ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS Y ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

Complemento sobre Ecuaciones Diferenciales para los cursos de Cálculo

Eleonora Catsigeras *

17 de Noviembre 2013

Notas para el curso de Cálculo II
de la Facultad de Ingeniería.

Nota: En esta exposición se asume que el estudiante ya conoce lo expuesto en el texto: "Ecuaciones Diferenciales. Una introducción para el curso de Cálculo", E. Catsigeras, 2007.

1. Ecuaciones Diferenciales Autónomas

Definición 1.1. Ecuación diferencial autónoma de primer orden

Una ecuación diferencial *autónoma* de 1er. orden es una ecuación de la forma

$$y' = F(y) \tag{1}$$

donde $F(y)$ es una función dada continua.

Nota: Si en vez de usar la notación $y = y(x)$ para las soluciones, usamos la notación $x = x(t)$, la ecuación diferencial autónoma de 1er. orden es $\dot{x} = F(x)$ (recordamos que cuando la variable independiente se denota con t, la derivada respecto de t se denota con un punto, en vez de prima). Usaremos en algunos ejemplos la notación $y = y(x)$ (x variable independiente, y dependiente) y en otros ejemplos la notación $x = x(t)$ (t variable independiente, x dependiente). En general la variable independiente, llámese como se llame, se interpreta como el tiempo.

Ejemplos: $y' = y^2 - 1$ es una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden. También lo es $\dot{x} = \sqrt{x}$. En cambio $y' = y \operatorname{sen} x$ es una ecuación diferencial de 1er. orden no autónoma; $\dot{x} = x^2 + t^2$ también es una ecuación diferencial no autónoma.

Definición 1.2. Ecuación diferencial autónoma de segundo orden

Una ecuación diferencial *autónoma* de 2do. orden es una ecuación de la forma

$$y" = F(y, y') \tag{2}$$

donde $F(y, y')$ es una función dada continua de dos variables reales.

*Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Dirección: Av. Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

Ejemplos: La ecuación diferencial $y" + 4y' + 3y = 0$ es autónoma de 2do. orden, pues $y" = -3y - 4y' = F(y, y')$ donde la función F es $F(u, v) = -3u - 4v \quad \forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación diferencial $y" + 4y = 0$ también es autónoma de 2do. orden pues $y" = -4y = F(y, y')$ donde $F(u, v) = -4u \quad \forall\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación diferencial $y" + 4xy' + 3y = 0$ es lineal de 2do. orden homogénea, pero es no autónoma porque $y" = -3y - 4xy'$ no puede escribirse como función continua que depende solo de y e y', (depende además de x).

Definición 1.3. Ecuación diferencial autónoma de orden $k \geq 1$

Sea $k \geq 1$ un número natural dado. Una ecuación diferencial *autónoma* de orden k es una ecuación de la forma

$$y^{(k)} = F(y, y', y", \ldots, y^{(k-1)}) \tag{3}$$

donde F es una función dada continua de k variables reales, e $y^{(k)}$, $y^{(k-1)}$, etc, denotan la derivada k-ésima, $(k-1)$-ésima, etc, respectivamente de una función solución $y = y(x)$.

Definición 1.4. Puntos de equilibrio o soluciones estacionarias

Se llama *punto de equilibrio o solución estacionaria* de una ecuación diferencial a una solución $y(x) = a$ constante para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, las soluciones estacionarias o puntos de equilibrio son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales.

Los puntos de equilibrio o soluciones estacionarias de una ecuación diferencial autónoma de 1er orden $y' = F(y)$ son todas las funciones constantes (de la forma $y(x) = a$ constante para todo x) tales que la constante real a satisface $F(a) = 0$. Por ejemplo, si la ecuación diferencial es $y' = y^2 - 1$, los puntos de equilibrio son dos: $y(x) = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ e $y(x) = -1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ porque $a = 1$ y $a = -1$ son las únicas raíces de la ecuación $a^2 - 1 = 0$. Otros ejemplos: la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2 + 1$ no tiene puntos de equilibrio o soluciones estacionarias, porque la ecuación $a^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales a. La ecuación diferencial $\dot{x} = \sqrt{x}$ tiene una única solución estacionaria o punto de equilibrio que es $x(t) = 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Los puntos de equilibrio o soluciones estacionarias de una ecuación diferencial autónoma de 2do. orden $y" = F(y, y')$ son todas las funciones constantes (de la forma $y(x) = a$ constante para todo x) tales que la constante real a satisface $F(a, 0) = 0$. Por ejemplo, si la ecuación diferencial es $y" = -4y' - 3y$, el punto de equilibrio es uno solo: $y(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ porque $a = 0$ es la única raiz de la ecuación $-4 \cdot 0 - 3a = 0$. Otros ejemplos: la ecuación diferencial $y" = y^2 + 1$ no tiene puntos de equilibrio o soluciones estacionarias, porque la ecuación $a^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales a. La ecuación diferencial $y'' = y^2 + y' - 1$ tiene dos soluciones estacionarias o puntos de equilibrio que son $y(x) = 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, e $y(x) = -1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.5. Traslado en el tiempo de las soluciones

Si $y_1(x)$ es una solución particular de una ecuación diferencial autónoma (de cualquier orden $k \geq 1$), entonces para todo x_0 real, la función $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ es otra solución particular de la misma ecuación diferencial.

Como consecuencia, $y_1(0) = y_0$ si y solo si $y_2(x_0) = y_0$.

Demostración: Solo lo demostraremos para ecuaciones diferenciales autónomas de 1er. orden. Chequeamos que $y_2(x)$ satisface la ecuación (1):

$$y_2'(x) = \frac{d}{dx} y_1(x - x_0) = y_1'(x - x_0) = F(y_1(x - x_0)) = F(y_2(x)).$$

Nota: En la segunda igualdad usamos la regla de la cadena para derivar respecto de x la función compuesta $y_1(x - x_0)$. En la tercera igualdad usamos la hipótesis que afirma que y_1 es solución de la ecuación diferencial (1).

Finalmente, sustituyendo $x = x_0$ en la igualdad $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ se obtiene $y_2(x_0) = y_1(0)$, lo que demuestra la última afirmación de la proposición 1.5. □

Interpretación: La proposición 1.5 tiene la siguiente interpretación. Si la variable independiente x es el tiempo, entonces $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ significa trasladar la solución y_1 en el tiempo; es decir, la gráfica de y_2 es la gráfica de y_1 trasladada a lo largo del eje de las x (eje del tiempo) una cantidad $|x_0|$, hacia la derecha si $x_0 > 0$ ó hacia la izquierda si $x_0 < 0$ (ver Figura 1). Todo lo que suceda en el instante inicial $x = 0$ para la solución y_1 sucederá en el instante x_0 para la solución y_2. En efecto, por ejemplo, de la igualdad $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ deducimos: $y_2(x_0) = y_1(0)$, $y_2'(x_0) = y_1'(0)$.

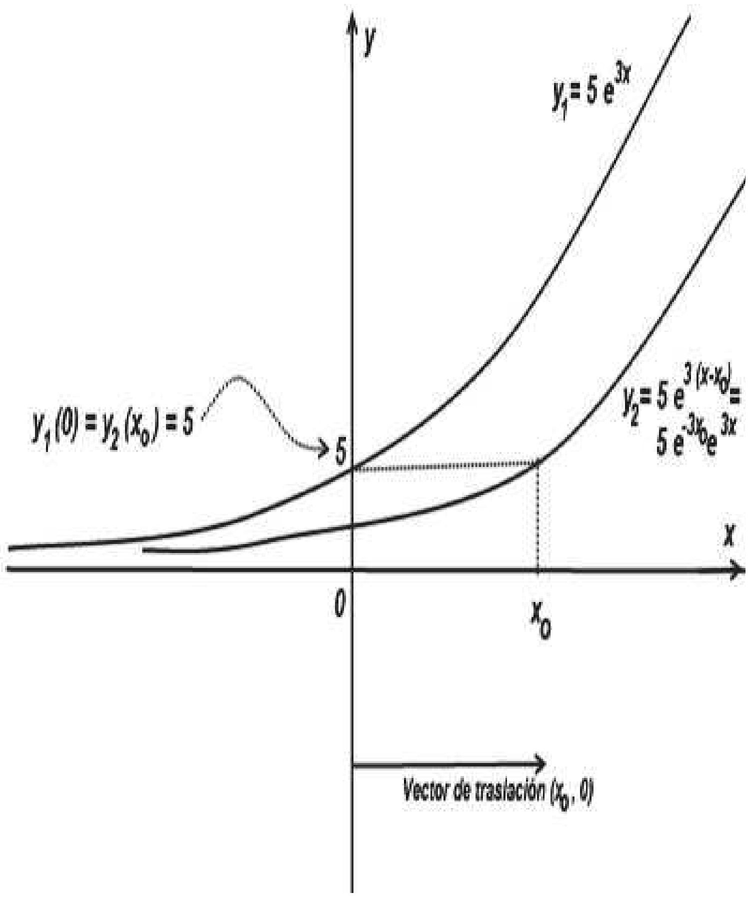

Figura 1: La curva gráfica de la solución particular $y_2(x) = 5e^{3(x-x_0)}$ de la ecuación diferencial $y' = 3y$ es la trasladada en el tiempo, es decir según el vector horizontal $(x_0, 0)$, de la gráfica de la solución particular $y_1(x) = 5e^{3x}$.

2. Existencia y unicidad de solución con dato inicial

Definición 2.1. i) Decimos que una ecuación diferencial de 1er. orden satisface *la propiedad de existencia y unicidad* de solución con dato inicial si para toda pareja de constantes reales dadas x_0, y_0 existe y es única la solución de la ecuación diferencial que (además de satisfacer la ecuación diferencial) satisface la siguiente condición llamada *condición inicial o dato inicial:*

$$y(x_0) = y_0.$$

ii) Decimos que una ecuación diferencial de 2do. orden satisface *la propiedad de existencia y unicidad* de solución con dato inicial si para toda terna de constantes reales dadas x_0, y_0, y'_0 existe y es única la solución de la ecuación diferencial que (además de satisfacer la ecuación diferencial) satisface las siguientes DOS igualdades llamadas *condición inicial o dato inicial:*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

iii) Sea $k \geq 1$ un número natural. Decimos que una ecuación diferencial de orden k satisface *la propiedad de existencia y unicidad* de solución con dato inicial si para toda $(k+1) - upla$ de constantes reales dadas $x_0, y_0, y'_0, y"_0, \ldots y_0^{(k-1)}$ existe y es única la solución de la ecuación diferencial que (además de satisfacer la ecuación diferencial) satisface las siguientes k igualdades llamadas *condición inicial o dato inicial:*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y"(x_0) = y"_0, \ldots, y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)}.$$

Interpretación: Si graficamos en el plano $x0y$ todas las soluciones de la ecuación diferencial de 1er. orden obtenemos una familia (en general infinita) de curvas. La ecuación diferencial de 1er. orden satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, si y solo si, para cada punto dado $P_0 = (x_0, y_0)$ en el plano, existe una y una sola solución cuya curva gráfica pasa por ese punto P_0 (ver por ejemplo Figura 3). Luego:

Si la ecuación diferencial de 1er. orden satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, entonces las curvas gráficas de dos soluciones diferentes, no se intersecan.

Nota importante: La propiedad resaltada arriba rige para ecuaciones diferenciales de 1er. orden, pero no es cierta para ecuaciones diferenciales de 2do. orden (ni de orden $k \geq 2$). En efecto, las gráficas de dos soluciones diferentes de una ecuación diferencial de 2do. orden que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, pueden intersecarse, pero con tangentes diferentes; es decir con diferentes valores de y' en el punto de intersección (ver el ejemplo de la Figura 2).

Veremos en la sección siguiente ejemplos de ecuación diferencial autónoma de 1er. orden que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con condición inicial o dato inicial (Figura 3), y otro ejemplo para el que no se satisface (Figura 4).

Corolario 2.2. (de la Proposición 1.5).

Una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden satisface la propiedad de existencia y unicidad con dato inicial si y solo si, para toda constante real y_0 existe única la solución $y = y(x)$ que (además de satisfacer la ecuación diferencial) satisface la siguiente igualdad

$$y(0) = y_0.$$

Una ecuación diferencial autónoma de 2do. orden satisface la propiedad de existencia y unicidad con dato inicial si y solo si, para toda pareja de constantes reales y_0, y_0' existe única la solución $y = y(x)$ que (además de satisfacer la ecuación diferencial) satisface las siguientes DOS igualdades

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'.$$

Demostración: Lo demostraremos solo para ecuaciones diferenciales autónomas de 1er. orden.
Directo: Hipótesis: Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe y es única la solución $y(x)$ que cumple $y(x_0) = y_0$.
Tesis a probar: Para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existe y es única la solución $y(x)$ que cumple $y(0) = y_0$.

La tesis se deduce en forma inmediata de la hipótesis, aplicada al caso particular en que $x_0 = 0$.
Recíproco: Hipótesis: Para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existe y es única la solución $y_1(x)$ que cumple $y_1(0) = y_0$.
Tesis a probar: Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe y es única la solución $y_2(x)$ que cumple $y_2(x_0) = y_0$.

Usando la hipótesis y la Proposición 1.5, construimos la solución

$$y_2(x) := y_1(x - x_0) \tag{4}$$

Esta solución satisface $y_2(x_0) = y_1(0) = y_0$, por lo que la existencia de la tesis queda probada. Ahora probemos la unicidad. Supongamos que $y_3(x)$ es otra solución tal que $y_3(x_0) = y_0$. Aplicando la Proposición 1.5 (usando $-x_0$ en el rol de x_0) deducimos que la función

$$y_4(x) := y_3(x - (-x_0))$$

también es una solución de la ecuación diferencial. Sustituyendo $x = 0$ obtenemos $y_4(0) = y_3(x_0) = y_0$. Entonces $y_4(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que satisface $y_4(0) = y_0$. Por hipótesis, $y_1(x)$ es la única solución que satisface $y_1(0) = y_0$. Luego $y_4(x) = y_1(x)$ para todo x en el intervalo (abierto) de reales D donde $y_1(x)$ está definida. Entonces

$$y_1(x) \equiv y_3(x + x_0) \ \ \forall\, x \in D.$$

Llamando u a la nueva variable $u = x + x_0$, deducimos

$$y_3(u) = y_1(u - x_0) \ \ \forall \ \ u \in \{x + x_0, \ \ x \in D\}.$$

Ahora usando la ecuación (4), deducimos que y_3 es la misma función que y_2, lo que termina de probar la unicidad de y_2. □

Nota: Una condición suficiente para que una ecuación diferencial autónoma (de cualquier orden $k \geq 1$) satisfaga la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, está dada por el Teorema de Picard, cuyo enunciado veremos más adelante (Teorema 4.1), y que no requiere resolver la ecuación diferencial para chequear si se verifica.

3. Ejemplos

Ejemplo 3.1. (a) Encontrando todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$y" + 9y = 0 \tag{5}$$

deducir que dicha ecuación satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial. **(b)** Hallar y graficar la (única) solución que satisface $y(0) = 3, \ y'(0) = 8$. **(c)** Hallar y graficar la (única) solución que satisface $y(\pi/3) = 3, \ y'(\pi/3) = 8$.

(a) Aplicando el método de resolución de la ecuación diferencial lineal de 2do. orden homogénea, tenemos la siguiente ecuación característica

$$\lambda^2 + 9 = 0,$$

que tiene dos raíces complejas conjugadas diferentes $3i$ y $-3i$, donde i es la unidad imaginaria. Luego la solución general de la ecuación diferencial (5) es

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x, \tag{6}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Ahora mostremos que cualquiera sea el dato inicial $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$, existe una única solución que lo satisface. Es decir, existe una única elección de las constantes C_1 y C_2 para la cual la igualdad (6) satisface el dato inicial $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$. En efecto, derivando la igualdad (6) obtenemos la siguiente igualdad:

$$y'(x) = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \operatorname{sen} 3x \tag{7}$$

Sustituyendo $x = 0$ en las igualdades (6) y (7), y usando las dos igualdades del dato inicial $y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$ obtenemos:

$$C_2 = y_0, \quad 3C_1 = y'_0$$

que tiene solución única

$$C_1 = y'_0/3, \quad C_2 = y_0, \tag{8}$$

para cada dato inicial $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ que se dé. Entonces hemos probado que la ecuación diferencial (5) satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

(b) Usando las igualdades (6) y (8) junto con el dato $y_0 = 3,\ \ y'_0 = 8$ obtenemos que la siguiente función

$$y(x) = \frac{8}{3} \operatorname{sen} 3x + 3 \cos 3x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es la única solución de la ecuación diferencial dada que cumple el dato inicial $y(0) = 3,\ \ y'(0) = 8$. Para graficarla, observamos primero que es una función periódica de período $2\pi/3$. Además se anula si y solo si $\operatorname{sen} 3x = -(9/8) \cos 3x$, es decir $\tan 3x = -9/8,\ \ x = -\arctan 9/8$. Sumándole $2k\pi/3$ a cualquier ángulo cuya tangente sea $-9/8$ tenemos otro punto donde se anula $y(x)$. Tercero, como $y(x)$ verifica la ecuación diferencial $y" = -4y$ su concavidad es negativa si y solo si $y > 0$, su concavidad es positiva si y solo si $y < 0$, y tiene puntos de inflexión en los puntos donde $y = 0$ y solo en ellos. La derivada segunda $y"$ (concavidad) indica la derivada de y'. Entonces la pendiente y' va disminuyendo cuando la concavidad es negativa (o sea mientras $y > 0$) y va aumentando cuando la concavidad es positiva (o sea mientras $y < 0$). Obtenemos la curva gráfica roja en la figura 2 que pasa por el punto $x = 0, y = 3$ y tiene en ese punto pendiente 8.

(c) Usando la Proposición (1.5) y la solución de la parte (b), deducimos que la siguiente función

$$y(x) = \frac{8}{3} \operatorname{sen} 3(x - \pi/3) + 3\ \cos 3(x - \pi/3) = \frac{8}{3} \operatorname{sen}(3x - \pi) + 3\ \cos(3x - \pi) =$$

$$= -\frac{8}{3} \operatorname{sen} 3x - 3\cos(3x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es la única solución de la ecuación diferencial dada que cumple el dato inicial

$$y(\pi/3) = 3, \ \ y'(\pi/3) = 8.$$

Para graficarla, observamos que como fue construida trasladando en el tiempo la solución de la parte (b) (sustituyendo en la solución de la parte (b) la variable independiente tiempo x por $x - \pi/3$, su gráfica se obtiene de la curva roja de la figura 2, trasladándola horizontalmente según el vector $(\pi/3, 0)$. Resulta la curva azul de la figura 2.

Observación: Además en este ejemplo particular, la solución de la parte (c) es la de la parte (b) cambiada de signo. Entonces su gráfica también es (en este ejemplo particular) la simétrica de la gráfica de la parte (b) respecto al eje de las x. Luego, las dos soluciones particulares de la ecuación diferencial (5): la de la parte (a) - curva roja en la figura 2 - y la de la parte (b) - curva azul en dicha figura - se intersecan en los infinitos puntos donde ambas valen cero. Tenemos que las curvas gráficas de dos soluciones particulares diferentes se pueden intersecar en algún(os) punto(s) (x_0, y_0). Pero como vale la propiedad de existencia y **unicidad** de solución con dato inicial $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$ deducimos que las pendientes $y'(x_0)$ en los puntos de intersección (x_0, y_0) de las gráficas de dos (o más) soluciones diferentes, deben ser necesariamente diferentes (ver comentario abajo de la Figura 2).

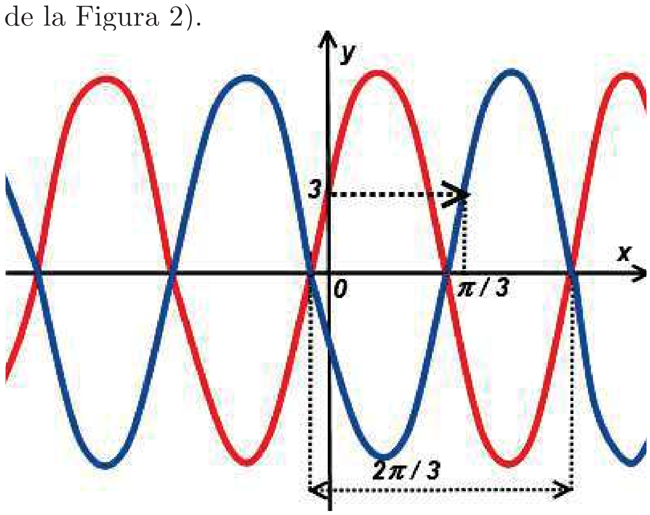

Figura 2: En rojo y en azul, respectivamente, curvas gráficas de dos soluciones particulares de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ (Ejemplo 3.1). La ecuación es de 2do. orden y satisface la propiedad de existencia y unicidad con dato inicial $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$. Las curvas gráficas roja y azul se intersecan en todos los puntos donde las funciones valen cero, pero las pendientes (derivadas primeras y'_0) en los puntos de intersección de ambas curvas, deben ser diferentes debido a la unicidad de solución con dato inicial. Se observa que además la función constante $y(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ también es solución (pto. de equilibrio). Luego, en los puntos de intersección de las dos curvas roja y azul respectivamente, también hay intersección con otra(s) solución(es), todas con diferentes pendientes y'_0.

Ejemplo 3.2. (a) Encontrando todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = y^2 - 1 \tag{9}$$

deducir que dicha ecuación satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

(b) Graficar la (única) solución que satisface $y(0) = y_0$, y el intervalo del eje de las x donde esta solución está definida, discutiendo según sea el valor de la constante real dada y_0.

(c) Encontrar la (única) solución que satisface la condición $y(21) = -8$, y el intervalo del eje de las x donde esta solución está definida. Probar que esa solución está definida para el instante $x = 0$.

Nota importante: Recordamos que, por definición de "solución" una función $y = y(x)$ que satisface la ecuación diferencial, está definida para todo x en un intervalo abierto (segmento, semirrecta o toda la recta real). No es solución, por ejemplo la función $y(x) = \dfrac{1+3e^{2x}}{1-3e^{2x}}$ en el dominio $\mathbb{R} \setminus \Big\{(1/2)\log(1/3)\Big\}$, pues ese dominio no es un intervalo. En la teoría de las ecuaciones diferenciales, las siguientes son *dos soluciones diferentes* de la ecuación diferencial (9), aunque ambas tienen la misma "fórmula ":

$$y(x) = \frac{1+3e^{2x}}{1-3e^{2x}} \quad \forall\, x \in \Big(-\infty, \frac{\log(1/3)}{2}\Big),$$

$$y(x) = \frac{1+3e^{2x}}{1-3e^{2x}} \quad \forall\, x \in \Big(\frac{\log(1/3)}{2}, +\infty\Big).$$

(a) Hallemos primero la solución general de la ecuación diferencial (9). Primero buscamos los puntos de equilibrio $y = a$ constante para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = a^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1 \text{ ó } a = -1.$$

Las dos soluciones de equilibrio son $y(x) = 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $y(x) = -1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ cuyas gráficas son las rectas horizontales $y = 1$ e $y = -1$ respectivamente, en la Figura 3. Segundo, buscamos las soluciones que no son puntos de equilibrio. Como la ecuación es de variables separadas, tenemos:

$$\frac{y'}{y^2-1} = 1, \qquad \int \frac{y'}{y^2-1}\,dx = \int 1\,dx = x + C,$$

donde C es una constante real cualquiera. Luego, haciendo el cambio de variables $y = y(x)$ en la primera integral de la igualdad de arriba, obtenemos:

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = x + C$$

y separando en fracciones simples $\dfrac{1}{y^2-1} = \dfrac{1}{(y-1)(y+1)} = \dfrac{1/2}{y-1} - \dfrac{1/2}{y+1}$, deducimos:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy = x + C,$$

de donde

$$\frac{1}{2}\log|y-1| - \frac{1}{2}\log|y+1| = x + C,$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + C$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2(x+C)} = e^{2C}\,e^{2x}$$

donde C es una constante real arbitraria. Luego, sacando el valor absoluto:

$$\frac{y-1}{y+1} = k\, e^{2x},$$

donde $k = \pm e^{2C}$ es una constante real arbitraria **no nula** . Despejando y en función de x queda:

$$y(x) = \frac{1 + k\, e^{2x}}{1 - k\, e^{2x}}, \tag{10}$$

para toda constante k real no nula. Agregando las soluciones constantes (puntos de equilibrio) $y = 1$ e $y = -1$ encontradas al principio, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial dada:

$$y(x) = \frac{1 + k\, e^{2x}}{1 - k\, e^{2x}},$$

donde k es cualquier constante real (una para cada solución que no sea idénticamente igual a -1), ó

$$y(x) = -1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ahora probemos que para cualquier dato inicial $y(0) = y_0$ existe y es única la solución que satisface $y(0) = y_0$. Dado y_0 tratamos de probar que, o bien existe y es única la constante k en la igualdad (10) para la cual $y(0) = y_0$, o bien $y(x) = 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

De la igualdad (10) sustituyendo $x = 0$, imponiendo la condición inicial $y(0) = y_0$, y despejando k se obtiene:

$$k = \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} \text{ si } y_0 \neq -1. \tag{11}$$

Si $y_0 = -1$ no existe constante k real que satisfaga la igualdad (10) junto con la condición $y(0) = y_0 = -1$. Luego, la única solución que satisface el dato inicial $y(0) = -1$ es la solución constante $y(x) = -1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que para toda constante real y_0 existe y es única la solución de la ecuación diferencial (9) que satisface $y(0) = y_0$. Aplicando el Corolario 2.2, deducimos que la ecuación diferencial dada satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial (según Definición 2.1).

Otra forma, mucho más rápida, de probar que la ecuación diferencial dada satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, es, sin necesidad de encontrar explícitamente todas las soluciones, aplicar el Teorema de Picard (versión restringida), cuyo enunciado veremos más abajo en el Teorema 4.1.

(b) Graficaremos la solución de la ecuación diferencial (9) que cumple

$$y(0) = y_0$$

cualquiera sea el número real constante y_0. Sustituyendo el valor de k de la igualdad (11) en la igualdad (10) obtenemos la siguiente expresión:

$$y(x) = \frac{(y_0 + 1) + (y_0 - 1)e^{2x}}{(y_0 + 1) - (y_0 - 1)e^{2x}}. \tag{12}$$

Observamos que la expresión (12) están incluidas también las dos soluciones que son puntos de equilibrio: Si $y_0 = -1$ queda $y(x) = -1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$; y si $y_0 = +1$ queda $y(x) = +1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

La solución que cumple $y(0) = y_0$, dada por la igualdad (12), no necesariamente está definida para todo x real. Está definida en el mayor intervalo abierto (segmento, semirrecta o toda la recta) del eje de las x que contenga a $x = 0$, y para el cual la fórmula dada a la derecha de la igualdad (12) tenga sentido. Esta fórmula tiene sentido siempre que no se anule el denominador. Cuando la solución no es un punto de equilibrio (o sea $y(0) = y_0 \neq 1, -1$), veamos los tres casos posibles que se deducen de la igualdad (12):

1er. caso: Si $-1 < y_0 < 1$ entonces $y_0 + 1 > 0$ e $y_0 - 1 < 0$. Luego, el denominador en el miembro de la derecha de la igualdad (12) queda siempre positivo; no se anula nunca. Entonces esta solución está definida para todo x. Por lo tanto la gráfica de la solución dada por la igualdad (12) cuando $-1 < y_0 < 1$ está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Además, de la igualdad (12) deducimos que

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1.$$

Es decir, la solución tiene asíntota horizontal en el futuro en la recta $y = -1$, y tiene asíntota horizontal en el pasado en la recta $y = 1$. Además la gráfica de esta solución no corta a las rectas horizontales $y = 1$ e $y = -1$ (que corresponden a los puntos de equilibrio), porque para cada dato inicial ya probamos que es única la solución. Luego, como en el instante inicial $x = 0$ la función solución en este caso vale $y_0 < 1; y_0 > -1$ y es continua (porque es diferenciable pues satisface la ecuación diferencial dada), deducimos que $-1 < y(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, tenemos $y'(x) = y(x)^2 - 1 = (y(x) + 1)(y(x) - 1) < 0$, y entonces $y(x)$ es estrictamente decreciente para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtenemos la curva azul de la función $y_2(x)$ en la figura 3.

2do. caso: Si $y_0 > 1$ entonces $y_0 + 1 > 0$ e $y_0 - 1 > 0$, y el denominador en el miembro de la derecha de la igualdad (12) se anula para el único valor de x_c tal que $e^{2x_c} = \frac{y_0+1}{y_0-1} > 0$; es decir

$$x_c = (1/2)\log[(y_0 + 1)/(y_0 - 1)].$$

Observamos que $x_c > 0$ porque $(y_0+1)/(y_0-1) > 1$). Entonces esta solución no está definida para todo x. El mayor intervalo que contiene a $x = 0$ donde está definida la solución es la semirrecta abierta $(-\infty, x_c)$ a la izquierda de $x = x_c$. Por lo tanto la gráfica de la solución dada por la igualdad (12) cuando $y_0 > 1$ está definida solo para $x < x_c$ (decimos que se acaba la solución en el instante finito futuro x_c). Además:

$$\lim_{x\to x_c^-} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1.$$

Es decir, la solución tiene asíntota vertical en el futuro en la recta $x = x_c$, y tiene asíntota horizontal en el pasado en la recta $y = 1$. Además la gráfica de esta solución no corta a la recta horizontal $y = 1$ (que corresponde a un punto de equilibrio), porque para cada dato inicial ya probamos que es única la solución. Luego, como en el instante inicial $x = 0$ la función solución en este caso vale $y_0 > 1$ y es continua (porque es diferenciable pues satisface la ecuación diferencial dada), deducimos que $y(x) > 1$ para todo $x \in (-\infty, x_c)$. Como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, tenemos $y'(x) = y(x)^2 - 1 = (y(x)+1)(y(x)-1) > 0$, y entonces $y(x)$ es estrictamente creciente para todo $x \in (-\infty, x_c)$. Obtenemos la curva roja de la función $y_1(x)$ en la figura 3.

3er. caso: Si $y_0 < -1$ entonces $y_0 + 1 < 0$ e $y_0 - 1 < 0$, y el denominador en el miembro de la derecha de la igualdad (12) se anula para el único valor de x_c tal que $e^{2x_c} = \frac{y_0+1}{y_0-1} > 0$, es decir

$$x_c = (1/2)\log[(y_0 + 1)/(y_0 - 1)].$$

Observamos que $x_c < 0$ porque como $y_0 - 1 < y_0 + 1 < 0$, tenemos $(y_0 - 1)/(y_0 + 1) > (y_0 + 1)/(y_0 + 1) = 1$. Luego $(y_0 + 1)/(y_0 - 1) < 1$ y su logaritmo es negativo. Así $x_c < 0$.

Deducimos que esta solución no está definida para todo x. El mayor intervalo que contiene a $x = 0$ donde está definida la solución es la semirrecta abierta $(x_c, +\infty)$ (porque $x_c < 0$) a la derecha de $x = x_c$. Por lo tanto la gráfica de la solución dada por la igualdad (12) cuando $y_0 < -1$ está definida solo para $x > x_c$ (decimos que nace la solución en el instante finito pasado x_c). Además, de la igualdad (12) obtenemos:

$$\lim_{x \to x_c^+} y(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -1.$$

Es decir, la solución tiene asíntota vertical en el pasado en la recta $x = x_c$, y tiene asíntota horizontal en el futuro en la recta $y = -1$. Además la gráfica de esta solución no corta a la recta horizontal $y = -1$ (que corresponde a un punto de equilibrio), porque para cada dato inicial ya probamos que es única la solución. Luego, como en el instante inicial $x = 0$ la función solución en este caso vale $y_0 < -1$ y es continua (porque es diferenciable pues satisface la ecuación diferencial dada), deducimos que $y(x) < -1$ para todo $x \in (x_c, +\infty)$. Como $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, tenemos $y'(x) = y(x)^2 - 1 = (y(x)+1)(y(x)-1) > 0$, y entonces $y(x)$ es estrictamente creciente para todo $x \in (x_c, +\infty)$. Obtenemos la curva verde de la función $y_3(x)$ en la figura 3.

(c) Busquemos la solución (única) $y_4(x)$ que satisface $y_4(21) = -8$ y su intervalo de definición. Por la fórmula (12) estudiada en el tercer caso, la solución (única) $y_3(x)$ que satisface $y_3(0) = -8$ es

$$y_3(x) = \frac{(-8+1) + (-8-1)e^{2x}}{(-8+1) - (-8-1)e^{2x}} \quad \forall\, x \in (x_c, +\infty) \text{ donde}$$

$$x_c = (1/2)\log[(-8+1)/(-8-1) = (1/2)\log(7/9) = -\frac{\log 9 - \log 7}{2} < 0.$$

Luego

$$y_3(x) = -\frac{7 + 9e^{2x}}{-7 + 9e^{2x}} \quad \forall\, x \in \Big(-\frac{\log 9 - \log 7}{2}, +\infty\Big)$$

es la única solución que satisface la condición inicial

$$y_3(0) = -8$$

Aplicando la Proposición (1.5), obtenemos la única solución $y_4(x)$ que satisface el dato $y_4(21) = -8$:

$$y_4(x) = y_3(x - 21) = -\frac{7 + 9e^{2(x-21)}}{-7 + 9e^{2(x-21)}} \quad \forall\, x \in \Big\{x \in \mathbb{R} : \; x - 21 \in \Big(-\frac{\log 9 - \log 7}{2}, +\infty\Big)\Big\}.$$

Es decir: $y_4(x)$ está definida solamente para $x > 21 - \dfrac{\log 9 - \log 7}{2}$.

Observación: Como $0 < 21 - (1/2) = 21 - [(\log e)/2] < 21 - [(\log(9/7))/2] = 21 - \dfrac{\log 9 - \log 7}{2}$ deducimos que $y_4(x)$ no está definida en el instante $x = 0$.

Ejemplo 3.3. (a) Hallar y graficar las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \sqrt{x} \tag{13}$$

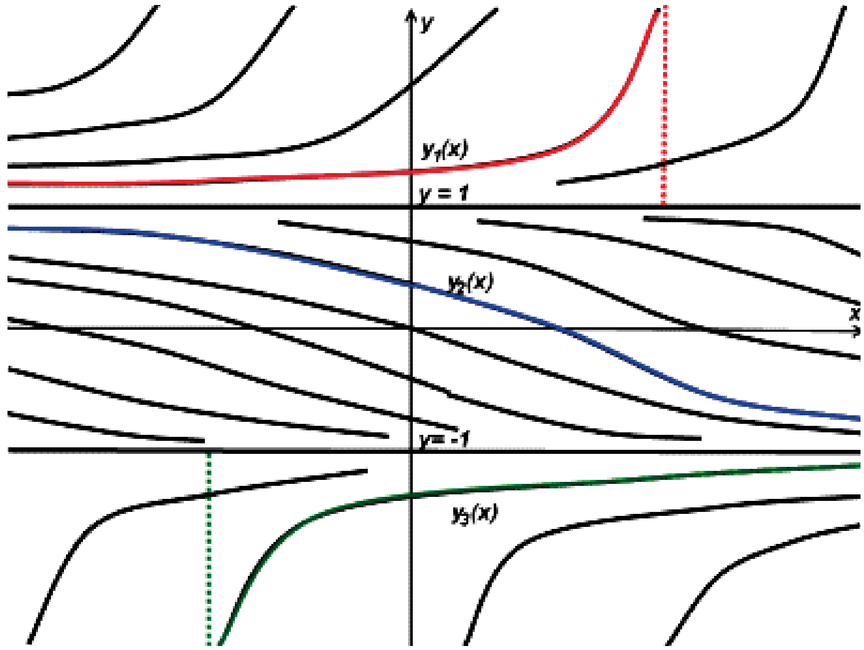

Figura 3: Curvas gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$ (Ejemplo 3.2). Las curvas gráficas de todas las soluciones cubren todo el plano $\mathbb{R}^2$ y las curvas gráficas de dos soluciones diferentes no se intersecan, pues para todo punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe y es única la solución que cumple con el dato inicial $y(x_0) = y_0$. Los puntos de equilibrio (soluciones constantes) son $y(x) = 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ e $y(x) = -1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. La curva roja es la gráfica de una solución $y_1(x)$ que satisface el dato inicial $y_1(0) = y_0 > 1$. Está definida en el intervalo $(-\infty, x_c)$, no para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, en el futuro, se acaba la solución en tiempo finito x_c positivo (recta roja punteada de la figura). La curva azul es la gráfica de una solución $y_2(x)$ tal que $y_2(0) = y_0$ con $-1 < y(0) < 1$. Está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. La curva verde es la gráfica de una solución $y_3(x)$ tal que $y_3(0) = y_0 < -1$. Está definida en el intervalo $(x_c, +\infty)$, no para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, en el pasado, nace la solución en tiempo finito x_c negativo (recta verde punteada de la figura).

(b) Probar que la ecuación diferencial (13) NO satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

(c) Hallar infinitas soluciones que verifican $x(t_0) = 0$ donde t_0 es una constante real dada cualquiera.

(a) Primero hallemos los puntos de equilibrio: esto es, las soluciones $x(t) = a$ constante para todo $t \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $x(t) = a \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$ en la ecuación (13), obtenemos $0 = \sqrt{a}$, de donde $a = 0$. Por lo tanto existe un único punto de equilibrio que es la solución idénticamente nula: $x(t) = 0 \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.

Segundo, busquemos las soluciones que no son puntos de equilibrio, usando el método de resolución de ecuaciones diferenciales de variables separadas:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = 1, \qquad \int \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} \, dt = \int 1 \, dt = t + C,$$

donde C es una constante real arbitraria. Haciendo el cambio de variables $x = x(t)$ en la primera integral de la igualdad de arriba, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = t + C$$

Una primitiva respecto de x de la función $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$ es $x^{(-1/2)+1}(-1/2)+1) = 2x^{1/2}$. Luego deducimos que

$$2\sqrt{x} = t + C \geq 0, \quad \forall\, t \geq -C.$$

de donde las soluciones obtenidas son :

$$x(t) = \frac{(t+C)^2}{2} \quad \forall\, t \geq -C,$$

donde C es una constante real arbitraria. La gráfica de esta solución es media parábola, con concavidad positiva, creciente estrictamente, con vértice en el punto $(-C, 0)$.

Las gráficas de las soluciones son las de la figura 4.

(b) La ecuación diferencial (13) no satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial: En efecto, en primer lugar no verifica la existencia de solución para cualquier dato inicial $x(0) = x_0$ porque $\dot{x} = \sqrt{x}$ exige que $x(t) \geq 0$ para todo t donde esté definida la solución $x(t)$. En particular $x(0) \geq 0$. Por lo tanto no existe ninguna solución que satisfaga por ejemplo $x(0) = -3$ ni $x(0) = x_0$ si el dato x_0 fuera negativo.

En segundo lugar, cuando $x_0 = 0$, la ecuación diferencial tampoco satisface la condición de unicidad de solución con dato inicial $x(0) = 0$. Según se observa de la figura 4, existen soluciones diferentes cuyas gráficas se intersecan en el punto $t_0 = 0, x_0 = 0$. Efectivamente, en caso que el dato inicial sea $x(0) = 0$, las siguientes tres funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son ejemplos de soluciones diferentes y las tres satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$:

$$x_1(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

$x_2(t)$ definida $\forall\, t \in \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$x_2(t) = 0 \text{ si } t \leq 0, \quad x_2(t) = t^2/2 \quad \text{si } t \geq 0;$$

$x_3(t)$ definida $\forall\, t \in \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$x_3(t) = 0 \text{ si } t \leq 5, \quad x_3(t) = (t-5)^2/2 \quad \text{si } t \geq 5.$$

Más aún, en este ejemplo existen infinitas soluciones que cumplen $x(0) = 0$, todas definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Basta tomar la gráfica de la función $x_2(t)$ definida más arriba y trasladarla horizontalmente hacia la derecha un vector $(\alpha, 0)$ (con $\alpha > 0$ constante cualquiera) para obtener las siguientes soluciones $x(t) = x_2(t-\alpha)$, todas verificando el dato inicial $x(0) = 0$. Queda: $x(t)$ definida $\forall\, t \in \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$x(t) = 0 \text{ si } t \leq \alpha, \quad x(t) = (t-\alpha)^2/2 \quad \text{si } t \geq \alpha; \tag{14}$$

donde α es una constante real POSITIVA o NULA, cualquiera. La gráfica de una tal solución que cumple $x(0) = 0$ es la curva roja en la figura 4

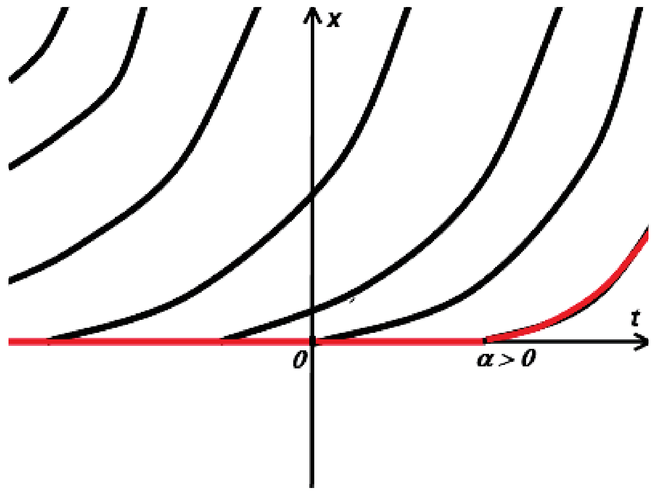

Figura 4: Curvas gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = \sqrt{x}$ (Ejemplo 3.3). Por lo menos dos curvas gráficas de dos soluciones diferentes se intersecan en el punto $(0, 0)$. La curva roja, para cada valor de $\alpha \geq 0$ es la gráfica de una solución que cumple $x(0) = 0$. No se cumple con la unicidad de solución con dato inicial. El único punto de equilibrio (solución constante) es $x(t) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$. Es una de las infinitas soluciones que cumplen con el dato inicial $x(0) = 0$.

(c) Para encontrar infinitas soluciones que cumplen $x(t_0) = 0$ tomamos las infinitas soluciones que cumplen $x(0) = 0$, dadas por la fórmula (14), y aplicamos la Proposición 1.5 trasladándolas en el tiempo (es decir, sustituyendo en la fórmula (14) la t, cada vez que aparezca, por $t - t_0$). Resulta: $x(t)$ definida $\forall \ t \in \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$x(t) = 0 \text{ si } t \leq t_0 + \alpha, \quad x(t) = (t - t_0 - \alpha)^2/2 \quad \text{si } t \geq t_0 + \alpha;$$

donde α es una constante real POSITIVA o NULA, cualquiera. También la solución estacionaria $x(t) = 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$ es solución que satisface con el dato inicial $x(t_0) = 0$.

Figura 5: Las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = 0$ son las rectas horizontales $x(t) = a \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$ donde a es una constante real arbitraria. Todas las soluciones son estacionarias o puntos de equilibrio (Ejemplo 3.4).

Ejemplo 3.4. Resolver la ecuación diferencial $\dot{x} = 0$.

Integrando respecto de la variable independiente t tenemos $\dot{x}(t) = 0$ si y solo si $x(t) = a$, donde a es una constante real arbitraria. Por lo tanto, en este ejemplo todas las soluciones son puntos de equilibrio o estacionarias, y cualquier función constante (real) es solución. Las gráficas de las soluciones son todas las rectas horizontales en el plano $t0x$ (ver Figura 5). Observamos que estas gráficas cubren todo el plano $t0x$ y que las gráficas de dos soluciones diferentes no se intersecan. Entonces, como es de 1er orden, esta ecuación cumple la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

4. Teorema de Picard y más ejemplos

Dada una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden o 2do. orden (o más en general de cualquier orden $k \geq 1$), en vez de encontrar explícitamente todas las soluciones (como hicimos en los ejemplos 3.1, 3.2, 3.3) y 4.3, podemos igualmente saber si la ecuación satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial aplicando el siguiente teorema de Picard:

Teorema 4.1. Teorema de Picard (versión restringida)
(i) *Sea la ecuación diferencial autónoma de 1er. orden*

$$y' = F(y),$$

donde $F(y)$ es una función dada de una variable real. Si F es de clase C^1 en toda la recta real $\mathbb{R}$, entonces la ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(ii) *Sea la ecuación diferencial autónoma de 2do. orden*

$$y" = F(y, y')$$

donde $F(y, y')$ es una función dada de dos variables reales. Si F es de clase C^1 en todo el plano $\mathbb{R}^2$, entonces la ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(iii) *Sea la ecuación diferencial autónoma de orden $k \geq 1$:*

$$y^{(k)} = F(y, y', y", \ldots, y^{(k-1)}),$$

donde F es una función dada, de k variables reales. Si F es de clase C^1 en todo el plano $\mathbb{R}^k$, entonces la ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

La demostración del Teorema de Picard sale del alcance de este curso, y está incluida en el programa del curso Ecuaciones Diferenciales.

Nota: El recíproco de la versión restringida del Teorema de Picard es falso. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y' = F(y)$ donde

$$F(y) = -3\,|y|$$

se puede probar (hallando explícitamente las soluciones) que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial. Sin embargo la función $F(y) = |y|$ no es de clase C^1, porque no es diferenciable en $y = 0$. Este contrajemplo prueba que el recíproco del Teorema 4.1 es falso: es decir puede cumplirse la tesis del Teorema de Picard sin que se cumpla su hipótesis.

Ejemplo 4.2. Sea la ecuación diferencial

$$y' = e^{y^2}$$

En este caso $y' = F(y)$ donde $F(y) = e^{y^2}$ para todo $y \in \mathbb{R}$. La función e^{y^2} es de clase C^1. Entonces, por el Teorema de Picard, la ecuación diferencial dada satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial. Las gráficas de sus soluciones cubren todo el plano $x0y$, y las curvas gráficas de dos soluciones diferentes no se intersecan.

Ejemplo 4.3. (a) Probar que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = (x-2)^2 \tag{15}$$

satisface la condición de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(b) Hallar y graficar la solución que cumple con el dato inicial $x(0) = x_0$ y hallar su intervalo de definición, discutiendo según el valor de la constante real x_0.

Los detalles de este ejemplo se dejan como ejercicio. Se sugiere aplicar la metodología similar a la usada en el ejemplo 3.2. Las respuestas son las siguientes:
(a) Es una ecuación autónoma de 1er. orden de la forma $\dot{x} = F(x)$ donde $F(x) = (x-2)^2 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Aplicando el Teorema de Picard (Teorema 4.1), deducimos que la ecuación diferencial (15) satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(b) Punto de equilibrio o solución estacionaria: uno solo $x(t) = 2\ \forall t \in \mathbb{R}$.

La (única) solución que cumple $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = 2 + \frac{x_0 - 2}{1 - (x_0 - 2)t}$$

definida en el siguiente intervalo I de reales:
• Si $x_0 = 2$, entonces $x(t) = 2\ \forall\ t \in I = \mathbb{R}$. Su gráfica es la recta horizontal azul de la figura 6.
• Si $x_0 > 2$, entonces

$$x(t) = 2 + \frac{x_0 - 2}{1 - (x_0 - 2)t}\ \forall\ t \in I = \Big(-\infty, \frac{1}{x_0 - 2} \Big).$$

Su gráfica es la curva roja de la figura 6, que "muere" (deja de estar definida) en el instante finito futuro $t_c = \frac{1}{x_0 - 2} > 0$ (recta vertical punteada roja en la figura 6).
• Si $x_0 < 2$, entonces

$$x(t) = 2 + \frac{x_0 - 2}{1 - (x_0 - 2)t}\ \forall\ t \in I = \Big(-\ \frac{1}{2 - x_0}, +\infty \Big).$$

Su gráfica es la curva verde de la figura 6, que "nace" (empieza a estar definida) en el instante finito pasado $t_c = -\frac{1}{2 - x_0} < 0$ (recta vertical punteada verde en la figura 6).

Ejemplo 4.4. (a) Probar que la ecuación diferencial

$$\dot{x} = -x^3 \tag{16}$$

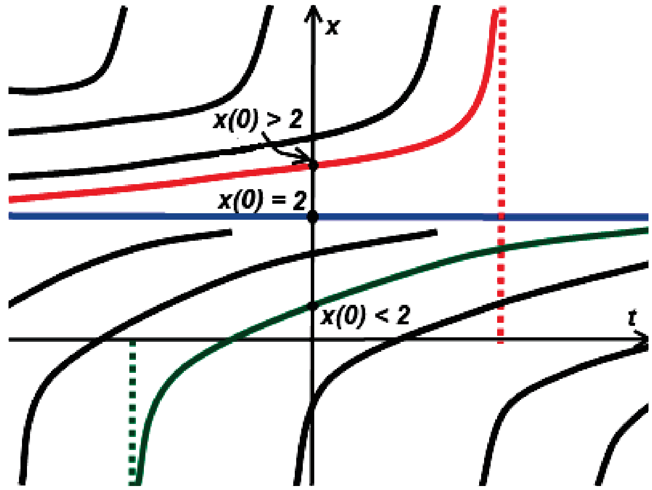

Figura 6: Curvas gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = (x-2)^2$ (Ejemplo 4.3).

satisface la condición de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(b) Hallar y graficar la solución que cumple con el dato inicial $x(0) = x_0$ y hallar su intervalo de definición, discutiendo según el valor de la constante real x_0.

Los detalles de este ejemplo se dejan como ejercicio. Se sugiere aplicar la metodología similar a la usada en los ejemplos 3.2 y 4.3. Las respuestas son las siguientes:
(a) Es una ecuación autónoma de 1er. orden de la forma $\dot{x} = F(x)$ donde $F(x) = -x^3 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1. Aplicando el Teorema de Picard (Teorema 4.1), deducimos que la ecuación diferencial (15) satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.
(b) Punto de equilibrio o solución estacionaria: uno solo $x(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

La (única) solución que cumple $x(0) = x_0$ es

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}$$

definida en el siguiente intervalo I de reales:
• Si $x_0 = 0$, entonces $x(t) = 0 \ \forall\ t \in I = \mathbb{R}$. Su gráfica es la recta horizontal eje de las t de la figura 7.
• Si $x_0 \neq 0$, entonces

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \ \forall\ t \in I = \Big(-\frac{1}{2x_0^2}, +\infty\Big), \tag{17}$$

donde I es el intervalo de definición de la solución (la semirrecta abierta a la derecha del instante $t_c = -\dfrac{1}{2x_0^2} < 0$).

Veamos que la gráfica de la solución $x(t)$ es la curva roja de la figura 7 cuando $x_0 > 0$, y la curva verde de la figura 7 cuando $x_0 < 0$. Estas soluciones "nacen" (empiezan a estar definidas) en el instante finito pasado $t_c = -\dfrac{1}{2x_0^2} < 0$ (rectas verticales punteadas roja y verde en la figura 7). De la igualdad (17) obtenemos $\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0$. Entonces la gráfica de $x(t)$ (cuando $x_0 \neq 0$) tiene asíntota horizontal en el eje de las x (la recta $y = 0$). Si $x_0 > 0$ entonces, de la igualdad (17) deducimos $x(t) > 0$ para todo $t \in I$, y como $\dot{x}(t) = -x(t)^3$, resulta $\dot{x} < 0$. Luego $x(t)$ es positiva y estrictamente decreciente cuando $x_0 > 0$. En cambio, si $x_0 < 0$, argumentando en forma similar, resulta $x(t) < 0$ y estrictamente creciente para todo $t \in I$.

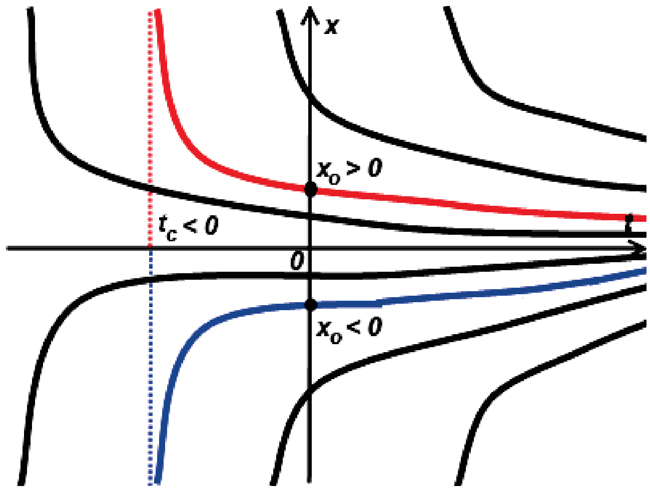

Figura 7: Curvas gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^3$ (Ejemplo 4.4).

5. Estabilidad de puntos de equilibrio

Tomaremos como prerrequisitos para definir estabilidad e inestabilidad de soluciones estacionarias de una ecuación diferencial, los siguientes:

1) La ecuación diferencial es autónoma.

2) La ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

Solo veremos los conceptos de estabilidad e inestabilidad para las ecuaciones diferenciales de 1er. orden.

Definición 5.1. Estabilidad de punto de equilibrio de ec. dif. autónoma de 1er. orden

Sea $y' = F(y)$ una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial (según la Definición 2.1). Sea $y(t) = y_0$ constante para todo $t \in \mathbb{R}$ una solución estacionaria o punto de equilibrio de la ecuación diferencial (es decir $F(y_0) = 0$).

Decimos que el punto de equilibrio y_0 es *estable (en el futuro)* si cambiando suficientemente poco el dato inicial $y(0) = y_0$ por otro dato inicial $y(0) = \widehat{y}_0$, la solución correspondiente se aparta arbitrariamente poco de la solución estacionaria (o punto de equilibrio) **para todo** instante $x \geq 0$ (es decir para todo tiempo futuro). Más precisamente, usando el "lenguaje ϵ, δ":

El punto de equilibrio y_0 es *estable (en el futuro)* si dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que si $|\widehat{y}_0 - y_0| < \delta$ entonces la (única) solución $y_1(t)$ que satisface la condición inicial $y_1(0) = \widehat{y}_0$ cumple

$$|y_1(t) - y_0| < \epsilon \ \ \forall \ t \geq 0.$$

Interpretación: Véase la figura 8. Tenemos una solución estacionaria o punto de equilibrio $y(t) = y_0$ constante para todo $t \in \mathbb{R}$. Su gráfica es la recta horizontal negra del figura 8. Ese punto de equilibrio y_0 es estable cuando todas las soluciones que en el instante inicial $x = 0$ toman un valor $y(0) = \widehat{y}_0$ en el entorno azul de centro y_0 y radio δ (del eje de las y), tienen una gráfica, para todo tiempo $x \geq 0$, contenida en la franja roja de la figura 8. Es decir todas esas soluciones, en el futuro, se mantienen a distancia menor que ϵ del punto de equilibrio y_0.

Definición 5.2. Inestabilidad de punto de equilibrio de ec. dif. autónoma de 1er. orden Se dice que un punto de equilibrio es *inestable* si no es estable.

Gráficamente, el punto de equilibrio y_0 de la figura 8 es inestable cuando (para algún $\epsilon > 0$ y para todo $\delta > 0$) la gráfica de *alguna* solución que en el instante inicial $x = 0$ toma un valor $y(0)$ en el entorno azul, se sale de la franja roja en algún tiempo futuro $x \geq 0$. Es decir ALGUNA de esas soluciones que inicialmente están arbitrariamente cerca del punto de equilibrio y_0, NO se mantiene siempre en el futuro a distancia menor que ϵ del punto de equilibrio y_0.

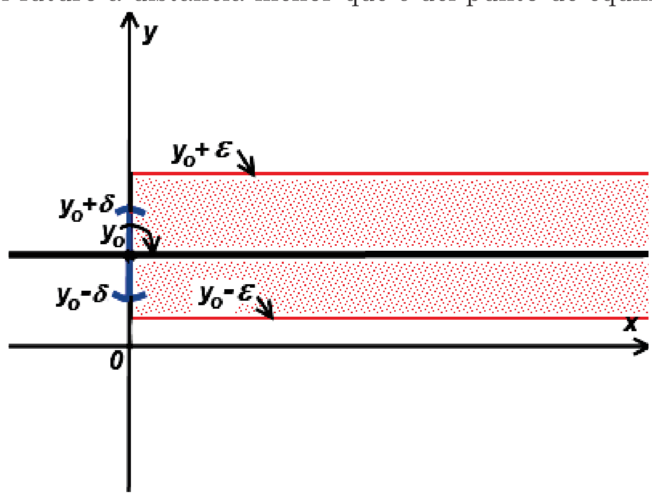

Figura 8: Estabilidad para punto de equilibrio de ecuación diferencial de 1er. orden. El punto de equilibrio y_0 es estable en el futuro cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que las gráficas para tiempo $x \geq 0$ de todas las soluciones que en el instante inicial $x = 0$ toman un valor $y(0)$ en el entorno azul de centro y_0 y radio δ, están contenidas en la franja roja (centrada en y_0 con radio ϵ). Es decir, todas esas soluciones, en el futuro, se mantienen a distancia menor que ϵ del punto de equilibrio y_0.

Ejemplos:

En el ejemplo 4.3 el punto de equilibrio $x = 2$ es inestable. En efecto, ver las gráficas de las soluciones en la figura 6: no todas las soluciones que tienen condición inicial $x(0)$ arbitrariamente cercanas a $x = 2$ (en un entorno de radio δ de centro $x = 2$ en el eje vertical de las x) se mantienen para todos los tiempos futuros $t > 0$ en una franja horizontal centrada en la recta horizontal $x = 2$ con radio ϵ. Algunas de ellas (por ejemplo la curva roja de la figura 6) se alejan de la recta horizontal $x = 2$ (a pesar de otras curvas solución, por ejemplo la verde, se mantienen cercanas a la recta horizontal $x = 2$). El punto de equilibrio $x = 2$ es inestable porque para ser estable se necesita que *todas* las curvas gráficas de las soluciones que inicialmente tienen estado

$x(0)$ cercano a $x = 2$ (en el eje vertical de las x) se mantengan para tiempo $t \geq 0$ a distancia menor que ϵ de la recta horizontal $x = 2$.

Usando el mismo argumento que en el ejemplo anterior sobre el croquis de sus soluciones, véase que en el ejemplo 3.4 cuyas soluciones están graficadas en la figura 5, cualquier punto de equilibrio es estable.

Análogamente, argumentando con las gráficas de las soluciones, en el ejemplo 3.2 cuyas soluciones están graficadas en la figura 3, deducimos que el punto de equilibrio $y = -1$ es estable, mientras el punto de equilibrio $y = 1$ es inestable.

Finalmente, de la figura 7 deducimos que en el ejemplo 4.4 el punto de equilibrio $x = 0$ es estable.

En el ejemplo 3.3 (cuyas soluciones están graficadas en la figura 4), no clasificamos la estabilidad de su punto de equilibrio $x = 0$, porque la ecuación diferencial no satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial (recordar que desde un principio tomamos esta propiedad de existencia y unicidad como prerrequisito para definir estabilidad e inestabilidad).

Nota importante: En algunos de los ejemplos anteriores, se puede conocer la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio SIN NECESIDAD de graficar, y sin siquiera hallar las soluciones, como veremos más adelante en el Teorema 5.4. Es decir, no siempre el procedimiento más adecuado para clasificar la estabilidad o inestabilidad de un punto de equilibrio es resolver la ecuación diferencial.

Definición 5.3. Estabilidad asintótica Un punto de equilibrio y_0 de una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden $y' = F(y)$ que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, se dice *asintóticamente estable (en el futuro)* , si:

• y_0 es un punto de equilibrio estable, de acuerdo a la Definición 5.1, y además

• existe $\delta > 0$ tal que toda solución $y(x)$ que en el instante inicial $x = 0$ toma un valor $y(0) = \widehat{y}_0$ a distancia menor que δ de y_0 (es decir si $|\widehat{y}_0 - y_0| < \delta$), cumple:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = y_0.$$

Nota: Sea $y = y_0$ con y_0 constante, un punto de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma. Supongamos por un momento que todas las soluciones $y(x)$ de esa ecuación diferencial tendieran a y_0 cuando el tiempo $x \to +\infty$, pero que el punto de equilibrio y_0 es inestable, es decir no satisface la Definición 5.1. Entonces, por definición de estabilidad asintótica, el punto de equilibrio y_0 NO es asintóticamente estable. En efecto, en la definición de estabilidad asintótica, el primer requisito que se exige es que el punto de equilibrio sea estable. Se deben cumplir a la vez las dos condiciones: ser estable de acuerdo a la Definición 5.1 y además que $\lim_{x \to +\infty} y(x) = y_0$. No alcanza que se cumpla una sola de esas dos condiciones.

Parece poco intuitivo que existan tales ejemplos en que un punto de equilibrio y_0 sea inestable pero que todas las soluciones tiendan a y_0 cuando el tiempo tiende a $+\infty$. Sin embargo existen tales ejemplos cuando el espacio donde se definen las soluciones no es la recta sino $\mathbb{R}^2$ por ejemplo. De todas formas, en esta introducción no definimos ni veremos ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, las cuales se estudian en el curso de Ecuaciones Diferenciales.

Otra pregunta que es natural plantearse es la siguiente: ¿Puede un punto de equilibrio ser estable sin ser asintóticamente estable? La respuesta es sí. Veremos más abajo un tal ejemplo.

Ejemplos:

En el ejemplo 3.2 cuyas soluciones están graficadas en la figura 3, ya vimos que el punto de equilibrio $y = -1$ es estable. Como además se cumple que todas las soluciones cuyo estado inicial $y(0)$ (en el eje vertical de las y) es suficientemente cercano a $y = -1$, tienden a -1 cuando el tiempo x tiende a $+\infty$, el punto de equilibrio $y = -1$ es asintóticamente estable. En cambio el punto de equilibrio $y = +1$ ya vimos que es inestable. Entonces no puede ser asintóticamente estable pues por definición, para ser asintóticamente estable la primera condición que se exige es que sea estable.

En el ejemplo 4.4 de la figura 7 ya vimos que el punto de equilibrio $x = 0$ es estable. Además, como para cualquier solución $x(t)$ se cumple $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable .

En el ejemplo 3.4 cuyas soluciones están graficadas en la figura 5, vimos que cualquier punto de equilibrio $x = a$ donde a es una constante real, es estable. Pero no es asintóticamente estable. En efecto, una vez que elegimos la constante a, NO TODAS las soluciones $x(t)$ con estado inicial $x(0) = \widehat{x}_0$ tales $|\widehat{x}_0 - a| < \delta$ tienden a a cuando el tiempo $t \to +\infty$. Si $\widehat{x}_0 \neq a$ (aunque esté muy cerca de a), la solución $x(t)$ es constante igual a $\widehat{x}_0$ para todo t. Entonces su límite cuando $t \to +\infty$ es diferente de a.

El ejemplo 3.4 muestra que un punto de equilibrio puede ser estable sin ser asintóticamente estable.

Condiciones suficientes para la estabilidad asintótica y para la inestabilidad

En los ejemplos anteriores deducimos la estabilidad, inestabilidad, estabilidad asintótica, a partir del conocimiento de todas las soluciones y de los croquis de las gráficas de ellas. Ahora veremos cómo estudiar la estabilidad e inestabilidad, sin necesidad de graficar y sin siquiera conocer las soluciones de la ecuaciones diferencial. Es decir, algunas veces no es necesario tomarse el trabajo de resolver la ecuación diferencial para conocer la estabilidad o inestabilidad de sus puntos de equilibrio.

Teorema 5.4. (Versión retringida de los Teoremas de Lyapunov y de Cetaev)

Sea una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden $y' = F(y)$ donde $F(y)$ es de clase C^1 (luego, por el Teorema 4.1 la ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.)

Sea $y = y_0$ un punto de equilibrio o solución estacionaria (es decir $F(y_0) = 0$).

(a) *Si la derivada de $F(y)$ respecto de y en $y = y_0$ cumple*

$$\left.\frac{dF(y)}{dy}\right|_{y=y_0} < 0,$$

entonces el punto de equilibrio $y = y_0$ es estable y asintóticamente estable.

(b) *Si la derivada de $F(y)$ respecto de y en $y = y_0$ cumple*

$$\left.\frac{dF(y)}{dy}\right|_{y=y_0} > 0,$$

entonces el punto de equilibrio $y = y_0$ es inestable.

Nota: Si la derivada de $F(y)$ respecto de y en $y = y_0$ es nula, puede suceder que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable, o que sea estable pero no asintóticamente estable, o que sea inestable. Veremos ejemplos de estos tres casos.

La demostración del Teorema 5.4 sale del alcance de este curso. Se deduce del Teorema de Lyapunov (parte a) y del Teorema de Cetaev (parte b), que se estudian en el curso de Ecuaciones Diferenciales, usando la función de Lyapunov $(F(y))^2$

Ejemplos:

Consideremos el ejemplo 3.2 cuyas soluciones están graficadas en la figura 3. La ecuación diferencial es

$$y' = y^2 - 1.$$

Es una ecuación diferencial autónoma $y' = F(y)$ donde $F(y) = y^2 - 1$. Tiene dos puntos de equilibrio o soluciones estacionarias $y = 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $y = -1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Supongamos que queremos saber si estos puntos de equilibrio son estables, asintóticamente estables o inestables, SIN haber graficado, y sin siquiera hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial. Intentamos aplicar el Teorema 5.4:

En el punto de equilibrio $y = -1$:

$$\left.\frac{dF(y)}{dy}\right|_{y=-1} = \left.\frac{d(y^2-1)}{dy}\right|_{y=-1} = \left.2y\right|_{y=-1} = -2 < 0$$

Usando la parte (a) del Teorema 5.4 deducimos que el punto de equilibrio $y = -1$ es asintóticamente estable, y por lo tanto estable.

En el punto de equilibrio $y = 1$:

$$\left.\frac{dF(y)}{dy}\right|_{y=1} = \left.\frac{d(y^2-1)}{dy}\right|_{y=1} = \left.2y\right|_{y=1} = 2 > 0$$

Usando la parte (b) del Teorema 5.4 deducimos que el punto de equilibrio $y = 1$ es inestable.

En el ejemplo 4.4 de la figura 7 la ecuación diferencial es

$$\dot{x} = -x^3.$$

Es una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = F(x)$ donde $F(x) = -x^3$. Tiene un único punto de equilibrio $x = 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Ya probamos, encontrando y graficando todas las soluciones, que el punto de equilibrio $x = 0$ es estable y asintóticamente estable. Intentemos aplicar el Teorema 5.4.

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d(-x^3)}{dx}\right|_{x=0} = \left.-2x^2\right|_{x=0} = 0.$$

En este caso el Teorema 5.4 no aporta ninguna conclusión. Este ejemplo muestra que si la derivada de F en el punto de equilibrio es nula el punto de equilibrio puede ser estable y asintóticamente estable.

Ahora veremos el ejemplo 3.4 cuyas soluciones están graficadas en la figura 5. Es la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 0.$$

Es una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = F(x)$ donde F es la función idénticamente nula. Ya vimos que cualquier punto de equilibrio es estable pero no asintóticamente estable. Ahora intentemos aplicar el Teorema 5.4 en el punto de equilibrio $x = a \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{0}{dx}\right|_{x=a} = 0.$$

En este caso el Teorema 5.4 no aporta ninguna conclusión. Este ejemplo muestra que si la derivada de F en el punto de equilibrio es nula el punto de equilibrio puede ser estable y no asintóticamente estable.

En el ejemplo 4.3 la ecuación diferencial es

$$\dot{x} = (x-2)^2.$$

Es una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = F(x)$ donde $F(x) = (x-2)^2$. Tiene un único el punto de equilibrio $x = 2\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Ya vimos, resolviendo la ecuación diferencial y graficando sus soluciones en la figura 6 que el punto de equilibrio $x = 2$ es inestable. Intentemos aplicar el Teorema 5.4.

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{d(x-2)^2}{dx}\right|_{x=2} = 2(x-2)\Big|_{x=2} = 0.$$

En este caso el Teorema 5.4 no aporta ninguna conclusión. Este ejemplo muestra que si la derivada de F en el punto de equilibrio es nula el punto de equilibrio puede ser inestable.

6. Órbitas o trayectorias y Espacio de Fases

Sea una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden

$$\dot{x} = F(x) \tag{18}$$

donde las soluciones $x(t)$ son funciones reales de una variable real t (llamada tiempo), y F es una función dada conocida también real de una variable real x.

Asumimos como prerrequisito para definir espacio de fases y órbitas o trayectorias, que la ecuación diferencial satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial (ver Definición 2.1, Proposición 2.2 y Teorema 4.1).

Definición 6.1. Orbitas o trayectorias en el Espacio de Fases

Se llama *Espacio de Fases* de la Ecuación Diferencial (18) al espacio donde varían los valores x de las soluciones $x(t)$. Es decir, el espacio de fases es $\mathbb{R}$, todo el eje de las x.

Se llama *órbita o trayectoria* de la (única) solución que satisface el dato inicial $x(0) = x_0$, al conjunto recorrido de la función solución $x(t)$ en el eje de las x (en el espacio de fases), orientado para tiempo t creciente.

Entonces, si la solución es estacionaria o punto de equilibrio $x(t) = x_0\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$, su órbita o trayectoria es el conjunto formado por un punto solo $\{x_0\}$. Recíprocamente, si la órbita o trayectoria de una solución $x(t)$ es el conjunto formado por un punto solo $\{x_0\}$, entonces $x(t) = x_0$ para todo t, y la solución es estacionaria o punto de equilibrio.

Ejemplo preliminar: Si una solución de una ecuación diferencial es $x(t) = 2e^{3t}$, la órbita correspondiente es la semirrecta abierta $(0, +\infty)$ del eje de las x orientada con una flechita que apunta desde 0 a $+\infty$. Si otra solución es $x(t) = -5e^{3t}$, la órbita correspondiente es la semirrecta abierta $(-\infty, 0)$ orientada con una flechita que apunta desde 0 a $-\infty$ (ver figura 9).

Interpretación: Observar que el tiempo t no aparece en las órbitas o trayectorias. Cada órbita o trayectoria de una solución $x(t)$ es solo "la huella" que deja un móvil que en el instante t se encuentra en el punto $x(t)$ al recorrer todo su camino (es decir para todo tiempo t en el

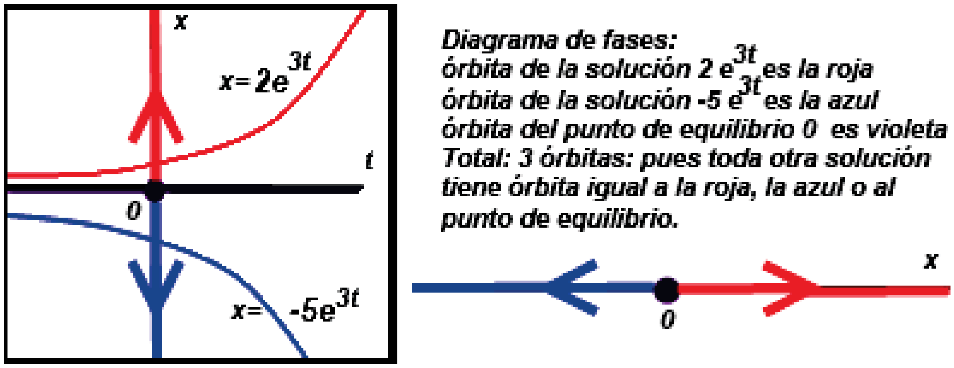

Figura 9: A la izquierda, en el eje vertical de las x se dibujan tres órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = 3x$: la roja es la semirrecta abierta $(0, +\infty)$, recorrido de la solución $x(t) = 2e^{3t}$. La azul es la semirrecta abierta $(-\infty, 0)$, recorrido de la solución $-5e^{3t}$. El punto violeta es la órbita del punto de equilibrio o solución estacionaria $x = 0$. A la derecha se dibuja el espacio de fases (la recta $\mathbb{R}$, el mismo eje de las x) en horizontal.

intervalo de definición de la solución $x(t)$). Al mirar la huella, vemos todo el recorrido del móvil, pero no sabemos en qué instante estuvo o estará en cada punto. Solo sabemos, porque la huella está orientada (flechada), dados dos puntos de la trayectoria por cuál de ambos puntos pasó o pasará antes y por cuál después.

Ya sabemos que la ecuación diferencial $\dot{x} = 3x$ tiene como solución general $x(t) = Ce^{3t}$ donde C es una constante real arbitraria. Si $C = 0$ queda la solución estacionaria o punto de equilibrio. Si $C > 0$ la órbita es $(0, +\infty)$ orientada para x creciente. Si $C < 0$ la órbita es $(-\infty, 0)$ orientada para x decreciente. Entonces, a pesar de que la ecuación diferencial $\dot{x} = 3x$ tiene infinitas soluciones, existen solo tres órbitas diferentes en el espacio de fases en este ejemplo (ver figura 9).

Definición 6.2. Se llama *diagrama de fases* al croquis en el espacio de fases de todas las órbitas o trayectorias.

Por ejemplo, la ecuación diferencial $\dot{x} = 3x$ tiene el diagrama de fases de la figura 9, porque su solución general es $x(t) = Ce^{3t}$ donde C es una constante arbitraria.

Otro ejemplo: La ecuación diferencial $\dot{x} = -3x$ tiene el diagrama de fases de la figura 10, porque su solución general es $x(t) = Ce^{-3t}$ donde C es una constante arbitraria. El diagrama de fases de la figura 10 no es el mismo que el de la figura 9 porque las flechas (orientaciones) de las órbitas son los opuestos, a pesar que el conjunto (sin orientación) que compone cada órbita es el mismo en ambas figuras.

Nota importante: En el Teorema 6.3 veremos la propiedad de que dadas dos órbitas cualesquiera, siempre se cumple que o bien ambas órbitas coinciden (son la misma, una sola), o bien ambas son disjuntas (no se intersecan).

Para comprender mejor el concepto de órbita o trayectoria, y cómo son los diagrama de fases, revisitaremos los ejemplos vistos en las secciones anteriores. En casi todos estos ejemplos la cantidad de órbitas diferentes es finita; pero existen innumerables ejemplos en el espacio de fases $\mathbb{R}$ para los cuales la cantidad de órbitas diferentes es infinita.

Ejemplos:

La ecuación diferencial $\dot{x} = -x^3$ del ejemplo 4.4 y la Figura 7, tiene el diagrama de fases representado en la Figura 11. En efecto, el recorrido de cualquier solución con estado inicial

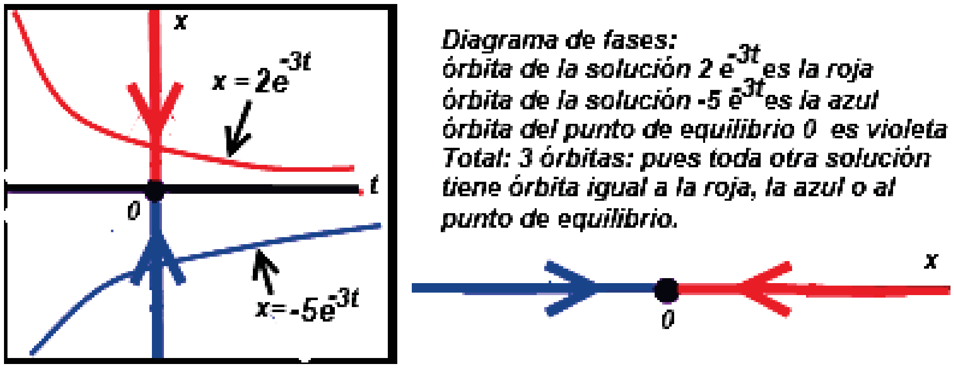

Figura 10: A la izquierda, en el eje vertical de las x se dibujan tres órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = -3x$: la roja es la semirrecta abierta $(0, +\infty)$, recorrido de la solución $x(t) = 2e^{-3t}$. La azul es la semirrecta abierta $(-\infty, 0)$, recorrido de la solución $-5e^{-3t}$. El punto violeta es la órbita del punto de equilibrio o solución estacionaria $x = 0$. A la derecha se dibuja el espacio de fases (la recta $\mathbb{R}$, el mismo eje de las x) en horizontal. (Compárese con el diagrama de fases de la ecuación $\dot{x} = 3x$ de la figura 9.)

$x(0) > 0$ (es decir la órbita o trayectoria) es la proyección sobre el eje de las x de su curva gráfica en el plano $t0x$ (la curva gráfica roja en el cuadro de la izquierda de la Figura 11). Esta órbita (proyección sobre el eje de las x de la curva gráfica roja) es la semirrecta $(0, +\infty)$ orientada con la flecha apuntando hacia $+\infty$. La órbita del punto de equilibrio $x_0 = 0$ es el conjunto formado solo por el punto $\{x_0\}$, negro en la Figura 11. Finalmente la órbita de cualquier solución con estado inicial $x(0) < 0$ es (azul en la Figura 11) es la semirrecta $(-\infty, 0)$ orientada con la flecha apuntando hacia 0.

La ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$ del ejemplo 3.2 y la Figura 3, tiene el diagrama de fases representado en la Figura 12. En efecto, el recorrido de cualquier solución con estado inicial $y(0) > +1$ (es decir la órbita o trayectoria) es la proyección sobre el eje de las y de su curva gráfica en el plano $x0y$ (la curva gráfica roja en el cuadro de la izquierda de la Figura 12). Esta órbita (proyección sobre el eje de las y de la curva gráfica roja) es la semirrecta $(+1, +infty)$ orientada con la flecha apuntando hacia $+\infty$. La órbita del punto de equilibrio $y_0 = +1$ es el conjunto formado solo por el punto $\{+1\}$. Análogamente la del punto de equilibrio -1 es $\{-1\}$. La órbita de cualquier solución con estado inicial $-1 < y(0) < +1$ (azul en la Figura 12) es el segmento abierto $(-1, +1)$ orientado con la flecha apuntando hacia -1. Finalmente, la órbita de cualquier solución con estado inicial $y(0) < -1$ es la semirrecta $(-infty, -1)$ orientada con la flecha apuntando hacia -1 (verde en la Figura 12).

En la Figura 13, a la izquierda, en el eje vertical de las x se dibujan todas las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = 0$ (ver Ejemplo 3.4 y Figura 5). Todas las soluciones son puntos de equilibrio o soluciones estacionarias. Entonces todas las órbitas están formadas por un solo punto.

Teorema 6.3. Las órbitas forman una partición del espacio de fases

Sea una ecuación diferencial autónoma de 1er orden $\dot{x} = F(x)$ que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial.

Entonces:

Dadas dos órbitas del espacio de fases, o bien ambas coinciden (son una misma órbita), o bien ambas son disjuntas (no se intersectan).

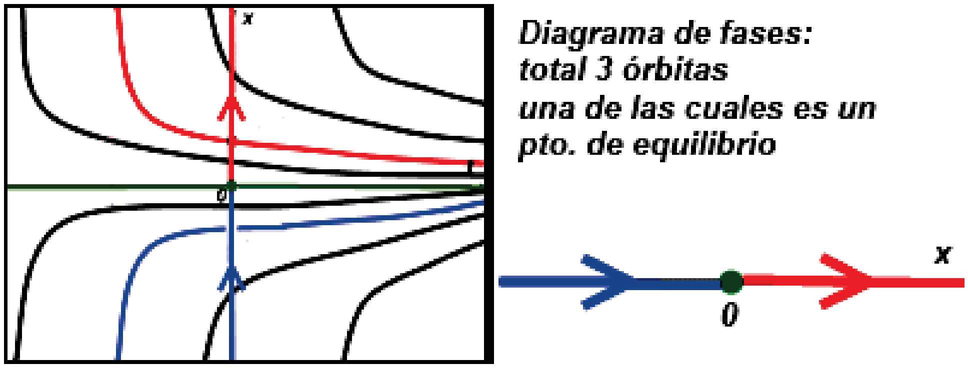

Figura 11: A la izquierda, en el eje vertical de las x se dibujan todas las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^3$ (ver Ejemplo 4.4 y Figura 7): la roja es la semirrecta abierta $(0, +\infty)$, recorrido de cualquier solución $x(t)$ tal que $x(0) > 0$. La azul es la semirrecta abierta $(-\infty, 0)$, recorrido de cualquier solución $x(t)$ tal que $x(0) < 0$. El punto negro es la órbita del punto de equilibrio o solución estacionaria $x = 0$. A la derecha se dibuja el espacio de fases (la recta $\mathbb{R}$, el mismo eje de las x) en horizontal.

Demostración: Sean o_1 y o_2 dos órbitas. Por definición de órbita o trayectoria o_1 es el conjunto imagen o recorrido de alguna(s) solución(es) $x_1(t)$ Análogamente, o_2 es el conjunto imagen o recorrido de alguna(s) solución(es) $x_2(t)$. Es decir:

$$o_1 = \text{Imagen}(x_1(t)), \quad o_2 = \text{Imagen}(x_2(t)). \tag{19}$$

Supongamos que existe un punto $\widehat{x}$ que pertenece a $o_1 \cap o_2$ (las dos órbitas se intersecan). Entonces

$$\widehat{x} = x_1(t_1)$$

para cierto instante $t_1 \in \mathbb{R}$ (porque $\widehat{x} \in o_1 = \text{Imagen}(x_1(t))$), y análogamente

$$\widehat{x} = x_2(t_2)$$

para cierto instante $t_2 \in \mathbb{R}$ (porque $\widehat{x} \in o_2 = \text{Imagen}(x_2(t))$).

Usando la Proposición 1.5, la función

$$x_3(t) := x_2(t - (t_1 - t_2))$$

trasladada en el tiempo de la solución $x_2(t)$, es también una solución de la misma ecuación diferencial.

Como la gráfica en el plano $t0x$ de la solución $x_3(t)$ es la trasladada horizontalmente de la solución $x_2(t)$, su proyección sobre el eje vertical de las x (es decir su recorrido o imagen) coincide con la de la solución $x_2(t)$. Es decir:

$$\text{Imagen}(x_3(t)) = \text{Imagen}(x_2(t)). \tag{20}$$

Además $x_3(t_1) = x_2(t_2) = \widehat{x} = x_1(t_1)$. Entonces $x_3(t)$ y $x_1(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial, y ambas verifican el dato inicial $x(t_1) = \widehat{x}$. Como la ecuación diferencial satisface la

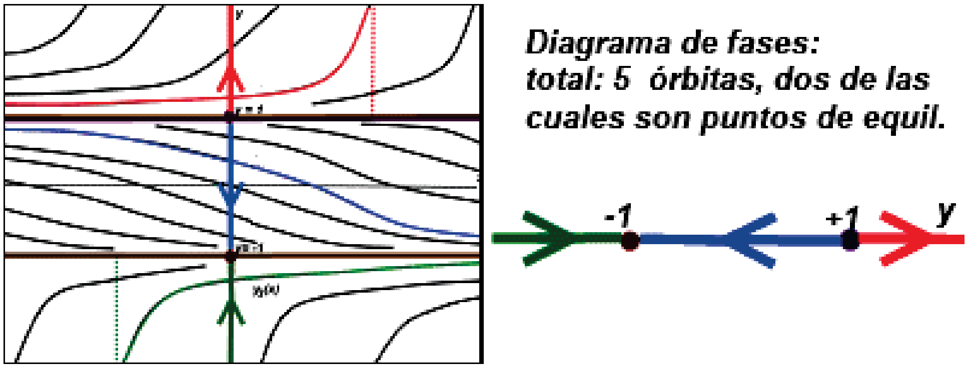

Figura 12: A la izquierda, en el eje vertical de las y se dibujan todas las órbitas de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$ (ver Ejemplo 3.2 y Figura 3). La roja es la semirrecta abierta $(1, +\infty)$, recorrido de cualquier solución $y(x)$ tal que $y(0) > 1$. La azul es el segmento abierto $(-1, +1)$, recorrido de cualquier solución $y(x)$ tal que $-1 < y(0) < 1$. La verde es la semirrecta abierta $(-\infty, -1)$, recorrido de cualquier solución $y(x)$ tal que $y(0) < -1$. Finalmente los conjuntos (marrón y violeta respectivamente), cada uno con uno solo de los dos puntos $\{-1\}$ y $\{1\}$ son las órbita de los dos puntos de equilibrio. A la derecha se dibuja el espacio de fases (la recta $\mathbb{R}$, el mismo eje de las y) en horizontal.

propiedad de unicidad de solución con dato inicial, entonces las soluciones $x_3(t)$ y $x_1(t)$ son la misma función. Luego, sus conjuntos recorrido son los mismos:

$$\text{Imagen}(x_3(t)) = \text{Imagen}(x_1(t)). \tag{21}$$

Reuniendo las igualdades (20) y (21) deducimos

$$\text{Imagen}(x_1(t)) = \text{Imagen}(x_2(t)). \tag{22}$$

Reuniendo las igualdades (19) y (22) concluimos que

$$o_1 = o_2.$$

Hemos probado que dos órbitas que se intersequen coinciden. Equivalentemente, dos órbitas cualesquiera, o bien coinciden (son la misma órbita) o bien no se intersecan. □

Estabilidad e inestabilidad de puntos de equilibrio y diagrama de fases

Si no se conocen las soluciones de la ecuación diferencial, pero se conoce el diagrama de fases, se puede estudiar la estabilidad o inestabilidad de sus puntos de equilibrio x_0, a partir del comportamiento de las órbitas en un entorno de x_0, aplicando la siguiente proposición:

Proposición 6.4. Sea $\dot{x} = F(x)$ una ecuación diferencial autónoma de 1er. orden que satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial. Sea x_0 un punto de equilibrio (es decir, el conjunto $\{x_0\}$ formado por solo el punto x_0 es una órbita)

Entonces:

a) El punto de equilibrio x_0 es estable en el futuro, si y solo si dado cualquier entorno

$$B_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

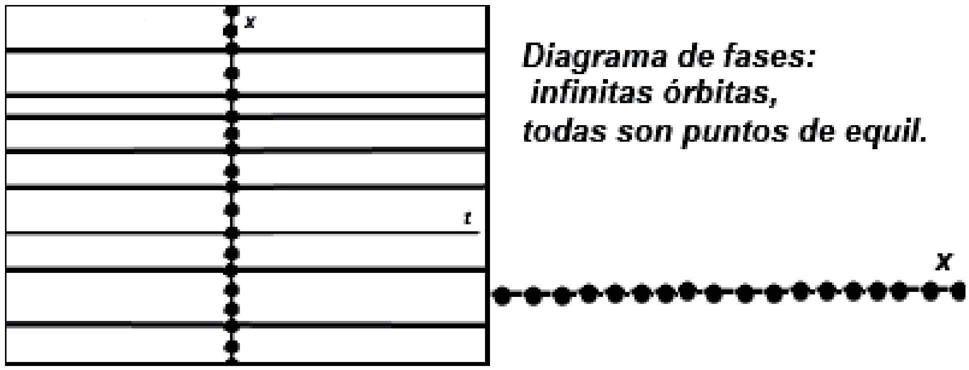

Figura 13: A la izquierda, en el eje vertical de las x se dibujan todas las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = 0$ (ver Ejemplo 3.4 y Figura 5). Todas las soluciones son puntos de equilibrio o soluciones estacionarias. Entonces todas las órbitas están formadas por un solo punto.

de x_0 en el espacio de fases $\mathbb{R}$, existe un entorno (más chico):

$$B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset B_\epsilon(x_0)$$

(es decir, con $0 < \delta \leq \epsilon$) tal que:

Toda órbita o_1 que interseque en algún punto x el entorno $B_\delta(x_0)$ (el chico), está totalmente contenida en el futuro (es decir para todos los puntos de la órbita en el sentido de la flecha que vienen después de x) en el entorno $B_\epsilon(x_0)$ (el grande).

b) El punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable en el futuro, si y solo si, además de cumplirse la propiedad de la parte a), toda órbita o_1 que interseque el entorno $B_\delta(x_0)$ está orientada (flechada) hacia el punto x_0 y además acumula en el punto x_0.

c) El punto de equilibrio x_0 es inestable si y solo si no se cumple la propiedad a), es decir existe un entorno $B_\epsilon(x_0)$ tal que para todo entorno $B_\delta(x_0) \subset B_\epsilon(0)$ se cumple:

Existe una órbita o_1 que interseca el entorno $B_\delta(x_0)$ en algún punto x y que no está totalmente contenida en el futuro en $B_\epsilon(x_0)$.

La demostración de esta proposición se deja como ejercicio.