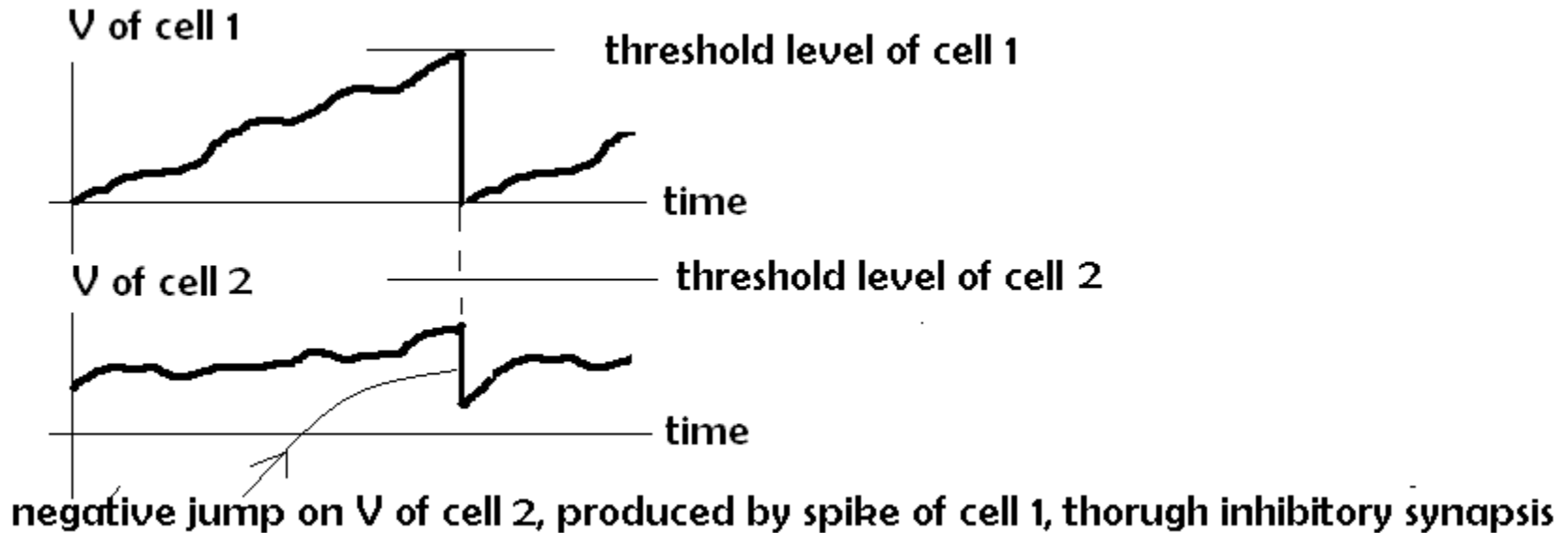
modelled as a **DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEM**.



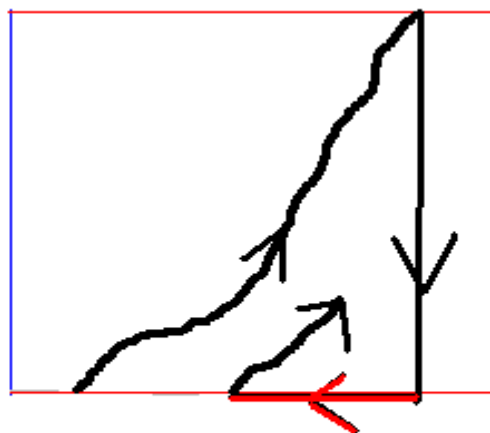
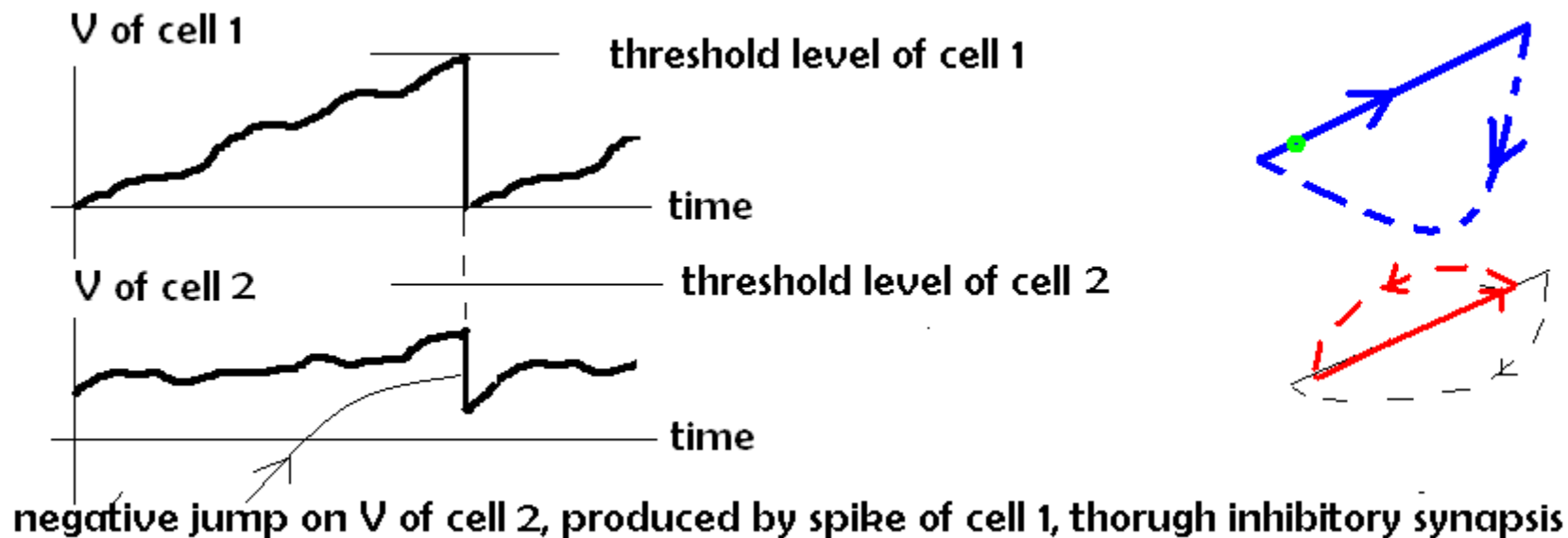
EACH CELL DIFFERENTIAL EQUATION Hodgkin-Huxley model (1952)
particularly Integrate and fire type (Stein-French-Holden 1972)
Relaxation

in general: **INCREASING WITH TIME POTENTIAL** with:

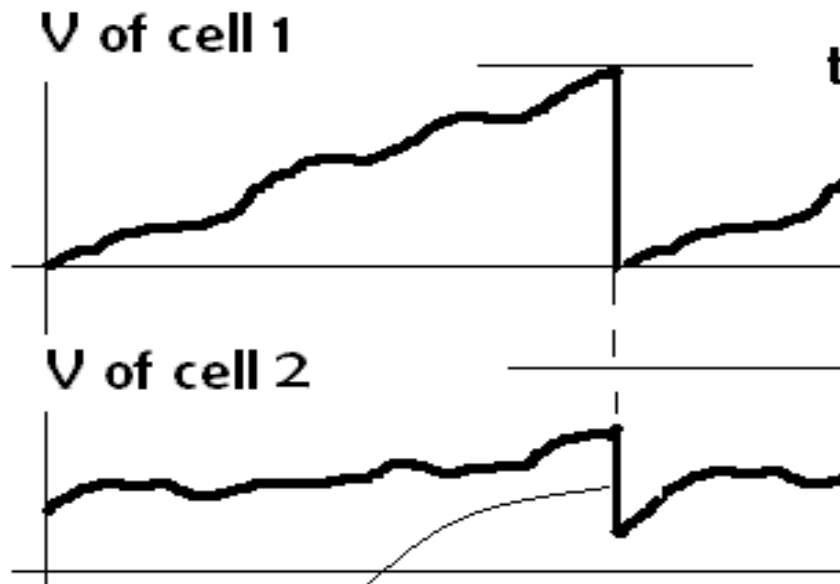
- a **THRESHOLD LEVEL TO PRODUCE one SPIKE**
 - the **($n-1$) SYNAPSIS connections (for each of n cells):**
- positive (exhitory) or negative (inhibitory) jump when other cells of the same system produce spikes (SYNAPSIS).



- EACH CELL** DIFFERENTIAL EQUATION Hodgkin-Huxley model (1952)
 particularly Integrate and fire type (Stein-French-Holden 1972)
 Relaxation
- in general: **INCREASING WITH TIME POTENTIAL with:**
- a **THRESHOLD LEVEL TO PRODUCE one SPIKE**
 - the **(n-1) SYNAPSIS connections (for each of n cells):**
 positive (exhitatory) or negative (inhibitory) jump when other cells
 of the same system produce spikes (SYNAPSIS).



Dynamical system of 2 cells: flux in a 2-dimensional TORUS:
Discontinuity in the V level of cell 2 (red) when cell 1's spike is produced.



IT IS IMPORTANT
because it changes

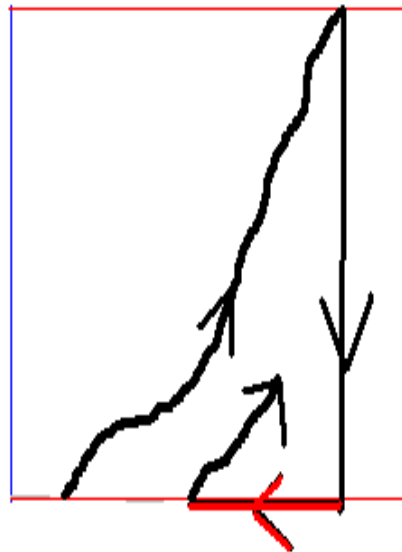
- the skype train
- its code
- its information amount

**THE TIME ELAPSED
between**

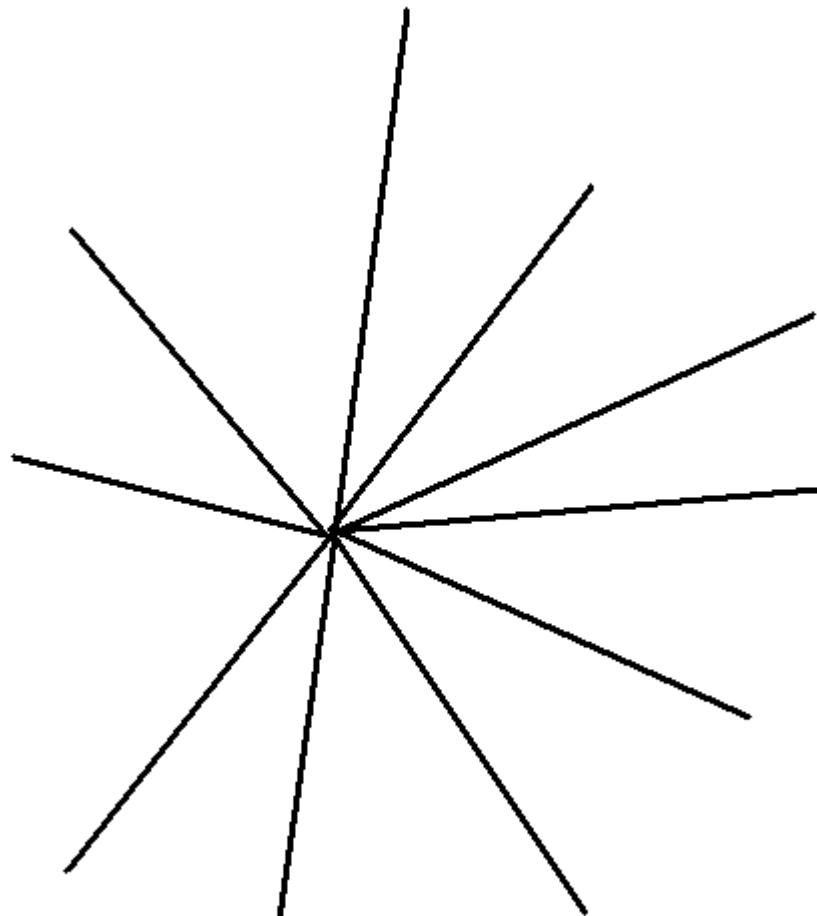
**A spike of cell 1
next spike of cell 2
and reciprocally**

**J.SEGUNDO FIRST POSSED
THE QUESTION:**

**INFORMATION QUANTITY
IS NOT ONLY DEPENDENT
OF NUMBER OF SPIKES OF
EACH CELL, BUT ALSO
OF TIME ELAPSED
BETWEEN SPIKES.**



Dynamical system of 2 cells: flux in a 2-dimensional TORUS:



n neurons:

n independent axis = n dimensions.

**flux in a n-dimensional TORUS
(Budelli 1998)**

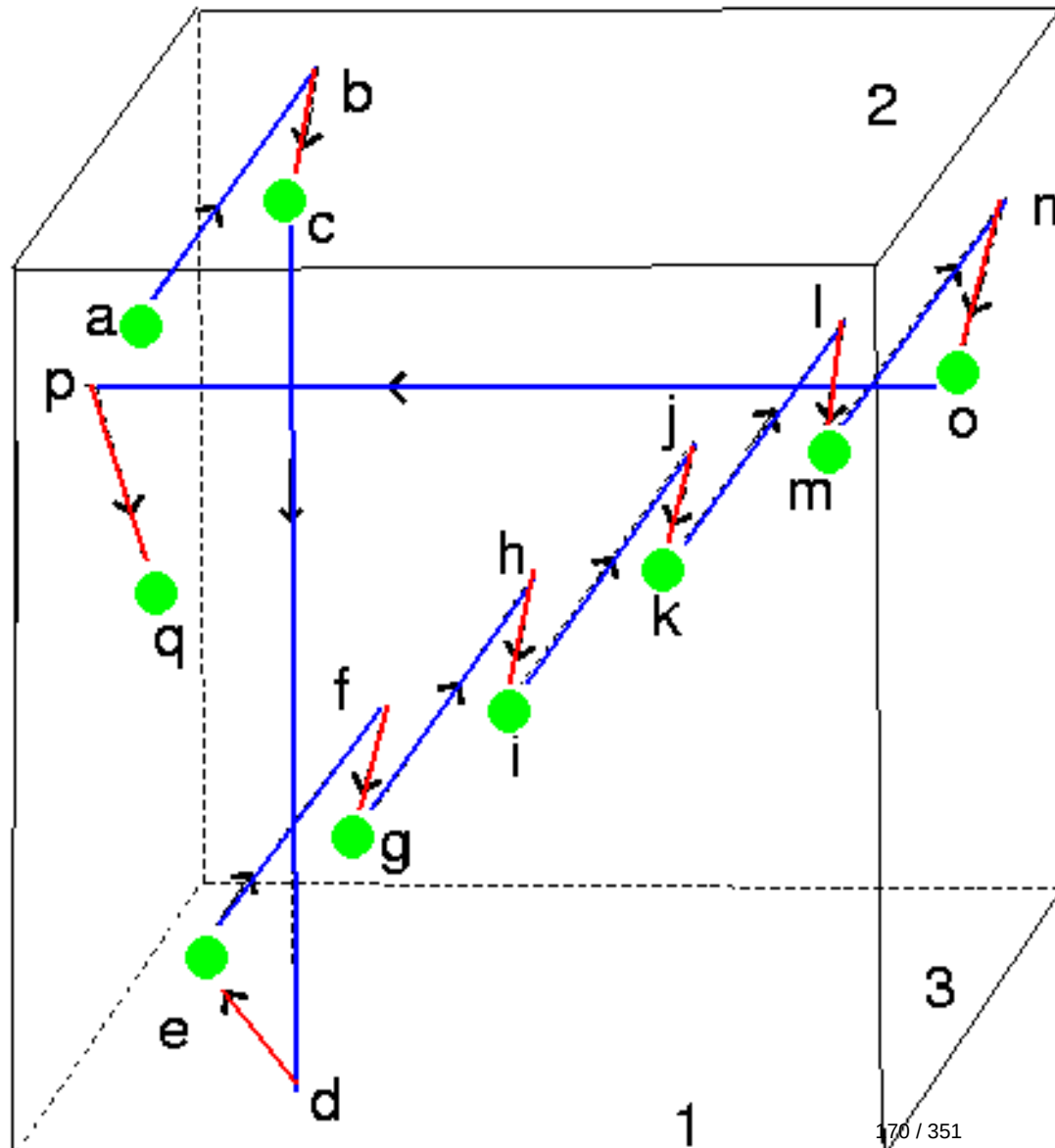
**POINCARÉ SECTION: FIRST
RETURN MAP:**

**it is a discrete dynamical system
in a n-1 dimensional ball with
discontinuities over a n-2
dimensional surface, of finite jumps.**

**A PIECEWISE CONTINUOUS
DISCRETE (n-1) dimensional
DYNAMICAL SYSTEM
in a topological ball.**

Front faces 1, 2 and 3: Threshold levels of neurons.

Backward faces: Zero levels of voltage of the neurons.



In green: Evolution of the system while not firing. A line from backwards to front, **seen like a point** due to perspective.

In blue: Firing of a neuron. A line from the front faces to the parallel backward faces.

In red: Negative synapses. Reduction of the voltage of other neurons not fired.

- **F is piecewise continuous** (discontinuity $(n-2)$ -dimensional surfaces).
- **F is contractive in each continuous piece** (with a well chosen metric in the $(n-1)$ dimensional dominium of F). This is due to inhibitory synapsis hypothesis.
- **F has the separation property:**
Atoms of the same generation are pairwise disjoint, so there is a positive minimum distance between them (if the neurons are not very different).

THEOREM 1 (Budelli-Catsigeras-Rovella 2005):

Contractive piecewise continuous maps

F in $n - 1 \geq 2$ dimensions

that have the separation property

generically **exhibit** persistent limit cycles

(i.e. a periodic attractor that persists under small perturbations of the map F).

COROLLARY:

Generic networks of $n \geq 3$ inhibitory neurons phase lock to persistent periodic behaviours (up to many periodic cycles, and of finite but unbounded!!! period).

PERSISTENCE OF LIMIT CYCLES:

They are structurally stable:

- Persist under (small) perturbations of the parameters of the system.
- Do not persist (but change) under significant perturbations of the parameters
- Jump from a cycle to other under external excitations (for instance spike train of cells out of the system of n neurons, but synaptically connected to it.)

THEOREM 2 (Budelli-Catsigeras-Rovella 2005):

Contractive piecewise continuous maps F in $n-1 \geq 2$ dimensions that have the separation property

and do not have a periodic limit cycle

exhibit a Cantor set attractor

(i.e. non numerable infinite set, inside which dynamics is chaotic).

COROLLARY:

Non generic networks of $n \geq 3$ inhibitory neurons do **not** phase lock to a periodic behavior and **exhibit a Cantor set chaotic attractor.**

ENTROPY

As defined in the Ergodic Theory of Math. Dynamical Systems:

ENTROPY is the limit (assymptotic to the future) of the increasing RATE of the amount of information per unit of time.

It is defined in this way to measure the information INCREASING RATE for CHAOTIC SYSTEMS (sensible to arbitrarily SMALL perturbations of spatial state conditions).

It is not adequate to measure assymptotic rater of information amount for systems exhibiting LIMIT CYCLES, because it would be ZERO.

$P = \{ A_1, A_2, A_3, \dots, A_m \}$ spatial partition.

Amount of information of the partition P given a espacial probability distribution p , is

$$H(P) = - \sum p(A_i) \log (p(A_i))$$

Entropy of the system F with the partition P , given de espacial distribution p is:

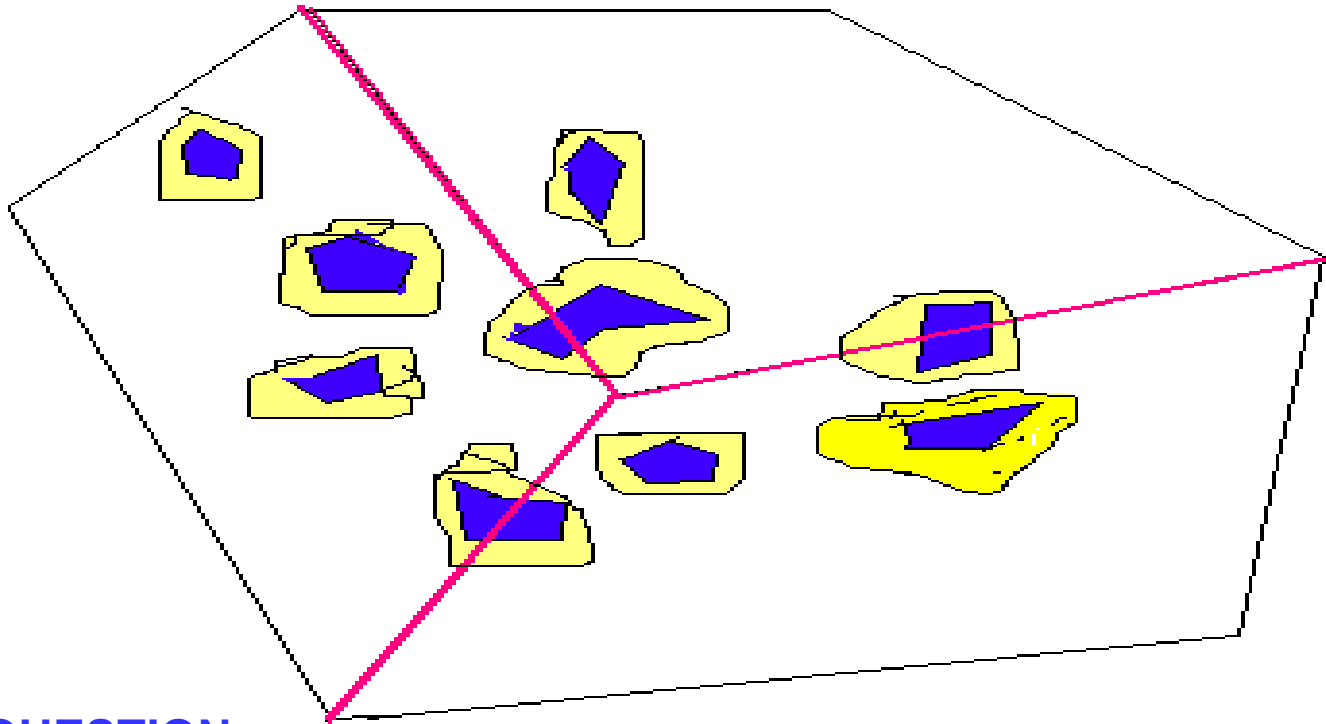
$$H(P, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(F^{-n}(P)) / n$$

- **FOR PERIODIC (LARGE PERIOD) SYSTEMS: AVOID TAKE LIMIT AND DIVIDE USING $n = \text{PERIOD}$.**
- **WHAT IS THE ADEQUATE PROBABILITY DISTRIBUTION (?????)**

THERE EXISTS ONE THAT IS INVARIANT UNDER TIME, AND MAXIMIZES THE ENTROPY OF THE SYSTEM: TOPOLOGICAL ENTROPY OF THE SYSTEM.

MAXIMAL ENTROPY OF THE SYSTEM: COUNTING THE RATE OF THE INCREASING NUMBER OF ATOMS OVER TIME.

The espacial probability distribution thus obtained is inherent to the system.



OPEN QUESTION:

¿Is the maximal entropy probability distribution (which can be computed knowing only the dynamics of the system and not its external inputs) THE SAME (or near) the probability distribution of EXTERNAL EXCITATIONS that change the state of the neural system?

If YES: The neural system would be optimally adapted to process information that receives from outside

CONCLUSIONS:

1) **EXTERIOR SIGNALS DO CHANGE THE BEHAVIOR** (spike train codes) OF THE SYSTEM of n neurons, and allow:

 **categorize the inputs**
make decisions

between large number of possibilities if the system has n neurons ($n \sim 10 \exp 12$),

2) **Period of spike train codes are theoretically as large as needed (finite but UNBOUNDED)** so, in practice (not asymptotically) they can be considered as “almost” chaotic.

Long periods of LIMIT CYCLES OF SPIKE TRAINS allow the system:

 **long term memory functions**
categorize many different inputs
have a scenario of many (finitely many but a large number) of decisions

CONCLUSIONS:

3) INSIGNIFICATIVE PERTURBATIONS OF THE SYSTEM DO NOT CHANGE THE NUMBER NOR THE CHARACTERISTICS OF SPIKE TRAIN PERIODIC LIMIT CYCLES OF THE SYSTEM. **(THE SYSTEM IS STRUCTURABLY STABLE)**

4) SIGNIFICATIVE CHANGES IN THE PARAMETERS OF THE SYSTEMS for instance: some decreasing in the number of neurons, or in the number of synapsis, (as those occuring during childhood), also some changes of the numerical coefficients modelling the chemical reactions in the membranes of the cells, etc

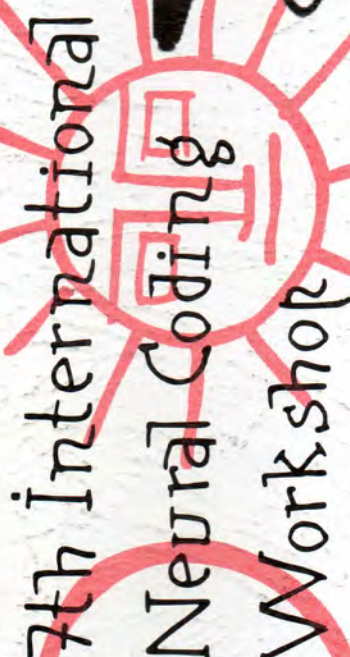
DO CHANGE

the quantity, characteristics, size of its basins, and periods of the limit cycles of spike trains, and thus also CHANGE

the **maximal entropy** capability of the system, and the **INTERNAL PROBABILITY DISTRIBUTION** and the **THEORETICAL INPUT SIGNALS** that the system can process optimally.

ELEONORA CATSIGERAS

EURAL CODING



7th International Neural Coding Workshop

Montevideo



Handwritten text in Arabic script, likely a manuscript page. The text is dense and covers most of the page area.

ΒΑΣΙΛΕΥΝΤΟΣ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΟΝΤΟΣ ΤΗΝ ΜΑΛΙΣΙΑΝ ΠΑΡΑ ΤΟΥ
 ΕΟΥΣ ΕΥΣΕΒΟΥΣ ΑΝΤΙΠΑΛΟΥ ΠΕΡΙΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΤΟΝ ΕΝ ΤΗ ΜΑΛΙΣΙΑΝ ΠΑΡΑ ΤΟΥ
 ΜΕΓΑΣΤΑΣ ΒΑΣΙΛΕΥΣ ΤΟΝ ΤΕ ΑΝΔΡΑ ΚΑΙ ΤΟΝ ΚΑΤΩ ΧΩΡΟΝ ΕΝ ΤΗ ΜΑΛΙΣΙΑΝ ΠΑΡΑ ΤΟΥ
 ΑΙΟΝΟΒΙΟΥ ΗΓΑΓΗΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΤΟΥ ΑΙΟΝΟΒΙΟΥ ΕΝ ΤΗ ΜΑΛΙΣΙΑΝ ΠΑΡΑ ΤΟΥ
 ΟΥΣ ΕΥΣΕΒΟΥΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΣ ΤΟΥ ΑΙΟΝΟΒΙΟΥ ΕΝ ΤΗ ΜΑΛΙΣΙΑΝ ΠΑΡΑ ΤΟΥ

NEURAL CODING 2007

7-12 November Montevideo, Uruguay

<http://neuralcoding2007.edu.uy>

LOCAL ORGANIZING COMMITTEE (Uruguay)

Budelli, Ruben (BioMathematics) Chairman
Caputi, Angel (NeuroPhysiology) Chairman
Gómez, Leonel (NeuroPhysiology) Chairman
Aguilera, Pedro (NeuroPhysiology)
Curti, Sebastian (NeuroPhysiology)
Macadar, Omar (NeuroPhysiology)
Migliaro, Adriana (NeuroPhysiology)
Mizraji, Eduardo (BioPhysics)
Lewowicz, Jorge (Mathematics)
Morales, Francisco (NeuroPhysiology)

REGIONAL COMMITTEE

Tamarit, Francisco (Córdoba, AR)
Samengo, Inés (Bariloche, AR)
Balenzuela, Pablo (Buenos Aires, AR).
Kohn, Andre (Sao Paulo, BR).
Robles, Luis (Santiago, CH).
Quillfeldt, Jorge (Rio Grande do Sul, BR)
Roque, Antonio (Universidad de Sao Paulo, Brasil)

INTERNATIONAL COMMITTEE:

Braun, Hans (Marburg, DE)
Borisyuk, Roman (Plymouth, UK)
Bugmann, Guido (Plymouth, UK)
Chialvo, Dante (Chicago, US)
Eckhorn, Reinhard (Marburg, DE)
Kohn, Andre (Sao Pablo, BR)
Lansky, Petr (Prague, CZ)
Longtin, André (Ottawa, CA)
Moss, Frank (St. Louis, US)
Poon, Paul (Tainan, Taiwan R.O.C.)
Richmond, Barry (Washington, US)
Rinzel, John (New York, US)
Rospars, Jean-Pierre (Versailles, FR)
Segundo, José (Montevideo, UR)
Villa, Alessandro (Grenoble, FR)
Moore, George P. (Los Angeles, US)
Rosenberg, Jay (Glasgow, UK)
Stuber, Michael (Bothell, US)
Sato, Shunsuke. (Osaka, JP)

Contact: mariana@neuralcoding2007.edu.uy

Sponsors

- ☉ Instituto de Investigaciones Biológicas Clemente Estable (IIBCE)
- ☉ Intendencia Municipal de Montevideo (IMM)
- ☉ Internacional Brain Research Organization (IBRO)
- ☉ Latin American Brain Research Organization (LABRO)
- ☉ National Science Foundation (NSF)
- ☉ CSIC, Universidad de la República Oriental del Uruguay
- ☉ Programa de Desarrollo de Ciencias Básicas (PEDECIBA)

Foreword

NEURAL CODING symposia series are multidisciplinary workshops of scientists specialized in neural coding. The 2007 edition will be held for the first time in Latin America. This workshop will also be celebrated in honour of Prof. José Pedro Segundo, founder and leading scientist in the field, and active participant since their inception.

Our aim is to held the VII Neural Coding Workshop in the same spirit that made the previous meetings, that traditionally are relatively small and highly interdisciplinary. Their major emphasis is the search for common principles in neural coding, though without neglecting functionally relevant differences between systems. Previous workshops were held in Prague (CZ, 1995), Versailles (F, 1997), Osaka (JP, 1999), Plymouth (UK, 2001), Aulla (Italy, 2003) and Marburg (Germany, 2005). In this last meeting in Marburg and considering the growing importance of the field in Latin America's south cone, Montevideo, Uruguay was elected as the next location.

Neural Coding symposia bring together neuroscientists from different fields with the conviction that multidisciplinary approaches are essential for better understanding neural coding mechanisms as well as their disturbances in clinical cases. Hence, the attendees of the Neural Coding Workshop should be prepared to cross the borders of their own disciplines. A particular aim of the workshop is to compare and integrate results from different functional levels, including subcellular, single-neuron, neuronal network and systemic levels. It is also the intention to assert between-level interdependencies and their implications for sensation, cognition, autonomous control and action.

Expected and encouraged will be the discussion (intense and, of course controversial) about the experimental, modelling and analytical approaches and also about their promises (in solo or combined) for a better understanding of neural coding mechanisms. The possible role of these techniques for unraveling the pathophysiology and for designing treatments of neurological and related diseases should not be neglected. Major emphasis shall be laid on biologically inspired formal and computer-implemented models which could elucidate the functionally relevant dynamics of the neural coding mechanisms involved.

We accepted 71 abstracts, from which 40 were selected to be presented orally. Two special sessions were programmed: 1) Session "Donald Perkel" on Spike Train Analysis, and 2) Session in honor of Jose P. Segundo, with the scientific presentations organized by Dante Chialvo.

We receive 95 inscriptions: 28 from Europe, 15 from Asia, 45 from the South Cone, 16 from the rest of America and 1 from Africa; 36 of them are graduate students.

Ruben Budelli

Angel Caputi

Leonel Gómez



Thursday 8th

Spatio temporal patterns

Montevideo City hall

- 04:00 pm A spatiotemporal coding in the hippocampal CA3-CA1 networks
Minoru Tsukada, Yasuhiro Fukushima, Hiroshi Kojima, Ichiro Tsuda, Yutaka Yamaguti, Shigeru Kuroda
p.43
- 04:30 pm Spatiotemporal Response of Neurons to Time-Dependent Spectral Features
Pablo Balenzuela, Jordi Garcia-Ojalvo.
p.46
- 05:00 pm Conditions for divergency in the connectivity patterns of synfire chains emerging from random graphs with embedded spike timing dependent plasticity
Tatyana S. Turova, Javier Iglesias, Alessandro E.P. Villa
p.48
- 05:30 pm Effect of gap junction coupling on the dynamic range of a model of the rod photoreceptor layer
Rodrigo Publio, Rodrigo Oliveira, Antônio C. Roque
p.50
- 06:00 pm Successive filtering of the spike train with deterministic temporal structure by spiking neurons
Yoshiyuki Asai, Takashi Yokoi, Alessandro E.P. Villa
p.53



Friday 9th

Oscillatory Processes

Casapueblo, Punta del Este

- 10:00 pm Coupling nonlinear oscillators for fun and profit
Adi Bulsara
p.59
- 10:30 pm Identification of oscillators that generate Mauthner cell inhibitory synaptic noise
Fabio Marti, Henri Korn, Philippe Faure
p.60
- 11:00 pm Interdependencies of neural impulse pattern and synchronization: implications for physiological functions and disease
Hans A. Braun, Horst Schneider, Svetlana Postnova
p.62



Saturday 10th

Session Donald Perkel

Montevideo City hall

- 09:00 am Temporal encoding of electrosensory information: decoding and ambiguities
Curtis Bell
- 09:30 am Notes on neural coding. Spike trains and point processes
José Pedro Segundo
p.67
- 10:00 am GABAergic drive of thalamic neurons in a songbird circuit essential for vocal learning
David Perkel
p.68
- 11:00 am Mathematical models of spikes codes as deterministic self-adapting dynamical systems
Eleonora Catsigeras
p.69
- 11:30 am Modelling the response of cat V1 neurons to drifting gratings
Guido Bugmann
p.70



Saturday 10th

Information

Montevideo City hall

- 12:00 pm Examining the joint neural code of latency and firing rate by Bayesian Binning
Dominik Endres, Johannes Schindelin, Peter Földiák and Mike Oram
p.73
- 12:30 pm Upper and lower bounds to the estimation of Shannon information from spike train data
Marcelo A. Montemurro, Riccardo Senatore, Stefano Panzeri
p.75



Saturday 10th

Motor Control

Montevideo City hall

- 02:30 pm Controlling precise movement with stochastic signals
Jianfeng Feng
p.79
- 03:00 pm Coding of Movement in Parkinson's Disease
George P. Moore
p.81



Saturday 10th

Sensory Coding

Montevideo City hall

- 04:00 pm Contrast, stimulus selectivity and neuronal responses
Mike W. Oram
p.84
- 04:30 pm Can models of human sound localization be any useful to owls?
José Luis Peña
p.88
- 05:00 pm Non-auditory responses in the auditory cortex of behaving chinchillas
Luis Robles, Paul H. Delano, Diego Elgueda and Pedro E. Maldonado
p.89
- 05:30 pm Envelope encoding in neurons of the ventral cochlear nucleus
Manuel C. Eguia, Guadalupe C. Garcia and Sebastian Romano
p.90
- 06:00 pm Should neuronal spikes be given equal weighting in the generation of spectral temporal receptive field?
Paul W.F. Poon, T.R. Chang, T.W. Chiu, P.C. Chung
p.91



Sunday 11th

Cognitive Processes

Montevideo City hall

- 09:00 am Learning invariant object representations from the spatial-temporal correlations of dynamic retinal images in a network of spiking neurons
Frank Michler, Reinhard Eckhorn, Thomas Wachtler
p.95
- 09:30 am Tackling complex problems through simple steps: the roles of the M4 subsystem in the cholinergic memory modulation system, and how this may relate to the nature of the engram
J.A. Quillfeldt, V.B. Lanzotti, F. Diehl, L.O. Alvares, G. Sánchez, L. Fürstenau, T. Mello e Souza, E. Kornisiuk, D. Jerusalinsky
p.96
- 10:00 am Self-control with spiking neural networks playing games
Chris Christodoulou, Gaye Banfield
p.97
- 10:30 am Different molecular cascades in different brain sites underlie memory consolidation
Iván Izquierdo, Martín Cammarota, Weber | C. Da Silva, Lia R.M. Bevilaqua, Janine Rossato, Juliana Bonii, and Jorge H. Medina
p.99



Sunday 11th

Session in Honor of J. P. Segundo

Montevideo City hall

- 02:00 pm Functionality and the structure of neural codes
 Barry J. Richmond
 p.103
- 02:30 pm Timing computations in the auditory brain stem
 John Rinzel
 p.105
- 03:00 pm Synaptic “noise” in a model thalamocortical network increases information transfer from sensory input to cortex
 Leonel Gomez-Sena and Thierry Bal
 p.106
- 03:30 pm Burst firing is a neural code in an insect auditory system
 Inés Samengo, Hugo G. Eyherabide
 p.107
- 04:00 pm Brain dynamics at rest: not an oxymoron
 Dante R. Chialvo
 p.108
- 05:30 pm *Dr. Ricardo Ehrlich, Major of Montevideo*

 Dr. Rodrigo Arocena Chancellor of the Universidad de la República

 José Pedro Segundo

Oral Session Donald Perkel
Spike Train Analysis



Mathematical models of spikes codes as deterministic self-adapting dynamical systems

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/eleonora

ABSTRACT

In a scale level of a whole system the network of several interacting neurons can be modeled as a deterministic system, whose actual state is modified by the probabilistic incidence of external excitations. It can be mathematically studied with the theoretical tools of the Dynamical Systems Theory in a qualitative description, rather than using a quantitative method. Also Ergodic Theory known results are applicable.

Those abstract mathematical tools provide rigorously proved properties of some n -neurons system models (with n as large as wanted) and the qualitative tasks of its spike trains. For instance, some systems are mathematically proved to exhibit several characteristic structural stable limit cycles while its evolution is just remaining from its internal spikes, in the meanwhile it is not modified by the external excitation spikes of the sensorial neurons of the system. But at the same time, the same system can have a response capable of processing a large amount of information while a probabilistically generated external excitation is added to the system.

It is a known mathematical theorem of the Ergodic Theory that each deterministic (not random) system does define a self characteristic probabilistic distribution (known as "measure of maximal entropy or of topological entropy of the system") such that, if external excitation were added to the system according to that theoretical probabilistic distribution, the system should optimize the information that is internally processed.

12

CATSIGERAS, E	<i>Dinámicas de mapas continuos a trozos y localmente contractivos que modelan redes neuronales. Comunicación presentada en el 1er. Coloquio Uruguayo de Matemática, Montevideo , Uruguay, 19 al 21 de diciembre de 2007</i>	2007	12
---------------	--	------	----

Dinámica de mapas continuos a trozos y localmente contractivos que modelan redes neuronales.

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy
www.fing.edu.uy/ eleonora

Resumen de la presentación en el
I Coloquio Uruguayo de Matemática,
Montevideo, Uruguay, del 19 al 21 de diciembre de 2007

Resumen

1a. parte: Cómo a partir de la fisiología de una red de n neuronas conectadas por medio de sinapsis inhibitoria se llega a la dinámica por iterados de una transformación continua a trozos en la bola $n - 1$ dimensional.

2da. parte: Enunciado y demostración de los teoremas siguientes:

Theorem 1 Genéricamente (desde el punto de vista topológico) el sistema dinámico obtenido en la parte 1 tiene una cantidad a lo sumo finita de atractores periódicos persistentes, con períodos que pueden ser arbitrariamente grandes

Theorem 2 Al variar los parámetros del sistema, en el borde de los que presentan el comportamiento periódico descrito en el teorema 1, hay un atractor de Cantor, tal que la dinámica restringida a ese atractor es sensible a las condiciones iniciales (expansiva).

Introducción

Una red compuesta por $n \geq 2$ neuronas conectadas sinápticamente puede ser modelada como un sistema dinámico determinista tal que su estado instantáneo es modificado por la incidencia de perturbaciones del exterior a la red. Puede ser estudiada usando las herramientas de la Teoría de los Sistemas Dinámicos, mediante una descripción global cualitativa, más general que los métodos cuantitativos. Esto últimos son aplicables en cada caso particular, si se conoce la formulación exacta de las ecuaciones diferenciales o en diferencia que gobiernan el sistema. En cambio los métodos globales cualitativos, solo

requieren de hipótesis abstractas generales a una familia más o menos amplia de sistemas dinámicos.

Las herramientas matemáticas abstractas proveen propiedades, rigurosamente demostradas, de ciertos modelos dinámicos de redes con n neuronas, para valores finitos, pero arbitrariamente grandes de n . Entre estas propiedades, las características de los "spike-trains" (trenes de espigas, es decir trenes de interacciones sinápticas entre las diferentes neuronas de la red) definen la cantidad de información que la red puede memorizar o procesar. Por ejemplo, para alguna familia de tales sistemas, hemos demostrado que existen una cantidad finita de ciclos límites estructuralmente estables, en la evolución interna a la red de sus espigas.

El conjunto de estos ciclos límites no son modificados por perturbaciones externas aleatorias. Estas últimas, aplicadas a algunas neuronas de la red (las neuronas receptoras sensoriales) cuando tienen amplitud suficiente, solo producen saltos de un ciclo límite a otro. El sistema responde manteniendo la capacidad de reproducir la misma información ante los mismos estímulos externos.

En esta charla explicamos el modelo matemático simplificado de red neuronal, y exponemos la ruta de demostración de los teoremas 1 y 2.

I Coloquio Uruguayo de Matemática del 19 al 21 de diciembre de 2007

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias - Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

PROGRAMA

Miércoles 19/12

9:00 - 10:15 Cursos

- Curso Básico: *Introducción a la Geometría y dinámica en superficies hiperbólicas*. Matilde Martínez

10:25 - 10:55 Monografías y Tesis

- Diego Armentano: *¿Cuántas raíces reales tiene un polinomio? Desde el Teorema Fundamental del Cálculo al Trópico de Cáncer*.
- Viviana Gubitosi: *Teoría de Inclinación*

10:55 - 11:25 Monografías y Tesis

- Federico Dalmao: Título a confirmar
- Juan Alonso: *Álgebras de Lie de curvas en superficies*.

11:25 - 11:55 Pausa Café

11:55 - 12:25 Monografías y Tesis

- Nicolás Fraiman: *Introducción a los sistemas de partículas*.
- Eugenia Ellis: *K-teoría bivariante*

14:30 - 15:45 Cursos:

- Curso Avanzado: *Functores, especies y álgebras de Hopf*. Marcelo Aguiar.
- Curso para Docentes: *Dígitos de control y códigos correctores de errores. (Cuando uno más uno es cero.)* Omar Gil

16:00 - 16:40 Sesiones

- Ezequiel Maderna: *Nuevos métodos matemáticos en mecánica celeste*.
- Jorge Groisman: Título a confirmar.

16:40 - 17:10 Pausa Café

17:10 - 17:50 Sesiones

- Iván Pan: *Sobre el grupo de descomposición de curvas algebraicas inmersas en el plano proyectivo*.

18:00 - 18:30 Ceremonia Inaugural

I Coloquio Uruguayo de Matemática del 19 al 21 de diciembre de 2007

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias - Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

PROGRAMA

Jueves 20/12

9:00 - 10:15 Cursos

- Curso Básico: *Introducción a la Geometría y dinámica en superficies hiperbólicas*. Matilde Martínez

10:25 - 10:55 Monografías y Tesis

- Claudio Qureshi: *Curvas elípticas y aplicaciones a la Teoría de Números*.
- Carlos Segovia: *Teorías topológicas cuánticas de campo*

10:55 - 11:25 Monografías y Tesis

- Pablo Guarino: *Lemas de Conexión*
- Ana González: *Cohomología Virtual*.

11:25 - 11:55 Pausa Café

11:55 - 12:25 Monografías y Tesis

- Viviana Ferrer: *Foliaciones algebraicas en P^2 y sus singularidades*.
- Mauricio Achigar: *Productos cruzados*.

14:30 - 15:45 Cursos:

- Curso Avanzado: *Functores, especies y álgebras de Hopf*. Marcelo Aguiar.
- Curso para Docentes: *Dígitos de control y códigos correctores de errores. (Cuando uno más uno es cero.)* Omar Gil

16:00 - 16:40 Sesiones

- Fernando Abadie: *Dilataciones de grupos de interacciones*.
- Eleonora Catsigeras: *Dinámicas de mapas continuos a trozos y localmente contractivos que modelan redes neuronales*.

16:40 - 17:10 Pausa Café

17:10 - 17:50 Sesiones

- Marcelo Lanzilotta: *Sócalo Relativo*.
- (Interacciones) Rodolfo Gambini: *El programa de unificación de la física y sus dificultades*.

18:00 - 19:00 Charla Plenaria

- Marcos Dajczer: *Hipersuperficies con curvatura media prefijada*.

19:00 - 20:00 Charla de Divulgación

- Omar Gil: *El indiscreto encanto de la geometría*.

I Coloquio Uruguayo de Matemática del 19 al 21 de diciembre de 2007

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias - Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

PROGRAMA

Viernes 21/12

9:00 - 10:15 Cursos

- Curso Básico: *Introducción a la Geometría y dinámica en superficies hiperbólicas*. Matilde Martínez

10:25 - 11:05 Sesiones

- María Alejandra Rodríguez-Hertz: *Ergodicidad estable*.
- Aldo Portela: *Lagos de Wada, construcción dinámica*.

11:05 - 11:35 Pausa Café

11:35 - 12:15 Sesiones

- Ricardo Fraiman: *On projection-based tests with spherical and compositional data*.
- (Interacciones) Eduardo Mizraji: *Memorias matriciales y motores de búsqueda*.

12:20 - 13:00 Sesiones:

- Gonzalo Tornaría: Título a confirmar
- Richard Muñiz: Título a confirmar

14:30 - 15:45 Cursos:

- Curso Avanzado: *Functores, especies y álgebras de Hopf*. Marcelo Aguiar.
- Curso para Docentes: *Dígitos de control y códigos correctores de errores. (Cuando uno más uno es cero.)* Omar Gil

16:00 - 17:00 Charla de Divulgación

- Ángel Pereyra: *Matemática y Juegos Malabares*.

17:00 - 17:30 Pausa Café

17:30 - 18:30 Sesión de Problemas

18:30 - 19:30 Charla Plenaria

- Mario Wschebor: *La interacción entre la probabilidad y otras áreas de la matemática*.

21:00 - Fiesta de Cierre

13

CATSIGERAS, E CURIONE, K. MIGUEZ, M.	<i>El aprendizaje significativo del Cálculo en Facultad de Ingeniería- Presentación en II Foro de Innovaciones Educativas y Ier. Encuentro Regional sobre Tecnologías de la Información y Comunicación, Montevideo , Uruguay, 25 y 26 de abril de 2007</i>	2007	13
--	--	------	----

El aprendizaje significativo del Cálculo en Facultad de Ingeniería

Eleonora Catsigeras
Karina Curione
Marina Míguez

**Presentación en el
II Foro de Innovaciones Educativas
y en el**

**Ier. Encuentro Regional sobre Tecnologías de la
Información y Comunicación**

Montevideo , Uruguay, 2007

El aprendizaje significativo del Cálculo en Facultad de Ingeniería

Eleonora Catsigeras (1), Karina Curione (2), Marina Míguez (2)

(1) Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Rafael Laguardia” –

(2) Unidad de Enseñanza

Facultad de Ingeniería - Universidad de la República

eleonora@fing.edu.uy ; curione@fing.edu.uy; mmiguez@fing.edu.uy;

7112576

Palabras clave: Educación superior, enseñanza de la matemática, aprendizaje significativo, Cálculo.

Mesa I: Procesos educativos en el aula.

RESUMEN

En el presente trabajo se analizan los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje significativo de algunos contenidos del curso de Cálculo del primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República.

Una de las razones de la dificultad para el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo se encuentra en la característica abstracta intrínseca de dichos temas, que aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos elaborados que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas.

En cada individuo la comprensión constructiva consciente de los conceptos matemáticos no puede obtenerse simplemente aceptando la presentación formal elaborada en su versión final, antes e independientemente de una construcción significativa de ella. Sin embargo la heterogeneidad e individualidad de las experiencias cotidianas y de las vivencias relativas a los conceptos que se pretende introducir científicamente, presenta un desafío. ¿Cómo apelar a ellas?, ¿cómo incentivar a cada estudiante para que identifique su propio conflicto cognitivo ante un nuevo concepto matemático formalmente presentado?. Estas son algunas de las preguntas que el trabajo intenta responder.

El aprendizaje de la Matemática requiere tanto actividades individuales como grupales, ambas fueron investigadas y experimentadas en el primer curso de Cálculo, en clases prácticas y de consulta, con exposición e interacción entre los estudiantes.

Se presentarán ejemplos del trabajo con conceptos topológicos en la recta lineal, conceptos relativos a sucesiones, función y continuidad. Se apela a los conceptos cotidianos de los alumnos y se trabaja a partir del conflicto cognitivo entre estas ideas previas y los conceptos matemáticos.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las razones de la dificultad para el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo se encuentra en la característica abstracta intrínseca de dichos temas que, aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos elaborados que en apariencia quedan

desconectados de las vivencias cotidianas. La formalización de los conceptos del cálculo infinitesimal, diferencial e integral llevó centenas de años a la humanidad, y fue desde el punto de vista de la epistemología genética piagetiana, producto de estadios sucesivos de construcción del conocimiento, que implicaron reorganizaciones a otro nivel de las adquisiciones precedentes. Piaget y García señalan tres grandes períodos en la historia de la matemática: *“el realismo estático de los griegos que se basa en estados permanentes (figuras y números), los cuales proveen un conjunto de conocimientos previos que eran necesarios para el descubrimiento de las transformaciones algebraicas e infinitesimales del S. XVII, cuyos análisis, a su vez, eran indispensables para dar lugar a las estructuras propias de la matemática del S. XIX y de nuestros días.”* (Piaget y García, 1982) Consideramos que en cada individuo la comprensión constructiva consciente de los conceptos matemáticos no puede obtenerse simplemente aceptando la presentación formal elaborada en su versión final, antes e independientemente de una construcción significativa de ella. Sin embargo, la heterogeneidad e individualidad de las experiencias cotidianas y de las vivencias relativas a los conceptos que se pretende introducir científicamente, presenta un desafío. ¿Cómo apelar a ellas? ¿Cómo incentivar a cada estudiante para que identifique su propio conflicto cognitivo ante un nuevo concepto matemático formalmente presentado?

Visto desde la perspectiva del investigador, la matemática no se desarrolla mediante un formalismo simbólico racional solamente, usando en forma muy predominante el hemisferio izquierdo del cerebro, sino en conexión simultánea con el derecho en un verdadero funcionamiento en paralelo. La investigación en matemática muestra ese hecho, a pesar que la presentación final del trabajo científico matemático suele prescindir de las ideas globales y no racionales que lo crearon, y que trascienden en mucho al formalismo racional lógico del artículo o reporte que presenta finalmente el investigador.

El aprendizaje de la Matemática en general requiere:

≧ Una actividad y una actitud individuales deliberadas por parte del alumno para reconstruir intrapersonalmente los conceptos, motivado por la actividad de aula y la actividad didáctica del docente, pero en la que nadie le puede sustituir.

≧ Una actividad y una actitud sociales de los alumnos, entre ellos y con el docente: cuando se aprende matemática es cuando se trata de justificar, sustentar y defender ante los otros los conceptos aprendidos. Desde la perspectiva de Vigotsky las formas superiores de conocimiento son socio-generadas. (Vigotsky, 1982)

Las dos actividades intra e interpersonales con estudiantes fueron investigadas y experimentadas en el primer curso universitario de Cálculo, en clases prácticas y de consulta, con exposición e interacción entre los estudiantes. (Catsigeras, 2001)

Ausubel formula en 1963 la teoría del aprendizaje significativo, una propuesta teórica influyente en el enfoque constructivista (Ausubel, 2002). Presenta un modelo de enseñanza y teoría del aprendizaje centrados en el contexto educativo. Se ocupa en especial *“de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos científicos a partir de los conceptos que el alumno ya ha formado en su vida cotidiana”* (Pozo, 1993). En el presente trabajo se analizan diferentes conceptos matemáticos trabajados en el curso de Cálculo del primer

semestre en la Facultad de Ingeniería y un acercamiento a los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje significativo de los mismos, a través de algunas consultas de los estudiantes, de sus respuestas y de las explicaciones a sus pares en las clases prácticas.

2. CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN LA RECTA REAL.

No resulta difícil relacionar la recta real con el conjunto de números reales. A pesar de la complicación formal para demostrar que *hay una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta*, el uso cotidiano lo hace fácilmente aceptable para el estudiante. Cuando se da un conjunto de números reales, por ejemplo

$$(1) \quad A = \{x \text{ real: } 1 < x \leq \sqrt{3}\} \cup \{x \text{ real: } \sqrt{7} \leq x < 3\}$$

resulta necesario ejercitarse mentalmente para visualizar el conjunto de puntos correspondientes en una recta. Esto puede lograrse al principio con un esquema expuesto en papel o pizarrón, pintando de rojo en un eje horizontal los puntos incluidos en el conjunto A y dejando negros los puntos que no están en A. Es necesario apelar al dibujo repetidamente, al principio y cada vez que se trabaje con un conjunto de reales, y no quedarse con la visualización formal simbólica dada por la notación del tipo (1) solamente. Será necesario que cada estudiante apele por sí mismo a elaborar un dibujo, una gráfica o un esquema, hasta que pueda lograr el proceso de aparición automática mental, cuando esa figura se imagina asociada a las palabras que la definen, sin necesidad de dibujarla exteriormente.

En el programa de Cálculo se presentan algunas relaciones entre los conceptos de máximo, extremos y frontera, como por ejemplo las siguientes:

⌊ *Todo conjunto de reales acotado superiormente tiene extremo superior, pero no necesariamente tiene máximo.*

⌊ *Si existe máximo entonces existe el extremo superior y coincide con el máximo.*

⌊ *Existe máximo si y solo si existe extremo superior y este pertenece al conjunto.*

⌊ *El extremo superior y el extremo inferior son puntos frontera pero no necesariamente un punto frontera es extremo superior o inferior.*

Esas relaciones son memorizadas y reproducidas por el estudiante, cuando el docente se limita a exponerlas y demostrarlas formalmente, y en ese caso muchos de los alumnos muestran no haber aprendido profundamente su significado, sino solo en forma verbal y desestructurada.

Para fijar ideas concretas, volvamos al tema del aprendizaje de los conceptos de extremos y puntos frontera de subconjuntos en la recta real. Las definiciones formales son las siguientes:

⌊ *Definición: $S = \text{ext sup } A$ si $x \leq S$ para todo x en A y si $S \leq K$ para todo K que sea cota superior de A .*

⌊ *Definición: $M = \text{máx } A$ si $x \leq M$ para todo x en A y si M pertenece a A .*

⌊ *Definición: a es punto frontera de A si para todo $\varepsilon > 0$ (se lee: épsilon positivo) el entorno $B_\varepsilon(a)$ (se lee: B sub épsilon de a) contiene algún punto de A y algún punto del complemento de A .*

Si el docente no apela a alguna idea globalizadora y a una reflexión constructiva previa a esas definiciones, que tiene en algún momento que ser vivenciada individualmente por el estudiante a partir de sus ideas cotidianas y experiencias previas, creemos que no podrá salir de la

reproducción formal para llegar al aprendizaje significativo. Una manera de concretar lo expuesto antes es complementar las definiciones con la siguiente presentación previa:

≧ En la recta los puntos, como correspondientes de números reales, están ordenados de menor a mayor. Puede imaginarse la recta como una carretera. El conjunto A es el conjunto de paradores que hay en la carretera. Sabe que después del kilómetro 35 no hay más paradores. 35 es una cota superior de A. Y 47 también lo es, y 63, y cualquier número mayor que 35. Y también son cotas superiores todos los números mayores o iguales que el kilómetro donde se encuentra el último parador. El extremo superior de A es el kilómetro donde se encuentra el último parador. Es la menor de las cotas superiores.

≧ Supongamos que el último parador se encuentra en el kilómetro 32. El extremo superior de A es 32. Es mayor o igual que todos los puntos de A. En este ejemplo 32 pertenece al conjunto A porque es el kilómetro donde hay un parador. Es por lo tanto 32 el máximo de A.

≧ En todo entorno de 32 hay algún punto de A (por ejemplo el propio punto 32) y también puntos que no están en A (los mayores de 32). Por lo tanto 32 es punto frontera.

≧ Supongamos que el antepenúltimo parador está en el kilómetro 25 y que todos los demás paradores distan más de dos kilómetros de él. En este caso 25 no es extremo superior ni máximo (porque el máximo es 32), pero es punto frontera pues en todo entorno de 25 hay algún punto de A (el propio punto 25) y algunos puntos que no están en A (por ejemplo el 24 y el 26)."

A partir de esa idea cotidiana apelada aparece el siguiente conflicto cognitivo: *¿Cómo puede un conjunto acotado A tener extremo superior que no sea su máximo?* Antes de la respuesta formal, es conveniente tratar de explicitar una abstracción al ejemplo cotidiano anterior. En Matemática imaginamos los puntos en la recta. Supongamos que los paradores en la carretera son puntos: cada parador tiene longitud nula, se reduce a un solo punto. El último se encuentra exactamente en el kilómetro 35, pero no hay un penúltimo. Los anteriores se encuentran exactamente en los puntos con abscisa 34.90, 34.990, 34.9990, 34.99990, 34.999990, etc. Si ahora se retira el parador (el punto) que estaba exactamente en el kilómetro 35, no existirá un último parador. No hay máximo pero 35 sigue siendo el extremo superior. Tan cerca como se quiera de 35, por abajo o por la izquierda, hay puntos del conjunto. Pero 35 no pertenece al conjunto. Este concepto trasciende a las ideas cotidianas o físicas, ya que los puntos son abstracciones, ideas primitivas, frecuentes en la abstracción matemática. Pero esta abstracción no debe preceder sino proceder de ideas previas cotidianas en la exposición docente, como generalizaciones imaginarias de estas.

Aún así creemos que no alcanza con la exposición del docente de su propia idea cotidiana relacionada con el concepto a definir formalmente. Es necesaria la construcción reflexiva efectuada intra e interpersonalmente por los alumnos. Podría proponerse el siguiente ejercicio, a realizar en grupos de tres o cuatro estudiantes:

Ejercicio: *Plantear una idea mental proveniente de vivencias cotidianas, que sea una abstracción idealizada de ellas, y apelar a esa idea para explicar constructivamente a otro alumno por qué el concepto de extremo superior de un conjunto A de puntos en la recta es diferente del concepto de máximo y del de punto frontera.*

En las clases prácticas con exposición de respuestas o intentos de respuesta al ejercicio anterior entre los estudiantes aparecieron las siguientes dificultades:

≧ En primera instancia el alumno se encuentra bloqueado porque intenta responder según lo que cree que el docente espera que responda. Ha sido necesario insistir en la necesidad de explorar intrapersonalmente cuáles son las imágenes mentales, las ideas previas, cotidianas e informales, relacionadas con el concepto presentado científicamente de manera formal.

≧ En segunda instancia se ha encontrado resistencia de los alumnos en usar el lenguaje cotidiano en vez de símbolos matemáticos para responder esas preguntas que apelan a los conceptos previos e ideas mentales globalizadoras de lo cotidiano con lo simbólico en una clase de matemática. Esto traduce a nuestro entender la desconexión previa entre la concepción de lo que deberá ser la definición matemática que el estudiante trata de ejemplarizar y el concepto significativo globalizador de su contenido.

3. CONCEPTOS RELATIVOS A SUCESIONES.

Observamos que en la práctica resulta artificial y ajeno, tanto a las ideas abstractas científicas como a las ideas intuitivas previas, introducir el concepto de *sucesión* restringiéndose a sucesiones en la recta. Resulta más amplio y fácil de comprender comenzar por sucesiones en un conjunto cualquiera, por ejemplo como subconjunto numerado de puntos de un plano, que puede ser en el mapa de una región o de una ciudad para fijar ideas. (Catsigeras, 2004). Cuando se introduce, como lo hacen numerosos textos, el concepto de *sucesión* a partir de una fórmula que da un número real a_n en función de un natural n , el estudiante queda atado a esa idea mental y entorpecido para comprender fácilmente en los cursos siguientes, los conceptos topológicos en el plano, en el espacio, o en conjuntos de objetos matemáticos más complicados. Además el concepto matemático de sucesión es uno de esos pocos conceptos para los cuales el significado usual de la palabra en la lengua española es el mismo que el de la definición precisa matemática general. *Sucesión es un conjunto de cosas que se hallan o pasan una después de la otra* (diccionario Kapelusz de la Lengua Española). Definición matemática: *Sucesión es una descripción ordenada, según la ordenación de los números naturales, de elementos de un conjunto no vacío cualquiera A* (en la que se admite repeticiones y ausencias de elementos de A).

Hay una preocupante confusión entre lo que se constituye como información y lo que efectivamente se constituyen en ideas previas para un universo dado de estudiantes. Es necesario distinguirlas. No cualquier información que un estudiante da frente a una pregunta equivale a una idea previa. *“Las ideas previas se refieren a estructuras conceptuales de significados que (los alumnos) atribuyen a un dominio determinado de conocimiento. La práctica educativa, si se la puede llamar constructiva, tiene que ver con el intento de (apelar) a esas ideas previas al respecto de una situación pedagógica propiamente dicha, a propósito de la enseñanza de un contenido conceptual. El apelar a las ideas previas independientemente del proceso de aprendizaje de un concepto científico, carece totalmente de sentido”* (Castorina, citado en Bixio, 1995) Es imprescindible cambiar la práctica, que se ha arraigado entre muchos docentes, de simplemente relevar “ideas previas” para luego

trabajar en el aula con la estrategia usual, haciéndolas sencillamente a un costado.

En la definición matemática abstracta de sucesión las ideas cotidianas son precursoras, y el docente debe estar preparado para trabajar constructivamente desde ese nivel. Por otro lado, y como muestra el siguiente ejemplo, algunas otras ideas previas en el concepto de sucesión constituyen obstáculos.

Algunos estudiantes creen erróneamente que dando suficientes términos de la sucesión (pero sólo una cantidad finita de ellos) quedan determinados los siguientes. Eso es falso, pero está fortalecido por el formato de algunos tests psicológicos y los ejercicios escolares que realizaron desde edades tempranas. Es necesario mostrar que *sucesión* no es lo mismo que *comportamiento periódico o regular según una fórmula*. Es necesario describir, aunque no sea mejor que “aleatoriamente”, la ley de construcción de todos los infinitos términos de la sucesión, y no solo de una cantidad finita de ellos. En la matemática actual tienen especial relevancia aquellas sucesiones de puntos que aparentan ser periódicas pero que, si se avanza lo suficiente en el tiempo, muestran que difieren mucho de continuar siendo aproximadamente periódicas en el futuro. Estas sucesiones aparecen naturalmente al estudiar fenómenos físicos, soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y sistemas deterministas caóticos (Catsigeras, 2001).

Por otra parte la idea errónea de que dando 3, 10 o 25 términos de una sucesión se puede responder de una única manera correcta a la pregunta de cuál es el siguiente término, provoca que el estudiante no comprenda fácilmente el *principio de inducción completa*, entre otros conceptos necesarios para el Cálculo.

Pasaremos al análisis de otro de los conflictos cognitivos en el concepto de sucesión. Apelaremos a consultas efectuadas durante el curso de Cálculo mediante el foro público en internet de esa asignatura. La idea intuitiva pero precisa de límite de una sucesión es la siguiente: *En el paso n el término de la sucesión, y todos los que le siguen, van a encontrarse tan cerca como se desee de su límite*. La idea previa errónea es que la única manera de tener convergencia de una sucesión, el único modo de acercarse al límite, es finalmente avanzando hacia él de forma que en cada paso se esté más cerca del límite que en el paso anterior. Se cree que la aproximación al límite debe mejorar de un paso al siguiente, y que si esto no sucediera entonces la sucesión no podría ser convergente. Quizás ese concepto previo provenga de que cuando uno se dirige a un lugar caminando, lo hace generalmente dando todos sus pasos siempre hacia delante, estando en cada uno más cerca de la meta que en el anterior. No lo hace usualmente, por ejemplo, avanzando tres pasos para el frente y dos para atrás. Es cuestión de ver que si lo hiciera igual llegaría a su meta, aunque demoraría más. El estudiante descarta equivocadamente el acercamiento al límite con sucesivos avances y retrocesos. Cree erróneamente que infinitos avances y retrocesos significan la oscilación permanente y la inexistencia de límite.

Pregunta de un estudiante: *En el parcial figura como respuesta que es falso que toda sucesión convergente sea monótona. Creo que es verdadera. ¿No se equivocaron en la respuesta?*

(A) Respuesta de otro estudiante: *Es falso, porque la sucesión $(-1)^n / n$ no es monótona y tiende a cero.*

(B) Respuesta de otro estudiante: *Es falso pero sería cierto si además supieras que la sucesión tiende a cero por la izquierda o por la derecha.*

Respuesta del docente: *La respuesta (A) es correcta y está precisamente bien justificada con el contraejemplo. La última parte de la respuesta (B) es incorrecta. Se puede aproximar al límite siempre por la izquierda, con sucesivos avances y retrocesos, con tal que los retrocesos sean menores que los avances. Contraejemplo: $a_n = 1 / (1 + n + (-1)^n)$.*

El concepto previo aunque equivocado es *persistente*. Cuesta convencer al estudiante de su falsedad. Aunque el alumno reconoce haber entendido el contraejemplo, no resulta fácil que asimile significativamente la afirmación de que *no toda sucesión convergente es necesariamente monótona*. La persistencia y resistencia de las ideas previas está señalada por autores de las teorías de cambio conceptual en el aprendizaje. (Pozo, 1999)

Volviendo al ejemplo de las sucesiones convergentes no monótonas, la resistencia al cambio de los conceptos previos provoca que no alcance, para lograr el cambio conceptual, que el docente o los pares del alumno apelen a argumentos lógicos formales (contraejemplos con fórmulas) a partir de la definición matemática de límite. Es necesario lograr el cambio de las ideas cotidianas primero, con nuevas ideas cotidianas que la complementen o mejoren.

Respuesta complementaria del docente: *Se puede aproximar siempre por el sur al punto A del Ecuador, sin alcanzarlo nunca, caminando tres pasos hacia el norte, dos hacia el sur, y así sucesivamente tres hacia el norte, dos hacia el sur, cada vez pasos más cortos de modo de no alcanzar nunca al punto A pero de aproximarse a él, como límite en infinitos pasos.*

Para lograr el aprendizaje constructivo de los conceptos de matemática, es importante desarrollar el proceso de enseñanza *en forma colectiva*, con la participación de más de un estudiante y sus intentos de resolución o respuesta.

4. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Mayoritariamente, la idea previa con la que el alumno ingresa respecto al concepto de función, es el de una fórmula, usando funciones racionales, algebraicas o trascendentes definidas en los últimos años del liceo. Transformar ese concepto en el científicamente más amplio no es fácil, pues no alcanza usualmente con la definición matemática siguiente:

(2) Definición: *Función $f : D \rightarrow C$ es una terna dada por un conjunto no vacío D llamado dominio, otro conjunto no vacío C llamado codominio y una correspondencia tal que a cada elemento del dominio hace corresponder uno y solo uno del codominio.*

Retomamos la siguiente observación: *“Una nueva concepción no va a reemplazar a una antigua, por lo general mientras esta no se encuentre con dificultades y una concepción nueva e inicialmente verosímil sea potencialmente capaz de resolver estas dificultades.”* (Posner y cols., 1988)

El concepto previo, en el caso de función real, no proviene de las vivencias cotidianas extra-escolares del alumno sino justamente de la escolarización previa, debido entre otras razones al interés e insistencia de nuestros cursos de Matemática secundaria en el estudio mecanicista analítico de representaciones gráficas de funciones dadas solo por fórmulas con funciones tipo. No decimos que esté mal esa insistencia, porque asienta en el alumno un concepto de función, que aunque

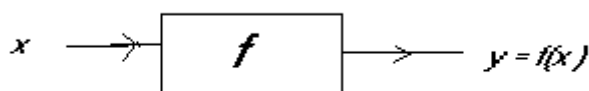
restringido, sirve de base para la generalización de la definición (2). Para fijar ideas exponemos un ejemplo que evidencie al alumno la insatisfacción de ese concepto previo y que justifique y muestre la verosimilitud y la potencialidad de la definición matemática (2).

Ejemplo: Consideremos un aparato f (usemos la letra f de función), por ejemplo un amplificador de audio, que consiste *en una caja con una puerta de entrada y una puerta de salida*. El amplificador de audio funciona del siguiente modo:

≥ Cada señal de audio *que aparezca a la entrada “ x ” produce una señal “ y ” a la salida*.

≥ El *conjunto dominio D* es el conjunto de todos los valores de las señales a la entrada. El *conjunto codominio C* es un conjunto entre cuyos elementos estarán los valores a la salida.

≥ La correspondencia dada por la función es aquella que dice, (explícitamente o no, a través de una fórmula o no), cuál es la única señal de salida “ $y = f(x)$ ” que corresponde a cada señal de entrada “ x ”.



Se busca de esta manera, como se dijo, provocar aprendizajes significativos en los estudiantes. La teoría de Ausubel sobre el aprendizaje significativo supone en primer lugar una teoría acerca del cambio cognitivo por reestructuración. Desde este punto de vista el aprendizaje tiene que ver con la incorporación a la estructura cognitiva del alumno de un cuerpo de conocimientos organizados.

Más allá de apelar a ideas previas, cotidianas o no, para introducir una definición siempre la formulación precisa científica debe ser explícita en términos simbólicos exactos. En particular la definición matemática de función, la definición (2), deberá ser expuesta en las clases y no sustituida por el ejemplo ilustrativo que se utilice para comprenderla.

Por otra parte, observamos la inexistencia de conflicto cognitivo estricto entre la definición (2), el ejemplo del amplificador y las ideas previas de función provenientes de la escolarización anterior del alumno. La definición (2) es meramente la ampliación de las ideas previas y no presenta, desde el punto de vista estricto matemático, una contradicción con las ideas cotidianas y previas, sino una reafirmación de estas y su generalización abstracta.

5. EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

Resulta difícil el aprendizaje significativo del concepto de continuidad de una función, principalmente por la falta de inteligibilidad para el alumno de la primera de los siguientes enunciados matemáticos precisos:

(3) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (llamado módulo de continuidad) tal que: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$*

(4) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D .*

(5) Observación: *Si el dominio está formado por dos intervalos disjuntos, la función puede ser continua aunque su trazo en la representación gráfica no pueda realizarse sin levantar el lápiz.*

Aparece el siguiente conflicto, planteado como consulta de un estudiante:
Pregunta de un alumno:

¿Cómo puede la función $f(x) = 1/x$ ser continua si cuando x tiende a cero f tiende a infinito?

Respuesta de otro alumno:

Esa función es continua en todos los puntos excepto en cero.

Primera respuesta del docente:

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos del dominio. El cero no está en el dominio de la función.

Las condiciones del cambio conceptual, según Posner y cols., ilustradas en el ejemplo que estamos tratando son las siguientes: (Posner y cols., 1988)

1. Insatisfacción con las concepciones existentes.
2. Inteligibilidad para el sujeto de la nueva concepción.
3. Verosimilitud de la nueva concepción con la previa.
4. Capacidad explicativa y de extensión de la nueva concepción: tiene que ser fructífera.

Sin embargo, se muestra que, para ser verosímil y productivo el nuevo concepto de continuidad de una función, introducido a partir del conflicto cognitivo del ejemplo que estamos tratando, ha sido necesaria la confirmación de ciertas conclusiones:

Pregunta de otro estudiante después de las aclaraciones del docente:

Entonces ¿la misma función $f(x) = 1/x$, si se la define como $f(0) = 1$, deja de ser continua?

Respuesta del docente:

Está bien tu conclusión aunque es imprecisa. La función nueva no es la misma función que antes: cambió su dominio. La de antes era continua y la nueva no.

La definición (3) presenta un paradigma. Es usualmente repetido el concepto de continuidad de una función en un punto, tanto por estudiantes como por docentes, verbalmente y desestructuradamente, a lo sumo relacionándolo con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos de implicación lógica. Pero creemos que puede no ser significativamente comprendido, entre otros motivos porque queda desconectado de ideas previas intuitivas y cotidianas. Volviendo al ejemplo de función como un aparato formado por una caja con una puerta donde entra la variable “ x ” y otra puerta por donde sale variable “ y ”, ilustramos la idea conceptual de continuidad del siguiente modo:

Hay un valor deseado a la salida Y_0 para el cual la entrada debería ser exactamente X_0 . Es decir $f(X_0) = Y_0$. Pero, ni la variable de entrada ni la de salida pueden ajustarse a valores exactos siempre, sino que hay errores, imprecisiones que hacen que el valor de X sea aproximadamente, pero no necesariamente igual a X_0 , y por lo tanto el valor de la salida $Y = f(X)$ sea aproximadamente, pero no necesariamente igual a $Y_0 = f(X_0)$.

El técnico de mantenimiento del aparato debe satisfacer al cliente. El cliente evalúa cómo funciona la caja observando únicamente lo que sucede en la variable a la salida Y . El técnico acondiciona el aparato de modo de satisfacer la demanda del cliente, ajustando únicamente la variable de entrada X .

- ≥ El cliente demanda que sea $Y = Y_0$, pero admite que la igualdad no se cumpla exactamente sino con un margen de error especificado máximo $\varepsilon > 0$: $|Y - Y_0| < \varepsilon$.
- ≥ El técnico entonces ajusta la variable de entrada, pero no puede siempre ajustarla de modo que $X = X_0$ exactamente. Se admite una tolerancia de variación a la entrada $\delta > 0$: $|X - X_0| < \delta$.
- ≥ Finalmente el técnico debe ajustar la entrada con una variación delta adecuada, que depende del margen de error épsilon que le dio el cliente para la salida, de forma que valga la siguiente premisa: $|X - X_0| < \delta$ IMPLICA $|Y - Y_0| < \varepsilon$. Significa que se ajusta la entrada con una variación adecuada para satisfacer la demanda del cliente a la salida.

Al lograr el aprendizaje del concepto de continuidad relacionado con la actividad cotidiana del sujeto, el nuevo concepto aprendido tiene ciertas características que espontáneamente no tiene, si en forma aislada se presenta la definición científica formal: Los conceptos previos o espontáneos surgen en la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción espontáneo con el entorno y sirven entre cosas para predecir este entorno. (Pozo, 1999)

La persistencia de las ideas previas cotidianas tiene una ventaja y una desventaja. La ventaja es que logra una retención significativa duradera. La desventaja ocurre cuando el ejemplo cotidiano apelado no se ajusta con precisión al concepto científico que se pretende ilustrar. Suele quedar retenido en ese caso la idea previa cotidiana persistente, que tapa o convive en forma aislada con la idea científica con la cual no coincide.

CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra algunos ejemplos concretos mediante los cuales es posible visualizar la construcción de una didáctica específica de la matemática, en particular un modo de abordar desde un enfoque constructivista la enseñanza de algunos de los conceptos trabajados en el curso de Cálculo 1 dirigido a estudiantes que inician su carrera como ingenieros. Enseñar Matemática es interesarse por las condiciones que hacen posible su construcción por parte de los alumnos, y no sólo por el rigor formal de su presentación. Aunque la presentación formal rigurosa es ineludible en la enseñanza de la Matemática actual, debe esta proseguir a la presentación constructivista de los conceptos involucrados. Sobre la base de los ejemplos trabajados en este trabajo, en términos generales, encontramos que si el docente se limita a exponer formalmente conceptos y relaciones entre estos, los estudiantes tienden a memorizar mecánicamente. Como forma alternativa, se trabajó con las ideas previas de los estudiantes. Resultó fundamental que el docente apelara a ideas globalizadoras y a una reflexión constructiva, previo a la presentación de las definiciones. Esto es un paso importante, pero no sustituye la necesaria reconstrucción que el estudiante debe realizar, estableciendo relaciones con sus ideas cotidianas. Sin embargo, se evidenció una gran persistencia de las ideas previas vinculadas a algunos conceptos en particular, el de sucesión.

Es importante destacar que se ha encontrado una importante resistencia de parte de los estudiantes a emplear el lenguaje cotidiano en lugar del simbolismo matemático, aspecto que se recomienda debe trabajarse explícitamente en el aula por parte del docente, desde una estrategia didáctica centrada en la búsqueda de aprendizajes significativos.

El enfoque centrado en el conflicto cognitivo ha mostrado ser muy fructífero, creemos fundamental seguir profundizando en el diseño de estrategias de enseñanza específicas para el aprendizaje significativo de la matemática en la Universidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Ausubel, D., Novak, J. & H. Hanesian (1976) *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, Trillas, México, 1987.
- Ausubel, D: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Paidós. Barcelona, 2002.
- Bixio, C: *Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica*. Revista Aula Hoy, N° 2, 1995
- Bruner, J: *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Ed. Alianza. Madrid, 1990.
- Catsigeras, E: *Elementos de topología usados en Cálculo. Parte I Espacios métricos. Parte II. Sucesiones. Notas para el curso de Cálculo 1*. IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, 2004.
- Catsigeras, E: *La teoría matemática del caos determinista*. Preprint del IMERL, Universidad de la República. Artículo de divulgación presentado en la Mesa Interdisciplinaria del XIV Congreso Latinoamericano de Psicoterapia. Publicado en la revista Lapzus de Cultura, No. 2- pp 22-28. Montevideo, 2001.
- Catsigeras, E: *Microexperiencia de enseñanza en Cálculo*. Publicado en las Actas del II Congreso de Enseñanza, ponencia 1-033 editado en CD–UEFI, Fac. de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo, 2004.
- Míguez, M. Tesis de Maestría en Química or.Educación. Facultad de Química, Universidad de la República, 2001.
- Miguez, M; Curione, K: *Aprendizaje de las Ciencias*. Notas del curso de Formación Docente UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Montevideo, 2004.
- Piaget, J; García, R: *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Ed. Siglo XXI, México, 1982.
- Posner, J; Strike, K; Hewson, P; Gertzog, W: *Acomodación de un concepto científico: Hacia una teoría del cambio conceptual*. (año 1988). En Porlan, R & cols (editores) *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. Diada. Sevilla, 2000.
- Pozo, I: *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid, 1993.
- Pozo, I. (1999) *Aprender y enseñar ciencia* Ed. Morata, Madrid.[5]
- Carretero, M: *Aprendizaje y desarrollo cognitivo. Un ejemplo del tratado el inútil combate*. Artículo Publicado en el libro *Actividad humana y procesos cognitivos*. Editor J. Mayor, pp 145-160. Alambra. Madrid, 1985
- Vigotsky, L: *Génesis de las funciones psíquicas superiores*. (año 1931). Obras escogidas III. Visor. Madrid, 1982.

SEGUNDO FORO
de Innovaciones Educativas
y
PRIMER ENCUENTRO
Regional sobre Tecnologías de
Información y Comunicación



25 y 26 de abril de 2007

Comisión Sectorial de Enseñanza
Universidad de la República



Día miércoles 25 de abril

9 a 10:15 -Apertura del evento

Profa. Elsa Gatti, Sub Directora del Área de Perfeccionamiento Docente y Estudios Superiores (ANEP)
Dr. Rodrigo Arocena, Rector de la Universidad de la República
Dr. Luis Calegari, Pro Rector de Enseñanza
Dra. Cristina Contera, Coordinadora de la Unidad Académica CSE

Mesa I: Procesos educativos en el aula

10:30 a 11:15 -Apertura de la Mesa

Profa. Marta Demarchi (Uruguay),
Prof. Agustín Adúriz (UBA - Argentina)
"Innovación educativa en el aula: conceptualización y alcances".

11:15 -Café.

11:30 a 13:30 -Presentación de trabajos.

«Taller de proyecto: una experiencia de estímulo a la creatividad y desarrollo de las habilidades de trabajo en equipo en ingeniería»
Prof. Pablo Belzarena; Prof. Álvaro Giusto; Prof. Gregory Randall.
Facultad de Ingeniería.

«Comunicación Médico Paciente»
Dra. Mercedes Bernadá; Lic. Gabriela Fernández; Lic. Serrana Amorena;
Dra. Andrea Gerolami; Dra. Nancy De Olivera; Lic. Andrea Gamarra.
Facultad de Medicina.

«Curso Comunicación oral y escrita para estudiantes del área Científico-Tecnológica»
Marina Miguez; Aníbal Paiva; Ximena Otegui.
Facultad de Ingeniería - Licenciatura en Ciencias de la Comunicación.

«Reeducarnos para la sustentabilidad. Enseñanzas de un intento hacia un cambio epistemológico»
Graciela Martínez Días.
Facultad de Arquitectura.

14:30 a 16:00 -Presentación de trabajos.

«Implementación de tutorías académicas en la Licenciatura de Bioquímica. Una alternativa metodológica para facilitar el desarrollo de aprendizajes autónomos»
Julia Leymonié; Ana Denicola; Alicia Hermida.
Facultad de Ciencias.

«El aprendizaje significativo del Cálculo en Facultad de Ingeniería»
Eleonora Catsigeras; Karina Curione; Marina Miguez.
Facultad de Ingeniería.

«Talleres Tutoriales: cuatro años de experiencias innovadoras»
Acosta A; Alvez R; Anesetti G; Carrera D; Castellanos RM; Cedrani J;
Chávez R; Fernández J; Kehyaian V; Lombide P; Martínez-Palma L;
Mercadal J; Nin V; Nogueira J; Radmilovich M; Rama F; Sapiro R;
Siciliano JC; Skowronek F; Valiño I.
Facultad de Medicina.

«Trayectos diferenciados para estudiantes ingresantes a Facultad de Ingeniería»
Omar Gil; Jorge Groisman; Rafael Potrie; Patricia Camargo; Marina Miguez; Karina Curione.
Facultad de Ingeniería.

16:15 -Café.

16:30 a 18:00 -Presentación de trabajos.

«Investigando nuestras aulas. Enseñando a investigar»
Cecilia Baroni; Virginia Fachinetti; Graciela Plachot; Mabel Ruíz.
Facultad de Psicología.

«Mejoramiento de la enseñanza en el curso Geometría y Álgebra lineal I»
Omar Gil; Marina Miguez; Nelson Möller; Ximena Otegui; Nancy Peré;
Juan Piccini; Virginia Rodés; Cecilia Saint Martin.
Facultad de Ingeniería.

«Un caso de evaluación participativa: una experiencia del curso de la Ingeniería»
Prof. Marieta Reis.
Universidade Federal Rio Grande do Sul, Brasil.

«Autoevaluación y metacognición en un curso de formación ambiental para Ingeniería Civil como estrategia para mejorar el aprendizaje»
Marina Miguez; Elizabeth González; Karina Curione; Ximena Otegui.
Facultad de Ingeniería.

18:00 a 18:30 -Cierre y comentarios a cargo de Profesores invitados.

Día jueves 26 de abril

Mesa II: Formación docente

9:00 a 9:45 -Apertura de la Mesa

Prof. Valdo Cavallet (UFPR - Brasil),
Prof. Roque Moraes (PUCRS - Brasil),
Profa. Laura Dominguez (ANEP).
"Innovaciones en la Formación Docente".

10:00 a 10:30 -Presentación de trabajos.

«Espacio docente en Pediatría»
Dra. Mercedes Bernadá; Lic. Adriana Careaga.
Facultad de Medicina.

«Metodología activa para capacitación de educadoras(es) sociales:
formación docente en el ámbito de la Cooperación Universidad
/Sociedad».
Renata Silva Machado.
Grupo de Pesquisa Inovação e Avaliação na Universidade (InnovaAval –
UFRGS).

10:45 -Café.

11:00 a 12:30 -Presentación de trabajos.

«Práctica docente universitaria de extensión hacia la comunidad».
Carmen Caamaño; María Inés Copello; Begoña Ojeda; Javier Royer.
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación.

«A atual Política de Formação de professores no Brasil:
questionamentos»
Sueli Menezes Pereira.
Universidade Federal de Santa Maria/RS/BR.

«¿Qué concepciones manifiestan sobre «aprendizaje» los docentes de
Facultades del Área Científico-Tecnológica? Primeras aproximaciones»
Marina Miguez; Karina Curione.
Facultad de Ingeniería.

14:00 a 15:30 -Presentación de trabajos.

«Nuevas Tecnologías y Educación. Aplicaciones multimedia para uso en el
aula» Ing. Agr. Master NTIC Diana Manero de Zumelzú; Licenciada en
Computación, Máster NTIC Daniela González de Medina; Dra. Delma
de Lima.

Cátedra de Genética - Facultad de Ciencias Agrarias, Córdoba, Argentina
- ORT Uruguay -Facultad de Veterinaria (UdelaR).

«Portfolio Reflexivo Online e Offline: a integração das tecnologias da
informação e comunicação na formação docente»
Prof. Dr. Denise B. C. Leite; Renata Silva Machado; Marieta Reis.
Grupo de Pesquisa Inovação e Avaliação na Universidade (InnovaAval –
UFRGS).

«Proceso Reflexivo-Crítico-Dialógico en la práctica docente del
universitario. La (re)construcción personal del aprendizaje: portafolio
digital como instrumento»
María Inés Copello; Begoña Ojeda.
Unidad Opción Docencia - Facultad de Humanidades y Ciencias de la
Educación.

«A Formação dos Professores-Alunos do curso de graduação em
Pedagogia – Licenciatura Modalidade de Ensino a Distancia da UFRGS»
Mariangela Lenz Ziede.
Curso de Pedagogia a Distancia - PEAD/FACED/UFRGS.

15:30 -Café.

15:45 a 17:00 -Presentación de trabajos.

«Evaluación participativa online y off-line y aprendizajes de democracia
fuerte»
Denise Leite; Ana María Braga; Maria Cecilia Loréa Leite; Maria Elly
Herz; Genaro Marlis Polidori; Monica Pagel Edelwein; Clarice Escott;
Glades Félix; Júlio Godoy Bertolin; Lucia Inés Schaedler; Regina Céli
Machado Pires; Renata Silva Machado; Marieta Reis.
Grupo de Pesquisa Inovação e Avaliação na Universidade (InnovaAval/UFRGS)

«Encuesta a docentes del Ciclo Materno Infantil»
Dra. Mercedes Bernadá; Dra. Patricia Dall'Orso; Dra. Cristina Zabala.
Facultad de Medicina.

«Evaluación participativa: tejiendo experiencias de formación continuada
con educadores sociales»
Maria Elly Herz Genero; Glades T Felix; Denise. C.B Leite.
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) -
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/UFRGS) -
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

17:00 a 17:30 -Cierre y comentarios a cargo de Profesores invitados.

Día jueves 26 de abril

Mesa III: Elaboración de materiales educativos e integración de tecnologías de información y comunicación.

9:00 a 9:45 -Apertura de Mesa

Profa. Patricia Pieragostini (UNL - Argentina)

Profa. Débora Laurino (UFRG - Brasil)

"Innovación en Materiales educativos".

10:00 a 10:30 -Presentación de trabajos.

«Utilización de weblogs y recursos web gratuitos en el aprendizaje de la Genética Veterinaria»

Dra. PhD. Silvia Llambí Dellacasa. Prof. Adj. (DT).

Área Genética - Facultad de Veterinaria.

«Construcción de Módulos Multimedia para la enseñanza universitaria de la Histología»

G. Anesetti; C. Arbelo; S. Beis; A. Benitez; J. Cedrani; R. Chávez-Genaro;

JD Fernández; P. Lombide; P. Mannise; A. Márquez; J. Mercadal; J.

Nogueira; P. Pouso; M. Radmilovich; F. Rama; D. Reyes; A. Sgaravatti; F.

Skoweonek; A. Vera.

Dep'to de Histología y Embriología - Facultad de Medicina.

«Reciclado de páginas web de cursos para la Web Semántica»

Regina Motz; Raquel Sosa; Andrea Rodriguez.

Instituto de Computación - Facultad de Ingeniería.

10:45 -Café.

11:00 a 12:30 -Presentación de trabajos.

«Aplicaciones de nuevas herramientas en la enseñanza de la Química Orgánica: desarrollo y utilización de softwares interactivos en los cursos de licenciaturas de ciencias de la vida»

Mercedes González; Hugo Cerecetto; Pablo Buccino; Virginia López;

María Lavaggi; Diego Castro; Ximena Otegui; Marina Míguez.

Laboratorio de Química Orgánica, Facultad de Ciencias y Facultad de Química - UE Facultad de Ingeniería.

«Textón: estrategias de lectura online»

Prof. Adj. Gustavo García Lutz

Centro de Lenguas Extranjeras (CELEX) - Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación.

«Recursos informáticos para enfrentar las dificultades conceptuales de los cursos de Termodinámica»

Sandra Kahan; Gonzalo Abal; Leonardo Rosés; Lucía Escanellas.

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería.

14 a 15:30 -Presentación de trabajos.

"Experiencia de la Unidad de la Fitopatología en el desarrollo de

Ing. Agr. (MSc.) Vivienne Gepp, Ing. Agr. (PhD.); Pedro Mondino;
Ing. Agr. Mario Michelazzo; Ing. Agr. Victor Prieto; Ing. Agr. Ana Cecilia Silveira.

Departamento de Protección Vegetal - Unidad de Microscopía y Medios Audiovisuales - Departamento de Estadística y Cómputo - Departamento de Producción Vegetal - Facultad de Agronomía.

«Laboratorios en casa: una nueva alternativa para cursos masivos de diseño electrónico digital»

Juan Pablo Oliver; Fiorella Haim; Sebastián Fernández; Javier Rodriguez;

Lyl Ciganda; Pablo Rolando.

Instituto de Ingeniería Eléctrica - Facultad de Ingeniería.

«Arquitectura de la participación en un caso de evaluación institucional con la intervención de las TICs (mosaico)»

Ana María Braga; Denise Leite; Jussara Musse.

Grupo de Pesquisa Inovação e Avaliação na Universidade (InnovaAval - UFRGS)

15:30 -Café.

15:45 a 17:00 -Presentación de trabajos.

«Rechazo, entusiasmos e imaginario estudiantil en experiencias de innovación para la enseñanza de artes y ciencias musicales»

Marita Fornaro.

Departamento de Musicología - Escuela Universitaria de Música.

«Elaboración de un tutorial multimedia para aprendizaje de Biofísica»

Fernando Gutiérrez; José Verdes; Aldo Calliari; Juan Benech.

Area Biofísica - Facultad de Veterinaria.

«Un cauce de mejora continua en la comunicación pedagógica»

Ingrid Roche; Néstor Casanova.

ITU - Facultad de Arquitectura.

«Adquiriendo Metadatos para Objetos de Aprendizaje»

Regina Motz; Raquel Sosa; Andrea Rodriguez.

Instituto de Computación - Facultad de Ingeniería.

17:00 a 17:30 -Cierre y comentarios a cargo de los Profesores invitados.

18:00 -Cierre del evento. Presentación del Proyecto
"Generalización del uso educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Universidad de la República" (AECI-UDELAR)

Palabras de Representante de AECI en Uruguay.

Presentación de Proyecto AECI a cargo del Equipo de la Unidad Académica, Pro Rectorado de Enseñanza.

Comentario del proyecto a cargo del Prof. Gregory Randall (Universidad de la República).

Brindis

Nota: Se entregará certificado de asistencia.

14

CATSIGERAS, E; CURIONE, K; MÍGUEZ, M	<i>Un enfoque constructivista en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad Comunicación presentada en las XII Jornadas Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática, Albacete , España, julio 2005</i>	2005	14
--	--	------	----



**ACTAS DE LAS XII JORNADAS PARA EL
APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS**

XII JAEM

ISBN: 84-689-5194-3
DL: AB-513-2006

UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Eleonora Catsigeras¹, Karina Curione², Marina Míguez³

13 de abril de 2005

RESUMEN

Se analizan procesos cognitivos del aprendizaje significativo, desde un enfoque constructivista, centrado en las prácticas docentes aplicadas a la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en un primer curso de Cálculo del semestre de ingreso a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Uruguay).

1. INTRODUCCIÓN

Paradójicamente la mayoría de las dificultades en el aprendizaje de los contenidos del primer curso de Cálculo al ingreso a la carrera universitaria de la Facultad de Ingeniería, se encuentra en aquellos contenidos de la asignatura que son revisión de los últimos años de Enseñanza Secundaria: límite, continuidad, topología en la recta, sucesiones y series, entre otros. Una de las razones es la dificultad intrínseca de dichos temas; aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos abstractos que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas de los estudiantes.

Las teorías constructivistas del aprendizaje (Piaget 1929, Vigotsky 1930, Ausubel 2002, [1]) conciben el conocimiento como resultado de la interacción entre la nueva información y la información previa, construyendo modelos para interpretar la nueva información y no sólo recibirla.

Ausubel formula en 1963 la teoría del aprendizaje significativo, una propuesta teórica influyente en el enfoque constructivista. [2] Posteriormente la teoría del cambio conceptual, planteada en el modelo clásico de Posner y Strike (1982) aborda un aspecto esencial de la psicología cognitiva al centrarse en los procesos de transformación del conocimiento, pero aportando una perspectiva aplicada a la educación, con estudios que han llevado a concebir el aprendizaje de los conceptos científicos como un proceso de cambio conceptual. Desde esta última perspectiva aplicada a la educación en las ciencias, uno de los objetivos centrales consiste en transformar, no sustituir sino cambiar, las nociones cotidianas y superficiales con que los alumnos llegan a clase de modo de adquirir los conceptos académicos y científicos. La teoría del cambio

¹ Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) de la Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565 Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

² Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: curione@fing.edu.uy

³ Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: mmiguez@fing.edu.uy

conceptual en ese sentido se refiere al pasaje de las ideas previas a los conocimientos académicos que se pretende enseñar. [5]

A diferencia del modelo clásico de Posner y Strike sobre la teoría del cambio conceptual, en los modelos contextualistas (Linder, 1987) no se pone énfasis en cambiar las ideas previas sino en potenciar las capacidades de los sujetos para distinguir las distintas concepciones y la manera más correcta de aplicarlas en diversos contextos: el saber aplicar los distintos conocimientos en distintos contextos.

Una de las limitaciones del aprendizaje memorístico o verbalista, si no va acompañado de un componente deliberado de aprendizaje significativo, es que se saturan las capacidades cognitivas. *“El potencial cognitivo humano a diferencia de un ordenador no puede manejar con mucha eficacia información que se enlaza con él de manera literal.”* [2] Esto adquiere particular relevancia en el aprendizaje de la Matemática en el ámbito universitario; requiere tanto de parte del alumno como del docente estrategias que promuevan el enlace significativo de los conceptos, como forma de propiciar un aprendizaje con sentido para el alumno. La significación personal implica que el alumno atraviese un proceso de construcción personal de la información recibida, tendiente a romper con un modelo de aprendizaje repetitivo donde el alumno asimila para luego reproducir información que a corto plazo perderá, o conservará como conocimiento inherente.

Numerosos estudios acuerdan en subrayar que el aprendizaje de conceptos científicos exige como condición fundamental, partir de los conceptos espontáneos con que los alumnos llegan al aula y que se han originado en la vida cotidiana, por fuera del ámbito académico. No obstante es sin duda imprescindible la formalización racional y simbólica en alguna etapa de la enseñanza de los contenidos. Pero debe suceder y no preceder a los procedimientos constructivistas. En las secciones siguientes se detallará un poco más algunos aspectos de las teorías del aprendizaje expuestas antes, en el contexto aplicado a la enseñanza de los conceptos matemáticos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en el curso de Cálculo al ingreso a la Universidad.

2. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE SUCESIONES

Resulta artificial y limitante introducir el concepto de *sucesión* restringiéndose al espacio de puntos de una recta. Resulta más amplio y fácil de comprender comenzar por sucesiones en un conjunto cualquiera, por ejemplo como subconjunto numerado de puntos de un plano, (que puede ser en el mapa de una región o de una ciudad, para fijar ideas), o el conjunto de personas de un país (que pueden estar ordenadas por su cédula de identidad).

El concepto matemático de sucesión es uno de esos pocos conceptos para los cuales el significado usual de la palabra en la lengua española coincide con el de la definición precisa matemática general.

(1) *Sucesión es un conjunto de cosas que se hallan o pasan una después de la otra* (diccionario Kapelusz de la Lengua Española).

(2) Definición matemática: *Sucesión es una descripción ordenada, según la ordenación natural⁴, de elementos de un conjunto no vacío cualquiera A* (en la que se admite repeticiones y ausencias de elementos de A).

Castorina plantea: *“Las ideas previas pueden ser un obstáculo o también pueden ser ideas precursoras”* [3] del concepto científico que se pretende introducir. Por una parte, en la definición matemática abstracta de sucesión, las ideas cotidianas son precursoras. Pero para eso es conveniente que no estén deformadas por la escolarización previa que

⁴ Ordenado según ordinales que son los números naturales: 1, 2, 3, ..., n, n+1, ...

suele definir sucesión de manera restringida y desconectada del significado usual y general en el lenguaje cotidiano. Por otra parte algunas otras ideas cotidianas constituyen un obstáculo, por ejemplo algunas ideas previas al concepto de límite de una sucesión.

La idea intuitiva pero precisa de límite es la siguiente: *En el paso n el término de la sucesión y todos los que siguen van a encontrarse tan cerca como se desee de su límite.* [4]

La idea previa errónea es el único modo de acercarse al límite consiste en avanzar hacia él de forma que en cada paso se esté más cerca del límite que en el paso anterior. Se cree que la aproximación al límite debe mejorar de un paso al siguiente, y que si esto no sucediera entonces la sucesión no podría ser convergente. El estudiante descarta equivocadamente el acercamiento al límite con sucesivos avances y retrocesos, creyendo que estos implican la oscilación permanente y la inexistencia de límite.

El concepto previo aunque equivocado es persistente y resistente. Cuesta convencer al estudiante de su falsedad. Aunque el alumno reconoce haber entendido un contraejemplo, no resulta fácil que asimile significativamente la afirmación de que no toda sucesión convergente es necesariamente monótona. La persistencia de las ideas previas fue señalada por diversos autores de las teorías de cambio conceptual en el aprendizaje. Pozo señala en [7] uno de los factores explicativos de la tenaz persistencia de las ideas previas: *“Tomando uno de los tantos términos que delimitan el concepto diremos que las ideas previas o espontáneas surgen de la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción con el entorno. Sirven entre otras cosas para predecir ese entorno.”* Es necesario lograr el cambio de las ideas cotidianas erróneas; para esto apelamos no solo a contraejemplos teóricos, sino a nuevas ideas cotidianas que los ilustren. Un medio, en el caso del límite de sucesiones no monótonas, puede ser por ejemplo el siguiente argumento informal pero preciso: *Se puede aproximar desde el sur al punto A del Ecuador, sin alcanzarlo nunca, caminando tres pasos hacia el norte, dos hacia el sur, y así sucesivamente tres hacia el norte, dos hacia el sur, cada vez pasos más cortos de modo de no alcanzar nunca al punto A pero de aproximarse a él, como límite asintótico, en infinitos pasos. La sucesión de pasos no es monótona y el límite sería A lateralmente por el Sur.*

Recordamos el planteo de Ausubel para quien la condición más importante para que el aprendizaje sea significativo es que pueda relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe. Consideramos que el ejemplo anterior tiende a esa dirección.

3. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

Al introducir el concepto de continuidad de una función en el aula suelen aparecer, en forma más o menos consciente, diversos conflictos cognitivos con ideas cotidianas y previas. Resulta difícil lograr el aprendizaje significativo del concepto de continuidad de una función, principalmente por la falta inicial de inteligibilidad para el alumno de la primera de las siguientes definiciones matemáticas precisas (aplicable a funciones reales de una variable real):

(3) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (llamado módulo de continuidad) tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$*

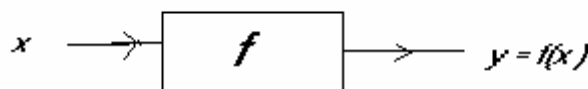
(4) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D .*

La idea intuitiva previa con la que el estudiante accede al curso universitario es la de que “la gráfica de una función continua tiene un trazo continuo”. Eso es incorrecto ya

que depende de la conexión del dominio de la función. Para reconocer el conflicto puede plantearse la siguiente observación práctica: *Si el dominio está formado por dos intervalos disjuntos, la función puede ser continua aunque su trazo en la representación gráfica no puede realizarse sin levantar el lápiz.*

De acuerdo con las formulaciones de la teoría del aprendizaje significativo, la definición (3) presenta un desafío. Es usualmente repetido el concepto de continuidad de una función en un punto, tanto por estudiantes como por docentes, verbalmente y desestructuradamente, a lo sumo relacionándolo con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos de implicación lógica. Pero creemos que no es significativamente comprendido el concepto, entre otros motivos, porque queda desconectado de ideas previas intuitivas y cotidianas. Veamos un ejemplo de cómo puede subsanarse este problema.

Ejemplo: Consideremos un aparato f (usemos la letra f de función), por ejemplo una caja con una puerta de entrada, por donde entra la variable independiente “ X ”, y una puerta de salida, por donde sale la variable dependiente “ $Y = f(X)$ ”.



--- Hay un valor deseado a la salida Y_0 para el cual la entrada debería ser exactamente X_0 . Es decir $f(X_0) = Y_0$. Ni la variable de entrada ni la de salida se pueden ajustar a valores exactos siempre, sino que hay errores, imprecisiones que hacen que el valor de X sea aproximadamente pero no necesariamente igual a X_0 y por lo tanto el valor de la salida $Y = f(X)$ sea aproximadamente pero no necesariamente igual a $Y_0 = f(X_0)$.

--- El técnico de mantenimiento del aparato debe satisfacer al cliente. El cliente evalúa cómo funciona la caja observando únicamente lo que sucede en la variable a la salida Y . En cambio el técnico acondiciona el aparato de modo de satisfacer la demanda del cliente, ajustando únicamente la variable de entrada X .

--- El cliente demanda que sea $Y = Y_0$, pero admite que la igualdad no se cumpla exactamente sino con un margen de error máximo $\varepsilon > 0$: $|Y - Y_0| < \varepsilon$.

--- El técnico entonces ajusta la variable de entrada, pero no puede siempre ajustarla de modo que $X = X_0$ exactamente. Se admite una tolerancia de variación a la entrada $\delta > 0$: $|X - X_0| < \delta$

--- Finalmente el técnico debe ajustar la entrada con una variación delta adecuada de forma que valga la siguiente premisa: $|X - X_0| < \delta$ IMPLICA $|Y - Y_0| < \varepsilon$. Significa que se ajusta la entrada con una variación adecuada que satisface la demanda del cliente.

Creemos que no alcanza con la exposición del docente de su propia idea cotidiana relacionada con el concepto a definir formalmente. Es necesaria una construcción reflexiva efectuada intra e interpersonalmente a los alumnos. Estas actividades han sido promovidas mediante un foro de discusión en la que los estudiantes preguntan, responden e intentan responder, moderado por el docente. Este foro establece una actividad y actitud social de los alumnos entre ellos y con el docente. Se aprende Matemática cuando se trata de justificar, sustentar y defender ante los otros los conceptos aprendidos. Desde la perspectiva de Vigotsky las formas superiores de conocimiento son socio-generadas. La atención, la memoria lógica, la formación de conceptos, la voluntad, se generan en el plano social y luego se desarrollan en el

psicológico. Incluso al convertirse en procesos psíquicos su naturaleza mantiene el rasgo cuasi-social: Hasta a solas el hombre ejercita funciones de comunicación. [6]

Como conclusión observamos que la definición precisa (3) planteada anteriormente es imprescindible en la enseñanza del concepto de continuidad de una función. No debe ser sustituida por las ideas cotidianas o intuitivas que se utilicen para ilustrarla. Pero debe proceder y no anteceder a la presentación constructiva de la idea que la ilustra. Y esta debe ser ajustada con precisión al concepto científico que se pretende ilustrar.

4. CONCLUSIONES

El racionalismo está implícito en la actitud observada frecuentemente de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración, tanto por docentes en sus exposiciones en clase, como por estudiantes en la resolución de problemas, el uso exclusivo de premisas lógicas racionales sobre los símbolos formales de las definiciones, apelando a la racionalidad lógica como calidad innata en el conocimiento.

El empirismo, el otro polo en las teorías filosóficas clásicas del conocimiento, también está implícito en la actitud pasiva, no menos frecuente en docentes y alumnos, de encarar el aprendizaje como una impresión de conocimientos provenientes del exterior en una mente rasa, a lo sumo bajo un sistema de estímulo y respuesta, y de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración la práctica del ensayo y error.

Ambos polos se manifiestan frecuentemente en los textos y las clases expositivas, acopladas al asociacionismo. Ambos, que son en realidad extremos de un continuo de actitudes frente al aprendizaje, son necesarias. Pero no son suficientes si hay poca o nula interacción continua con las actividades y actitudes sostenidas por las teorías constructivistas del aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] Miguez, M; Curione, K: *Aprendizaje de las Ciencias*. Notas del curso de Formación Docente UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Montevideo, 2004.
- [2] Ausubel, D: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Paidós. Barcelona, 2002.
- [3] Bixio, C: *Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica*. Revista Aula Hoy, N° 2, 1995
- [4] Catsigeras, E: *Elementos de topología usados en Cálculo. Parte I Espacios métricos. Parte II. Sucesiones. Notas para el curso de Cálculo 1*. IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, 2004.
- [5] Posner, J; Strike, K; Hewson, P; Gertzog, W *Acomodación de un concepto científico: Hacia una teoría del cambio conceptual*. (año 1988). En Porlan, R & cols (editores) *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. Diada. Sevilla, 2000.
- [6] Vigotsky, L: *Génesis de las funciones psíquicas superiores*. (año 1931). Obras escogidas III. Visor. Madrid, 1982.
- [7] Pozo, I: *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid, 1993.

15

CATSIGERAS, E; ROVELLA, A; BUDELLI, R	<i>Contractive piecewise continuous maps modelling networks of inhibitory neurons. Abstract and slides of the talk in the 9th. Tamagawa Dynamic Brain Forum , Auckland , New Zealand, November 7th. to 9th.,2005</i>	2005	15
---	--	------	----

Contractive piecewise continuous maps modelling networks of inhibitory neurons.

Ruben Budelli*, Eleonora Catsigeras[†] and Álvaro Rovella[‡]

15th. August, 2005

**Abstract and slides of the talk in the
9th. Tamagawa Dynamic Brain Forum,
Auckland, New Zealand, 2005**

Abstract

We consider piecewise continuous maps on a compact region of a finite dimensional manifold, that separates the distances between the different continuity pieces but are locally contractive. We prove that generically those maps are asymptotically periodic, having a finite number of persistent limit cycles. We apply this result to prove that a generic network of more than two inhibitory neurons phase lock to a periodic behaviour that persists under small perturbations of the set of parameter values.

*Departamento de Biomatemática. Fac. de Ciencias. Universidad de la República.

[†]Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. E-mail: eleonora@fing.edu.uy

[‡]Centro de Matemática. Fac. de Ciencias. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay

CONTRACTIVE PIECEWISE CONTINUOUS MAPS MODELLING NETWORKS OF INHIBITORY NEURONS

Joint work of

Eleonora Catsigeras

Álvaro Rovella

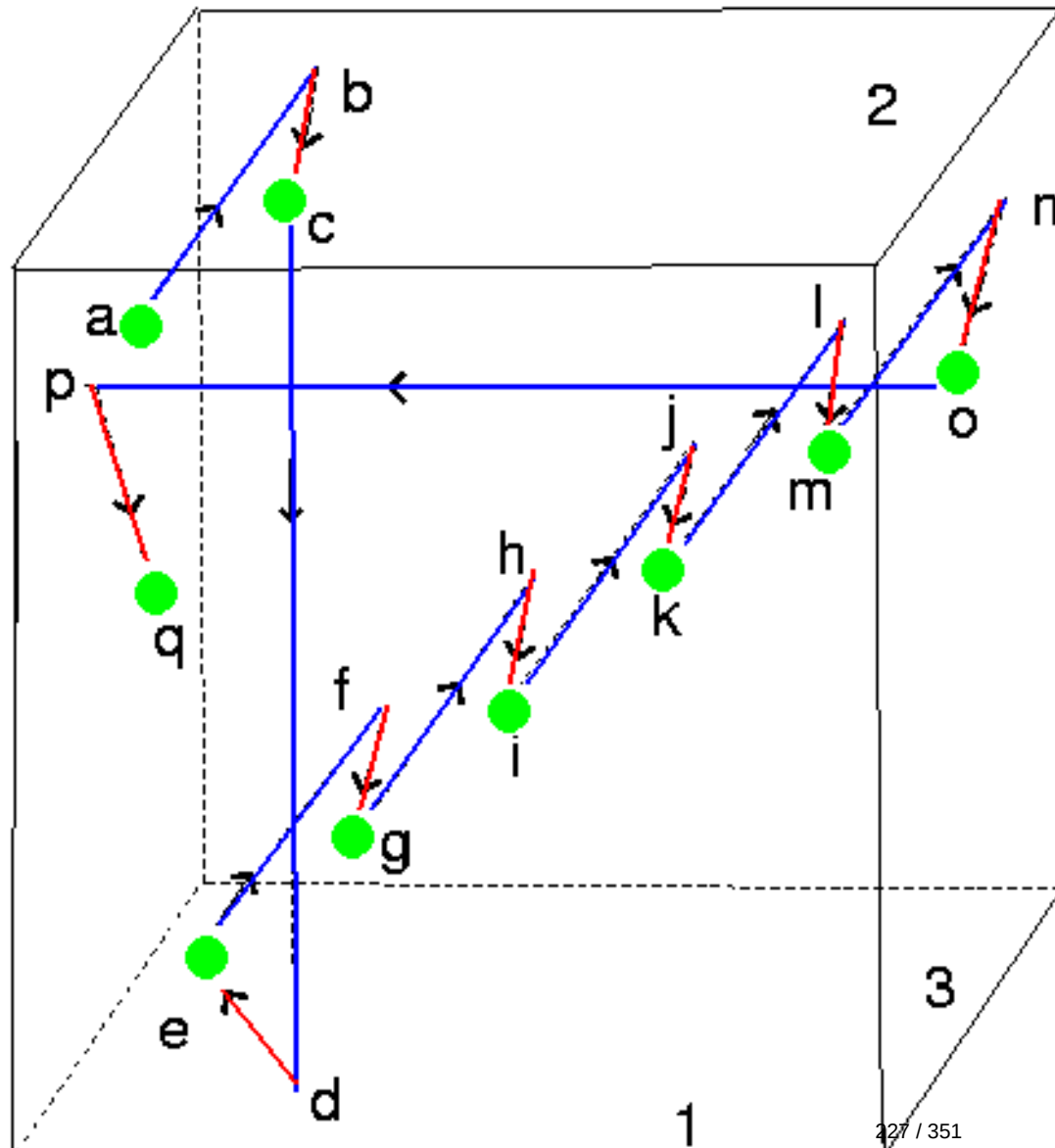
Ruben Budelli

**Universidad de la República
Uruguay**

**9° Tamagawa Dynamic Brain Forum, Auckland
2005**

Front faces 1, 2 and 3: Threshold levels of neurons.

Backward faces: Zero levels of voltage of the neurons.



In green: Evolution of the system while not firing. A line from backwards to front, **seen like a point** due to perspective.

In blue: Firing of a neuron. A line from the front faces to the parallel backward faces.

In red: Negative synapses. Reduction of the voltage of other neurons not fired.

- For n neurons: dynamics in a n -dimensional cube.
- G = First return map to the backward faces of the cube.
- $F = G \circ G$ = Second return map.
- F^k = $2k$ -th. return map.
- Atoms of generation k = continuity pieces of F^k .

- F is piecewise continuous (discontinuity $(n-2)$ -dimensional lines).
- F is contractive in each continuous piece (with a well chosen metric in the $(n-1)$ dimensional dominium of F).
- F has the separation property:

Atoms of the same generation are pairwise disjoint, so there is a positive minimum distance between them (if the neurons are not very different). That is why we choose the Second return map.

THEOREM 1:

Contractive piecewise continuous maps

F in $n - 1 \geq 2$ dimensions

that have the separation property

generically exhibit a persistent limit cycle

(i.e. a periodic attractor that persists under small perturbations of the map F).

COROLLARY:

Generic networks of $n \geq 3$ inhibitory neurons

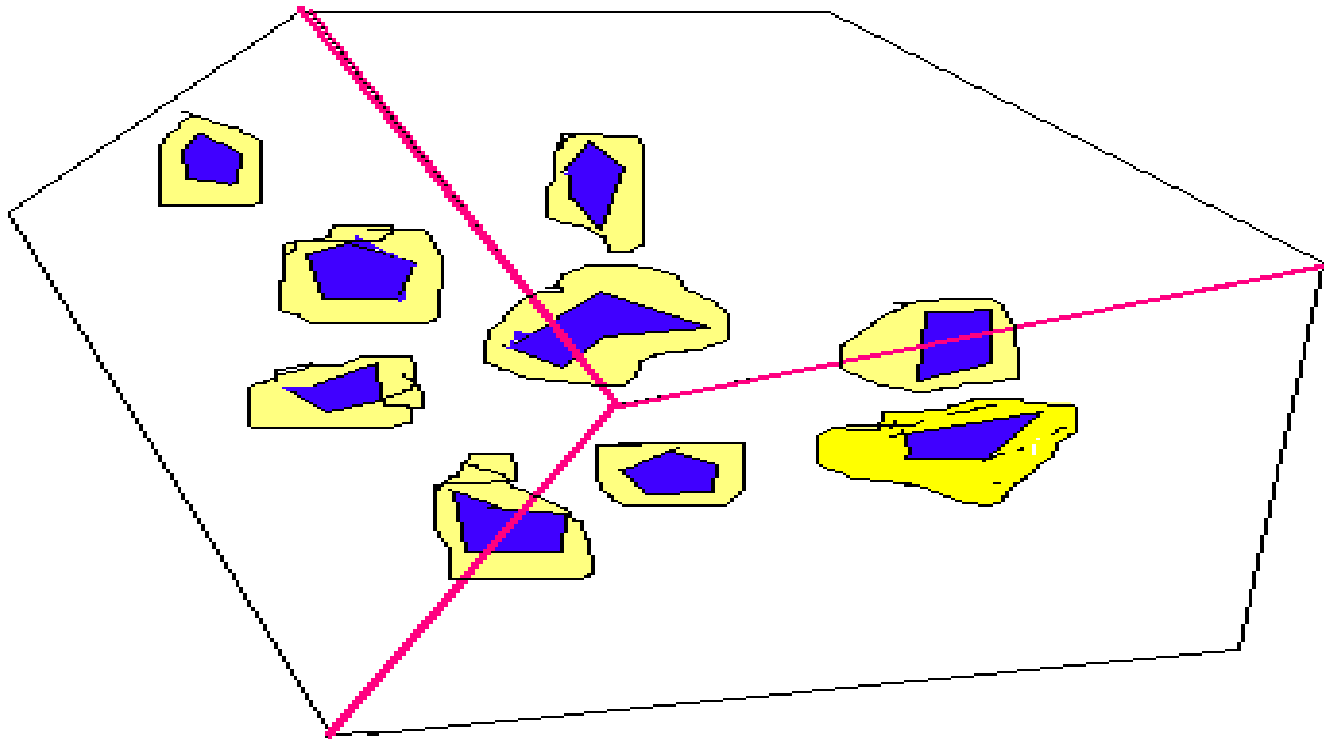
(that are not very different)

phase lock to a persistent periodic
behaviour.

- **GENERIC** SYSTEMS: Not all systems but a dense class of them. If F does not exhibit a limit cycle, **SOME** arbitrarily small perturbation of F does.
- **LIMIT CYCLE IS PERSISTENT**: If F does exhibit a limit cycle **ANY** sufficiently small perturbation of F also does.

Proof of Theorem 1:

- (A) Atoms of generation k **have diameter** $< \lambda^k$ where $0 < \lambda < 1$ is a constant, that exists due to contractiveness of F .
- (B) If **discontinuity lines of F do not intercept atoms** of generation k then some iterate p of F transforms a atom inside itself. Due to contractiveness of F (and the Fixed Point Theorem) there exists a fixed point of F^p ; so a **periodic orbit of F is the limit set** of all other orbits.
- (C) **Extend F** to small neighborhoods of its continuity pieces maintaining contractiveness and the separation property.
- (D) Perturb F using (A), so that the **discontinuity lines of new F does not intercept the extended atoms**. Finally use (B).



In blue: Atoms of generation k of the return map F

In yellow: Atoms of an extension of F . Any map perturbed from F has its atoms in the blue and yellow regions.

In red: the discontinuity lines of F .

THEOREM 2:

Contractive piecewise continuous maps F in $n-1 \geq 2$ dimensions that have the separation property

and do not have a periodic limit cycle

exhibit a Cantor set attractor

(i.e. non numerable infinite set, inside which dynamics is chaotic).

COROLLARY:

Non generic networks of $n \geq 3$ inhibitory neurons do **not** phase lock to a periodic behavior and **exhibit a Cantor set chaotic attractor.**

Proof of Theorem 2:

- (A) Atoms of generation k **do intercept the discontinuity lines of F for all k .**
- (B): (A) implies that atoms of all generations **divide in the next generation.**
- (C): Contractiveness and (B) imply that **the attractor is a Cantor set.**
- (D) The separation property implies that dynamics inside **the attractor is chaotic.**

9th TAMAGAWA DYNAMIC BRAIN FORUM – DBF 2005

CONTINUING A SEARCH FOR
PARADIGMS TO EXPLORE THE BRAIN
AS A COMPLEX SYSTEM

The 9th Tamagawa BDF will this year be held in Auckland, New Zealand, on November 7th to 9th, and will bring together theoretical and experimental neuroscientists from the Pacific Rim and from Europe, to discuss dynamic brain function at levels from abstract attractor theory, through biophysical and computational models, to experimental data suitable for the testing of theory.



THE UNIVERSITY OF AUCKLAND
FACULTY OF MEDICAL AND
HEALTH SCIENCES

SCHOOL OF MEDICINE

Department of Psychological Medicine
The University of Auckland
Auckland, NZ
7-9 November, 2005



DBF 2005 ORGANISING COMMITTEE

SCIENTIFIC CONVENOR

Professor James Wright
(The University of Auckland, NZ)

HEAD OF HOST DEPARTMENT (PSYCHOLOGICAL MEDICINE)

Professor Rob Kydd
(The University of Auckland, NZ)

CONFERENCE ORGANISER

Elizabeth Petrie
(The University of Auckland, NZ)

TAMAGAWA SCIENTIFIC CONVENOR

Professor Minoru Tsukada
(Tamagawa University Brain Research Center)

PARTICIPANTS

Bernard Balleine	The University of California, Los Angeles, USA
Eleonora Catsigeras	Universidad de la Republica, Montevideo, Uruguay
Peter Davis	ATR Adaptive Communications Research Laboratories, Kyoto, Japan
Walter Freeman	University of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA
Robert Froemke	University of California at San Francisco, USA
Fanji Gu	Fudan University, Shanghai, China
Gert Hauske	Munich University of Technology, Munich, Germany
Peter Hunter	The University of Auckland, Auckland, NZ
Osame Kinouchi	University of Sao Paulo, Ribeirao Preto, SP, Brazil
Rob Kydd	The University of Auckland, Auckland, NZ
Jan Lauwereyns	Victoria University of Wellington, Wellington, NZ
Pei-ji Liang	Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China
Bruce MacDonald	The University of Auckland, Auckland, NZ
Masamichi Sakagami	Tamagawa University, Machida, Japan
Eduardo Mizraji	Universidad de la Republica, Montevideo, Uruguay
Shigetoshi Nara	Okayama University, Okayama, Japan
Xiaochuan Pan	Tamagawa University, Machida, Japan
Christopher Rennie	University of Sydney and the Brain Dynamics Centre, Sydney, Australia
Peter Robinson	University of Sydney and the Brain Dynamics Centre, Sydney, Australia
Antonio Roque	University of Sao Paulo, Ribeirao Preto, SP, Brazil
Stefan Rotter	Institute for Frontier Areas of Psychology and mental Health, Freiburg, Germany
Yutaka Sakai	Tamagawa University, Machida, Japan
Guy Sandner	INSERM, Strasburg, France
Jamie Sleigh	Waikato Clinical School, The University of Auckland, Hamilton, NZ
Alistair Steyn-Ross	The University of Waikato, Hamilton, NZ
Moir Steyn-Ross	The University of Waikato, Hamilton, NZ
Muneyoshi Takahashi	Keio University, Japan
Ichiro Tsuda	Hokkaido University, Sapporo, Japan
Minoru Tsukada	Tamagawa University, Machida, Japan
Jeff Wickens	The University of Otago, Dunedin, NZ
Marcus Wilson	The University of Waikato, Hamilton, NZ
James Wright	The University of Auckland, Auckland, NZ
Yoshiyuki Yamazaki	Tamagawa University, Machida, Japan

SCIENTIFIC PROGRAMME

MONDAY 7 NOVEMBER

Session 1

Chairperson Jim Wright

09:30	Christopher Rennie
10:10	Peter Robinson
10:50	MORNING TEA
11:20	Osame Kinouchi
12:00	Ichiro Tsuda

12:40	LUNCH
-------	--------------

Session 2

Chairperson Walter Freeman

13:40	Minoru Tsukada
14:10	Yoshiyuki Yamazaki
14:40	Shigetoshi Nara
15:20	AFTERNOON TEA
15:40	Antonio Roque
16:20	James Wright
17:00	FINISH

TUESDAY 8 NOVEMBER

Session 3

Chairperson Rob Kydd

09:00	Peter Hunter
09:40	Maira Steyn-Ross
10:00	Marcus Wilson
10:20	Jamie Sleigh
10:40	MORNING TEA
11:00	Alistair Steyn-Ross
11:20	Bruce MacDonald
12:00	Peter Davis

12:40	LUNCH
-------	-------

Session 4

Chairperson Christopher Rennie

13:40	Walter Freeman
14:20	Eduardo Mizraji
15:00	Eleonora Catsigeras
15:40	AFTERNOON TEA
16:00	Fanji Gu
16:40	Gert Hauske
17:20	FINISH

WEDNESDAY 9 NOVEMBER

Session 5

Chairperson Minoru Tsukada

08:40	Xiaochuan Pan
09:20	Bernard Balleine
10:00	Jan Lauwereyns
10:40	MORNING TEA
11:00	Guy Sandner
11:40	Jeff Wickens

12:10	LUNCH
-------	--------------

Session 6

Chairperson Antonio Roque

13:25	13:10	Robert Froemke
14:10	13:50	Stefan Rotter
15:00	14:30	Yutaka Sakai
	15:10	AFTERNOON TEA
	15:30	Muneyoshi Takahashi
	16:10	Pei-ji Liang
	16:50	FINISH

ABSTRACTS

Contractive piecewise continuous maps modelling networks of inhibitory neurons.

Ruben Budelli*, Eleonora Catsigeras† and Álvaro Rovella‡

15th. August, 2005

Abstract

We consider piecewise continuous maps on a compact region of a finite dimensional manifold, that separates the distances between the different continuity pieces but are locally contractive. We prove that generically those maps are asymptotically periodic, having a finite number of persistent limit cycles. We apply this result to prove that a generic network of more than two inhibitory neurons phase lock to a periodic behaviour that persists under small perturbations of the set of parameter values.

*Departamento de Biomatemática. Fac. de Ciencias. Universidad de la República.

†Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingeniería. Universidad de la República.
Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay. E-mail: eleonora@fing.edu.uy

‡Centro de Matemática. Fac. de Ciencias. Universidad de la República. Montevideo. Uruguay

16

CATSIGERAS, E	<i>Cursillo intensivo de Elementos de la Teoría Ergódica preliminar a la XIV Escuela Latinoamericana de Matemática, Balneario Solís, Uruguay, 2005</i>	2005	16
---------------	--	------	----

Cursillo intensivo de Elementos de la Teoría Ergódica.

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática. Facultad de Ingeniería.
Universidad de la República. Montevideo. URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy

Curso breve preliminar a la XIV Escuela Latinoamericana de Matemática, Balneario Solís, Uruguay, 2005

En este curso intensivo introduciremos a la teoría ergódica de los sistemas dinámicos deterministas. En la primera parte repasaremos brevemente el enunciado del teorema ergódico de Birkhoff, las definiciones equivalentes de ergodicidad y la propiedad de mixing. En la segunda parte repasaremos la definición de exponentes de Lyapunov y el enunciado del teorema multiplicativo de Oseledec, con ejemplos de sistema hiperbólico en dimensión dos. Finalmente expondremos el espacio del shift y transformaciones de Bernoulli.

Programa

1. Sistema dinámico. Objetivo de estudio de la Teoría ergódica desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.
2. Ejemplo de un sistema hiperbólico (axioma A) que preserva la medida de Lebesgue en el toro bidimensional.
3. Enunciado del teorema ergódico de Birkhoff.
4. Definición de ergodicidad y enunciado de propiedades equivalentes a la ergodicidad.
5. Definición de la propiedad mixing.
6. Definición de exponentes de Liapunov. Ejemplo.
7. Enunciado del teorema de Oseledec.
8. Ejemplo del shift de Bernoulli

1 Sistema Dinámico y Teoría Ergódica

Consideraremos sistemas dinámicos a tiempo discreto como iterados de un mapa $T : X \mapsto X$ continuo en un espacio métrico compacto X .

El espacio X puede tener además una estructura de variedad diferenciable y T ser un difeomorfismo de X . En ese caso, denotaremos X como M , y T como $f \in \text{Diff}^1(M)$.

Denotamos $\mathcal{B}$ la sigma álgebra de Borel en X . Sea μ una medida de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$, es decir

$$\mu(X) = 1$$

μ se dice T -invariante, o también que T preserva μ si

$$\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Teorema 1.1 *Si X es un espacio métrico compacto y $T : X \mapsto X$ es continua, entonces existen medidas de probabilidad invariantes por T .*

Demostración: Ver [1].

La dinámica de T , es el sistema dinámico cuya órbita futura desde el estado inicial $x \in X$ es

$$o(x) = \{T^n(x)\}_{n \geq 0},$$

donde $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$, n veces, es el iterado n -ésimo del mapa T aplicado al punto x .

Si T es invertible se define también la órbita pasada, para n entero negativo, y la órbita (completa) para $n \in \mathbb{Z}$.

El (primer) objetivo de la Teoría Ergódica es estudiar la dinámica de T para μ -c.t.p. $x \in X$, donde μ es una medida invariante por T .

2 Ejemplo de sistema hiperbólico

Sea en el toro $\mathbb{T}^2$ el automorfismo lineal $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mód}_{(1,1)}$. Podemos identificar f con la transformación lineal invertible de $\mathbb{R}^2$, que tiene matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, considerando un levantado de f al espacio de recubrimiento $\mathbb{R}^2$ del toro $\mathbb{T}^2$. A menos de esa identificación, la transformación lineal con matriz A coincide con la derivada $df_p : T_p \mathbb{T}^2 \mapsto T_p \mathbb{T}^2$ en todo punto $p \in \mathbb{T}^2$.

Por simplicidad denotaremos como $f = 2, 1, 1, 1$ en $\mathbb{T}^2$ al ejemplo de arriba. Es fácil chequear que la matriz A que define a f es diagonalizable, con dos valores propios λ, σ tales que $0 < \lambda < 1 < \sigma$. Entonces, en todo punto $p \in \mathbb{T}^2$ existen dos direcciones S_p y U_p (correspondientes a los subespacios propios) tales que

$$\|df_p^n(s)\| = \lambda^n \|s\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall s \in S_p \quad \forall p \in \mathbb{T}^2$$

$$\|df_p^n(u)\| = \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U_p \quad \forall p \in \mathbb{T}^2.$$

Es decir: df contrae hacia el futuro los vectores del subespacio S_p con tasa exponencial $\log \lambda < 0$, y dilata hacia el futuro los vectores del subespacio U_p , transversal a S_p , con tasa exponencial $\log \sigma > 0$.

En general, un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ en una variedad compacta y riemanniana M se llama uniformemente hiperbólico (de Anosov), si existe un splitting

$$TM = S \oplus U$$

del fibrado tangente TM , y números reales $0 < \lambda < 1 < \sigma$ tales que

$$\|df_p^n(s)\| \leq \lambda^n \|s\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall s \in S_p \quad \forall p \in M$$

$$\|df_p^n(u)\| \geq \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U_p \quad \forall p \in M.$$

El ejemplo $f = 2, 1, 1, 1$ en $\mathbb{T}^2$ es, entonces, un difeomorfismo de Anosov.

Sea m la medida de Lebesgue en $\mathbb{T}^2$ normalizada para que sea una probabilidad.

Proposición 2.1 *La medida de Lebesgue m es una medida invariante por $f = 2, 1, 1, 1$ en el toro $\mathbb{T}^2$.*

Demostración: para todo boreliano B tenemos, haciendo el cambio de variable $q = f(p)$ la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} m(f^{-1}(B)) &= \int \chi_{f^{-1}(B)}(p) dm(p) = \int \chi_{f^{-1}(B)}(f(q)) |\det df(q)| dm(q) = \\ &= \int \chi_B(q) \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| dm(q) = \int \chi_B(q) dm(q) = m(B). \quad \square \end{aligned}$$

3 Teorema Ergódico de Birkhoff

Definición 3.1 Sea $T : X \mapsto X$ continua en un espacio métrico compacto. Sea $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ una función real medible. Sea $n \geq 1$ natural. Se llama *promedio temporal* o *promedio de Birkhoff* de ψ hasta tiempo n a la función real:

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j.$$

Teorema 3.2 (Birkhoff)

Para toda medida de probabilidad μ invariante por T , para toda $\psi \in L^1(\mu)$, existe el límite μ -c.t.p de los promedios temporales ψ_n de ψ . Es decir

$$\exists \tilde{\psi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j \quad \mu - c.t.p. \quad x \in X.$$

Además la convergencia de ψ_n a $\tilde{\psi}$ es también en $L^1(\mu)$, y

$$\int \tilde{\psi} d\mu = \int \psi d\mu.$$

Si además $\psi \in L^p(\mu)$ para algún $p \geq 2$, entonces la convergencia es también en $L^p(\mu)$.

Demostración: Ver [1].

La función $\tilde{\psi}$, definida μ -c.t.p., se llama *promedio temporal asintótico* de ψ .

En particular, si tomamos $\psi = \chi_B$, la función característica de un borealano B , entonces ψ_n se llama frecuencia de visitas a B hasta tiempo n :

$$\chi_{B_n}(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \chi_B \circ T^j(x) = \frac{\#\{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in B\}}{n}.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff, existe el límite de $\chi_{B_n}(x)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ para μ -c.t.p. Este límite se llama *tiempo medio asintótico de estadía* en el conjunto B de la órbita futura por el punto x .

4 Ergodicidad

Definición 4.1 Una medida de probabilidad μ invariante por T se llama *ergódica* para T (o T ergódica respecto de μ) si para todo conjunto medible B que sea invariante por T (es decir $T^{-1}(B) = B$), la medida $\mu(B)$ es cero o uno. Es decir:

$$B \in \mathcal{B}, T^{-1}(B) = B \Rightarrow \mu(B)\mu(B^c) = 0,$$

donde $B^c = X \setminus B$ denota el complemento de B .

Teorema 4.2 Si $T : X \mapsto X$ es continua en un espacio métrico compacto X , entonces existen medidas de probabilidad invariantes ergódicas para T .

Demostración: Ver [1].

Las siguientes afirmaciones pueden tomarse como definición de ergodicidad, pues son equivalentes a la Definición 4.1.

Teorema 4.3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) μ es ergódica para T .
- (b) Para toda función $\psi \in L^1(\mu)$ el promedio temporal asintótico $\tilde{\psi}$ es igual al promedio espacial $\int \psi d\mu$ μ -c.t.p.
- (c) Para todo conjunto medible B tal que $T^{-1}(B) \subset B$ se cumple $\mu(B)\mu(B^c) = 0$.
- (d) Para todo conjunto medible B tal que $T^{-1}(B) \supset B$ se cumple $\mu(B)\mu(B^c) = 0$.
- (e) Para toda pareja (A, B) de conjuntos medibles tales que $\mu(A), \mu(B) > 0$ existe $n \geq 1$ tal que $T^{-n}(A) \cap B$ (transitividad medible).

- (g) μ es un punto extremal de conjunto (que es convexo) de medidas de probabilidad invariantes por T . Es decir $\mu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$ para $\mu_1 \neq \mu_2$ medidas de probabilidad invariantes y $0 \leq a \leq 1$ real, solo si a es cero o uno.
- (h) Para toda función real continua $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ el promedio temporal asintótico $\tilde{\psi}$ es constante μ -c.t.p.

Demostración: Ver [1].

Corolario 4.4 μ es ergódica si y solo si para todo boreliano B el tiempo medio asintótico de estadía $\tilde{\chi}_B(x)$ es constante igual a $\mu(B)$ para μ -c.t.p. $x \in X$.

Demostración: El “solo si” se deduce inmediatamente de la propiedad (b) del Teorema 4.3. El “si” se demuestra por el proceso de inducción clásico que permite pasar de la integral abstracta respecto a una medida en las funciones características de los borelianos, a las funciones simples, luego a las funciones medibles no negativas, y finalmente a $L^1(\mu)$. $\square$

Corolario 4.5 μ es ergódica si y solo si para toda pareja de borelianos (A, B) se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)}{n} = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Demostración: Aplicando el teorema de convergencia dominada, el Corolario 4.4 y el teorema ergódico de Birkhoff, deducimos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left(\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j \right) \cdot \chi_B d\mu = \\ &= \int \tilde{\chi}_A \cdot \chi_B d\mu = \mu(A) \int \chi_B d\mu = \mu(A) \cdot \mu(B). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 4.6 La medida de Lebesgue m es ergódica para el difeomorfismo lineal $2, 1, 1, 1$ en el toro $\mathbb{T}^2$.

Demostración: Es un corolario inmediato de las Proposiciones ?? y 8.5, y del Teorema 8.6 que enunciaremos al final de esta exposición.

Teorema 4.7 La medida de Lebesgue en el círculo S^1 es ergódica para la rotación irracional $f : S^1 \mapsto S^1$ definida por

$$f(z) = e^{i2\pi a} z \quad \forall z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante irracional.

Demostración: Ver [1].

Teorema 4.8 (Descomposición ergódica) Un conjunto medible B cumple $\mu(B) = 1$ para toda medida de probabilidad μ que sea invariante por T si y solo si $\nu(B) = 1$ para toda medida de probabilidad ν ergódica para T .

Demostración: Ver [1]

5 Propiedad mixing

Sea $T : X \mapsto X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto X , y sea μ una medida de probabilidad invariante por T .

Definición 5.1 La medida μ invariante por T llama *mixing* para T (o se dice que T es mixing con respecto a la medida μ), si para toda pareja (A, B) de conjuntos medibles se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Proposición 5.2 Si μ es *mixing* para T entonces μ es *ergódica* para T .

Demostración: Aplicando la definición de mixing, y teniendo en cuenta que cuando existe el límite L de una sucesión, el límite a la Césaro (es decir el límite del promedio aritmético de los primeros n términos) es igual a L , resulta la igualdad del Corolario 4.5. Entonces μ es ergódica. $\square$

Contraejemplo: La medida de Lebesgue m para la rotación irracional en el círculo es ergódica (Teorema 4.7), pero no es mixing. En efecto, sea $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y sea $f(z) = e^{i2\pi a} \cdot z$ para todo $z \in S^1$. Considérense dos intervalos abiertos I_1 e I_2 de longitud menor que $a/4$ en el círculo. Si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(I_1) \cap I_2 \neq \emptyset$, entonces $f^{n+1}(I_1) \cap I_2 = \emptyset$. Entonces m no puede satisfacer la definición de mixing. $\square$

Teorema 5.3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) μ es *mixing* para T .

(b) Para toda pareja de funciones $\psi, \phi \in L^1(\mu)$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ T^n) \phi d\mu = \int \psi d\mu \int \phi d\mu.$$

Demostración (b) implica (a) inmediatamente tomando $\psi = \chi_A, \phi = \chi_B$ para dos borelianos cualesquiera A y B . Por otra parte (a) implica (b) por el procedimiento clásico de inducción que permite computar la integral abstracta respecto a una medida μ pasando de las funciones características a las funciones simples, de estas por convergencia monótona a las funciones medibles no negativas, y de estas por linealidad y definición de integral abstracta, a las funciones en $L^1(\mu)$. $\square$

6 Exponentes de Lyapunov

Se dará durante el curso.

7 Teorema de Oseledec

Se dará durante el curso.

8 Shift y medidas de Bernoulli

Sea $k \geq 2$ un número natural fijo. Llamamos alfabeto al conjunto $\aleph = \{1, 2, \dots, k\}$ dotado de la topología discreta (todo conjunto es abierto y cerrado).

Definición 8.1 El *espacio del shift* (completo y bilateral) de k símbolos, es el conjunto $\Sigma = k^{\mathbb{Z}}$ de todas las sucesiones

$$x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: \quad x_n \in \aleph \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

dotado de la topología producto. Por el teorema de Tichonov, Σ es compacto.

Sean dados $l \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{N}$. Sea $(a_0, \dots, a_s) \in \aleph^{s+1}$ una $(s+1)$ -upla de elementos del alfabeto $\aleph = \{1, \dots, k\}$. Definimos *cilindro*

$$C_{l,s,(a_0,\dots,a_s)} = \{x \in \Sigma : x_l = a_0, \dots, x_{l+s} = a_s\}.$$

Es estándar (aunque engorroso) probar que la familia de todos los cilindros generan la sigma-álgebra de Borel de Σ .

Definición 8.2 Sea $\mathbf{p} = (p(1), p(2), \dots, p(k)) \in \mathbb{R}^k$ un vector de probabilidad. Esto es

$$0 \leq p(i) \leq 1 \quad \forall i \in \aleph = \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k p(i) = 1.$$

En el álgebra generada por las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos, definimos la premedida ν tal que para todo cilindro se cumple:

$$\nu(C_{l,s,(a_1,\dots,a_s)}) = p(a_1)p(a_2) \dots p(a_s).$$

Por el teorema de extensión de premedidas, existe una única medida ν en la sigma-álgebra de Borel de Σ , que cumple la igualdad anterior para todos los cilindros. Tal medida ν se llama *medida de Bernoulli* en el espacio del shift (completo) Σ , con vector de probabilidad $\mathbf{p}$. Es inmediato chequear que $\nu(\Sigma) = 1$; es decir, la medida de Bernoulli es una probabilidad.

Proposición 8.3 *Toda medida ν de Bernoulli en el espacio del shift es mixing.*

Demostración: Dados dos cilindros C y C' , por definición de cilindro y por definición del shift σ , existe $n_0 \geq 1$ tal que $\sigma^n(C) \cap C' \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$. Más precisamente, si

$$C := \{x \in \Sigma : x_l = a_0, \dots, x_{l+s} = a_s\},$$

$$C' := \{x \in \Sigma : x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a'_{s'}\},$$

entonces para todo $n \geq (l+s) - l' + 1$, se cumple

$$\begin{aligned} \sigma^n(C) \cap C' = \\ \{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \quad x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a'_{s'}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{\{(b_{l+s-n+1}, \dots, b_{l'-1}) : b_i \in \{1, \dots, k\}\}} \{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \\
&\quad x_{l+s-n+1} = b_{l+s-n+1}, \dots, x_{l'-1} = b_{l+s-n+1}, \\
&\quad x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a_{s'}\}.
\end{aligned}$$

La unión en esta última igualdad es de cilindros disjuntos dos a dos. Luego, por la aditividad de la medida ν , tenemos:

$$\begin{aligned}
&\nu(\sigma^n(C) \cap C') = \\
&\sum_{\{(b_{l+s-n+1}, \dots, b_{l'-1}) : b_i \in \{1, \dots, k\}\}} \nu\left(\{x \in \Sigma : x_{l-n} = a_0, \dots, x_{l+s-n} = a_s, \right. \\
&\quad \left. x_{l+s-n+1} = b_{l+s-n+1}, \dots, x_{l'-1} = b_{l+s-n+1}, \right. \\
&\quad \left. x_{l'} = a'_0, \dots, x_{l'+s'} = a_{s'}\}\right) = \\
&= \sum_{b_{l+s-n+1}=1}^k \dots \sum_{b_{l'-1}=1}^k \\
&\quad p(a_0), \dots, p(a_s), p(b_{l+s-n+1}), \dots, p(b_{l+s-n+1}), p(a'_0), \dots, p(a_{s'}) = \\
&= \left(p(a_0) \dots p(a_s)\right) \left(p(a'_0), \dots, p(a_{s'})\right) = \nu(C) \cdot \nu(C')
\end{aligned}$$

Entonces para toda pareja de cilindros C y C' con ν -medida positiva existe $n_0 \geq 1$ tal que $\sigma^{n_0}(C) \cap C' \neq \emptyset$. Como los cilindros generan la sigma álgebra en el espacio del shift, entonces $\sigma^n(B) \cap B' \neq \emptyset$ para toda pareja de medibles con ν -medida positiva. $\square$

Definición 8.4 Sea $T : X \mapsto X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto y sea μ una medida de probabilidad invariante por T . La medida μ se dice que es *de Bernoulli para T* si existen una transformación bimedible (medible, invertible, con inversa medible)

$$h : X \mapsto \Sigma,$$

donde Σ es el espacio de un shift (completo) $\sigma : \Sigma \mapsto \Sigma$, y una medida ν de Bernoulli para σ , tales que

$$h \circ T = \sigma \circ h \quad \mu - \text{c.t.p.} \quad \text{y} \quad \mu(B) = \nu(h(B)),$$

para todo $B \subset X$ medible.

Proposición 8.5 *Toda medida de Bernoulli μ para T es mixing; luego es ergódica.*

Demostración Por definición, el isomorfismo h de espacios de medida que lleva el espacio de medida μ preservado por $T : X \mapsto X$ en el espacio del shift $\sigma : k^{\mathbb{Z}} \mapsto k^{\mathbb{Z}}$ con la medida de Bernoulli ν , satisface $h \circ T = \sigma \circ h$ $\mu - \text{c.t.p.}$ Como ν es mixing (c.f. Proposición 8.3), entonces es inmediato verificar que μ también lo es. $\square$

Teorema 8.6 *La medida de probabilidad de Lebesgue m en el toro $\mathbb{T}^2$ es una medida de Bernoulli para el difeomorfismo lineal $f = 2, 1, 1, 1$.*

Demostración: Primero chequear, usando que los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tienen pendiente irracional, que f es topológicamente transitivo, es decir:

Para toda pareja de abiertos no vacíos U y V existe $n \geq 1$ tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Luego, usar el siguiente teorema, cuya demostración es prácticamente todo el libro [2], usando la existencia de las llamadas particiones de Markov:

Para todo difeomorfismo de Anosov topológicamente transitivo que preserva una medida positiva sobre abiertos, esta medida es de Bernoulli.

Referencias

- [1] Mañé, Ricardo: *Introdução à Teoria Ergódica* - IMPA, Projeto Euclides, Río de Janeiro, 1983.
- [2] Bowen, Rufus: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

17

CATSIGERAS, E	<i>Micro-experiencia de enseñanza en Cálculo - Comunicación presentada en el II Congreso de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería, Udelar, Montevideo, Uruguay, 6 al 8 de octubre de 2004</i>	2004	17
---------------	--	------	----

MICROEXPERIENCIA DE ENSEÑANZA EN CÁLCULO

**Comunicación 1-033 presentada en el
II Congreso de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería
Octubre de 2004**

Eleonora Catsigeras

IMERL - Facultad de Ingeniería -
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay
eleonora@fing.edu.uy

Comunicación publicada en el CD

”Actas del II Congreso de Enseñanza
de la Facultad de Ingeniería”

Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Montevideo - Uruguay - 2004

MICROEXPERIENCIA DE ENSEÑANZA EN CÁLCULO

1-033

Eleonora Catsigeras

IMERL - Facultad de Ingeniería -
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay
eleonora@fing.edu.uy

Resumen: *El año pasado se realizó una experiencia de enseñanza en algunos temas del curso de Cálculo 1 de la Facultad de Ingeniería. Se probaron estrategias, quizás no innovadoras, pero sí diferentes a las usadas hoy en dicha asignatura. Integró dos técnicas, una de enseñanza presencial y otra de enseñanza a distancia.*

La enseñanza presencial fue el pilar de la experiencia. Tuvo dos componentes:

≧ *Clases de consulta con el profesor:*

≧ *Clases prácticas, sin presencia del profesor: Dedicadas al trabajo en equipo estudiante-estudiante. Coordinadas por estudiantes tutores.*

La enseñanza a distancia tuvo también dos componentes:

≧ *Clases grabadas: Exposiciones teórico-prácticas del docente, grabadas en soporte informático. Presentadas en CD conteniendo videos con imagen y audio a tiempo real.*

≧ *Tareas domiciliarias: Pautadas detalladamente por el profesor. Revisadas semanalmente estudiante-estudiante y docente-estudiante.*

1. Introducción.

En contra- semestre al dictado curricular del curso de Cálculo 1 en la Facultad de Ingeniería, se realizó el año pasado en el IMERL, con apoyo de la UEFI, una experiencia de enseñanza en los temas más delicados de dicho curso. Fue una prueba piloto (sin adquisición de créditos curriculares) de la combinación de varias estrategias de enseñanza. Ninguna de ellas por sí sola es una estrategia novedosa, pero su combinación equilibrada resulta innovadora, por lo menos en lo que se refiere a procedimientos diferentes de los utilizados hoy en dicha asignatura. Algunas de las actividades y materiales utilizados en la experiencia no habían sido hasta el momento ensayados en un curso de ingreso del plan 1997 en esta Facultad.

Integró una técnica clásica de enseñanza presencial con una técnica de enseñanza a distancia. Durante las clases presenciales se enfatizó la comunicación fluida, multi-direccional (estudiante-docente, docente-estudiante, estudiante-estudiante), personalizada en grupos de clase reducidos, y adaptada a la diversidad de intereses y condiciones de los alumnos, uno a uno, pero integrados en un pequeño grupo; y a la motivación y experiencia tanto de ellos como del docente. En el llamado inicial, al principio del desarrollo del programa, y en un par de oportunidades durante o al final del mismo, se hicieron explícitas estas motivaciones e intereses, tanto por parte de estudiantes como del docente, así como la marcación de límites de competencia, actividades, responsabilidades y expectativas de cada uno y de la experiencia en sí. La dinámica grupal de la reunión de presentación fue organizada por la Unidad de

Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI), y las siguientes fueron discutidas y monitoreadas con personal especializado de esta unidad.

Se evidenció en la actividad de estudiantes y docente, una descontracción espontánea, fuerte y muy positiva del clima de trabajo al avanzar el semestre, y un aumento significativo de la atención por los intereses colectivos, de la auto-crítica sobre desempeño y comprensión de los conceptos del curso, y auto-evaluación de la actividad de cada uno y en equipo.

Las clases a distancia concentraron el contenido expositivo, informativo, los ejemplos resueltos, y los fundamentos teóricos del curso, que llevan actualmente prácticamente todas las horas de clase en Cálculo 1. Fueron grabados (sólo para los temas tratados durante esta experiencia de prueba) en soporte informático, con video de pizarrones y audio simultáneos a tiempo real. La asistencia a esas clases a distancia fue parte del trabajo domiciliario de los estudiantes cursantes, junto con otras tareas domiciliarias que incluían el estudio en formas más o menos convencionales (bibliografía, ejercicios) y no convencionales al ingreso (trabajo en equipo). El trabajo domiciliario estuvo pautado detalladamente y monitoreado semana a semana por el docente durante las clases presenciales y por los estudiantes tutores en las clases prácticas sin presencia del profesor.

La combinación de ambas técnicas permitió maximizar el rol orientador y formador del docente y la interacción formativa entre pares estudiantes, debido al énfasis, durante toda esta experiencia, de las clases presenciales en grupos muy reducidos. El pilar de la experiencia estuvo sustentada en pocas horas de clases presenciales. En cambio el trabajo por parte del estudiante estuvo cargado de muchas horas de actividad a distancia, solo y en equipo, sin la presencia del profesor. La cantidad de horas netas semanales de dedicación del estudiante fue aproximadamente la misma que la prevista en el programa de Cálculo 1 del plan 1997, pero balanceadas de modo diferente: 75% domiciliario o en equipo sin profesor, y 25 % en clase presencial con el profesor.

2. Antecedentes y motivaciones

2. A) Situación de “masividad” en Cálculo 1.

Hoy está en desuso en Cálculo 1 la enseñanza- aprendizaje en grupos reducidos de estudiantes, así como la evaluación continua durante las clases (o por lo menos el monitoreo permanente y exhaustivo del docente) sobre el desempeño real, en equipo o individual, de los estudiantes.

En 2004 hubo 1900 estudiantes inscriptos a Cálculo 1. Las técnicas de enseñanza personalizadas no son aplicables con los escasos recursos docentes (4 profesores y 11 docentes asistentes o ayudantes durante 2004) si no se dispone de algún sustituto material para el dictado de clases expositivas.

Durante el primer semestre de 2004 en Cálculo 1 se dictaron 135 horas-grupo por semana (= 18 grupos por 7,5 horas por semana por grupo) de clases expositivas teóricas y prácticas.

Las clases como ahora planteadas casi inevitablemente son magistrales y expositivas, y las evaluaciones son cuantitativas. Dejan prácticamente tiempo nulo a la formación y atención de intereses y motivaciones diversos, tanto de estudiantes como de docentes. No es la única metodología posible, pero resulta en los hechos la aplicable bajo la actual relación de número de estudiantes sobre cantidad de recursos humanos y materiales.

Tampoco existe casi oportunidad, por el anonimato en la asistencia a clases multitudinarias, al diálogo docente-estudiante y estudiante-estudiante, ni de formar

tempranamente en los semestres al ingreso a nuestra Facultad las pautas de comportamiento responsable necesarias para la carrera y el desempeño universitario.

Resulta muy difícil durante los primeros cuatro meses del semestre de ingreso a la Facultad, durante el curso de Cálculo 1 la explicitación del contrato inherente de enseñanza-aprendizaje, la maduración en el estudio, la delimitación de competencias diferentes de estudiantes y docentes, los derechos y deberes de cada uno, la auto-crítica y auto-exigencia imprescindibles sobre profundidad de conocimientos, comprensión y desempeño, entre otros.

Creemos que continuar en esta situación no es deseable, intentamos experimentar algún cambio posible sustentado en algunas pruebas empíricas concretas, como la que realizada durante 2003 y que motiva esta ponencia.

2. B) Una experiencia previa de enseñanza con material multimedia en Cálculo3.

Durante el año 2001 se realizó una experiencia de grabación en soporte informático del curso de Cálculo 3 (tercer semestre curricular), con el total del contenido expositivo teórico y práctico de dicho curso.

De los resultados de evaluación obtenidos ese año y de un cuestionario efectuado al total de estudiantes asistentes a las evaluaciones se obtuvo lo siguiente:

2. B) 1. Quienes asistieron a todas las clases presenciales expositivas tuvieron en promedio similar desempeño, habiendo usado o no el disco con las clases grabadas. Obtuvo el mejor resultado promedio el subgrupo de estudiantes que asistía regularmente a las clases prácticas y de consulta presenciales (además de las clases expositivas, ya sea presenciales o grabadas en disco).

2. B) 2. El promedio del desempeño global ese año fue algo mejor que en años anteriores. Uno de los factores, (recogiendo la opinión manifestada por los estudiantes ese año), fue que las clases grabadas permitían “rellenar los huecos”, y “adaptarse a la velocidad de asimilación y comprensión de cada uno”.

2. B) 3. El desempeño promedio en las evaluaciones de aquellos estudiantes que no habían asistido a casi ninguna de las clases presenciales (por motivo de trabajo, sociales u otros) fue significativamente peor que el de los que sí habían asistido regularmente a ellas.

2. B) 4. Entre quienes no asistieron casi nunca a las clases presenciales el desempeño en las evaluaciones de quienes habían utilizado las clases grabadas fue bastante próximo al de los que sí habían asistido a las clases presenciales, muy superior que el de quienes no asistieron ni a las presenciales ni a las grabadas.

2. C) Micro-experiencia durante 2002 en Matemática Discreta 1.

Durante el primer semestre de 2002 se realizaron, sin efecto curricular, experiencias de clases de consulta sistemáticas y sostenidas durante un semestre completo. Se dictaron para un grupo muy reducido de estudiantes del curso de matemática Discreta 1. (Dicho curso correspondía al semestre inmediato anterior, segundo semestre curricular de la carrera).

Fueron clases de consulta planificadas, con pauta previa de estudio y marcación de trabajos domiciliarios. La dinámica de las clases incluyó el monitoreo docente del trabajo domiciliario por parte de los estudiantes, que debían realizar en equipo. Durante la clase de consulta se enfatizaron las presentaciones orales (preparadas o no) de estudiantes, con planteos de preguntas acompañadas de ensayos de respuesta. Las intervenciones docentes trataron de limitarse a la guía o la concreción final de las respuestas, o la corrección de los errores de los estudiantes.

3. Descripción de actividades.

En la micro-experiencia del año 2003 en Cálculo, sobre la cual trata esta ponencia, trató de recogerse y combinarse las experiencias anteriores, para aprovechar las ventajas de ambas y complementarlas. Participaron 18 estudiantes voluntarios (8 hasta el final), un docente del IMERL, y docentes y técnicos de la UEFI. Los estudiantes se integraron en tres categorías según sus propias motivaciones: cursantes, tutores y técnicos. Los estudiantes cursantes y tutores participaron en la enseñanza-aprendizaje referidas al curso de Cálculo 1, en roles complementarios e integrados, y los estudiantes técnicos facilitaron la creación, distribución y uso de materiales multimedia por parte del docente y los demás estudiantes.

La enseñanza presencial fue el pilar de la experiencia. Estuvo compuesta de dos tipos de actividades:

≇ Clases de consulta: Dedicadas al rol orientador y formador del profesor. Fueron clases muy personalizadas, no individuales pero en un grupo reducido de hasta 10 estudiantes. Requirieron a los estudiantes una preparación previa muy intensa, mediante trabajo domiciliario individual y en equipo. Los “deberes” fueron pautados por el profesor semana a semana. El énfasis durante las clases de consulta estuvo puesto en las exposiciones orales e intervenciones de los estudiantes.

≇ Clases prácticas, sin presencia del profesor: Consistieron en reuniones de trabajo en equipo estudiante-estudiante. Fueron coordinadas por los estudiantes tutores. El énfasis durante las mismas estuvo puesto en el intercambio entre pares de preguntas y respuestas, después de realizar los deberes. El docente pautó semana a semana como “Objetivo de forma” para la actividad concreta de las clases prácticas (que se realizaron sin presencia del profesor) la preparación por parte del equipo de estudiantes, coordinado por el o los tutores, de un documento relatorio de preguntas e intentos de respuesta, sobre los temas marcados u otros, y programación de temas a tratar, para la siguiente clase de consulta con el profesor.

La enseñanza a distancia estuvo compuesta de dos tipos de actividades:

≇ Clases grabadas: Estuvieron dedicadas al rol expositor e informador del profesor. Consistieron de exposiciones teórico-prácticas del docente, grabadas en soporte informático, y presentadas en CD conteniendo videos con imagen y audio a tiempo real. Su cometido básico es similar al de las clases presenciales de Cálculo 1 que se dictan hoy a grupos grandes, y como ellas deben ser complementadas y reafirmadas mediante el estudio de la bibliografía del curso, pero son aún así clases con contenido suficiente, autoreferido e independiente de la bibliografía.

≇ Tareas domiciliarias: Fueron pautados detalladamente por el profesor. Hubo énfasis en marcar prioridades por parte del docente, según intereses, motivaciones y dificultades de los estudiantes. El trabajo domiciliario, de estudio y realización de ejercicios, así como el resultado neto del trabajo en equipo de estudiantes, fue revisado semanalmente (o monitoreado) exhaustivamente de modo estudiante-estudiante y docente-estudiante. Se fue llevando una tabla de calificaciones conceptuales de control semanal y sin efectos curriculares.

4. Algunos resultados y conclusiones.

La metodología a distancia permitió minimizar durante el tiempo de las clases presenciales de esta experiencia piloto, las exposiciones del docente, así como

eliminar (durante esta experiencia) las clases magistrales con asistencia descontrolada y anónima. Permitió renovar y aprovechar las enormes ventajas que tiene el conocimiento personal mutuo estudiante-docente y estudiante-estudiante. Se pudo renovar la vieja estrategia de trabajo y estudio en equipo de estudiantes, y de preparación previa e intensa para optimizar el aprovechamiento de la siguiente clase presencial con el profesor.

Durante la experiencia se pudo crear una conciencia de responsabilidad y autocrítica individual en el proceso de aprendizaje-enseñanza, al tener que comunicar y convencer a sus pares sobre razonamientos y resoluciones concretas, anteponiendo razones fundadas a la urgencia de coleccionar ejercicios resueltos y respuestas de exámenes o parciales anteriores.

Permitió también tomar conciencia del compromiso personal en el proceso colectivo de enseñanza-aprendizaje: Al poco tiempo de iniciada esta experiencia, los propios estudiantes advirtieron, por ejemplo, que la repetición de las mismas preguntas al docente, realizadas por estudiantes “desfasados” unos con otros, en forma individual, así como la falta de preparación previa y en equipo a la clase de consulta presencial con el profesor, o la falta de intercambio previo de preguntas y respuestas entre estudiantes mediante trabajo coordinado, provocaba el atraso de uno o más de ellos frente a otros. Esto significaba el atraso del grupo, con la consecuente reducción del alcance de los temas que se cubrirían durante la experiencia, y el riesgo de no alcanzar el objetivo que se proponían de “preparar el examen”.

En ello influyó que no hubo exámenes, parciales, ni pruebas con efectos curriculares en los temas enseñados, ni instancias distorsionantes o artificiales que interrumpieran el proceso y los tiempos naturales de asimilación y maduración de ideas aprendidas. (La evaluación final y curricular estaba relativamente lejana en el tiempo a esta experiencia de enseñanza, y por otra parte su contenido y su exigencia serían independientes de lo que se aprendiera en esta.)

Los datos cuantitativos que hemos relevado son los de aprobación en las evaluaciones curriculares realizadas en los seis meses siguientes, a los estudiantes cursantes que participaron de la microexperiencia. De los ocho estudiantes que permanecieron en actividad hasta el final, cinco eran cursantes y tres tutores. De los estudiantes cursantes, (todos re-cursantes por segunda o tercera vez del curso curricular, y alguno reprobado varias veces en los exámenes), no todos se presentaron al examen en la primera oportunidad que tuvieron después de finalizada esta experiencia. Solo cuatro estaban en condiciones reglamentarias para hacerlo. Tres lo hicieron en diciembre de 2003, aprobando dos de ellos con calificaciones elevadas y reprobando el tercero. Este y el cuarto estudiante rindieron el examen en febrero. Reprobó uno (el mismo que había reprobado en diciembre) y aprobó otro con calificación media. Finalmente aquel se inscribió al curso del año 2004 curricular y reglamentado, y exoneró del examen con nota media.

Creemos que el hecho de inscribirse a participar de la misma, ya denotó por parte de estudiantes tutores y cursantes una actitud muy sesgada hacia el lado positivo, para que la experiencia pudiera ser exitosa. Además la edad promedio y el hecho de no ser recién ingresados a la Facultad, también fueron un sesgo hacia el lado positivo. Por ese motivo, no podemos concluir que los procedimientos de la misma sean aplicables a gran escala, a una población de 1900 estudiantes. No creemos que sea viable esa inducción. No lo sería debido al trabajo y dedicación de recursos humanos que exigen los procedimientos empleados, aunque se sustituyeran todas las clases expositivas del curso de Cálculo 1 por clases grabadas para asistir en domicilio.

Sin embargo, en lo que se refiere a motivación y formación del docente participante de esta experiencia, (y de aunque sea solo 4 o 5 estudiantes voluntarios en más de mil), el hecho de conseguir un ámbito realmente descontraído pero mucho más exigente que las clases convencionales de hoy en día, tanto a nivel académico como universitario, tanto hacia los estudiantes como hacia el docente, en una asignatura que presenta grandes retos pedagógicos como Cálculo 1, creemos que valió la pena. Fue un privilegio para quien presenta esta ponencia, la oportunidad de participar en la experiencia referida.

18

CATSIGERAS, E; ENRICH, H	<i>SRB measures and ergodicity of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency. Abstract and slides of the talk in the International Conference on Dynamical Systems dedicated to the 60th. Anniversary of Jacob Palis, Rio de Janeiro, Brasil, July 19-28th., 2000</i>	2000	18
-----------------------------	--	------	----

SRB measures and ergodicity of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency.

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich *

**Abstract of the talk in the
International Conference on Dynamical Systems,
Rio de Janeiro, Brasil, 2000**

Dedicated to the 60th. Anniversary of Jacob Palis

We study, under generic conditions, C^3 diffeomorphisms in the 2-dimensional torus, obtained from Anosov by an isotopy pushing together the stable and unstable eigenvalues of a fixed point to join in a double 1, and the invariant manifolds to be tangent. We prove the following theorem:

Generically such diffeomorphisms are conjugated to Anosov and for a finite codimension subset of them, there exist a SRB measure and an unique ergodic attractor.

We consider some diffeomorphisms inspired in the examples of Lewowicz [L 1980]. We first prove that they are topologically conjugate to Anosov (with a conjugation that is not necessarily Hölder nor absolutely continuous). Second, we prove that such systems exhibit only one ergodic attractor, as in Palis' conjecture [P 1999]. There is not a uniform separation between positive and negative Lyapounov exponents. But they are examples with non-zero Lyapounov exponents for Lebesgue almost all regular points, that have a SRB measure as in Viana's conjecture [V 1998].

We weaken together the stable and unstable directions. Some technical difficulties arise: First, the angle between stable and unstable foliations accumulates in zero, so there is not uniform transversality. Second, the weak invariant manifolds are not C^2 (although they are C^1), so we are faced to study the tangency between stable and unstable manifolds with other tools than the usual geometrical approach. Third, the unstable foliation is not

*Both authors work at IMERL Universidad de la República(Uruguay). E-mail: enrich@fing.edu.uy

necessarily Hölder continuous, so we could not compare lengths of unstable arcs of nearby points, to get a bound of the unstable length distortion. Fourth, the Lyapounov exponents become zero in a dense set of points.

The diffeomorphisms we study are of two classes: first, the linear part at the fixed point is of the form $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ with $a \neq 0$, or second, it is of the form $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ with $a \neq 0$.

Let us give some examples, taken from [L 1980]: for $t \in [0, 1]$ consider the family given by

$$F_t(x, y) = \left(2x + y - \frac{t}{2\pi} [\sin(2\pi x) \cos^2(\pi y)], \quad x + y - \frac{t}{2\pi} [\sin(2\pi x) \cos^2(\pi y)] \right)$$

in the two dimensional torus $[0, 1] \times [0, 1]$. For $t = 1$, we have a map in the first class. An example in the second class is the following:

$$F_t(x, y) = \left(-2x - y + \frac{t}{2\pi} [\sin(2\pi x) \cos^2(\pi y)], \quad -x - y + \frac{t}{2\pi} [\sin(2\pi x) \cos^2(\pi y)] \right)$$

References

- [L 1980] J. Lewowicz. *Lyapunov functions and topological stability*. J. of diff. equations **38** (1980), pp 192-209.
- [P 1999] J. Palis. *A global view of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*. Astérisque **261** (1999), pp 339-351.
- [V 1998] M. Viana. *Dynamics: a probabilistic and geometric perspective*. Proc. of the Int. Congress of Math. (Berlin) Doc. Math. Extra Vol. I. (1998), pp 395-416.

SRB measures and ergodicity of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency.

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich *

**Slides of the talk in the
International Conference on Dynamical Systems,
Rio de Janeiro, Brasil, 2000**

Dedicated to the 60th. Anniversary of Jacob Palis

*Both authors work at IMERL Universidad de la República(Uruguay). E-mail: enrich@fing.edu.uy

MOTIVATION } JOINT WORK WITH HEBER ENRICH

Definition: Ergodic attractor A

if $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(p)} \xrightarrow{\text{weak}^*} \mu$; μ ergodic.

for a set of P's with > 0 Lebesgue meas.
+ basin of attraction.

Conjecture of Palis "Most" systems
have finitely many ERGODIC ATTRACTORS
and Lebesgue almost all point is in
their basins of attractions.

SINAI - RUELLE - BOWEN (72-76) Theorem

Uniformly hyperbolic systems
have ergodic attractors (finitely many)

NON UNIFORMLY HYPERBOLIC SYSTEMS

$n \geq 2$ Pesin (92), Carvalho (93)

Hu-Young (95), Enrich (95)

Alves (97), Bonatti-Viana (99)

.....

Conjecture of Viana If for Lebesgue
almost all points the Lyapounov exponents
are not zero, then there exist
ERGODIC ATTRACTORS.

$F: T^2 \rightarrow \text{ANOSOV}$



$$F(P_0) = P_0$$

Aim:
to weaken ~~one~~
or both eigenvalues
to be 1
and study erg. attract.

Carvalho (1993)



There exists SRB measure
with > 0 Lyapounov exp.

Hu-Young (1995)



The only ergodic attractor
is P_0 , $\mu = \delta_{P_0}$
(Lyapounov exp. is 0)

Hu (1999)



$$dF|_{P_0} = \text{identity}$$

A single ergodic attractor
either P_0 ($\mu = \delta_{P_0}$)
or μ with > 0 Lyapounov exp.

Remaining case:



Contractive eigenvalue 1
Expanding " 1
Tangency $\Rightarrow$

$$dF_{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aim { FIND, if exist(s) ERGODIC ATTRACTOR(S)
SRB measures
Lyapounov exp.



$$df_{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXAMPLE

$$f \begin{cases} X = 2x + y + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \\ Y = x + y + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \end{cases} \pmod{2^2}$$

(+) PROPERTIES:

- Conjugated to Anosov (Lewy's 80)
- Inv. manifolds are C^1 but not C^2
- "Hyperbolic" outside any small neighborhood of P_0

DIFFICULTIES to follow PESIN-SINAI construction of SBR meas.

- Tangency at P_0
- Both contraction and expansion at P_0 are WEAK
- Lyapounov exp. are not uniformly bounded away from 0 at left and right of 0
- Invariant foliations are not necessarily Hölder cont.

THEOREM (C. ENRICH)

The example f has a unique ergodic attr., its SBR measure μ has Lyapounov exp $\neq 0$,

More general setting

C^k

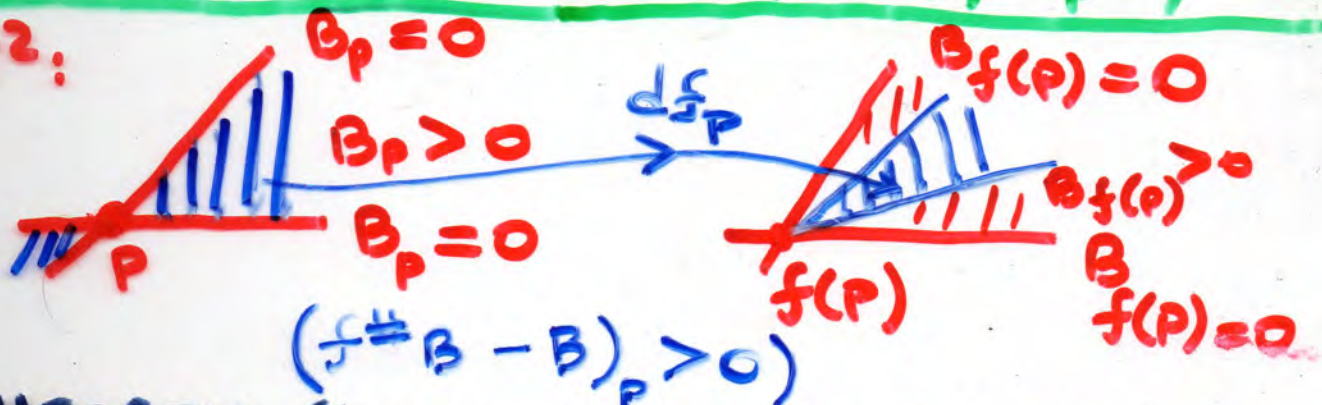
DEFINITION $f: M \rightarrow M$ is
 "almost Anosov" if there exists
 a C^k , indef, non-deg.
quadratic form $B: TM \rightarrow R$
 such that $f^*B - B > 0$
except on a finite f -invariant
 set.

Def $B: TM \rightarrow R$ is $\begin{cases} \text{quadratic form} \\ \text{indef} \\ \text{non-deg} \\ \text{etc} \end{cases}$ if

$B(p, \cdot): T_p M \rightarrow R$ is so. $\forall p \in M$

Def $f^*B(p, \bar{v}) \stackrel{\text{def}}{=} B(f(p), df_p \bar{v})$

in T^2 :



THEOREM (Lewowicz 75) $f: M \rightarrow M$
 of C^k class is Anosov iff
 $\exists$ a C^k , indef, non-deg.
quadratic form $B: TM \rightarrow R$
 such that $f^*B - B > 0$

Assumptions

- $f: T^2 \rightarrow T^2$ C^3 class ^{diffcom.} $f(P_0) = P_0 = (0,0)$
 $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$
- f Almost Anosov
 $f^*B - B > 0$ except at P_0
- $df_{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
($\lambda = 1$) ($\lambda = -1$)
- $b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \Big|_{P_0} \neq 0$

THEOREM A (topolog. properties)
 f is conjugated to Anosov

THEOREM B ^(G. ERICH) (ergodic properties)

Additional assumption:

$\lambda = -1$ or $\lambda = 1$ and $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \Big|_{P_0} = 0$

Then:

- $\exists$ unique ergodic attractor (SRB measure)
whose basin has full Lebesgue meas.
- μ almost all points have Lyapounov exponents $\neq 0$.
- Lebesgue almost all regular points have $\uparrow$
- μ is a Gibbs measure
(cond. measures along strong unstable manifolds are abs. continuous).

Route of the proof of theorem A (topological properties)

(1) Construct cont. real "Lyapounov function" $V(\cdot, \cdot)$

- defined in a neighborhood of the diagonal of $T^2 \times T^2$

- $V(P, P) = 0$

- $V(f(P), f(Q)) \geq V(P, Q) \quad \forall P \neq Q$
 $\uparrow$ strictly $\Rightarrow$ for all $P \neq Q$

(2) Prove f is "expansive":

$\exists \alpha > 0$ such that

$$\text{dist}(f^n(P), f^n(Q)) \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow P = Q$$

(3) Apply THEOREM Lewowicz (1989)

$f: T^2 \rightarrow T^2$ is expansive iff

f is conjugated to Anosov.

OTHER USEFUL RESULT

$$S_P \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in T_P T^2 : B_{f^n(P)}(df_P^n v) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

$$U_P \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in T_P T^2 : B_{f^n(P)}(df_P^n v) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

are one-dimensional subspaces (continuous subbundle)

$$U_P \oplus S_P = T_P M \quad \forall P \neq P_0$$

$$U_{P_0} = S_{P_0} = [(1, 0)]$$

Consequence :

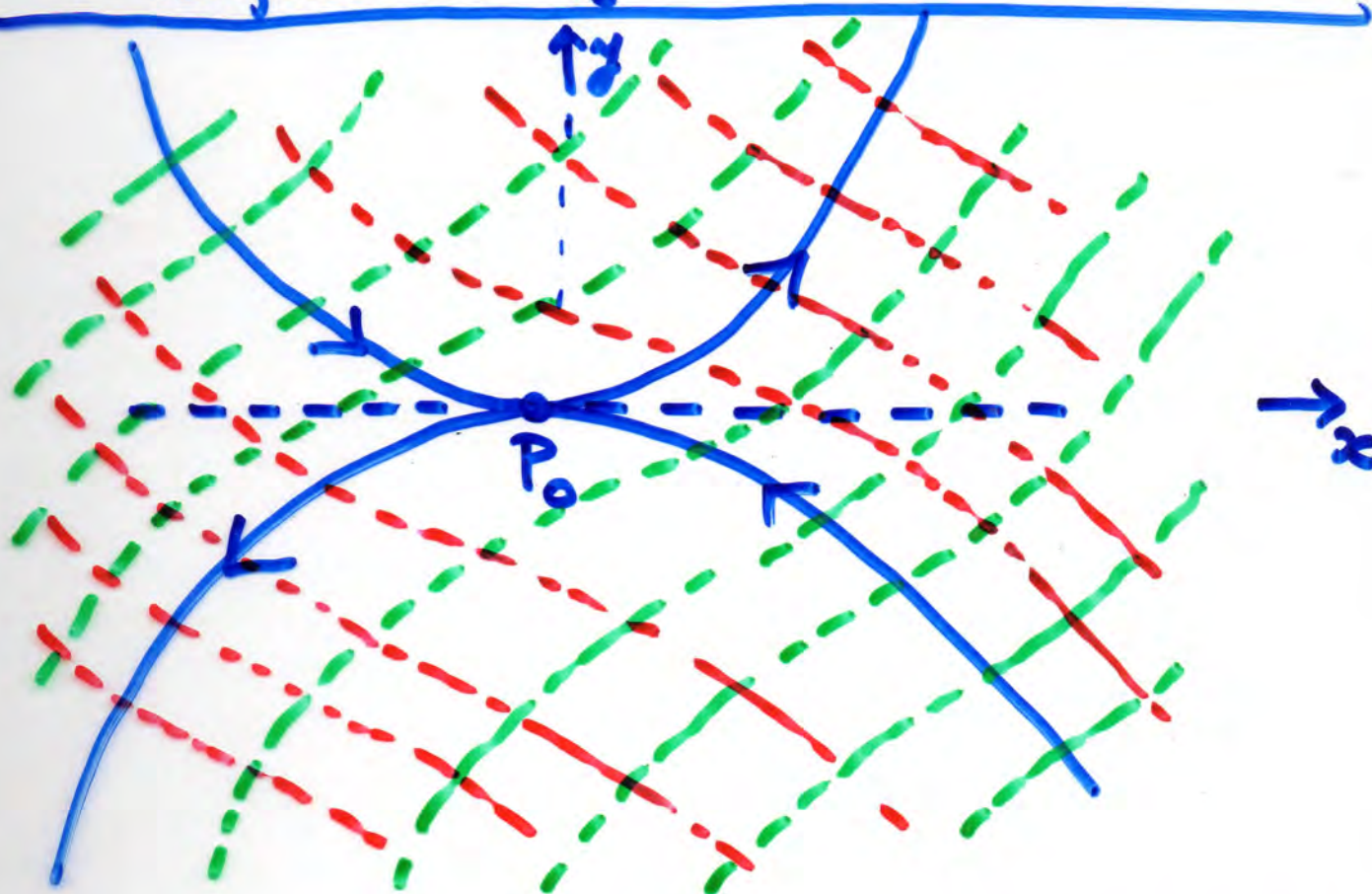
$$W^s(P) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ Q : \text{dist}(f^n(P), f^n(Q)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right\}$$
$$W^u(P) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{ " " " } \xrightarrow[n \rightarrow -\infty]{} 0 \right\}$$

ARE C^1 manifolds, one-dimensional
transversal if $P \neq P_0$, tangent if $P = P_0$

$$T_P W^s(P) = S_P \quad T_P W^u(P) = U_P$$

• We have two invariant ^{continuous} foliations
(not necessarily Hölder continuous)

- Each leaf is C^1 (not nec. C^2)
- Transversal if $P \neq P_0$
- Tangent at P_0



(DEJAR SEPARADA)

Route of the proof of theorem B (ergodic properties)

(1) Construction of Sinai

✓ Lebesgue measure (area form)

$$f^* \nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(f^{-1}A)$$

$$\frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} (f^i)^* \nu \xrightarrow{\text{weak}^*} \mu$$

(2) Difficult path: prove that

μ is a Gibbs measure

(Cond. measures along strong unst manifolds are abs. continuous)

we use:

• Theorem (Ledrappier-Young 85)
It is enough to prove that

$$h_\mu(f) = \int x_i^+ d\mu$$

• Theorem (Brin-Katok 84) or Definition

$$h_\mu(f) := \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\mu B_n^\varepsilon) \right) d\mu$$

where

"dynamic ball": $B_n^\varepsilon(P) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ Q : \text{dist}(f^j(P), f^j(Q)) \leq \varepsilon \right. \\ \left. \text{if } 0 \leq j \leq n \right\}$

• Main lemma Given $0 < A < 1$ and $P \in T^2$

$\exists C = C(A, P)$, $\varepsilon_0 > 0$, $n_i \rightarrow +\infty$ such that

$$\mu(B_{n_i}^{\varepsilon_0}(P)) \leq C / A^{n_i} \prod_{m=1}^{n_i} y^u(f^m(P))$$

(3) Prove that $\mu(\{P_0\}) \neq 1$

And if $\mu(\{P_0\}) \neq 0$ substitute μ taking out its ergodic component concentrated on $\{P_0\}$, i.e.

$$\frac{\mu(A \setminus \{P_0\})}{1 - \mu(\{P_0\})}$$

The new μ verifies $\mu(\{P_0\}) = 0$ and is still a Gibbs measure.

(4) Apply Theorem (Lewowicz, Lima de Sousa, Markarian 88)

If $f: M \rightarrow M$ is C^k ($k \geq 1$)

μ is a f invariant probability

B is a C^k non deg., indefinite quadratic form such that

$$f^*B - B > 0 \quad \mu\text{-almost everywhere}$$

then

the Lyapounov exponents of f are non-zero μ -almost everywhere.

(5) Apply Pugh-Shub construction of ergodic attractors and their basins (89)

If there exists a Gibbs measure μ such that its Lyapounov exponents are non-zero (μ almost ev.) then

there exists countably many ergodic attractors; each one corresponding to each ergodic comp. of μ .

MAIN LEMMA (to prove that μ is a Gibbs measure)

Given A , $0 < A < 1$, and a point $P \in T^2$,
there exist
 $C > 0$, $E_0 > 0$, $n_i \rightarrow +\infty$ (depending on A and P)
such that

$$\mu(B_{n_i}^E(P)) \leq \frac{C}{A^{n_i} \prod_{m=1}^{n_i} J^u(f^m(P))}$$

$\downarrow$ "dynamic ball"
 $\downarrow$ unstable Jacobian (along C^1 unstable leaves) (weak or strong)

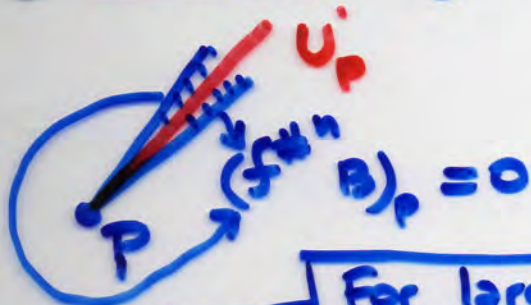
Idea of the proof of the lemma:

- Write $(f^j)^* \nu$ in terms of ν
 $\downarrow$ "area"

considering the "Area" Jacobian J

- Consider $f^{\#n} B$

$$J_p = \det Df_p$$



$\rightarrow$ indefinite quadratic form and the

TWO FIELDS of DIRECTIONS where it is null

For large n , these directions are close to the unstable direction U_p .

- Decompose the "area" ν along ^{one} those directions: It appears $A J^u$

$\rightarrow$ "correction factor" as near 1 as needed.

- How to get rid of the "area"
Jacobian $y(P) = \det Df_P$

It is enough to prove the following:
PROPOSITION (Area distortion is bounded)

There exist $\begin{cases} H > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$ such that:

$$\text{dist}(f^j(P), f^j(Q)) \leq \alpha \text{ for } 0 \leq j \leq n$$

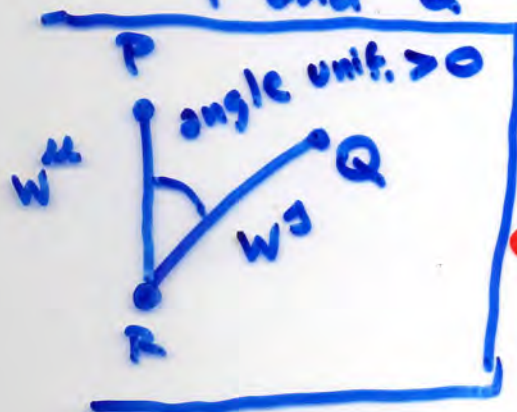
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{H} \leq \prod_{j=0}^{n-1} \frac{y(f^j(P))}{y(f^j(Q))} \leq H}$$

Idea of its proof:

Take a small neighborhood N of P_0

- OUTSIDE N $f^\# B - B > 0$ is uniformly bounded away from zero.
($\Rightarrow$ "hyperbolic" behavior)

LEMMA If for $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k$
 P and Q are not in N , then:



$$\begin{aligned} \text{dist}(f^{j_k}(P), f^{j_k}(Q)) &\leq C \lambda^k \text{dist}(P, Q) \\ \text{dist}(P, R) &\leq C \lambda^k \text{dist}(f^{j_k}(P), f^{j_k}(R)) \\ &\text{for some } C > 0 ; 0 < \lambda < 1 \end{aligned}$$

insert(7)

INSIDE N (Difficult part)

If P and Q are in N for $j = 0, 1, \dots, n$

$\sum_{j=0}^n \text{dist}(f^j(P), f^j(Q))$ is not bounded

Additional assumption in theorem B: $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0$

$$\Rightarrow |Y(P) - Y(Q)| \leq C (\text{dist}(P, Q))^2$$

if $P, Q \in N$

$$\text{and } \sum_{j=0}^n (\text{dist}(f^j(P), f^j(Q)))^r \leq Cte$$

for some $1 < r < 2$
($r = \frac{5}{3}$)

(Potential series
 $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ convergent)

-12-

INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - 28/2000

Dedicated to the 60th anniversary of Jacob Palis

Scientific Committee

**J. Mather
W. de Melo
J. Milnor
J. Moser
S. Newhouse
R. Roussarie
Ya. Sinai
S. Smale
F. Takens
M. Viana
J. C. Yoccoz**

IMPA
Rio de Janeiro
Fax: 55 (21) 529-5019
E-mail: dac@impa.br
www.impa.br/~dsconf/

**This will be a follow-up to the Conference held by the International Centre for
Mathematical Sciences (ICMS), Edinburgh, from 10-14 July 2000.
For information on the ICMS meeting see www.ma.hw.ac.uk/dyn2000/**



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 19 - Wednesday

10:00 - 10:45 Auditorium Ricardo Mañé	F. Takens, University of Groningen Multifractal Formalism for Dimensions and Entropies
11:15 - 12:00 Auditorium Ricardo Mañé	C. G. Moreira, IMPA Homoclinic Tangencies and Fractal Invariants in Arbitrary Dimension
14:30 - 15:15	Invited Sessions
15:45 - 16:30	Invited Sessions
16:45 - 17:30 Auditorium Ricardo Mañé	D. Anosov, Steklov Institute, Moscow Some Geometrical Problems Related to the Flows on Closed Surfaces

Invited Sessions

	14:30 - 15:15	15:45 - 16:30
Room 224	L. Mora, IVIC A Complement to the Connecting Lemma of Hayashi	S. Marmi, Università di Udine Quasianalytic Continuation Beyond Natural Boundaries
Auditorium Ricardo Mañé	V. Baladi, CNRS and Université Paris-Sud (Orsay) Almost Sure Rates of Mixing for Random Unimodal Maps	Yu. Kifer, Hebrew University A Dimension Gap for Continued Fractions with Random Digits
Auditorium II	C. Morales, UFRJ Anosov Flows with Transverse Torus	M. A. Teixeira, IMECC-UNICAMP Reversible and Hamiltonian Vector Fields on R^4 with Resonances

Room 236	C. Ragazzo, IME-USP On the Stability of Fixed Points of Some Non-differentiable Area Preserving Twist Maps	M. Paternain, Universidad de Montevideo The Principal Loop-bundle and Dynamical Systems
Room 232	M. Tsujii, Hokudai University Ergodic Properties of Piecewise Expanding Maps in Higher Dimension	E. Colli, IME-USP Unimodal Families, Generalized Renormalization and Parameter Distortion



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 20 - Thursday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	M. Herman, CNRS and Université Paris VII Existence of an elliptic periodic geodesic by C^2-perturbation of a metric of strictly positive curvature on the 2-sphere
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	G. Swiatek, Pennsylvania State University Remarks on Complex Extensions of Real Maps
11:15 - 12:00	Invited Sessions
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	S. Newhouse, Michigan State University On the Mathematical Contributions of Jacob Palis

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Room 224	G. David, Université Paris Sud (Orsay) An Advertisement for Uniform Rectifiability	M. Jonsson, University of Michigan, Ann Arbor Large Brolin's Theorem in Two Complex Dimensions
Auditorium Ricardo Mañé	G. Paternain, Universidad de Montevideo The Minimal Entropy Problem	C. Pugh, University of Berkeley Structural Stability of Piecewise Smooth Dynamical Systems
Auditorium II	V. Araújo, Universidade do Porto Infinitely Many Stochastically Stable Attractors	J. Alves, Universidade do Porto Stochastic Behavior of Non-uniformly Expanding Dynamical Systems

Room 236	A.Lopes, UFRGS Exact Bounds for the Polynomial Decay of Correlation, $1/f$ Noise and the Central Limit Theorem for the Equilibrium State of a Non-Hölder Potential	S. Carvalho, UFMG Chaos and Elliptic Island on the Elliptical Stadium
Room 232	B. Solomyak, University of Washington Iterated Function Systems with Overlaps: Measure of the Limit Set	D. Massart, Université Montpellier II On Mather's Action Functional
Room 228	J. Graczyk, Université Paris-Sud (Orsay) Non-Uniform Hyperbolicity in Complex Dynamics	E. Vargas, IME-USP Real Bounds for C^2 Multimodal Maps

INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS
IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000
Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis
July, 21 - Friday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	M. Shub, IBM On Random and Mean Exponents for Unitarily Invariant Measures on $GL(n, \mathbb{C})$
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	R. MacKay, University of Warwick Coupled Map Lattices with Phase Transition
11:15 - 12:00	Invited Sessions
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	C. Bonatti, Université de Bourgogne, Dijon Unique Ergodicity of Some Holomorphic Foliations

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Room 224	V. Sidoravicius, IMPA Mixing Properties for the Mechanical Motion of a Charged Particle in a Random Medium	N. Simanyi, University of Alabama at Birmingham The Boltzmann-Sinai Ergodic Hypothesis for Typical Hard Disk Systems
Auditorium Ricardo Mañé	J. Laskar, Bureau des Longitudes, Paris On the Spacing of Planetary Systems	C. Grebogi, University of Maryland Shadowing and the Validity of Dynamical Models
Auditorium II	N. Makarov, Caltech Harmonic Measure and Polynomial Julia Sets	S. Smirnov, Royal Institute of Technology, Stockholm Dynamics and Dimension Estimates in Complex Analysis

Room 236	J. Lamb, Imperial College, London Steady-state Bifurcation in Reversible Equivariant Systems	J. Sotomayor, IME-USP Recent Developments on the Dynamic Properties of Lines of Curvature on Surfaces in Euclidean Spaces
Room 232	A. Rovella, Universidad de Montevideo Perturbation of the Higher Dimensional Quadratic Family	G. Levin, Hebrew University Bounds, Rigidity, and Universality in Critical Circle Endomorphisms
Room 228	H. Bruin, Caltech Growth of Derivatives and Measure of Julia Sets	A. Pinto, Universidade do Porto Geometric Measures for Hyperbolic Surface Dynamics



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 24 - Monday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	J. C. Yoccoz, Collège de France Nonuniformly Dynamics in Homoclinic Bifurcations
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	E. de Faria, IME-USP Hyperbolicity of Renormalization for C^1 Unimodal Maps
11:15 - 12:00	Invited Sessions
12:30 - 15:00	Posters
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	J. Franks, Northwestern University Regions of Instability for Non-twist Maps

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Auditorium I	G. Buzzard, Cornell University Hyperbolic Automorphisms and Holomorphic Motions in C^2	M. Shishikura, Hiroshima University Totally Invariant Varieties of Holomorphic Maps of P^n
Auditorium Ricardo Mañé	M. J. Pacífico, UFRJ Maximal Transitive Sets for C^1 Flows	A. Wilkinson, Northwestern University C^1 Density of Stable Accessibility
Auditorium II	A. Blokh, University of Alabama at Birmingham On Dynamics and Topology of Some Polynomials	N. Chernov, University of Alabama at Birmingham Small Perturbations of Dispersing Billiards

Room 236	C. Gutierrez, ICMC/USP São Carlos On C^1 Closing-Lema for Flows on Two-manifolds	E. Catsigeras, Universidad de Montevideo SRB Measures and Ergodicity of Certain almost Hyperbolic diffeomorphisms with a tangency
Room 232	R. Krikorian, École Polytechnique, Paris Global Reducibility of $SU(2)$ and $SL(2, \mathbb{R})$-valued Quasi-periodic Cocycles	B. Fayad, École Polytechnique, Paris Reparametrization of Irrational Flows
Room 228	A. Albouy, Bureau des Longitudes, Paris Why are the Keplerian orbits closed?	H. Broer, University of Groningen KAM theory: Multiperiodicity in Dissipative and Conservative Systems

Posters

[Universal Evolution Criterion of Glansdorff-Prigogine Fails on Strange Attractors](#)

Ladislav Andrey, ICS-ASCR

[Variational Methods and Homoclinic Orbits of Hamiltonian Systems](#)

Patrick Bernard, Univ. Dauphine

[Fixed Points, Amenability and Concentration of Measure](#)

Vladimir Pestov, Victoria University of Wellington, New Zealand

[A Minimax Selector for a Class of Hamiltonians on Cotangents Bundles](#)

Hector Sánchez-Morgado, UNAM, Mx



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 25 - Tuesday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	M. Lyubich, SUNY at Stony Brook Foliated Structures of Some Spaces of Dynamical Systems
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	R. Roussarie, Université de Bourgogne, Dijon Exponential Confinement of Chaos
11:15 - 12:00	Invited Sessions
12:30 - 15:00	Posters
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	F. Ledrappier, École Polytechnique, Paris Local Characteristics for Non-Uniformly Hyperbolic Measures

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Auditorium I	L. Bunimovich, Georgia Institute of Technology Hyperbolicity and Astigmatism	V. Donnay, Bryn Mawr College Embedded Surfaces with Ergodic Geodesic Flow are Dense
Auditorium Ricardo Mañé	C. Baesens, University of Warwick Order-preservation in Cooperative Networks of Overdamped Inertial Units	K. Khanin, Cambridge University Minimizers of Random Lagrangians

Auditorium II	Stefano Luzzatto, UMIST, UK Rates of Mixing and Robust Hyperbolicity in One-dimensional Maps	F. Przytycki, Polish Acad. of Sciences Holomorphic Iteration: Topological Collet-Eckmann Maps
Room 236	S. Hayashi, Tokyo University On a Conjecture by Palis	M. Sambarino, Universidad de Montevideo On the Existence of Homoclinic Orbits
Room 232	Y. Kaloshin, Princeton University Almost Exponential Growth of Number of Periodic Points for Diffeomorphisms with Probability One	Eugen Mihailescu, University of Texas Topological Pressure and the Dynamics of Hyperbolic Maps on $P^2\mathbb{C}$
Room 228	R. Garcia, UFG Umbilic and Tangential Singularities on Configurations of Principal Lines	N. Haydn, Univ. South California The Distribution of Return Times in Dynamical Systems

Posters

[Diffeomorphisms as Time One Maps, a Constructive Approach](#)

[Jaime Arango](#), Universidad del Valle, Colombia

[Renormalization for Multimodal Maps: a Priori Bounds for Bounded Combinatorics](#)

Daniel S. Brandão, IMPA

[Hausdorff Dimension for a Class of Non-Hyperbolic Repellers](#)

Vanderlei Horita, UNESP

[Tangential \$\lambda\$ -lemma in \$\mathbb{R}^n\$](#)

Victoria Rayskin, Boston University

[Hausdorff Dimension of the Exceptional Set in Jakobson's Theorem](#)

Samuel Senti, Universite de Paris-Sud, Orsay



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 26 - Wednesday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	J. Xia, Northwestern University Lagrangian Submanifolds and Hamiltonian Dynamics
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	A. Ávila, IMPA Regular or Stochastic Dynamics in Real Analytic Families of Unimodal Maps
11:15 - 12:00	Invited Sessions
12:30 - 15:00	Posters
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	J. Mather, Princeton University Action Minimizing Orbits: Open Problems

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Auditorium I	P. Schweitzer, PUC-RJ Reeb Components in Codimension one Foliations: a Generalization of Novikov's Theorem	G. Forni, Princeton University Deviation of Ergodic Averages for Locally Hamiltonian Flows on Surfaces of Higher Genus
Auditorium Ricardo Mañé	M. Pollicot, University of Manchester Computing Lyapunov Exponents for Hyperbolic Systems	M. Jakobson, University of Maryland Piecewise smooth maps with absolutely continuous invariant measures and uniformly scaled Markov partitions

Auditorium II	L. J. Díaz, PUC-RJ Robustly Transitive Set and Heteroclinic Cycles	Yu. Ilyashenko, Moscow State and Independent Universities New Robust Properties of Invariant Set and Attractors of Dynamical Systems
Room 236	A. Fisher, IME-USP An Extension of Abramov's Formula for Flow Entropy	R. Langevin, University of Bourgogne, Dijon A Model for the Germ of a Structurally Stable Vector Field Near an Hyperbolic Set According to F.Beguin and C. Bonatti
Room 232	D. Sands, Université Paris-Sud (Orsay) Monotonicity via Sheaf Cohomology	G. Lukaszewicz, University of Warsaw Long Time Behavior of 2D Micropolar Fluid Flows
Room 228	J. Bobenrieth, Universidad del Bío-Bío Hyperbolic Components of the Family $z \mapsto 1 + 1/wz^d$	E. Bedford, University of Indiana Polynomial Diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$

Posters

[A Homological Invariant of Projectively Anosov Flows on the 2-torus](#)

Masayuki Asaoka, The University of Tokushima, Japan

[Geometry and Dynamics of Partially Hyperbolic Tori](#)

Jacky Cresson, Université de Franche-Comte

[New Results in Dynamics of Piecewise Isometries](#)

Arek Goetz, San Francisco State University, California

[Chaos in Bianchi IX Cosmology](#)

Adilson Motter, IMECC-UNICAMP

[Compact Global Attractors and Morse Decompositions for Diffeomorphisms of \$\mathbb{R}^n\$ with Oscillatory Jacobians](#)

Paulo Ricardo da Silva, UNESP- São José do Rio Preto

On Some Infinite Dimensional Linear Groups

Igor Subbotin, National University, USA



INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS

IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000

Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis

July, 27 - Thursday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	B. Weiss, Hebrew University Metanormal Numbers and Poisson Limit Processes for Dynamical Systems
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	Ya. Sinai, Princeton and Moscow State University Invariant Measures for the Navier-Stokes System with Random Forcing
11:15 - 12:00	Invited Sessions
12:30 - 15:00	Posters
15:30 - 16:15	Invited Sessions
16:30 - 17:15 Auditorium Ricardo Mañé	S. van Strien, University of Warwick Real and Complex Dynamics: Bounds, Ergodicity and Absense of Invariant Linefields

Invited Sessions

	11:15 - 12:00	15:30 - 16:15
Auditorium I	C. Robinson, Northwestern University Nonsymmetric Lorenz-like Attractors from Homoclinic Bifurcations	A. A. Castro, UFC Backward Inducing and the Exponential Decay of Correlations for Mostly Contracting Diffeomorphisms
Auditorium Ricardo Mañé	R. Markarian, Universidad de Montevideo Billiards with Polynomial Decay of Correlations	D. Szász, Technical University, Budapest Exponential Decay of Correlations for Multidimensional Dispersing Billiards

Auditorium II	M. Urbanski, University of North Texas Rigidity of Connected Limit Sets of Conformal IFS	J. Smillie, Cornell University Computer Pictures of Complex Henon Diffeomorphisms
Room 236	J. P. Brasselet, Université de Marseille A Lefschetz Formula for the Local Euler Obstruction	F. Dumortier, Limburgs Universitair Centrum Limit Cycles in Lienard Equations
Room 232	R. Metzger, IMCA, Lima Stochastic Stability for Multidimensional Lorenz Attractors with Arbitrary Expanding Dimension	R. Labarca, Universidad de Santiago de Chile Bifurcation of the Essential Dynamics of Lorenz Maps on the Real Line and the Bifurcation Scenario for Lorenz Like Flows: The Contracting Case
Room 228	C. Tresser, IBM, Watson Research Center Mathematics for Digital Halftoning	O. Kozlovski, University of Warwick Fast Dynamo Problem

Posters

[Abstract of Recent Work on Complex Dynamical Systems](#)

Marco Abate, Università di Roma "Tor Vergata"

[Local Stability Analysis of a Vibrating Problem Excited by a Limited Power Supply](#)

José Balthazar, UNESP

[Saddle-node Bifurcations for Hyperbolic Sets](#)

Sylvain Crovisier, Université Paris-Sud

[Center Manifold and Exponentially Bounded Solutions of a Forced Newtonian System with Dissipation](#)

Luis Garcia, Universidade de Los Andes

[Combinatorial Properties and Distortion Control for Unimodal Maps](#)

Vilton Pinheiro, IMPA

INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS
IMPA, Rio de Janeiro, July 19 - July 28, 2000
Dedicated to the 60th anniversary of Prof. Jacob Palis
July, 28 - Friday

9:00 - 9:45 Auditorium Ricardo Mañé	A. Chenciner, Bureau des Longitudes, Paris A New Class of Periodic Solutions of the n-body Problem in the Case of Equal Masses
10:15 - 11:00 Auditorium Ricardo Mañé	E. Pujals, UFRJ Generic Dynamics on Surfaces
11:15 - 12:00	Invited Sessions
12:30 - 15:00	Posters
15:30 - 16:15 Auditorium Ricardo Mañé	S. Smale, Hong Kong Univ. Some Math Problems for this Century

Invited Sessions

	11:15 - 12:00
Auditorium I	M. Zinsmeister, Université d'Orleans Phase Dependence of Hausdorff Dimension of Julia-Lavaurs Sets
Auditorium Ricardo Mañé	J. Bochi, IMPA C¹ Genericity of Zero Lyapunov Exponents
Auditorium II	T. Nowicki, University of Warsaw Sinks and Cycles in Newton's Means
Room 232	J. Roberts, LaTrobe University Symmetries and Reversing Symmetries of Toral Automorphisms

**Birational Symmetry and Integrability of Functional Equations Defined by
Birational Maps**

Konstantin Rerikh, Joint Institute for Nuclear Research - Dubna, Moscow

Theory Put to Work: Periodicity Versus Chaos in Certain Population Models

Hans Thunberg, Mälardalens University

Room 228

K. Hiraide, Ehime University

[A Simple Proof of Franks-Newhouse's Theorem on Codimension One Anosov Diffeomorphisms](#)

Posters

[Properties of the Minimal Power Points Bifurcation Surface for a Controlled Fitzhugh-Nagumo Clamped Nerve Equation](#)

Luciano Barbanti, IME/USP

[Differentiable Maps with Hyperbolic Measures](#)

Yong Moo Chung, Hiroshima University, Japan

[Synchronism and Communication](#)

Patrícia E. Domingues, UNESP

[Asymptotic Integrals for Polynomial Hamiltonians in two Dimensions](#)

Jesús Palacián, Universidad Publica de Navarra

[Spectra of Recurrence Dimension for Substitution Dynamical Systems](#)

Victor Sirvent, Universidad Simón Bolívar, VE

[Plenty of Homoclinic Bifurcations in a 2-parameter Family of Twist Maps, and Periodic and Quasi-periodic Orbits Appearing after the Break-up of the Last Invariant Circle](#)

Addas Zanata, IME-USP/Pedro Antonio S. Salomão, IME-USP

19

CATSIGERAS, E	<i>La Teoría Matemática del Caos Determinista. Artículo de la comunicación presentada en la Mesa Interdisciplinaria del XIV Congreso Latinoamericano de Psicoterapia , Montevideo , Uruguay, octubre 2000</i>	2000	19
---------------	---	------	----

La teoría matemática del caos determinista.

Eleonora Catsigeras *

13 de octubre de 2000

**Comunicación presentada en la
Mesa Interdisciplinaria del
CONGRESO LATINOAMERICANO DE PSICOTERAPIA**

Organizadores: Dr. Alfredo Vares y Psic. Estela Antuña
Montevideo, Uruguay, octubre de 2000

Resumen

Esta presentación expone algunas definiciones, hipótesis de trabajo, y objetos de estudio de la teoría del caos determinista en los sistemas dinámicos, como área de investigación actual de la matemática. Está dirigida a un público general con formación matemática preuniversitaria.

1. Introducción.

Cuando recibí la invitación de participar en la mesa interdisciplinaria del XIV Congreso de la Federación Latinoamericana de Psicoterapia para hablar sobre el tema del título, me pregunté qué relación tiene lo que investigamos los matemáticos puros con ciencias como la psicología y la psiquiatría. Hay una relación obvia que es la que engloba en un sentido amplio a las distintas áreas científicas en la búsqueda del conocimiento humano. Pero, ¿hay una relación más estrecha? ¿Es el modelo matemático del caos determinista aplicable a ciencias como, por ejemplo, la psicología y la psiquiatría? No puedo responder esa pregunta, desde mi punto de vista demasiado insertado en la matemática pura. Por eso, y no por esquivar

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

preguntas, ya que éstas son nuestra motivación, esta presentación se centrará en los objetos matemáticos de la teoría del caos, su significado para la matemática pura, y no sobre su conexión o aplicabilidad a ciencias humanas y de la naturaleza.

La nomenclatura usada en matemática, utiliza casi siempre palabras extraídas del idioma, que suelen tener en nuestra lengua un significado diferente al concepto preciso y bien delimitado, que tiene en la matemática. En el lenguaje usual, una misma palabra suele tener un sentido mucho más amplio que en la matemática, y a veces casi disjunto. Se corre el riesgo, por ejemplo cuando un matemático habla sobre la teoría del caos, que las palabras sean interpretadas en su sentido usual, y que los teoremas, que inocentemente el matemático afirma que están demostrados, sean interpretados como respuestas dogmáticas a preguntas planteadas en un contexto diferente, cuyo abordaje no puede ni intenta hacer la matemática.

Cuando se usa la palabra *caos* en matemática, no se la refiere a su significado literal de desorden, confusión y desorganización.

La *teoría matemática del caos* es una rama de la ciencia exacta. No se admiten imprecisiones, indefiniciones. Los teoremas demostrados continúan siendo resultados obtenidos por deducción lógica clásica y con precisión científica. No estudia sistemas totalmente desorganizados ni confusos. Ciertamente es que el nombre de la teoría estuvo inspirado en el significado usual de la palabra, porque el objeto de su estudio era percibido como desordenado, cualitativamente y antes de descubrir o inventar un ordenado abordaje matemático. La teoría matemática del caos no estudia sistemas caóticos, en el sentido literal de la palabra.

La matemática dispone de su propio diccionario, constituido por las definiciones. Todo resultado matemático, está supeditado al contexto preciso de la definición de sus términos hipotéticos. Cuando se le intenta aplicar, o a veces extrapolar a un contexto más general, donde las hipótesis no son verificadas con precisión, puede conducir a contradicciones [1] [2]. De todas formas, el progreso de la matemática está basado justamente en la motivación, frecuentemente inspirada en preguntas de otras ciencias, por generalizar sus propios resultados previos. Y también son motivación para los matemáticos y otros científicos, las implicaciones humanas y filosóficas de su quehacer [3], [4], [5], [6], aunque no se acostumbra que esta motivación se haga explícita en los reportes técnicos de sus investigaciones.

La matemática tiene la gran ventaja de que sus conceptos son abstracciones que se inventan o se crean (se definen) a medida de las necesidades, y no permanecen inmutables. Constantemente se están adaptando, modificando, ampliando, y particularizando, para em-

pujar la frontera de lo desconocido y generalizar los teoremas ya conocidos, haciéndolos más abstractos y menos casuísticos.

En este artículo presentaremos la definición matemática del *caos determinista*. Ya la palabra *determinista* contradice al sustantivo *caos*, en el contexto general de su significado extra-matemático, y no se le podría añadir como adjetivo.

Por otro lado, la teoría matemática desarrollada aún es muy limitada, a pesar que está inspirada en problemas científicos extra-matemáticos y es utilizada por investigadores de diversas áreas, en particular en trabajos recientes desarrollados en nuestro país [7]. La matemática del caos determinista es una rama actual y en desarrollo. Se dispone de una serie de definiciones matemáticas, (inspiradas a veces en descripciones de fenómenos físicos). Se ha demostrado algunos teoremas bajo hipótesis bastante generales. Aún se está en la etapa de estudio de casos particulares, para tratar de inducir propiedades generales. En la frontera del desarrollo de la teoría hay muchas preguntas abiertas y algunas conjeturas (enunciados de teoremas sin demostración ni contraejemplos), que se alimentan e inspiran de la interacción con las otras ciencias.

2. Los sistemas dinámicos y la hipótesis determinista.

Cuando diseña o estudia un circuito eléctrico, el ingeniero admite, independientemente del instante en que lo haga, y de los valores iniciales de voltaje y corriente existentes al encender el equipo, la validez de las leyes del electromagnetismo. Aún, según sea el caso, puede utilizar una versión más o menos simplificada de esas leyes. Y aún cuando no conozca en detalle esas leyes, un técnico electricista admite que existen y son las mismas, hoy, mañana, el año que viene, antes y después de encender las luces, y no importa si al encender las luces ya estaba la radio encendida o no lo estaba. La ley de Ohm, que dice que el voltaje es igual al resultado de multiplicar la corriente por la resistencia, sigue siendo la misma, no importa que hoy la corriente sea de medio Ampère y mañana sea de 1 Ampère. Lo que son variables son la corriente, y el voltaje. Varían en el tiempo. Pero la Ley de Ohm que las vincula, es la misma.

La hipótesis determinista asume la existencia (aunque no se les conozca con precisión) de *leyes* $\mathcal{L}$ no azarosas, que regulan las variables del sistema, que ante la misma causa producen el mismo efecto y que son invariantes (las leyes, no las variables o las causas) en todo instante.

Lo que nos interesa muchas veces, no es sólo conocer las leyes $\mathcal{L}$ que tienen interés en sí mismas, sino también predecir el *estado del sistema* en cada instante.

En el símil del circuito eléctrico, lo que pretende el ingeniero es asegurar, por ejemplo, que el conjunto de corrientes en todas las ramas de su circuito se estabilizan al cabo de 10 milisegundos en ciertos valores deseables, u, otro ejemplo, que oscilarán periódicamente a 50 ciclos por segundo.

El *estado* $P(n)$ de un sistema en un instante dado n , es el conjunto de valores numéricos de todas las variables que describen la situación del sistema en ese instante n . (Por ejemplo los valores de las corrientes en todas las ramas de un circuito y de los potenciales eléctricos en todos sus nodos).

El estado varía con el tiempo, o sea depende del instante n . La noción matemática de variable incluye también el caso particular en que ella es constante (la misma para todo n). Es decir, constante no es lo opuesto de variable, sino un caso particular. Las variables, cuyos valores numéricos (en función de n) describen el estado del sistema, se llaman *variables de estado*. Pueden ser pocas o muchas, aún infinitas. Si es una sola, el sistema se llama unidimensional; si son dos, bidimensional; si son infinitas, infinito-dimensional.

Las variables de estado, toman valores numéricos, para describir en términos cuantitativos la situación del sistema. Elegir las variables de estado implica **modelar con cifras, cuantificar cada situación posible del sistema**. Los sistemas digitales usan cuantificadores binarios (sí o no, correspondientes a los valores 1 o 0). Matemáticamente se puede tomar algunas variables binarias, y otras con valores numéricos reales (en un continuo). También se pueden tomar algunas o todas las variables de estado tomando valores no numéricos, en otras entidades matemáticas.¹ Esta abstracción ha permitido demostrar algunos resultados teóricos importantes. Sin embargo, la mayoría de los resultados hasta hoy obtenidos referentes a los sistemas caóticos aún están restringidos a estructuras matemáticas en que las variables de estado son una cantidad finita y toman valores numéricos.

El *espacio de fases*, es el conjunto de todos los estados posibles, no importa si van a ser alcanzados o no por el sistema en algún instante n . Por ejemplo, en una rama de un circuito eléctrico las variables de estado son dos: la corriente I que circula a lo largo de la rama en cada instante y la tensión V que hay entre sus dos nodos extremos en el mismo instante. Ese sistema es bidimensional, y su espacio de fases es el conjunto de todas las parejas ordenadas

¹por ejemplo en estructuras algebraicas, geométricas, topológicas, medibles abstractas, en espacios funcionales.

de números reales, (un número de la pareja corresponde al valor de I , y el otro al de V). Se suele dibujar este espacio de fases, en un plano, con dos ejes coordenados cartesianos (uno para la I y otro para la V). Decimos que cada punto del plano, corresponde a un estado posible, y que todo el plano es el espacio de fases.

El *estado inicial* $P(0)$, es el estado del sistema en el instante $n = 0$. El instante 0 puede ser cualquiera, en el eje del tiempo. Corresponde a un *punto inicial* en el espacio de fases. El estado siguiente $P(1)$ corresponde a otro punto en el espacio (que podría coincidir con el punto inicial). El estado siguiente $P(2)$, a un nuevo punto, y así sucesivamente. La *trayectoria*, u *órbita*, o *recorrido*, dado el estado inicial, es la sucesión de puntos correspondientes a los estados en cada instante n . Corresponde a la evolución del estado del sistema, y depende del estado inicial.

Definición 2.1. Tenemos un *sistema dinámico determinista* (discreto), o brevemente, *sistema*, o *dinámica*, si existen aunque no se les conozca una ley o leyes $\mathcal{L}$ que son las mismas para todo instante n , que permiten computar, a partir del estado $P(n-1)$, cuál es el estado siguiente $P(n)$.²

Es decir, el sistema dinámico determinista proviene de una ley de iteración. Aplicada una vez, y otra, y otra ..., da la evolución del estado del sistema hacia el futuro.

Los números $0; 1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots$, rotulan los momentos de observación. Estos instantes están ordenados crecientemente en el eje real del tiempo, es decir, el instante n viene después del $n-1$, para todo n . Pero no necesariamente el lapso transcurrido entre el instante rotulado como $n-1$ y el rotulado como n tiene que ser siempre el mismo.

Los sistemas dinámicos son invariantes por traslaciones en el tiempo. Una vez alcanzado el estado $P(n)$, en el instante n , puede tomarse ese punto como estado inicial $P(0)$, y comenzar a contar los instantes de nuevo. El sistema dinámico es el mismo. Esta propiedad puede demostrarse rigurosamente a partir de la definición 2.1

También podemos considerar instantes negativos: $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$. Ellos tienen interés en los sistemas dinámicos invertibles, y más aún en los reversibles, según definiremos en la sección 4. En estos sistemas, se considera la órbita como la sucesión (bi-infinita) de estados del sistema $P(n)$ para cada n tanto positivo como negativo.

²Esta definición está restringida a los llamados sistemas dinámicos discretos, porque los momentos de observación son instantes numerados con los números enteros. Se definen también los sistemas dinámicos continuos, en los que el tiempo de observación toma valores en la recta real.

3. El caos determinista.

Un ejemplo, que es la antítesis del caos en el sentido matemático, es el siguiente sistema dinámico determinista unidimensional, con la ley cuadrática contractiva: $\mathcal{L}(x) = x(1-x)/2$, donde x es la variable de estado que toma valores numéricos reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno. El espacio de fases es el conjunto de todos los números entre 0 y 1. Si llamamos x_n al estado en el instante n , se tiene $x_1 = x_0(1-x_0)/2$, $x_2 = x_1(1-x_1)/2$, ... $x_n = x_{n-1}(1-x_{n-1})/2$.

Por ejemplo, si el estado inicial es $x_0 = 0,500$, la órbita será 0,500; 0,1250; 0,0547; 0,0238; 0,0116; 0,0057; 0,0028; 0,0014; 0,0007; 0,0004; 0,0002; 0,0001; 0,0000; 0,0000; 0,0000... (los valores son aproximados con 4 cifras después de la coma). La trayectoria se aproxima cada vez más a cero, hasta que cualquier observador (o computadora) que cometa algún error de percepción (o de cálculo) va a terminar viendo 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ... Si el estado inicial no es 0,500, pero es por ejemplo 0,670, la sucesión recorrida será diferente de la anterior, pero también tiende a cero. Puede decirse entonces, en este ejemplo, y demostrarse rigurosamente, que no importa cuál sea el estado inicial, la trayectoria tiende a estabilizarse en el *punto de equilibrio* $x = 0$. No hay *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Este punto de equilibrio se dice que es *asintóticamente estable*. Hay total predecibilidad en el comportamiento futuro de las trayectorias: a corto plazo, porque existe una ley $\mathcal{L}$, y a largo plazo, porque las órbitas tienden al punto de equilibrio asintóticamente estable. Los errores de aproximación se contraen a una velocidad exponencial.

Ahora veamos otro ejemplo que es un sistema caótico en el sentido matemático. Es un sistema, también unidimensional, con el mismo espacio de fases que antes (los números reales entre 0 y 1) pero con la ley, también muy simple: $\mathcal{L} = 4x(1-x)$, llamada ley cuadrática expansiva. Tomando como dato inicial $x_0 = 0,30$, se obtiene el recorrido 0,30; 0,84; 0,5376; 0,9943; 0,0225; 0,0880; 0,3210; 0,8719; ... (las cifras son aproximadas). La sucesión obtenida es aproximada, y no es la verdadera. Son parecidas al principio, pero muy diferentes después, porque los errores de redondeo se van amplificando.

Aún conociendo la ley, es muy difícil predecir con error aceptable, cuál va a ser el estado del sistema por ejemplo en el instante $n = 10000$.

Ahora tomemos otro dato inicial cercano al anterior, por ejemplo $x_0 = 0,31$. Se obtiene 0,31; 0,8556; 0,4942; 0,9987; 0,0005; 0,0020; 0,0080; 0,0317; ... (las cifras son aproximadas). Ya en el instante $n = 7$ correspondiente a los octavos términos de las sucesiones, los estados

difieren considerablemente (0,8719 frente a 0,0317). En una escala entre 0 y 1 se obtuvo una diferencia de 0,84, a pesar que inicialmente diferían en sólo un centésimo (0,30 frente a 0,31). En este último ejemplo hay *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

Ambos ejemplos corresponden a lo que se llama la *familia cuadrática*: $cx(1-x)$, donde c es un número real constante. En el primer ejemplo $c = 1/2$, y en el segundo $c = 4$.

Definición 3.1. Un sistema dinámico determinista (o una parte de él) es *expansivo*, o *sensible a las condiciones iniciales*, o *caótico*³ si dos estados iniciales diferentes (aunque estén arbitrariamente próximos), dan lugar a órbitas que se separan más que una constante positiva α , llamada constante de expansividad. (A los efectos prácticos α es el umbral de percepción de error).

Si quisiéramos predecir toda la evolución del estado del sistema dinámico caótico (conocer la órbita o trayectoria en el espacio de fases) con un error menor que α , necesitaríamos conocer exactamente el estado inicial del sistema, sin hacer absolutamente ninguna aproximación del mismo, ni de los sucesivos estados obtenidos. No existe especificación tolerable de error en los datos iniciales. Desde el punto de vista matemático teórico, implica la individualidad de la evolución en el tiempo de cada órbita: cada estado inicial da origen a un recorrido único y bien distinguible de los demás, irreproducible con otro dato inicial, por más parecido que sea inicialmente éste al primero. El sistema es determinista porque la misma causa produce el mismo efecto. Pero causas parecidas en un sistema caótico, producen a largo plazo efectos muy diferentes. Desde el punto de vista práctico matemático (en el cálculo numérico por ejemplo), el caos significa que el sistema es *impredecible* a largo plazo, porque todo procesador hasta ahora inventado recorta las cifras decimales (es decir aproxima) al trabajar con una cantidad de memoria finita. Entonces, los sucesivos estados calculados no son los reales, sino aproximaciones. Las trayectorias de dos aproximaciones son, a la larga, muy diferentes (muy diferentes significa que se separan más que α), de dónde se desprende que el recorrido computado y el que tendrá verdaderamente son muy distintos entre sí.

Una cuantificación de la *impredecibilidad* de un sistema está dada por lo que se llama *entropía*, o tasa de crecimiento de la cantidad de información, que también suele comprenderse como grado de desorden espacial de la dinámica.

³Existen otras definiciones matemáticas de sistemas caóticos deterministas [8].

Uno de los abordajes matemáticos de los sistemas dinámicos deterministas, que es especialmente útil cuando el sistema es caótico (aunque también se aplica a los que no lo son) consiste en usar los conceptos y técnicas de la teoría de las probabilidades, dando lugar a la llamada *teoría ergódica* [8]. En vez de estudiar la evolución del sistema intentando predecir exactamente los estados a largo plazo, la teoría ergódica estudia los promedios temporales, definiendo probabilidades de visita a las diferentes regiones del espacio de fases.

Podría preguntarse si la presencia del caos es debida a una cantidad muy grande de variables de estado (las que describen el estado del sistema), como si ello fuera la causa de la impredecibilidad y de la sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema. La respuesta es negativa. La cantidad de variables de estado no está en relación con la presencia de caos: en el segundo ejemplo al principio de esta sección, hay una sola variable de estado y no obstante, el sistema es caótico. Por otro lado, cualquier operador contractivo en un espacio vectorial infinito-dimensional⁴, puede usarse como ley para definir un sistema dinámico no caótico, completamente predecible, cuyas órbitas tienden todas al estado $f = \vec{0}$, a pesar de que la dimensión del espacio es infinita (y, si se desea, ni siquiera numerable).

Uno de los ejemplos inspiradores de la definición matemática del caos determinista, es el llamado *atractor de Lorenz* [9]. Es un sistema dinámico con sólo tres variables de estado, que sirve como modelo para fenómenos de convección en la atmósfera, de utilidad, entre otras ciencias, a la meteorología. Está regido por leyes muy sencillas, a pesar de lo cual es caótico, y muestra una de las razones por las cuales no pueden hacerse predicciones meteorológicas a largo plazo.

La familia cuadrática, es la familia de sistemas dinámicos unidimensionales dados por la ley cuadrática $cx(1 - x)$, donde c es un número real constante. El espacio de fases (donde varía x) es el conjunto de los números reales entre 0 y 1. Es el ejemplo más sencillo de dinámica unidimensional [10] en el que aparece la conducta caótica. Vimos, al principio de esta sección, que cuando c es $1/2$ el sistema es contractivo, y por lo tanto no caótico, y que cuando c es 4, es expansivo, es decir caótico. Se ha demostrado que la probabilidad de que un sistema dinámico de la familia cuadrática sea caótico, es positiva. Esto significa que si se elige la constante c al azar, equidistribuida entre 0 y 4, la probabilidad de que el sistema obtenido sea caótico no es nula. Este fenómeno es lo que en matemática se llama *abundancia* de sistemas caóticos.

⁴por ejemplo, en un espacio funcional real, la multiplicación de la función f por un número real λ positivo menor que uno.

Se han generalizado esos teoremas relativos a la familia cuadrática unidimensional, a dimensiones mayores finitas, al estudiar los llamados *mapas de Hénon*, donde las leyes son polinomios de segundo grado, como en la familia cuadrática, y los mapas del *tipo de Hénon*, donde las leyes no son necesariamente polinomios de segundo grado. Esos resultados prueban que los sistemas caóticos son abundantes, aún cuando las leyes que los regulen sean tan simples como polinomios de segundo grado. Concluimos que no es requerimiento para el caos determinista que la ley $\mathcal{L}$ tenga una expresión complicada.

En dimensión uno⁵, es condición necesaria para la existencia del caos que las leyes sean de grado mayor que uno (dos en adelante). Sin embargo, en dimensión dos o mayor, existen leyes de grado uno (sistemas lineales) que dan lugar a dinámicas caóticas.

Los llamados sistemas de Anosov, y más en general los sistemas llamados hiperbólicos [11], son ejemplos notables de sistemas caóticos. El estudio de estos sistemas, realizado en las décadas del 60 y 70, abrió las puertas al estudio de los sistemas caóticos. Se demostró que los sistemas hiperbólicos son *persistentes*. Esto significa que continúan exhibiendo una dinámica equivalente aunque se modifique un poco la ley $\mathcal{L}$ que los regula (o sea se cambie $\mathcal{L}$ por otra ley $\mathcal{L}'$, cercana, más complicada o más simple, obteniendo otro sistema que evoluciona en el espacio de fases, al transcurrir el tiempo, en forma equivalente al anterior). El teorema de la persistencia de los sistemas hiperbólicos permite concluir que el caos determinista es un fenómeno que puede resistir modificaciones en la propia estructura que define el sistema dinámico. Es decir, el fenómeno del caos (entre otros) en los sistemas hiperbólicos no aparece o desaparece cuando la ley $\mathcal{L}$ que debería usarse para definir el sistema dinámico es sustituida por una aproximación de ella. Por eso, a veces, no es tan importante conocer con precisión la ley $\mathcal{L}$. Concluimos que la presencia del caos no es debida a las aproximaciones hechas durante la elección del modelo matemático (de la ley) que regula el sistema.

4. Invertibilidad y reversibilidad.

En encuentros informales con no matemáticos, he creído entender que el concepto de invertibilidad y reversibilidad es utilizado en un sentido mucho más fuerte que en matemática. Algunas personas conciben la invertibilidad en el tiempo como la inversión de la causa-efecto, y consideran que si un sistema fuera invertible o reversible, entonces sería posible modificar su pasado, alterando el presente. Confunden la imposibilidad de invertir la causa-

⁵La variable es real acotada, tomando valores, por ejemplo, entre cero y uno.

efecto, con la efectiva posibilidad de considerar instantes negativos. Cuando en matemática se consideran instantes negativos (así como en el calendario se consideran años antes de Cristo) no se pretende alterar la causa-efecto. Los sistemas invertibles y los reversibles en el tiempo son simplemente aquellos en los que el estado presente es suficiente para **conocer** el estado pasado. Cuando hay más de un estado pasado *posible* compatible con el presente, el sistema no es invertible. Cuando hay uno sólo, el sistema es invertible. Algunos sistemas dinámicos son *invertibles*, y otros no lo son.

Definición 4.1. Un sistema es invertible, si existen leyes $\mathcal{M}$ (que son las mismas en todo instante n) que permiten computar, a partir del estado $P(n)$, cuál fue el estado anterior $P(n - 1)$. (Compárese con la definición 2.1.)

En caso que exista $\mathcal{M}$, ésta se llama *inversa* de $\mathcal{L}$.

De la definición 4.1 se desprende que un sistema es invertible si y sólo si su ley $\mathcal{L}$ es *unívoca* (es decir, existe un sólo estado anterior). En ese caso la ley inversa $\mathcal{M}$ también es invertible y la inversa de $\mathcal{M}$ vuelve a ser $\mathcal{L}$.

Los ejemplos unidimensionales cuadráticos dados al principio de la sección 2, no son invertibles. Está demostrado que no existen sistemas invertibles caóticos en espacios compactos⁶ de dimensión uno, pero sí existen de dimensión dos o mayor. (Los sistemas hiperbólicos son ejemplos de éstos últimos.)

Un ejemplo para ilustrar el concepto de invertibilidad, es el siguiente: $P(40)$ es el estado (vector que da la posición y la velocidad) de un planeta el 1 de enero del año 2000. Hubo un y un solo estado $P(0)$ del mismo planeta el 1 de enero de 1960. Decimos que $P(40)$ se obtiene de $P(0)$ aplicando la ley $\mathcal{L}$, 40 veces consecutivas; y que $P(0)$ se obtiene de $P(40)$ aplicando la ley inversa $\mathcal{M}$, 40 veces consecutivas. El sistema es invertible.

La invertibilidad y la reversibilidad que definiremos en 4.2 no implican que un acto del presente pueda alterar el pasado. Es mucho menos que eso. Es simplemente decir que existen reglas (la ley $\mathcal{M}$) que permiten conocer cuál fue el estado pasado, observando el estado presente del sistema.

Los sistemas dinámicos *reversibles* son casos particulares de sistemas dinámicos invertibles. La reversibilidad es más fuerte que la invertibilidad porque no sólo pide que exista una ley inversa $\mathcal{M}$, sino que también pide que $\mathcal{M}$ sea esencialmente la misma que $\mathcal{L}$, o mejor

⁶La variable de estado es real variando en un conjunto cerrado y acotado; por ejemplo cuando x es mayor o igual que cero y menor o igual que uno.

dicho, equivalentes a través de cierta traducción.⁷ En los sistemas reversibles, observar el futuro es, a menos de una traducción, lo mismo que observar el pasado.

La traducción es un cambio de coordenadas en el espacio de fases que lleva los estados del futuro en los del pasado y recíprocamente. Puede ser por ejemplo una simetría respecto a un subespacio del espacio de fases, como una reflexión en un espejo. La imagen de la imagen es la identidad. Esta última propiedad se refiere con el nombre *involución*.⁸ La involución puede o no deformar las distancias en el espacio de fases, es decir la imagen en el espejo puede agrandar algunas regiones del espacio y disminuir otras. Que la involución transforme el sistema dado en su inverso, quiere decir que, mientras el sistema dado L evoluciona hacia el futuro, su imagen en el espejo es otro sistema M , **que también evoluciona hacia el futuro**, siendo el futuro de M igual al pasado de L y viceversa.

Definición 4.2. Decimos que un sistema dinámico invertible, es además reversible, si existe un cambio de coordenadas involutivo en el espacio de fases (por ejemplo una reflexión en espejo), tal que transforma el sistema con ley $\mathcal{L}$ en el sistema con la ley inversa $\mathcal{M}$.

La involución es, por definición, un cambio de coordenadas en el espacio de fases. Es decir, es una traducción que se realiza mirando el mismo sistema con coordenadas de referencia diferentes.

Para ilustrar las ideas de reversibilidad e irreversibilidad, sigamos con el ejemplo de la posición y la velocidad del planeta al variar el tiempo. Al ser el sistema invertible, cabría preguntarse si es o no reversible. Sería reversible si fuera posible, simplemente mediante una traducción al leer las variables que describen el estado del planeta, observarlo el 1 de enero del año 2040 en el estado $P(80)$, imagen en un espejo del estado $P(0)$ que tenía el 1 de enero de 1960.

Se ha probado que no existen sistemas dinámicos caóticos unidimensionales invertibles (en espacio de fases compacto), y por lo tanto tampoco reversibles. En dimensión finita mayor o igual que dos, existen sistemas dinámicos reversibles y caóticos, por ejemplo, algunos sistemas hiperbólicos. Teoremas recientes [12] relacionan la tasa de disipación de energía de los sistemas hiperbólicos reversibles con las descripciones probabilísticas de evolución hacia el futuro y el pasado de sus diferentes órbitas. No se sabe aún si esas relaciones valen también en sistemas caóticos reversibles no hiperbólicos.

⁷Más precisamente, existe una traducción h que es un cambio de coordenadas en el espacio de fases, tal que aplicar $\mathcal{L}$ y luego h , es lo mismo que aplicar h y luego la ley inversa $\mathcal{M}$.

⁸ h es una involución, si aplicada dos veces consecutivas, resulta la identidad.

Referencias

- [1] D. Ruelle. *Deterministic Chaos: the science and the fiction*. Proceedings of the Royal Society of London **A 427** (1990), pp 241-248.
- [2] A. Sokal, J. Bricmont. *Imposturas intelectuales*. Ed. Paidós. Barcelona (1999).
- [3] D. Ruelle. *Azar y caos*. Editorial Alianza. Madrid (1993).
- [4] I. Stewart. *Does God play dice? The new mathematics of Chaos*. Ed. Basil Blackwell. London (1989).
- [5] E. Lorenz. *La esencia del caos*. Editorial Debate. Madrid (1995).
- [6] R. Markarian, R. Gambini, editores. *Certidumbres. Incertidumbres. Caos. Reflexiones en torno a la ciencia contemporánea*. Ediciones Trilce. Montevideo (1997).
- [7] R. Markarian, G. Tancredi, editores. *Caos en el Uruguay. Qué hacen los investigadores uruguayos que trabajan en sistemas caóticos?*. Universidad de la República. Montevideo (1997).
- [8] J.P. Eckmann, D. Ruelle. *Ergodic Theory of chaos and strange attractors*. Reviews of modern Physics **Vol. 57, No. 3, Part I** (1985), pp 617-656.
- [9] E.N. Lorenz. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of Atmosphere Science **Vol.20** (1963), pp 130-141.
- [10] W. de Melo, S. van Strien. *One-dimensional dynamics*. Editorial Springer-Verlag. Berlín (1993).
- [11] J. Palis, F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge University Press (1993).
- [12] G. Gallavotti. *Reversible Anosov diffeomorphisms and large deviations*. Mathematical Physics Electronic Journal **1** (1995), pp 1-12.

20

CATSIGERAS, E	<i>Homoclinic tangencies near cascades of period doubling. Abstract and slides of the talk in the International Workshop on Dynamical Systems, Trieste, Italy, May 22th. to June 2nd., 1995</i>	1995	20
---------------	---	------	----

Homoclinic tangencies near cascades of period doubling

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática Pura e Aplicada,
Río de Janeiro, BRAZIL

Instituto de Matemática, Universidad de la República,
Montevideo, URUGUAY.

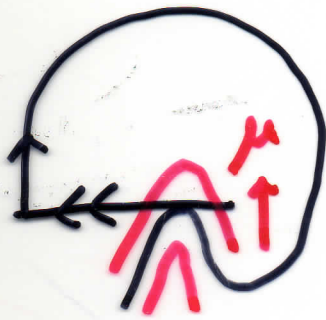
eleonora@impa.br and eleonora@fing.edu.uy

**Abstract and slides of the talk in the
International Workshop on Dynamical Systems,
Trieste, Italy, May 22th. to June 2nd., 1995.**

ABSTRACT

We study certain cascades of period doubling bifurcations in n dimensions whose periodic points have stable codimension one. We prove results of dimension reduction in two steps: first we reduce to dimension two, and second to dimension one, for maps that are uniformly dissipative with bounded geometry. We obtain theorem of approximation by homoclinic tangencies, for the Gambaudo and Tresser example and for cascades of period doublings that are analytic perturbations of the Feigenbaum map in dimension n .

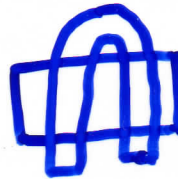
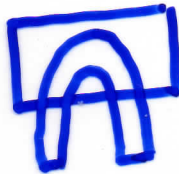
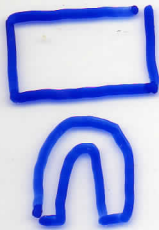
$f: M^2 \rightarrow C^r$ $r \geq 3$ homoclinic tangency



Generic one-parameter unfolding of a homoclinic tangency yields to:

- CASCADES OF PERIOD DOUBLING BIFURCATIONS (YA 83)
- MAPS WITH INFINITELY MANY SINKS (N 79)
- HÉNON-LIKE ATTRACTORS (MV 92) (BC 91)

Creating a Horseshoe
→ cascade of period doubling bifurcation



n dimensions

Unfolding of homoclinic tangency → cascades of period doubling bifurcations (M 91)

OPEN QUESTION:

ARE HOMOCLINIC BIFURCATIONS NECESSARY FOR GLOBAL INSTABILITY?

CONJECTURE (Polis)

The subset of diffeomorphisms that are either hyperbolic or homoclinic bifurcating is dense in the space of C^∞ surface diffeomorphisms.

PARTICULAR CASE :

CAN CASCADES OF PERIOD DOUBLING BIFURCATIONS BE APPROXIMATED WITH MAPS EXHIBITING A HOMOCLINIC TANGENCY?

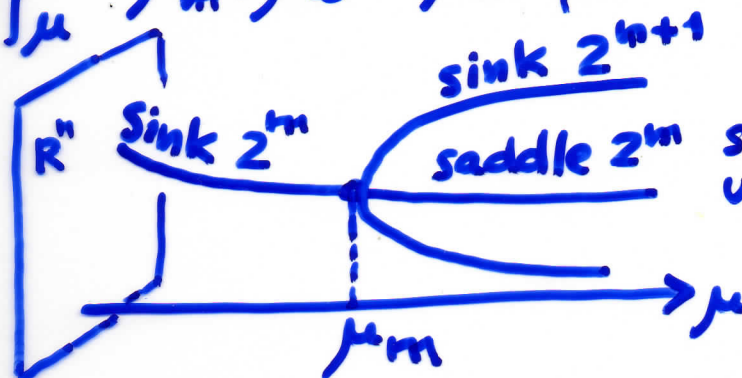
YES, in 2 cases of cascades:

- ANALYTIC PERTURBATIONS OF THE FEIGENBAUM'S MAP IN n DIMENSIONS
- GAMBAUDO-TRESSER EXAMPLE (GT 92)

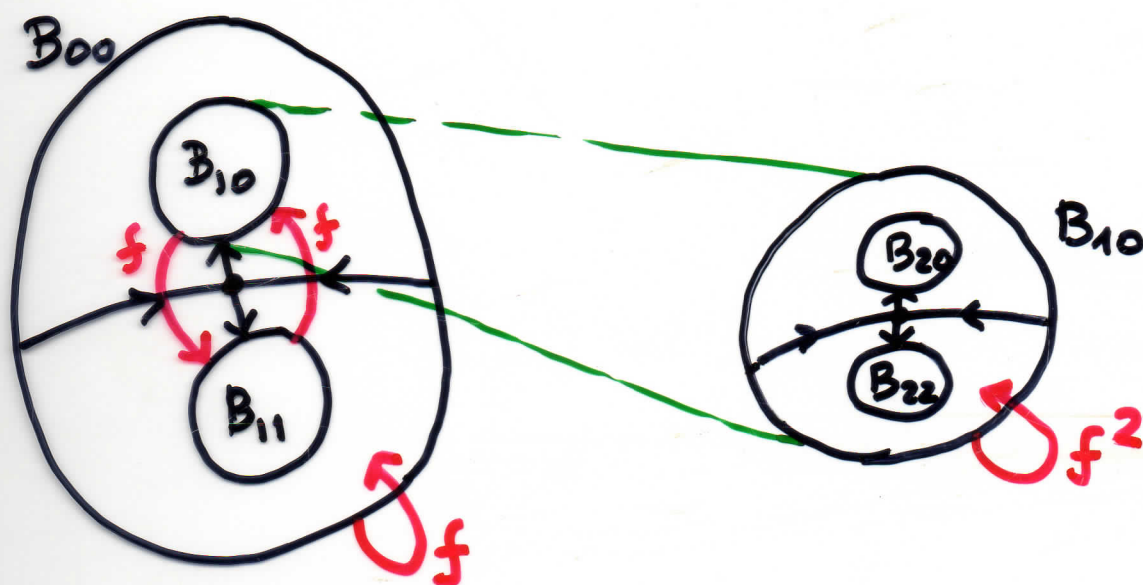
CASCADES OF PERIOD DOUBLING BIF. in n DIMENS.

$\{f_\mu\}_\mu$ $\mu_m \rightarrow \mu_\infty$ μ_n p.d.b

$f_\mu \in C^r, r \geq 3$



"CASCADE" $f = f_{\mu_\infty}$



FAMILY OF SUBDOMAINS $\{B_{m,j}\}$ $0 \leq j \leq 2^m - 1$
 $0 \leq m$

$f^{2^m} : B_{m,j} \rightarrow B_{m,j}$

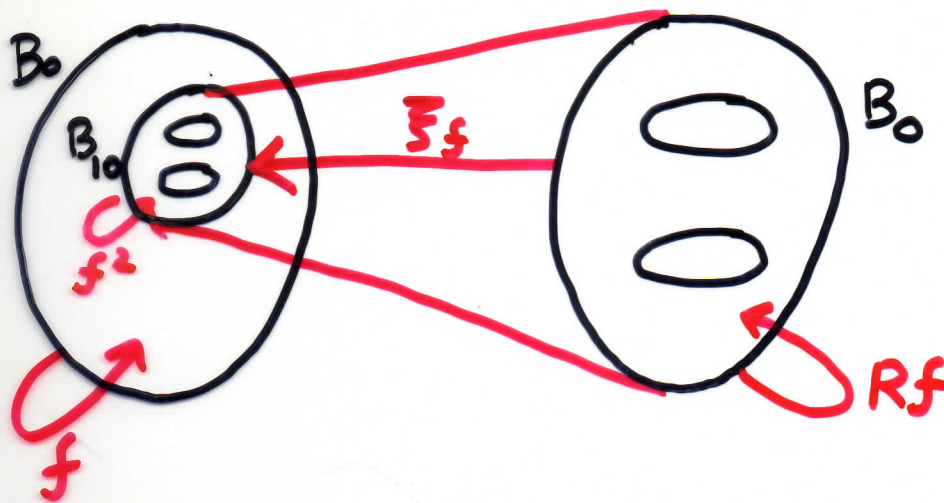
- fixed point $p_{m,j}$ of saddle type
- $f : B_{m,j} \rightarrow B_{m,j+1} \pmod{2^m}$ disjoint
- w -limit

CONVERGENCE ASSUMPTION $\text{diam } B_{m,j} \rightarrow 0$
 $m \rightarrow \infty$
 (to avoid wandering sets)
 (BGLT 93)

CANTOR SET ATTRACTOR

$$K = \bigcap_m \bigcup_j B_{m,j}$$

RENORMALIZATION



ASSUMPTION : The subdomains are C^r diffeomorphic to B_0

$$Rf = \Xi_f^{-1} \circ f \circ f \circ \Xi_f \quad \text{is a new cascade on } B_0$$

2 CASES OF CASCADES

1. $R^n f$ approaches a ONE-DIM map
 Example : Perturbations of the Feigenbaum's map (CEK 81)
2. $R^n f$ does not lose its n -dimensional character
 Example: Gambaudo-Tresser case
 $R^n f = f$

f CASCADE IN DIM. 2 C^r $r \geq 3$

THEOREM (REDUCTION TO DIMENSION 1)

If, $R^m f$ $\Sigma_{R^m f}$ are C^r bounded

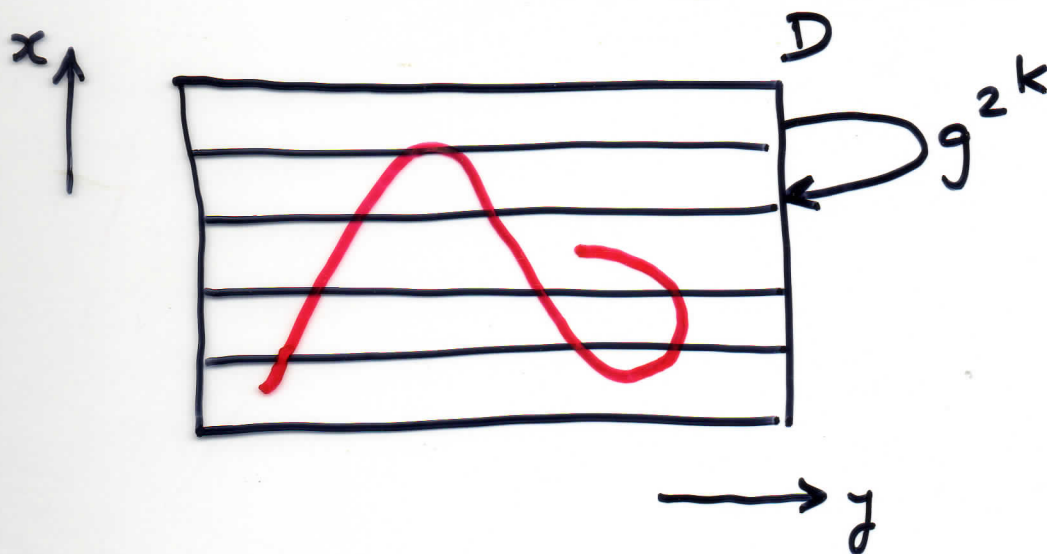
- f dissipative ($|\det Df(p)| \leq \alpha < 1$)
- Bounded geometry $\left(\begin{array}{l} \|D\Sigma_{R^m f}\|_{C^0} \leq \beta < 1 \\ |\det D\Sigma_{R^m f}| \geq \delta > 0 \end{array} \right)$

Then:

$$R^m f \xrightarrow{C^{r-1}} g$$

g endomorphism with one dim. image

More precisely $g^{2^k} : D \rightarrow g^{2^k}(x, \gamma) = (g_1(x), g_2(x))$
 (x, γ) C^{r-2} coordinates in D
 g_1 map in the interval with critical point(s)
 and periodic orbits of period 2^n $n \geq 0$.



Idea of the proof:

- $R^{m_j} f \xrightarrow{C^{r-1}} g$ Arzelà-Ascoli

$$R^m f = \Sigma_{R^{m-1}f}^{-1} \circ \dots \circ \Sigma_f^{-1} \circ f^{2^m} \circ \Sigma_f \circ \dots \circ \Sigma_{R^{m-1}f}$$

$$\det DR^m f = \prod_i \det D \Sigma_{R^i f}^{-1} \det D f^{2^m} \prod_i \det D \Sigma_{R^i f} \leq K^m \alpha^{2^m} \rightarrow 0$$

$$\boxed{\det Dg = 0 \text{ everywhere}}$$

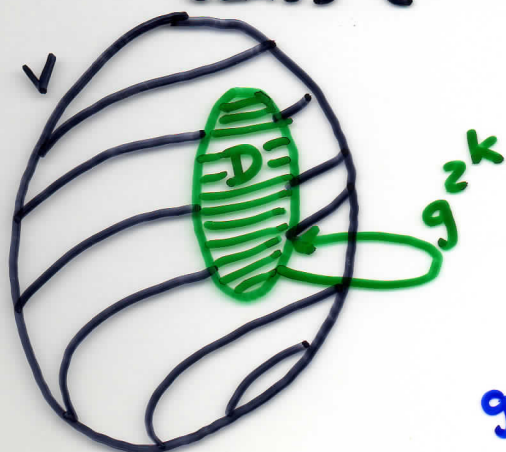
- p_i^m of period 2^i of $R^m f$
subsequence m_j $p_i^{m_j} \rightarrow p_i$

$$\boxed{g^{2^i}(p_i) = p_i}$$

$D(R^{m_j} f)^{2^i} p_i^m$ has expansive direction e.v. < -1
 $Dg^{2^i} p_i$ has non contractive direction e.v. ≤ -1

- $\exists V$ open set such that Dg has a direction that is not contracted more than $1/2$.

- In V : $\dim \text{Ker } Dg = 1$; FOLIATION OF CLASS C^{r-2} ; each leaf $\xrightarrow{g}$ point



- $\exists D$ $g^{2^k}: D \rightarrow$
trivialize the foliation in D
 $g^{2^k}(x, y) = (g_1(x), g_2(x))$

- For some periodic point show $g_1' > 0$, for other $g_1' < 0$

GAMBAUDO-TRESSER EXAMPLE

THEOREM (GT 92)

$\exists$ f cascade in the unitary ball of $\mathbb{R}^n$

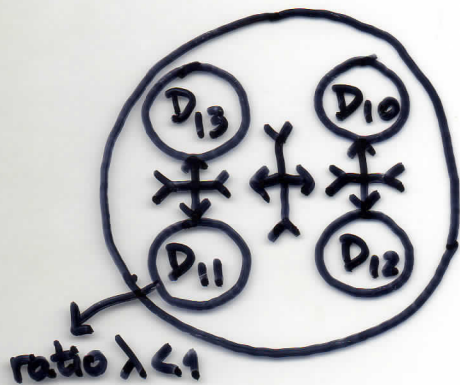
$$f \in C^r \quad r = r(n) \xrightarrow{n} \infty$$

$$Rf = \Lambda^{-1} f 2^n \Lambda = f$$

Λ homotopy of rate λ than can be chosen in an interval

CONSEQUENCE: No Feigenbaum's universality in dim. n .

Idea of the proof:



• isotopy Ψ_t $\xrightarrow[t=0]{\text{id}} \xrightarrow[t=1]{F_0}$

$$F_0^{2^n} \Big|_{D_{1,j}} = \text{id}$$

• change F_0 inside $D_{1,j}$ to F_1 such that

$$\Lambda^{-1} F_1^{2^n} \Big|_{D_{1,0}} \Lambda = F_0$$

(use the isotopy Ψ_t and divide it in 2^n sections)

Step h Change F_{h-1} inside $D_{h,j}$ to F_h
(dividing the isotopy in 2^{hn} sections)

• Prove that $\|F_h - F_{h-1}\|_{C^r} \leq K \left(\frac{1}{2^n \lambda^{r-1}} \right)^h$

Thus $F_h \xrightarrow{C^r} F$
for r such that $2^n \lambda^{r-1} > 1$

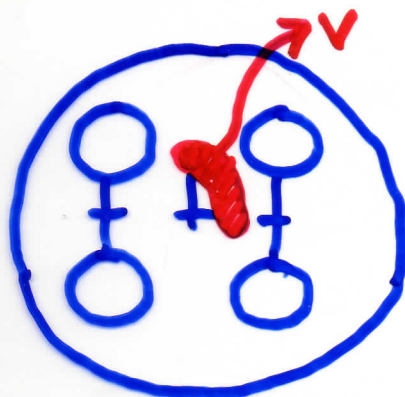
THEOREM

Let F be the cascade constructed above.

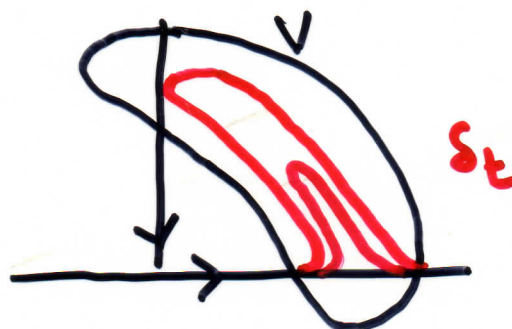
Given $\epsilon > 0$ there exists G exhibiting a homoclinic tangency, such that $\|G - F\|_{cr} < \epsilon$

Idea of the proof

• New isotopy $\tilde{\Psi}_t$



$$\begin{array}{ccccccc} \text{id} & \Psi_{2t} & F_0 & S_t F_0 & \tilde{F}_0 \\ t=0 & & t=\frac{1}{2} & & t=1 \end{array}$$



- Define $F_0, F_1, \dots, F_{h-1}$ as before
- Define G instead of F_h using $\tilde{\Psi}_t$ instead of Ψ_t

$$\Lambda_{h,j}^{-1} \circ G^{2^{hn}} \circ \Lambda_{h,j} = \tilde{F}_0$$

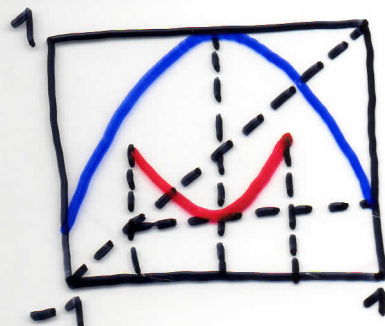
$\Rightarrow G$ exhibits a homoclinic tangency of a periodic point of period 2^{hn} (inside a subdisk $D_{h,j}$).

$$\bullet \|G - F_{h-1}\|_{cr} \leq \tilde{\kappa} \left(\frac{1}{2^n \lambda^{r-1}} \right)^h < \frac{\epsilon}{2} \text{ if } h \text{ is large}$$

$$\text{As } F_{h-1} \rightarrow F : \|G - F\|_{cr} < \epsilon$$

ANALYTIC PERTURBATIONS OF THE FEIGENBAUM'S MAP IN n -DIMENSIONS

ONE-DIMENSIONAL THEORY (CT 78) (F 78) (L 82)

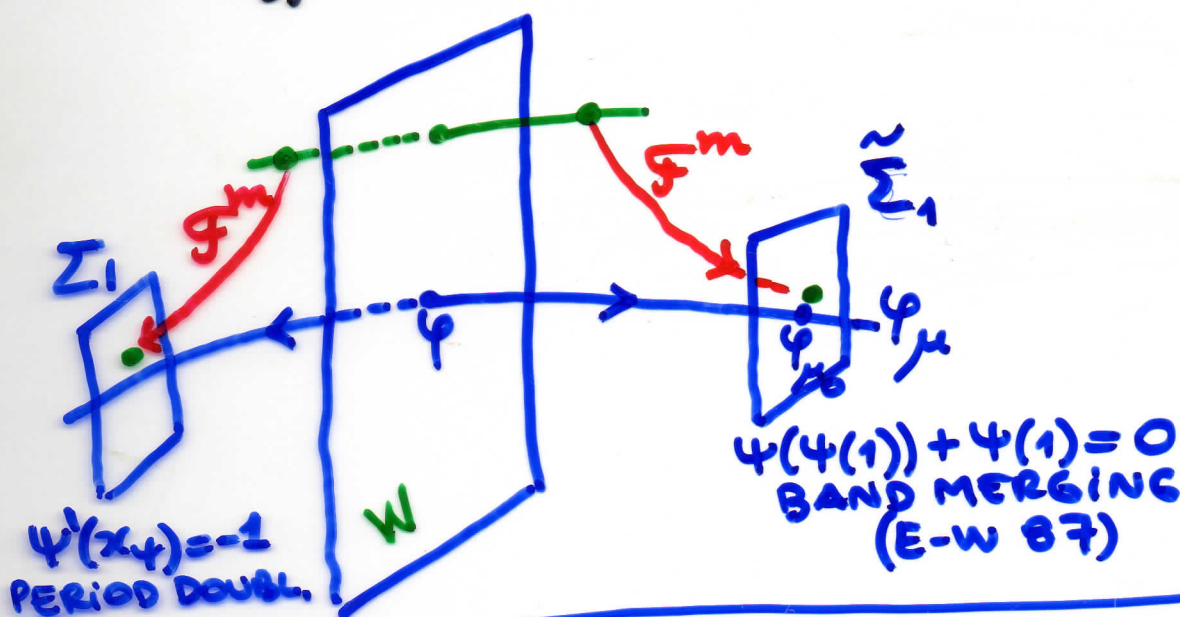


$\psi(x) = g(x^2)$ g analytic $g' < 0$ $g(1) < 0$

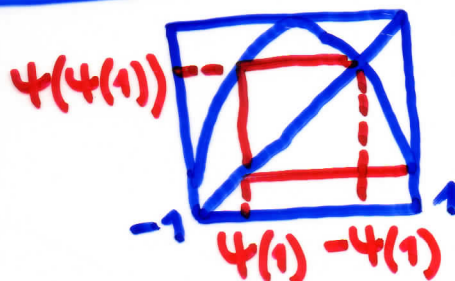
$$(\mathcal{F}\psi)(x) = \psi(1)^{-1} \psi \circ \psi(\psi(1)x)$$

$\exists \varphi$ FEIGENBAUM'S MAP
 $\varphi(x) = f(x^2)$

- $\mathcal{F}\varphi = \varphi$
- $d\mathcal{F}_\varphi$ is hyperbolic compact operator of unstable dimension 1



BAND MERGING



C^r Feigenbaum's ONE DIM. THEORY

LANFORD 88
DAVIE 92

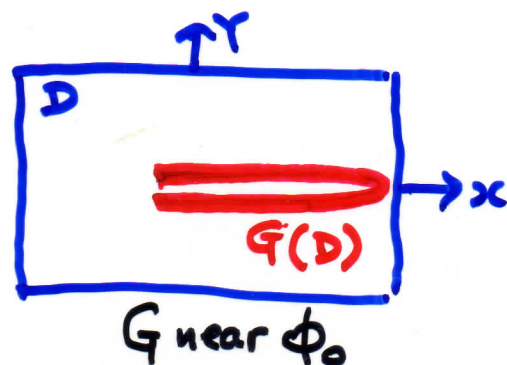
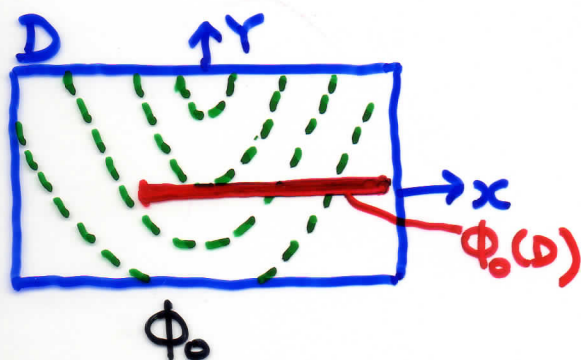
FEIGENBAUM'S COULLET-TRESSER
n-DIMENSIONAL THEORY (CEK 81)

D neighborhood of $[-1,1] \times \{0\}$ in $\mathbb{C}^n$

H_D analytic bounded maps

ϕ_0 Feigenbaum's map in n dimensions:

$$\phi_0(x, y) = (f(x^2 - \alpha \cdot y), 0) \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, \alpha \neq 0$$



THEOREM

In a neighborhood of ϕ_0 in H_D there exists a cod. 1 manifold W such that

if $\{G_\mu\}_\mu \cap W = G_{\mu_\infty}$ then

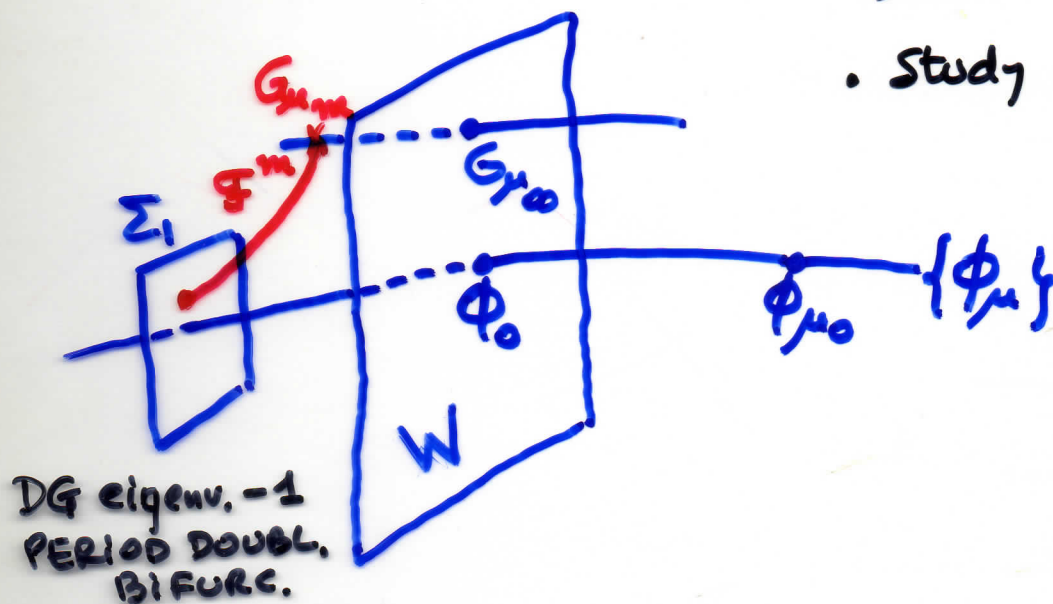
(1) $\exists \mu_m \rightarrow \mu_\infty$ monot. G_{μ_m} seq. of period doubling bifurcations (CEK 81)

(2) $\exists \bar{\mu}_m \rightarrow \mu_\infty$ monot. $G_{\bar{\mu}_m}$ homoclinic tangency

Idea of the proof of (1) (CEK 81)

Extend to dimension n the Coullet-Tresser-Feigenbaum's theory :

- Define $\mathcal{F}$
- Study the spectrum of $d\mathcal{F}_{\phi_0}$



$$\mathcal{F}G = (\mathcal{I} - \sigma_G)^{-1} \cdot \Lambda_G^{-1} \cdot G \circ G \circ \Lambda_G \cdot (\mathcal{I} - \sigma_G)$$

The unstable manifold $\{\phi_\mu\}$ is the "same" of dimension one:

$$\phi_\mu(x, y) = (g_\mu(x^2 - \alpha \cdot y), 0) \text{ where}$$

$$\psi_\mu(x) = g_\mu(x^2) \text{ unst. manifold dim. 1.}$$

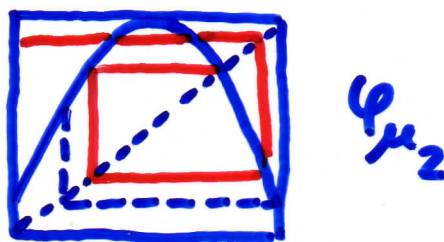
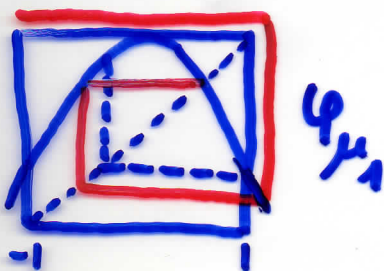
Idea of the proof of (2)

- E.W 87
- Take $\phi_{\mu_0}(x, y)$
 - For $\mu_1 < \mu_0$ near μ_0
 - For $\mu_2 > \mu_0$ near μ_0

ψ_{μ_0} is "band merging"

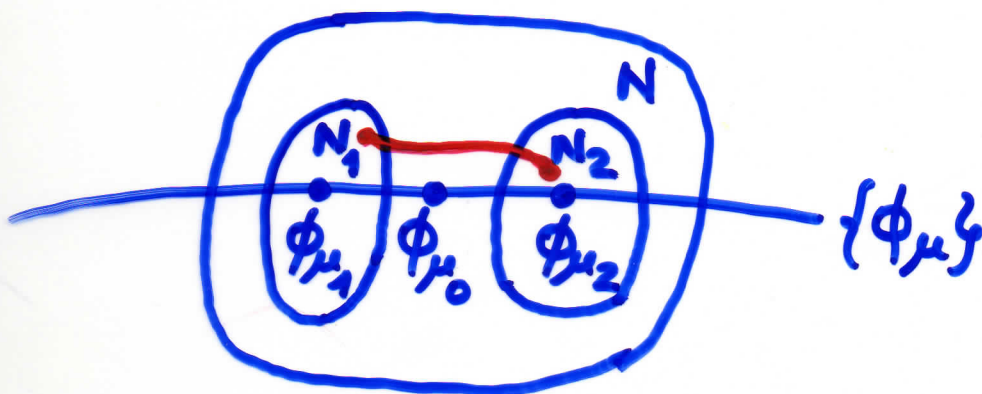
$$\psi_{\mu_1}(\psi_{\mu_1}(1)) + \psi_{\mu_1}(1) > 0$$

$$\psi_{\mu_2}(\psi_{\mu_2}(1)) + \psi_{\mu_2}(1) < 0$$



LEMMA

There exist neighborhoods N, N_1, N_2 in H_D



such that if $\{G_\mu\}_{\mu \in [a,b]} \subset N$ and

$G_a \in N_1$ $G_b \in N_2$, then

$\{G_\mu\}_{\mu \in [a,b]}$ has a HOMOCLINIC BIFURCATION
WITH UNAVOIDABLE
TANGENCY.

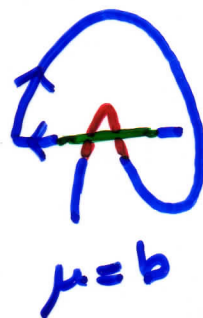
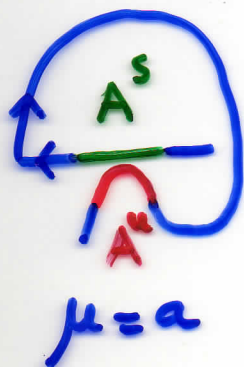
i.e: p_μ hyperbolic, saddle, stable cod 1

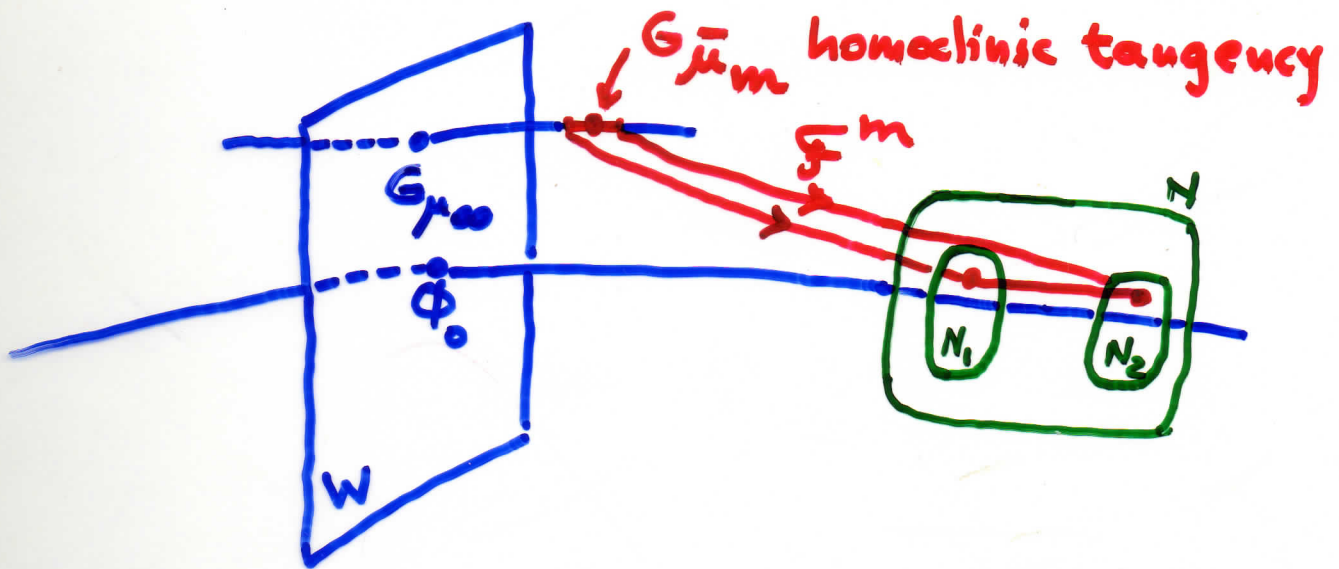
$$A_\mu^s \subset W_\mu^s(p_\mu) \quad A_\mu^u \subset W_\mu^u(p_\mu)$$

$$1. \partial A_\mu^s \cap A_\mu^u = \partial A_\mu^u \cap A_\mu^s = \emptyset$$

$$2. \mu = a \quad A_a^s \cap A_a^u = \emptyset$$

$$3. \mu = b \quad A_b^s \cap A_b^u \neq \emptyset$$





$\exists \bar{\mu}_m \rightarrow \mu_\infty$ $G_{\bar{\mu}_m}$ exhibits a homoclinic tangency

EXTENSION OF THE THEORY TO THE C^r TOPOLOGY

Use the ideas of (L88) (D92) to show that there is a topological hyperbolic behavior near ϕ_0 . Extend it to a n dimensional setting. Work in progress of EC

Main difficulty: $\mathcal{F}$ renormalization is not differentiable.

21

CATSIGERAS, E	<i>Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación. - Comunicación presentada en la Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos Piriápolis , Uruguay, 23 al 25 de mayo de 1996</i>	1996	21
---------------	---	------	----

Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación

Eleonora Catsigeras *

**Comunicación presentada en la
Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos.
Piriápolis, Uruguay, 1995**

RESUMEN

La renormalización de un sistema dinámico significa, a grandes razgos, la aplicación reiterada de una transformación del espacio en una región reducida del mismo, y la observación del nuevo sistema obtenido a través de un cambio de variables adecuado que agranda la pequeña región donde se efectúa la renormalización. Dicho de otra forma, la renormalización pasa de un sistema dinámico a otro que contempla el comportamiento del retorno a una región reducida del espacio.

En casos excepcionales el sistema renormalizado es idéntico al sistema global antes de renormalizar. Esta propiedad de autoidentidad caracteriza al llamado mapa de Feigenbaum en el intervalo.

Buena parte de los sistemas renormalizables no son autoidénticos, (como el mapa de Feigenbaum es) pero son autosimilares: el renormalizado no copia idénticamente al sistema global, sino que lo imita deformándolo un poco. En particular, ya que el sistema original era renormalizable una vez, también lo será el sistema renormalizado.

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Los sistemas llamados cascadas admiten que el proceso de renormalización pueda repetirse infinitas veces. En ellos el sistema renormalizado es a su vez renormalizable, y puede repetirse la operación una cantidad infinita numerable de veces. Contienen copias autosimilares al sistema global, éstas a su vez contienen nuevas copias más pequeñas autosimilares, y éstas nuevas copias... Cada copia deforma al sistema global, y por eso en general no puede afirmarse que los renormalizados sucesivos sean convergentes. Pero por ejemplo en el llamado atractor de Feigenbaum-Coulet-Tresser, los renormalizados pueden ser convergentes. En dicho atractor convergen al mapa de Feigenbaum, que es autoidéntico por la renormalización.

El atractor de Feigenbaum, Coulet y Tresser fue descubierto al final de la década de los setenta, como la conducta generada por una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período. Durante la presentación explicaremos este fenómeno, que consiste esencialmente en la evolución del sistema, al mover un parámetro, pasando de conductas estables a conductas caóticas, a través de una secuencia de bifurcaciones que van complicando paulatinamente su dinámica, y que acumulan en una cascada. La cascada en sí es inestable: se destruye con pequeñas perturbaciones. No es aún un sistema caótico porque no tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero se conjetura que está en el borde del caos: pequeñísimas perturbaciones la conducen a conductas caóticas. Expondremos los resultados demostrados y los problemas abiertos en relación con esta conjetura.

Los atractores de Feigenbaum, Coulet y Tresser admiten además propiedades de universalidad: existen constantes que regulan la geometría microscópica del atractor, y la relación de valores del parámetro entre dos bifurcaciones consecutivas de la sucesión que genera la cascada. Estas propiedades de universalidad fueron demostradas para esos atractores, pero existen ejemplos que muestran que no son válidas para otras cascadas.

Expondremos además otras pautas que son indicio de la presencia de una cascada, además de la autosimilitud y la universalidad. En la primera parte de la charla, nos restringiremos a las cascadas de duplicación, y en la segunda parte generalizaremos la definición y los ejemplos, para introducir las cascadas de multiplicación.

Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación

Eleonora Catsigeras *

Comunicación presentada en la
Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos.
Piriápolis, Uruguay, 1995

TRANSPARENCIAS

Transparencia 1

En la parte superior se muestra una bifurcación de duplicación de período en la que un punto hiperbólico atractor (pozo) se transforma en punto silla y genera una órbita periódica de período doble atractor (pozo)

En la parte inferior se muestra, al mover el parámetro, una sucesión de bifurcaciones de duplicación de período que acumula en un valor del parámetro λ_∞ para el cual el sistema exhibe un atractor de Feigenbaum-Coulet-Tresser.

Transparencia 2

Para un mapa unidimensional, se dibuja solamente el conjunto atractor para valores del parámetro intermedios entre dos bifurcaciones de duplicación de período consecutivas, y se observa la aparición de gaps de repulsión en el conjunto de Cantor atractor donde acumula la cascada.

Transparencia 3 Foto de los anillos de Saturno tomada por Voyager I en noviembre de 1980. Se observa la similitud entre los gaps de repulsión en el conjunto de Cantor atractor donde acumula una cascada de duplicación de período, y los gaps que el mapa de retorno a una sección (aproximadamente unidimensional) transversal al anillo.

*E-mail: eleonora@fing.edu.uy Instituto de Matemática, Fac. Ingeniería. Universidad de la República. Uruguay. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Jan. 1982)

Transparencia 4

Diagrama de fases de una bifurcación de duplicación de período de un diffeomorfismo en dimensión 2. En cada cuadro, arriba, se dibuja el comportamiento de las órbitas, y abajo la ubicación de los valores propios del punto periódico en el círculo unitario. En los diagramas de fases se observa que para que se produzca la bifurcación es necesario, debido a la invertibilidad del mapa, que los valores propios pasen a ser complejos conjugados, en fases intermedias, con fase en espiral, redondeada. Pero antes de la bifurcación los valores propios son reales, con uno más grande que el otro al debilitarse la atracción hiperbólica del pozo. Esto implica que el diagrama de fases se vuelva alargado, con atracción axial cada vez más débil, hasta que se vuelve repulsión axial. Colapsa en dos atractores gemelos, cuando se produce la bifurcación que nacen como atractores con diagrama de fases axial (como en el cuadro 1).

Transparencia 5

Foto de la división celular con teñido diferencial de microtúbulos y cromosomas. Se observa que las dos células obtenidas por la división de una , son redondeadas cuando están “lejos” de dividirse. Sus cromosomas luego adquieren una distribución axial, tal que en la dirección de ese eje se produce la duplicación. Inmediatamente después la foto de los cromosomas mantiene una forma predominantemente axial, pero que luego se redondea cuando setá todavía lejos de la próxima duplicación.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Oct. 1980)

Transparencia 6

Se muestra otro tipo de cascadas de bifurcaciones de duplicación de período en dimensión dos.

En el cuadro 1 el ejemplo de Gambaudo-Tresser, 1992 no se puede aproximar por bifurcaciones en dimensión 1. Hemos probado que este ejemplo también es ruta al Caos: el conjunto atractor donde acumula la cascada es aproximable por tangencias homoclínicas. Pero la universalidad en la relación entre parámetros consecutivos de la cascada de bifurcaciones, rige para el atractor de Feigenbaum-Couillet-Tresser, pero no para este ejemplo de

Gambaudo-Tresser.

En el cuadro 2 se muestra que en general, cualquier cascada de duplicación de período en dimensión dos, que corresponda a un mapa que contrae área y tiene distorsión limitada (propiedad de autosimilitud con distorsión que no se va a infinito), puede reducirse a dimensión 1 (mapa unimodal o multimodal). Esta reducción nos ha permitido demostrar que en general, están en el borde del caos: es decir, después de una perturbación arbitrariamente pequeña, aparecen tangencias homoclínicas.

En el cuadro 3: extendemos el resultado anterior a cascadas de multiplicación de período. Hemos probado recientemente con Gambaudo y Moreira, que cuando la cascada es disipativa, con distorsión limitada, es reducible a dimensión 1. Y si es de multiplicación pero no de duplicación tienen entropía positiva. Es decir el conjunto atractor ya es caótico en el valor exacto donde acumula la cascada, sin necesidad de perturbar el sistema, a diferencia de lo que sucede con las cascadas de duplicación en que el atractor se aproxima por dinámicas caóticas (es ruta al caos), pero él mismo no es caótico.

Transparencia 7

Foto de la mariposa diurna *Stichophthalma Camadeva*. Se observa la semejanza geométrica entre el diagrama de construcción del ejemplo de Gambaudo-Tresser en dimensión dos (cuadro 1 de la transparencia 6) y los patrones de color en las alas de la mariposa. En esta última, los períodos son 4 (uno por ala), 5 (uno por mancha redondeada oscura en cada ala), etc.

(Esta fotografía fue utilizada durante la conferencia. No se incluye en esta publicación porque está sujeta a derechos de Copyright. Se encuentra publicada en Scientific American, Issue Jan. 1982)

Transparencia 8

Conclusiones

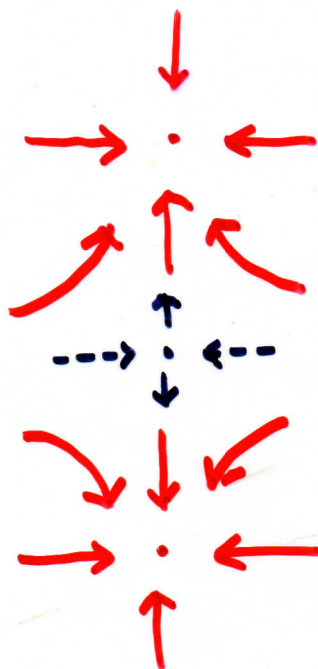
PUNTO
ATRACTOR



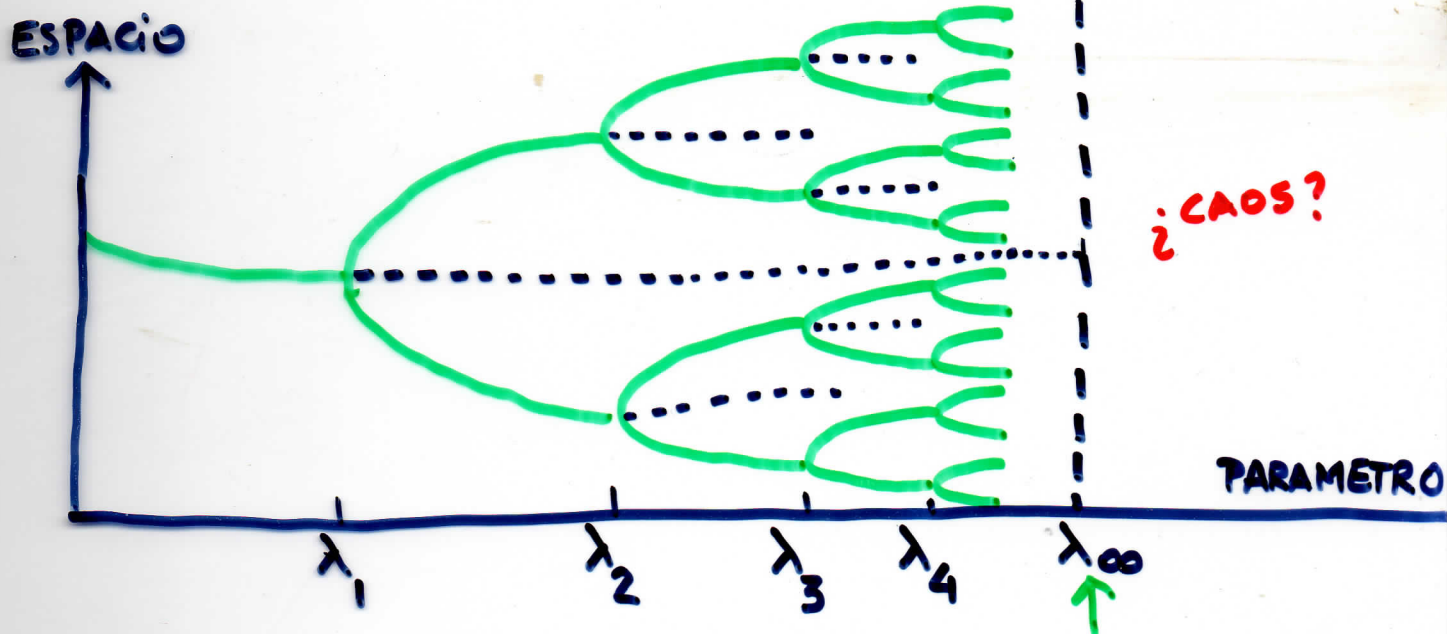
BIFUR-
CACIÓN
DE

DUPLICAC.
DE
PERIODO

NUEVO
ATRACTOR
PERÍODO
DOBLE



SILLA
(repele en una
dirección)

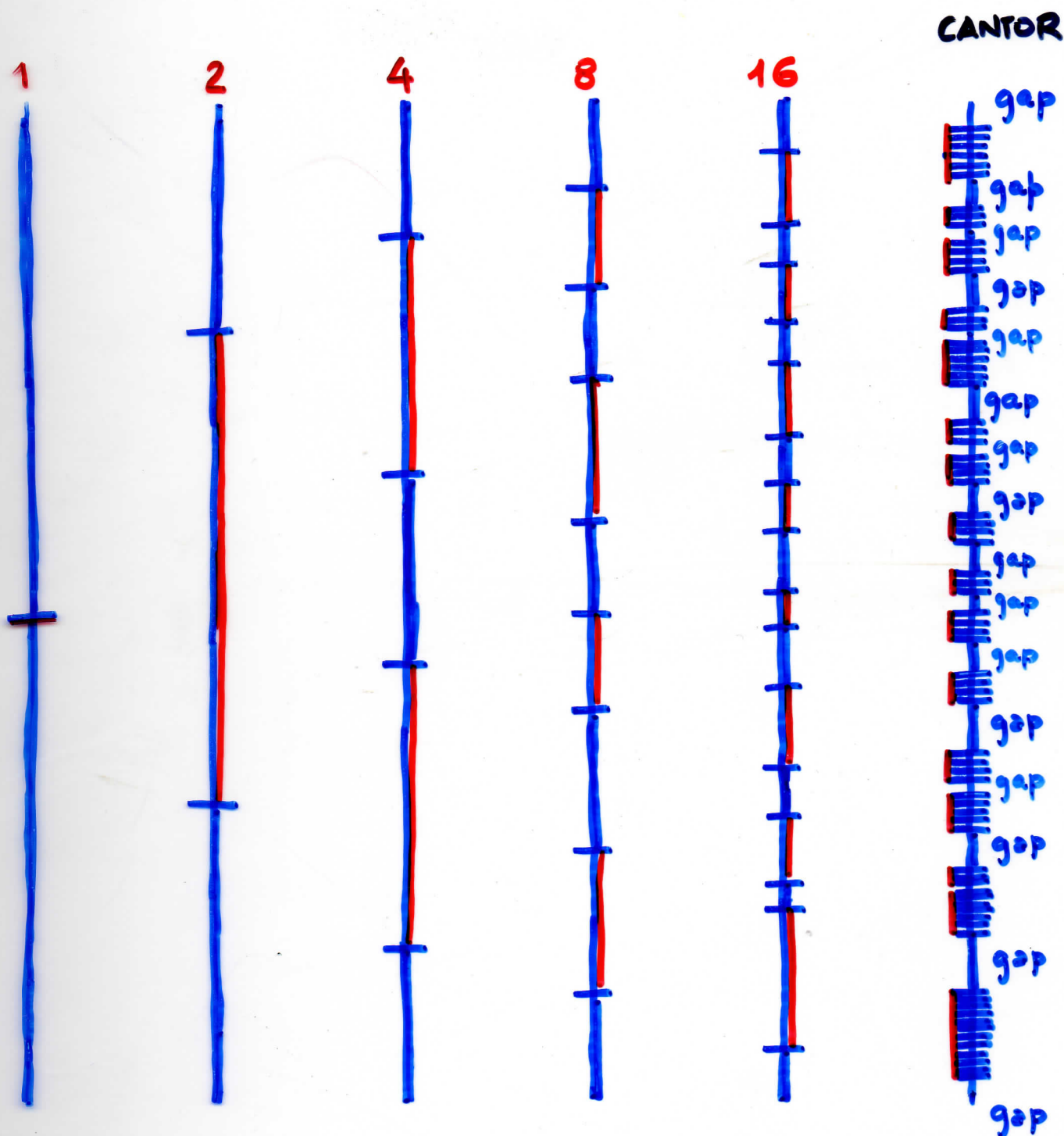


ATRACTOR de
Feigenbaum-Coulet-Tresser
(No es caótico)

UNIVERSALIDAD MÉTRICA. Observación experimental en 1975

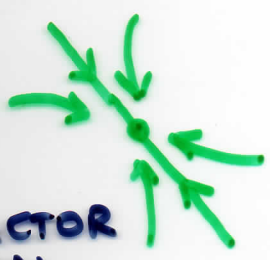
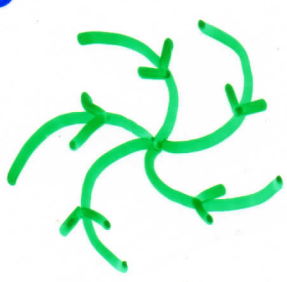
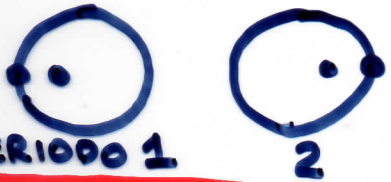
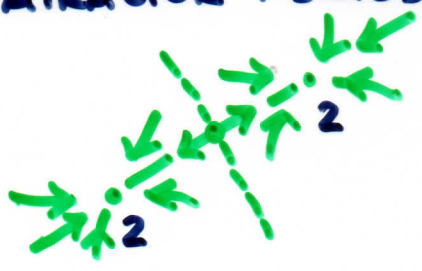
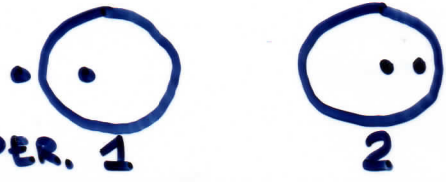
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n+1}} = 4,6692... \text{ constante}$$

CASCADA DE DUPLICACIÓN EN DIM. 1



CADA ATRACTOR "LIMPIA" DOS BANDAS A UN LADO Y OTRO DE SU TRAYECTORIA; ORIGINAN LOS "GAPS" (que contienen a los repulsores)

BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERÍODO DIMENSIÓN 2

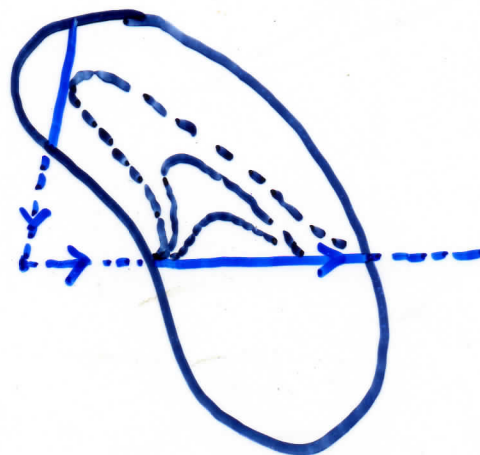
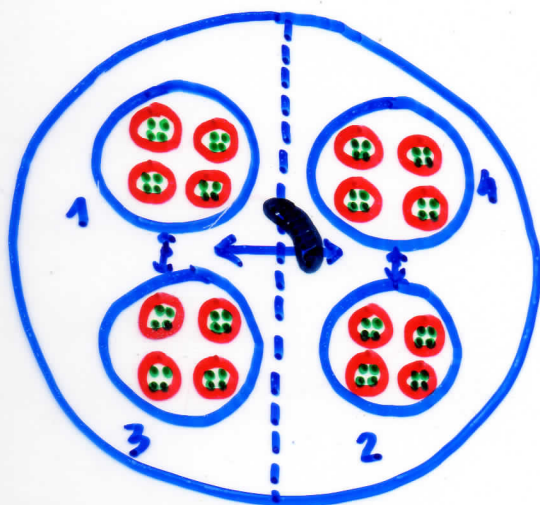
1  ATRACTOR AXIAL POSITIVO VALORES PROPIOS 	2  RADIAL POSITIVO 	3  ESPIRAL 
4  ESPIRAL VALORES PROPIOS 	5  RADIAL NEGATIVO 	6  AXIAL NEGAT. 
7 DEBILITACIÓN  VALORES PROPIOS  PERIODO 1 2		SILLA (DIVISION DE CUENCAS) + ATRACTOR PERÍODO 2  VALORES PROPIOS  PER. 1 2

LAS SECCIONES DE VARIEDADES INESTABLES DE LAS SILLAS SON ARRASTRADAS POR LOS DOS NUEVOS ATRACTORES QUE SE LAS REPARTEN SIMÉTRICAMENTE, EQUILIBRADAMENTE.

1) EJEMPLO de GAMBAUDO . TRESSER 1992 en dimensión n (no cercano a dim. 1)

CONJ. de CANTOR atractor . NO ES CAOS

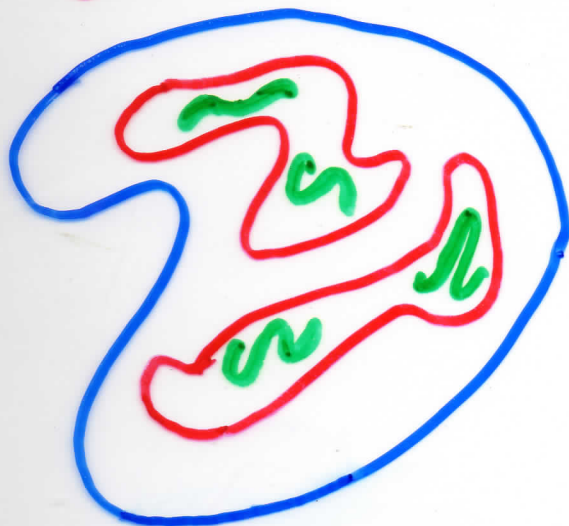
PERO ESTÁ EN EL BORDE DEL CAOS (C-1995)
(PORQUE ES APROXIMABLE POR TANGENCIAS HOMOCLÍNICAS)



2) CASCADAS EN DIM. 2 { área contractivas
distorsión limitada

SON REDUCTIBLES A DIM. 1 (C-1995)

¿ESTÁN EN EL BORDE DEL CAOS? ??



MACROSCÓPICO



MICROSCÓPICO
CERCANO A DIM. 1
(MULTIMODAL)

3) GAMBAUDO 95: CASCADA DE MULTIPLICACIÓN
área contractiva . distorsión limitada . periodos acotados
SON REDUCTIBLES A DIM. 1

C-G-MOREIRA 96: SI NO SON DE DUPLICACIÓN
¡ TIENEN ENTROPIA POSITIVA. !

CASCADA DE
DUPLICACIÓN DE PERÍODO ✓

CASCADA DE
MULTIPLICACIÓN DE PERÍODO

EN SISTEMAS DINAMICOS POR
ITERADOS

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

- Puede ser flujo en tiempo 1
- Puede ser 1er retorno a sección de Poincaré (no importa el tiempo)

No importa CUÁL es la función F para saber
~~sino~~ cómo es su dinámica, a partir
de algunas hipótesis sobre F que la definen
como "CASCADA"

LA CASCADA DE DUPLICACIÓN DE PERÍODO
NO ES CAOS, PERO ES BORDE DE CAOS

PRIMERA CONFERENCIA
INTERDISCIPLINARIA en PIRIAPOLIS - URUGUAY

sistemas caóticos

Imagen computarizada de parte del conjunto de Mandelbrot (R. Devaney 1992)

La temática del encuentro es la dinámica sensible a condiciones iniciales y a parámetros, presente en la Física, Matemática, Astronomía, Biología y otras áreas relacionadas.

C. Científico: R. Budelli, J. Lewowicz, R. Markarian,
A. Sicardi y G. Tancredi.

Organizan: Facultades de Ingeniería y Ciencias de la
Universidad de la República.

Patrocinan: PEDECIBA y CSIC (UdelaR).

Información e

Inscripciones: E. Catsigeras E-mail: eleonora@fing.edu.uy
vía WWW <http://www.fisica.edu.uy>
teléfono: 71 06 21

apoya graficamente


CEY
FOTOCOPIAS COLOR
DIRECTAS
DE COMPUTADORA
932 239
**Soriano y
Ejido**

SALA DE CONGRESOS

COMPLEJO CERRO DEL TORO

23 al 25 de Mayo de 1996

Esta fotocopia color se imprimió en Canon CLC 700 directa de Power Macintosh 6100/60 en CEY DIGITALLER / EJIDO

PRIMERA CONFERENCIA INTERDISCIPLINARIA DE SISTEMAS CAÓTICOS

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

**Sala de Congresos del
Complejo Cerro del Toro**

PROGRAMA Y RESÚMENES

**Facultades de Ingeniería y Ciencias
Universidad de la República
Uruguay**

**Patrocinan:
PEDECIBA y CSIC (Universidad de la República)**

Gráficos e impresión:
CEY 932 239 Soriano y Ejido, mayo 1996

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Jueves 23 de mayo

- 11:30 Registro e Inscripciones
- 12:30 Almuerzo de bienvenida
- 15:00 Apertura
- 15:10 Conferencias:
 - 15:10 Roberto Markarian: *Propiedades estadísticas en sistemas dinámicos.*
 - 16:10 Aníbal Sicardi: *Bifurcaciones y caos en sistemas disipativos extendidos*
- 17:10 Café
- 17:20 Conferencias:
 - 17:20 Raúl Ures: *Atractores caóticos*
 - 18:10 Silvina Ponce Dawson: *Conjuntos caóticos no atractivos y exponentes de Lyapunov fluctuantes*
- 20:30 Cena

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Viernes 24 de mayo

- 7:15 a 8:15 Desayuno
- 8:30 Conferencias:
 - 8:30 Gabriel Paternain: *Entropía Topológica y Campos Magnéticos*
 - 9:30 Cecilia Cabeza: *Caos acústico (Estudio experimental y numérico)*
 - 10:00 Cristina Masoller: *Rutas al caos en diodos láseres realimentados*
- 10:30 Café
- 10:40 Conferencias:
 - 10:40 José Vieitez: *Vínculos entre la geometría y la dinámica en variedades de dimensión tres*
 - 11:30 Ruben Budelli: *Comportamiento dinámico de redes neuronales*
- 12:30 Almuerzo
- 15:00 Conferencias:
 - 15:00 Hernán Solari: *Trenzas Caóticas (Estimación de la entropía topológica a partir de datos experimentales)*
 - 16:00 Marcelo Cerminara: *Perturbaciones de sistemas expansivos (trabajo en colaboración con Jorge Lewowicz)*
- 17:00 Café
- 17:10 Conferencias:
 - 17:10 Sonia Pinto: *Some perturbations of the elliptical billiard.*
 - 18:10 Gabriel Pisciotano: *Dinámica de flujos geofísicos*
 - 19:00 Luis Acerenza: *Oscilaciones y caos en sistemas bioquímicos.*
- 20:30 Cena

Primera Conferencia Interdisciplinaria de Sistemas Caóticos

Piriápolis, del 23 al 25 de mayo de 1996

PROGRAMA

Sábado 25 de mayo

- 7:15 a 8:15 Desayuno
- 8:30 Conferencias
 - 8:30 Sandra Kahan: *Bifurcaciones globales y caos en circuitos de Chua*
 - 9:00 Gustavo Sarasúa: *Bifurcaciones de codimensión dos y generación de flujos helicoidales en turbomaquinaria.*
 - 9:30 Eleonora Catsigeras: *Ruta al caos por duplicación de período y cascadas de multiplicación.*
- 10:20 Café
- 10:30 Conferencias
 - 10:30 Roberto Suárez: *Bifurcaciones y caos en sinsicios.*
 - 11:20 Gonzalo Tancredi: *Caos en el sistema solar, dinámica de los cuerpos menores (cometas y asteroides)*
- 12:30 Almuerzo de despedida
- 14:30 Excursión al Cerro San Antonio, Castillo de Piria y falda del Cerro Pan de Azúcar.

22

CATSIGERAS, E.	<i>Persistência do atrator de Feigenbaum em famílias a um parâmetro- Resumo e transparências das palestras na Conferência e Seminário de Sistemas Dinâmicos e Mecânica dos Meios Contínuos, Porto e Lisboa, Portugal, 14-16 julho, 1997</i>	1997	22
-------------------	---	------	----

**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**SEMINÁRIO
DE
SISTEMAS DINÂMICOS E MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS**

Persistência do atractor de Feigenbaum em famílias a um parâmetro

por

Eleonora Catsigeras Garcia

(Facultad de Ingenieria de Montevideo)

DIA: 2ª feira, 14 de Julho de 1997
HORA: 14h às 15h
LOCAL: Departamento de Matemática
Sala de Seminários (P3.10)
APOIO: Centro de Análise Matemática e Sistemas Dinâmicos
Projectos JNICT e PRAXIS XXI
URL: <http://www.math.ist.utl.pt/DSseminar/>

Persistência do atrator de Feigenbaum em famílias a um parâmetro

Eleonora Catsigeras
Instituto de Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, URUGUAY.
eleonora@fing.edu.uy

**Resumo e transparências das palestras na
Conferência e Seminário de Sistemas Dinâmicos
e Mecânica dos Meios Contínuos,
Porto e Lisboa, Portugal, 14-16 julho, 1997.**

RESUMO

Consideramos um mapa ψ de classe C^r (para r suficientemente grande) cujos iterados definem um sistema dinâmico discreto numa variedade M de dimensão $n \geq 2$. Assumimos que ψ_0 exibe um atrator de Feigenbaum.

Provamos que qualquer tal mapa ψ é um ponto numa subvariedade local $\mathcal{S} \subset C^r(M)$ de codimensão um, no espaço $C^r(M)$ das transformações C^r da variedade M , tal que todo mapa em $\mathcal{S}$ exibe também um atrator de Feigenbaum.

Como consequência, o atrator de Feigenbaum persiste quando é perturbado ao longo duma família a um parâmetro, transversal à subvariedade local $\mathcal{S}$ em ψ_0 .

Construímos uma tal família a um parâmetro para qualquer ψ dado que exiba um atrator de Feigenbaum, ainda que ele esté longe do endomorfismo analítico ψ_0 ponto fixo pela renormalização de duplicação. Finalmente, aplicamos esa construção para provar a seguinte conjectura de J. Palis: um mapa que exibe um atrator de Feigenbaum pode ser perturbado para obter tangências homoclínicas.

Persistence of the Feigenbaum attractor in one-parameter families

Eleonora Catsigeras and Heber Enrich

THEOREM 0

In the space of C^r maps in n dimensions the existence of a Feigenbaum attractor is a codimension one phenomenon, locally, near the Feigenbaum map.

Dimension 1, analytic maps: FEIGENBAUM, COULLET-TRESSER, LANFORD (1978-1982)

Dimension n , analytic maps: COLLET-ECKMANN-KOCH (1981).

Dimension 1, C^r maps: DAVIE (1996).

Dimension n , C^r maps: C-E (1996).

QUESTION:

Is the Feigenbaum attractor also a codimension one phenomenon far away from the Feigenbaum map?

ANSWER: Yes. (Not obvious: the renormalization is not differentiable).

- **Definition:**

Feigenbaum attractor: the Cantor set attractor exhibited by maps in the STABLE SET of the Feigenbaum map.

- The Feigenbaum map is fixed by the doubling renormalization. Its LOCAL STABLE SET is a codimension-one manifold. What about its GLOBAL STABLE SET?

THEOREM 1

If ψ_0 exhibits a Feigenbaum attractor, then it belongs to a codimension-one local submanifold in the C^r space, formed by maps also exhibiting Feigenbaum attractors.

CONSEQUENCES:

- Generic one parameter families of maps near ψ_0 will have a parameter value for which the Feigenbaum attractor is exhibited.
- Example: perturbations of the quadratic family of n dimensional endomorphisms.

$$\psi_a(x_1, \dots, x_n) = (x_n, 0, \dots, 0, 1 - ax_n^2)$$

For a dissipative saddle :

COROLLARY (Yorke-Alligood ++)

One parameter families generically unfolding a homoclinic tangency pass through a **pure** sequence of period doubling bifurcations that accumulate in a map exhibiting a **Feigenbaum attractor**.

COROLLARY ($\Leftarrow$ Colli)

Near a diffeomorphism having a homoclinic tangency there are dense sets of maps exhibiting ^{∞} many coexisting Feigenbaum attractors.

THEOREM 2

Any map ψ_0 exhibiting a Feigenbaum attractor belongs to a one-parameter family ψ_μ of maps, such that passes through:

- * a pure sequence of period doubling bifurcations, for $\mu_n \rightarrow 0^-$,*
- * a sequence of tangent homoclinic bifurcations, for $\hat{\mu}_n \rightarrow 0^+$.*

COROLLARY (Conjecture of Palis) *Maps exhibiting Feigenbaum attractor can be approximated with maps exhibiting homoclinic tangencies.*

- **THEOREM 2 ALREADY KNOWN IF ψ_0 IS NEAR THE FEIGENBAUM MAP:**

ECKMANN-WITWER (1987) dim. 1 analytic maps.

C (1995) dim. n analytic maps.

ENRICH - C (1996) dim. n C^r maps.

- **THEOREM 2, FAR AWAY FROM THE FEIGENBAUM MAP, IS NOT OBVIOUS BECAUSE THE RENORMALIZATION IS NOT SURJECTIVE NOR INJECTIVE.**

THE FEIGENBAUM ATTRACTOR IN n DIMENSIONS.

Definition:

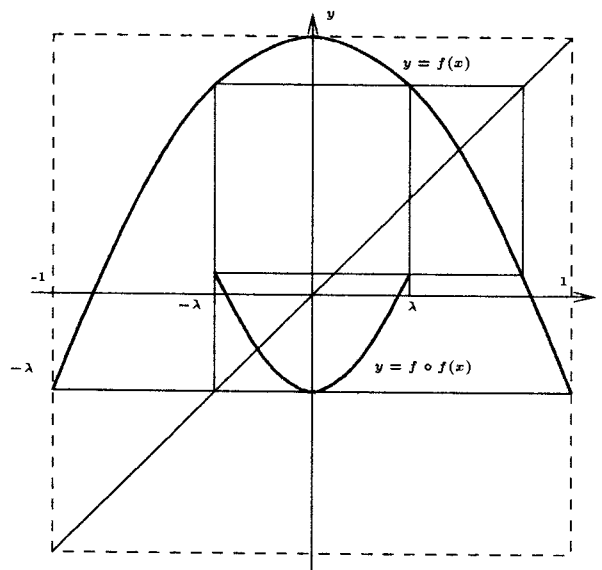
Infinitely doubling renormalizable maps whose renormalized maps eventually lie all in a C^r neighborhood of the Feigenbaum map in n dimensions. (And thus converge to the Feigenbaum map).

THE FEIGENBAUM MAP:

In dimension one: IN THE INTERVAL $[-1, 1]$.

$$\lambda^{-1} f_0 \circ f_0(\lambda x) = f_0(x)$$

$$\lambda = -f_0'(1)$$



CUBE

In n dimensions: ϕ_0 FROM A SQUARE, PROJECTS AND FOLLOWS THE GRAPH OF f_0 .

$$\phi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, 0, \dots, 0, f_0(x_n))$$

PROPOSITION (The Feigenbaum attractor).

If $\psi \in C^r$ is infinitely doubling renormalizable in a n dimensional ball, and $\mathcal{R}^m(\psi) \rightarrow \phi_0$, then, there exist

* a minimal Cantor set K such that $\Psi(K) = K$,

* a neighborhood U of K , and, for each N large enough, a single periodic orbit of period 2^N in U , hyperbolic of saddle type, and no other periodic orbits in U .

Besides:

* K is the ω -limit of all the orbits in U , except those in the stable manifolds of the periodic orbits.

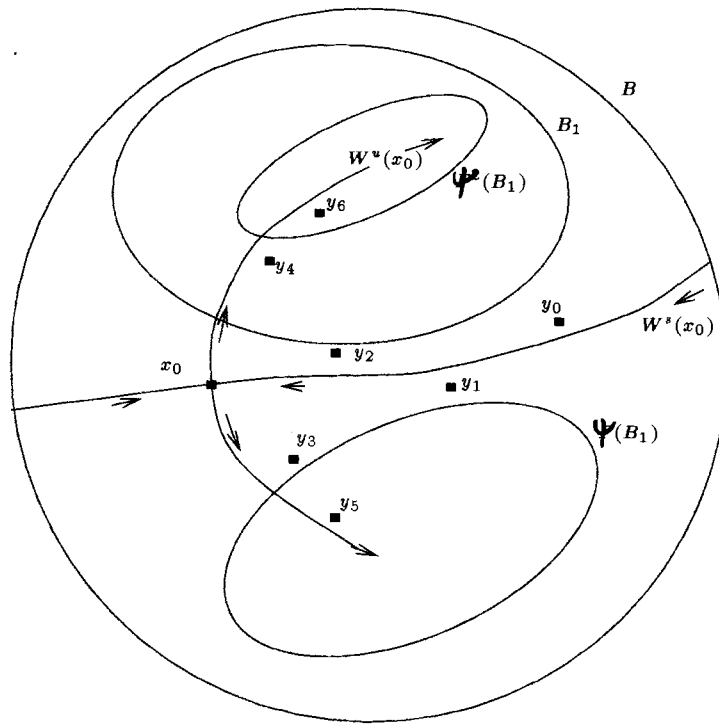
* All the orbits in K are quasi-periodic and non-periodic.

•

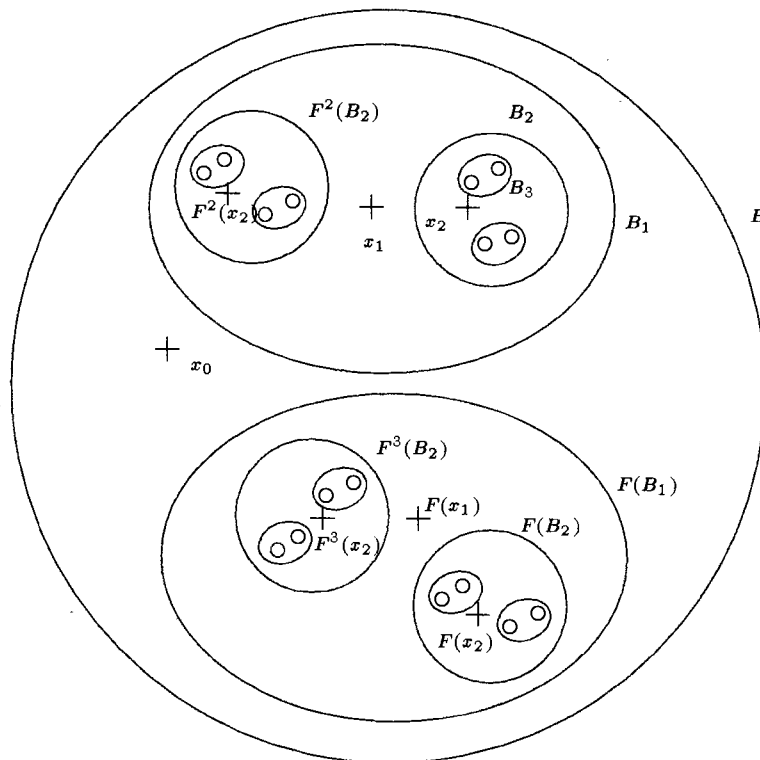
$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^m-1} A_{j,m}$$

$A_{j,m}$ = the j -th compact atom of generation m .

- **Proposition:** In the Feigenbaum attractor, the relation between the diameter of atoms of generation $m+1$ and of generation m converge to λ when $m \rightarrow \infty$. ($\lambda = 0.3995\dots$).



RENORMALIZACION: $\mathcal{R}\psi = \xi^{-1} \circ \psi \circ \psi \circ \xi$



Definition:

PERSISTENCE OF THE FEIGENBAUM ATTRACTOR IN ONE-PARAMETER FAMILIES NEAR $\Psi = \{\psi_t\}$

if there exists a real differentiable function a , such that:

* for all family $X = \{\chi_t\}$ near Ψ , the map $\chi_{a(X)}$ exhibits a Feigenbaum attractor,

* $a(\Psi) = 0$, $a((+t_0) * \Psi) = -t_0$

PROPOSITION:

Last definition $\Leftrightarrow$ There exists $\mathcal{M}$, a codimension-one local manifold in the space of C^r maps,

intersecting transversally the given family Ψ at the map ψ_0 , and such that

$\xi \in \mathcal{M} \Rightarrow \xi$ exhibits a Feigenbaum attractor.

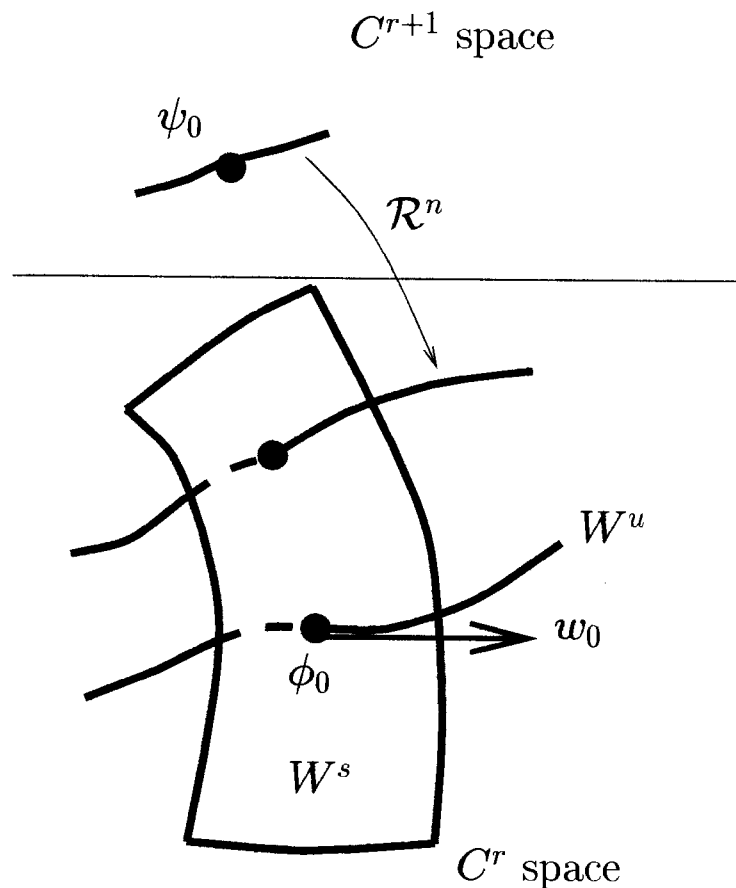
Proof of theorems 1 and 2:

- **FIRST STEP:** If ψ_0 is contained in a good one-parameter family of C^r maps (that is, after renormalized, intersects transversally the local stable manifold of the Feigenbaum map), then the Feigenbaum attractor is persistent in one-parameter families.
- **SECOND STEP:** If ψ_0 has a Feigenbaum attractor, then it can be constructed a good one-parameter family containing ψ_0 .

FIRST STEP:

Difficulty: Renormalization is not differentiable in the space of C^r maps.

How to avoid it: Sacrifice one degree of differentiability. The renormalization is differentiable from C^{r+1} to C^r .



SECOND STEP:

Difficulty: $\mathcal{R}$ is not surjective.

Solution: If w_0 is transversal to the local stable manifold of the Feigenbaum map, there exist a one parameter family passing through ψ_0 that after renormalized is tangent to a vector as near as wanted from w_0 .