

Movimiento rectilíneo e introducción de integral.

Programa Moebius

Autor: Eleonora Catsigeras

2014

Ir al índice de clases y enlaces a los videos y fotos de los pizarrones [aquí](#)

Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL)

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo, Uruguay

Resumen

El Programa MOEBIUS de articulación bachillerato-universidad fue organizado e implementado por la Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería en el año 2014, junto a docentes de Matemática y de Física de dicha Facultad.

Las tres clases dictadas dentro de ese programa por Eleonora Catsigeras, además de presenciales, fueron grabadas en videos, subidos a YouTube.

Trataron una introducción al cálculo integral (que se estudia en el primer semestre de los cursos de la facultad de ingeniería), mediante el análisis de las fórmulas del movimiento en la recta a velocidad constante y variable (que se estudia en los cursos de Física del bachillerato).

Índice de clases con enlaces a los videos y a las fotos de los pizarrones

Clases [Moebius 01](#), [Moebius 02](#), [Moebius 03](#)

[VIDEO Moebius 01 Parte 1 \(10 min. 29 seg.\)](#)

"Movimiento Rectilíneo Uniforme"

Enlace al video 01 Parte 1: <https://youtu.be/M5dtdA1vzq8>

[VIDEO Moebius 01 Parte 2 \(7 min. 36 seg.\)](#)

"Velocidad y Derivada respecto al tiempo"

Enlace al video 01 Parte 2: <https://youtu.be/XzJcWnAoims>

[VIDEO Moebius 01 Parte 3 \(11 min. 44 seg.\)](#)

"Distancia recorrida e Integral de la velocidad"

Enlace al video 01 Parte 3: <https://youtu.be/ITjqaaQhVM0>

[APUNTES Moebius 01 Partes 1, 2 y 3](#) (Clicar [aquí](#) para imprimir o bajar el archivo pdf con las fotos de los pizarrones de los tres videos anteriores.

[VIDEO Moebius 02 Parte 1 \(10 min. 52 seg.\)](#)

"Movimiento Rectilíneo Con Velocidad Variable"

Enlace al video 02 Parte 1: https://youtu.be/kz1tp_semqY

[VIDEO Moebius 02 Parte 2 \(9 min. 24 seg.\)](#)

"Tabla y gráfica de velocidades – Ejemplo"

Enlace al video 02 Parte 2: <https://youtu.be/VQXT4pqvJAQ>

[VIDEO Moebius 02 Parte 3 \(14 min. 38 seg.\)](#)

"Distancia recorrida e Integral de la velocidad"

Enlace al video 02 Parte 3: <https://youtu.be/xwztQ2wYjRc>

[VIDEO Moebius 02 Parte 4 \(12 min. 50 seg.\)](#) *Encender audio.*

"Integral de la velocidad, Suma de Riemann, primitiva y Regla de Barrow"

Enlace al video 02 Parte 4: <https://youtu.be/jwWIDPqeSq8>

[APUNTES Moebius 02 Partes 1, 2, 3 y 4](#) (Clicar [aquí](#) para imprimir o bajar el archivo pdf con las fotos de los pizarrones de los cuatro videos anteriores.

VIDEO Moebius 03 Parte 1 (12 min. 20 seg.)

"Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado - Ecuaciones de la velocidad y de la posición en función del tiempo"

Enlace al video 03 Parte 1: <https://youtu.be/VSEvI9W7fn8>

VIDEO Moebius 03 Parte 2 (5 min. 40 seg.)

"Movimiento uniformemente acelerado - Ejemplo: caída libre"

Enlace al video 03 Parte 2: <https://youtu.be/RK9En0ggDaI>

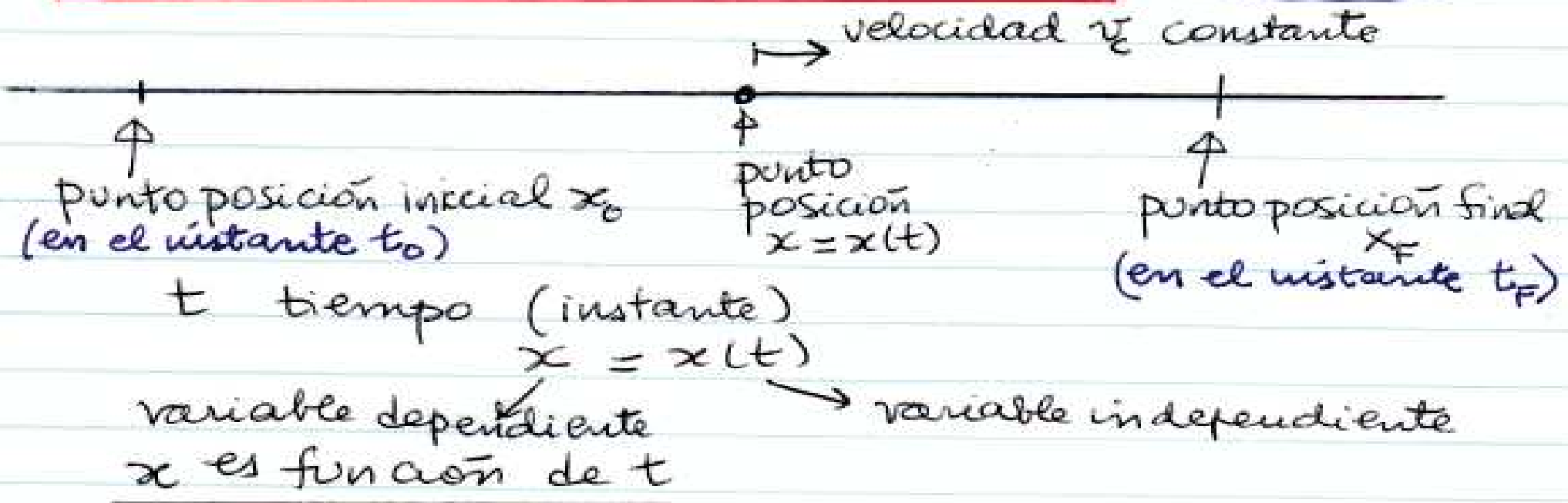
APUNTES Moebius 03 Partes 1 y 2 (Clicar [aquí](#) para imprimir o bajar el archivo pdf con las fotos de los pizarrones de los dos videos anteriores.

CLASE MOEBIUS 01

Fotos de los pizarrones

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

VELOCIDAD
CONSTANTE



velocidad

$$v = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

constanté en este caso $= v_c$

Annotations for the formula above:

- Δx : distancia recorrida (incremento en x)
- Δt : tiempo transcurrido (incremento en t)

$$v_c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \iff \Delta x = v_c \cdot \Delta t$$
$$x(t) - x_0 = v_c (t - t_0)$$

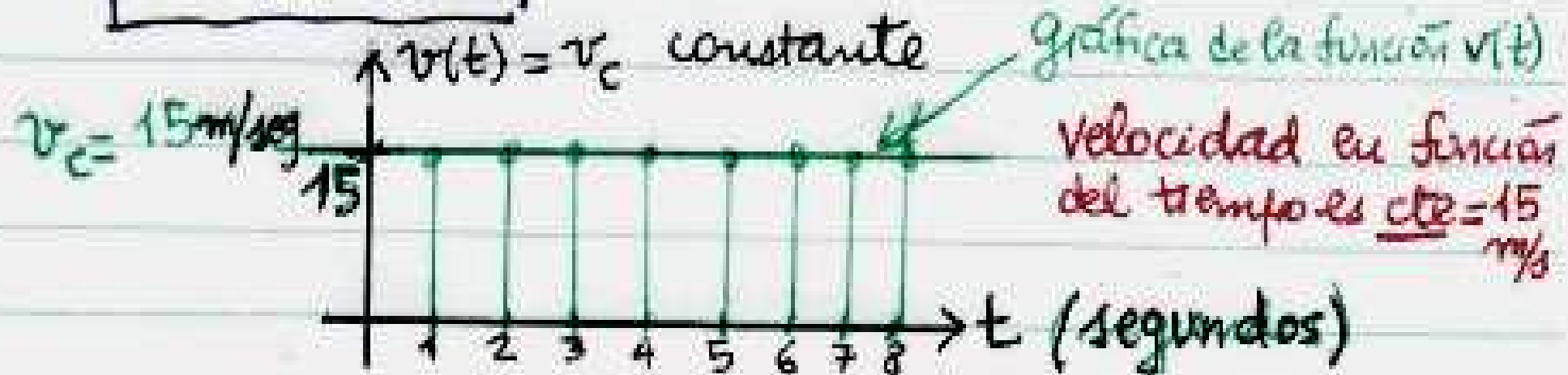
$$x(t) = x_0 + v_c (t - t_0)$$

YA TENGO LA FUNCIÓN $x = x(t)$

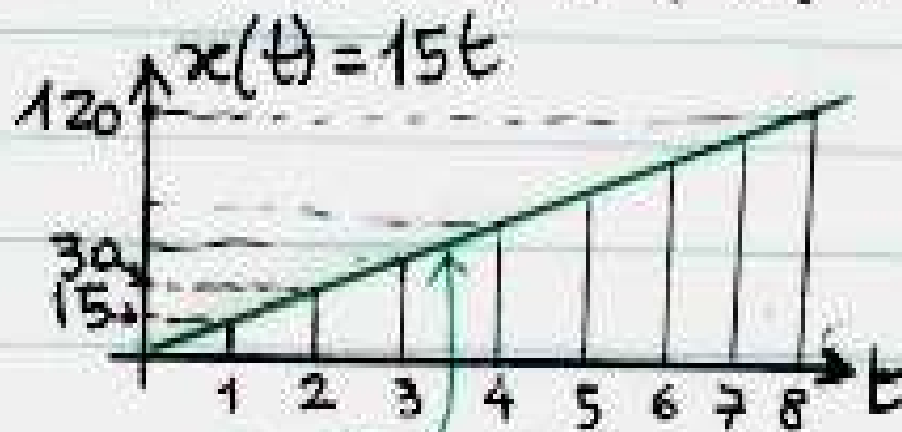
posición x en
función del
tiempo t

EJEMPLO: $t_0 = 0 \text{ seg}$ $x_0 = 0 \text{ metro}$ $v_c = 15 \text{ metros/seg}$

$$x(t) = 15t$$



posición en
función
del tiempo
es $x(t) = 15t$

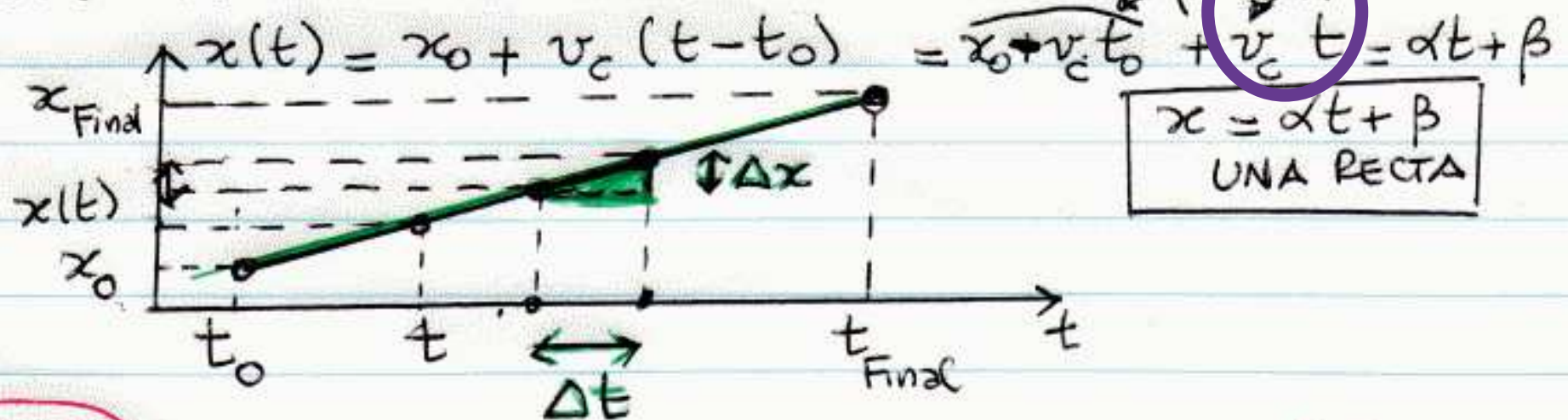


Gráfica de la función $x(t)$

en 8 segundos
el móvil recorrió
 $15 \times 8 = 120$
metros

VELOCIDAD = DERIVADA de la FUNCIÓN POSICIÓN $x(t)$

CASO: en el MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME



pendiente

$\rightarrow v_c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ← distancia recorrida (cateto opuesto)
← tiempo transcurrido (cateto adyacente)

$\Delta t \rightarrow 0$ (tiempo transcurrido muy chiquito):

$$\begin{aligned} v_c &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{DERIVADA de } x(t) \\ &= \text{PENDIENTE DE LA GRÁFICA } x(t) \\ &= x'(t) \end{aligned}$$

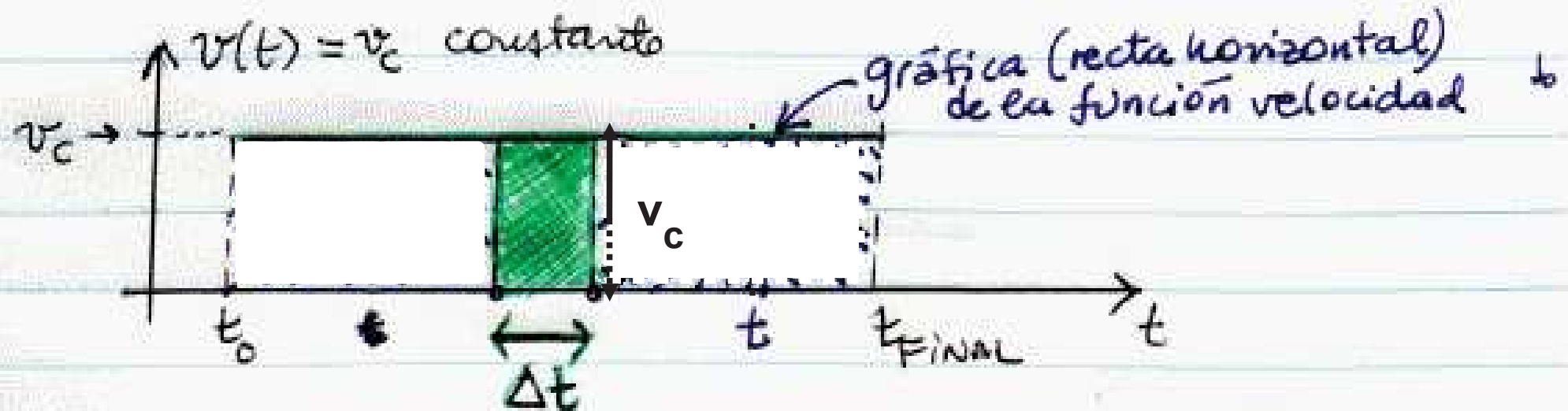
$$x(t) = \alpha t + \beta$$

$$x'(t) = (\alpha t + \beta)' = (\alpha t)' + \beta' = \alpha(t)' + \beta' = \alpha \cdot 1 + 0 = \alpha$$

$$x'(t) = \alpha = v_c$$

POSICIÓN = ÁREA ABajo de la GRÁFICA de la FUNCIÓN VELOCIDAD $v(t)$
 (DISTANCIA RECORRIDA) "INTEGRAL".

CASOS en el MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

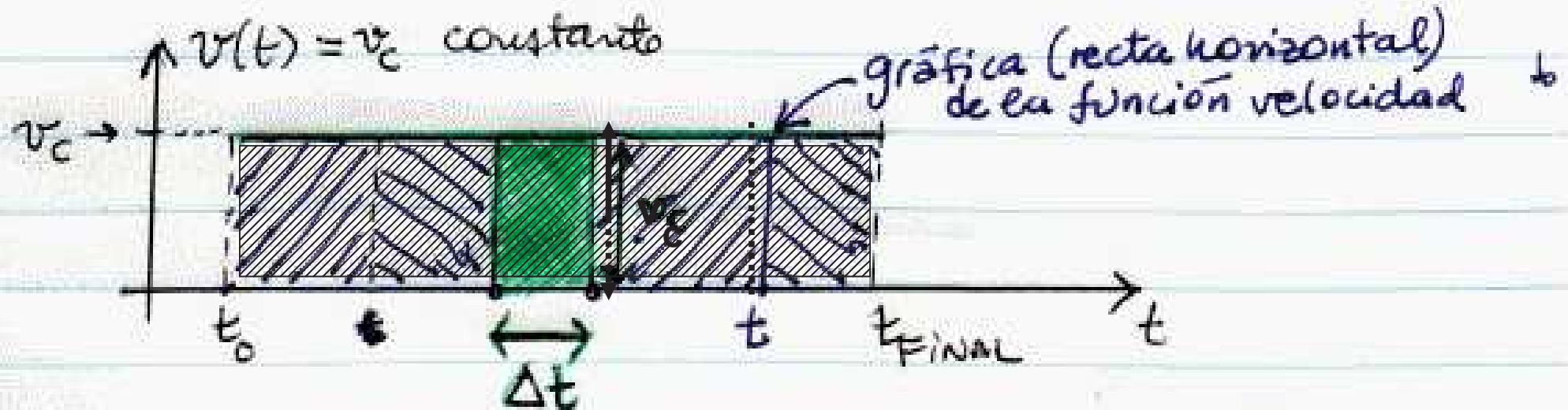


$$v_c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = v_c \cdot \Delta t \leftarrow \begin{array}{l} \text{base} \cdot \text{altura} = \\ \text{área del Rectángulo} \end{array}$$

distancia recorrida

POSICIÓN = ÁREA ABajo de la GRÁFICA de la FUNCIÓN VELOCIDAD $v(t)$
 (DISTANCIA RECORRIDA) "INTEGRAL".

CASOS en el MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME



$$v_c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = v_c \cdot \Delta t \leftarrow \begin{array}{l} \text{base} \cdot \text{altura} = \\ \text{área del Rectángulo} \end{array}$$

distancia recorrida

$$\underbrace{x_{FINAL} - x_{0(INICIAL)}}_{\text{distancia recorrida total}} = v_c (t_{FINAL} - t_0) \leftarrow \begin{array}{l} \text{área abajo} \\ \text{de la gráfica} \\ \text{de la función} \\ \text{velocidad } v(t) \end{array}$$

¿Cómo calculo esa área (llamada Integral de $v(t)$)?

Sabemos que $x'(t) = v$. Entonces:

- Encuentro alguna función $x(t)$ cuya derivada sea $v(t)$
- DISTANCIA RECORRIDA = $x(t_{\text{FINAL}}) - x(t_{\text{INICIAL}})$

EJEMPLO:

Móvil a velocidad constante 15 metros/seg.

Arranca en el instante $0 = t_0 = t_{\text{INICIAL}}$

Llega en el instante 8 seg = t_{FINAL}

¿Qué distancia recorrió? (Sabemos que es $8 \cdot 15 = 120$ metros)

Distancia recorrida = Área abajo de la
gráfica de la función $v(t)$
"(INTEGRAL de $v(t)$)"

Método gral para encontrar el área abajo de la gráfica de $v(t)$

EJEMPLO:

Móvil a velocidad constante 15 metros/seg.

Arranca en el instante $0 = t_0 = t_{\text{INICIAL}}$

Llega en el instante 8 seg = t_{FINAL}

¿QUÉ distancia recorrió? (Sabemos que es $8 \cdot 15 = 120$ metros)

Distancia recorrida = Área abajo de la
gráfica de la función $v(t)$
"INTEGRAL de $v(t)$ "

Método gral para encontrar el área abajo de la gráfica de $v(t)$

PASO 1 "TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO" Y "PRIMITIVA"

- Encontrar una función $x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$

PASO 2 "REGLA DE BARROW"

- Distancia recorrida =
Área abajo de la gráfica de la función $v(t)$ =
$$= x(t_{\text{FINAL}}) - x(t_{\text{INICIAL}})$$

En el ejemplo

$$v(t) = 15 \text{ constante } \forall t$$

PASO 1 • $x(t)$ tal que $x'(t) = 15$? Por ejemplo

• $x(t) = 15t + 7$ porque
PRIMITIVA (HAY MUCHAS) $x'(t) = (15t + 7)' = 15t' + 7' =$
 $= 15 \cdot 1 + 0 =$
 $= 15$

PASO 2 • BARROW

DISTANCIA RECORRIDA = Área abajo de la gráfica de $v(t)$

$$= x(t_{\text{FINAL}}) - x(t_{\text{inicial}}) =$$

$$= (15 \underset{\substack{\parallel \\ 8}}{t_{\text{FINAL}}} + 7) - (15 \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{t_{\text{inicial}}} + 7) = 15 \cdot 8 = \underline{\underline{120 \text{ metros}}}$$

En el ejemplo

$$v(t) = 15 \text{ constante } \forall t$$

PASO 1 • $x(t)$ tal que $x'(t) = 15$? Por ejemplo

• $x(t) = 15t + 7$ porque
PRIMITIVA (HAY MUCHAS) $x'(t) = (15t + 7)' = 15t' + 7' =$
 $= 15 \cdot 1 + 0 =$
 $= 15$

PASO 2 • BARROW

DISTANCIA RECORRIDA = Área abajo de la gráfica de $v(t)$

$$= x(t_{\text{FINAL}}) - x(t_{\text{inicial}}) =$$

$$= (15 \underset{\substack{\parallel \\ 8}}{t_{\text{FINAL}}} + 7) - (15 \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{t_{\text{inicial}}} + 7) = 15 \cdot 8 = \underline{\underline{120 \text{ metros}}}$$

Respuesta en el ejemplo:

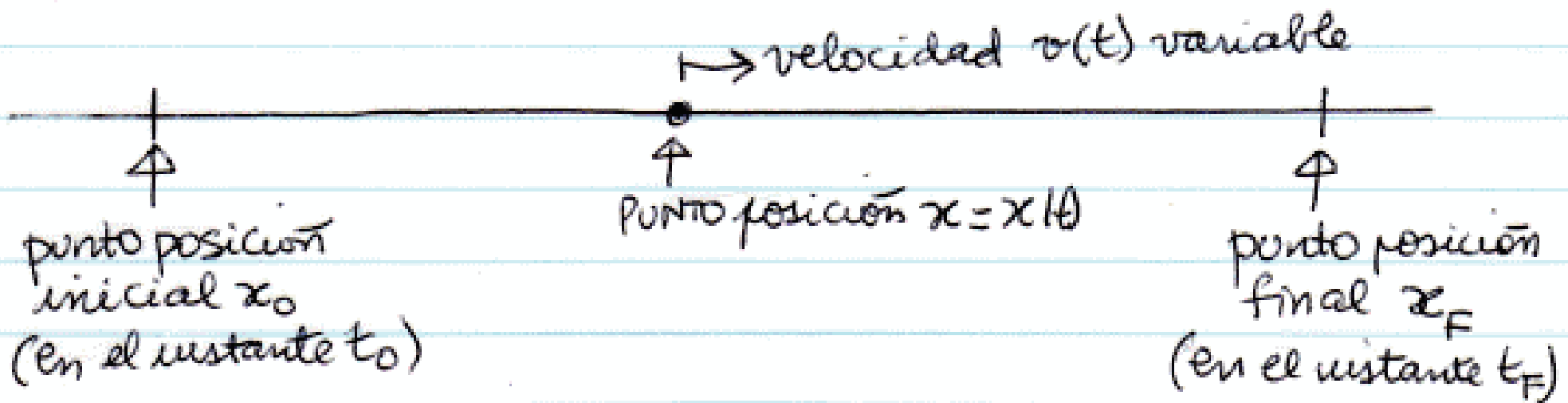
el móvil recorrió 120 metros

CLASE MOEBIUS 02

Fotos de los pizarrones

MOVIMIENTO RECTILÍNEO VARIABLE

VELOCIDAD
VARIABLE



t tiempo (instante)

$$x = x(t)$$

variable dependiente

x es función de t

variable independiente

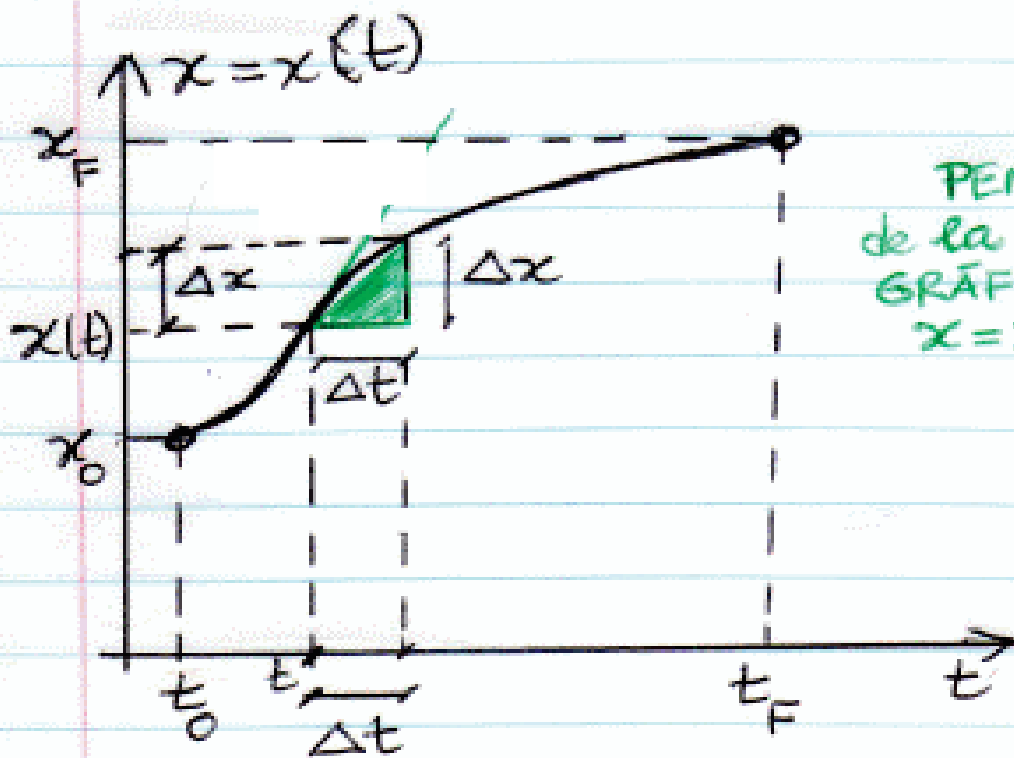
velocidad

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

distancia recorrida
(incremento en x)

tiempo transcurrido
(incremento en t)

variable que depende del tiempo t :



PENDIENTE
de la CURVA
GRÁFICA
 $x = x(t)$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

= DERIVADA DE LA
FUNCIÓN $x(t)$

Velocidad en función
del tiempo es la
derivada de la
función posición
respecto del tiempo
 $v(t) = x'(t)$

EJEMPLO: t en segundos, x en metros.

$$x(t) = 4 + t - \frac{t^3}{21} \Rightarrow v(t) = \left(4 + t - \frac{t^3}{21}\right)' =$$

$$v(t) = 4' + t' - \frac{(t^3)'}{21} = 0 + 1 - \frac{3t^2}{21} = 1 - \frac{t^2}{7}$$

$$v(t) = 1 - \frac{t^2}{7}$$

Al cabo de 2 segundos

$$v(2) = 1 - \frac{2^2}{7} = \frac{3}{7}$$

metros/seg

$$\text{aceleración} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

← incremento en la velocidad $v(t)$
← tiempo transcurrido (incremento en t)

variable $a = a(t)$ que también depende del tiempo
(en particular la aceleración a puede ser constante)

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN $v(t)$

aceleración en función del tiempo es la derivada de la función velocidad respecto del tiempo
 $a(t) = v'(t)$

$$a(t) = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$$

aceleración en función del tiempo es la derivada segunda de la función posición respecto del tiempo.

En el ejemplo anterior

posición $x(t) = 4 + t - \frac{t^3}{21}$

velocidad $v(t) = 1 - \frac{t^2}{7}$

aceleración $a(t) = \left(1 - \frac{t^2}{7}\right)' = -\frac{1}{7} (t^2)' = -\frac{1}{7} \cdot 2t =$
 $= -\frac{2}{7} t$

Al cabo de 1 segundo la aceleración es

$$a(1) = -\frac{2}{7} \text{ metros/segundo}^2$$

Está frenando.

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$
instante inicial $= t_0$	0 km/hora
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora.
instante final $= t_f = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$	ACELERACIÓN $a(t)$
instante inicial $= t_0$	0 km/hora	
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora	$\frac{60 \text{ km/hora} - 0}{10 \text{ minutos}} = \frac{100 \text{ metros}}{\text{min}^2}$
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$		
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$		
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$		
instante final $= t_f = t_0 + 57 \text{ min}$		

cálculo de aceleración en el 1er tramo

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 0}{t_0 + 10 - t_0} = \frac{60 \text{ km/hora}}{10 \text{ minutos}} = \frac{60 \text{ km} / 60 \text{ minutos}}{10 \text{ minutos}} \\
 &= \frac{1}{10} \text{ km/min}^2 = \frac{1000 \text{ metros/min}^2}{10} = 100 \text{ metros/min}^2
 \end{aligned}$$

TABLA DE VELOCIDADES & CURVA GRÁFICA de VELOCIDAD

EJEMPLO

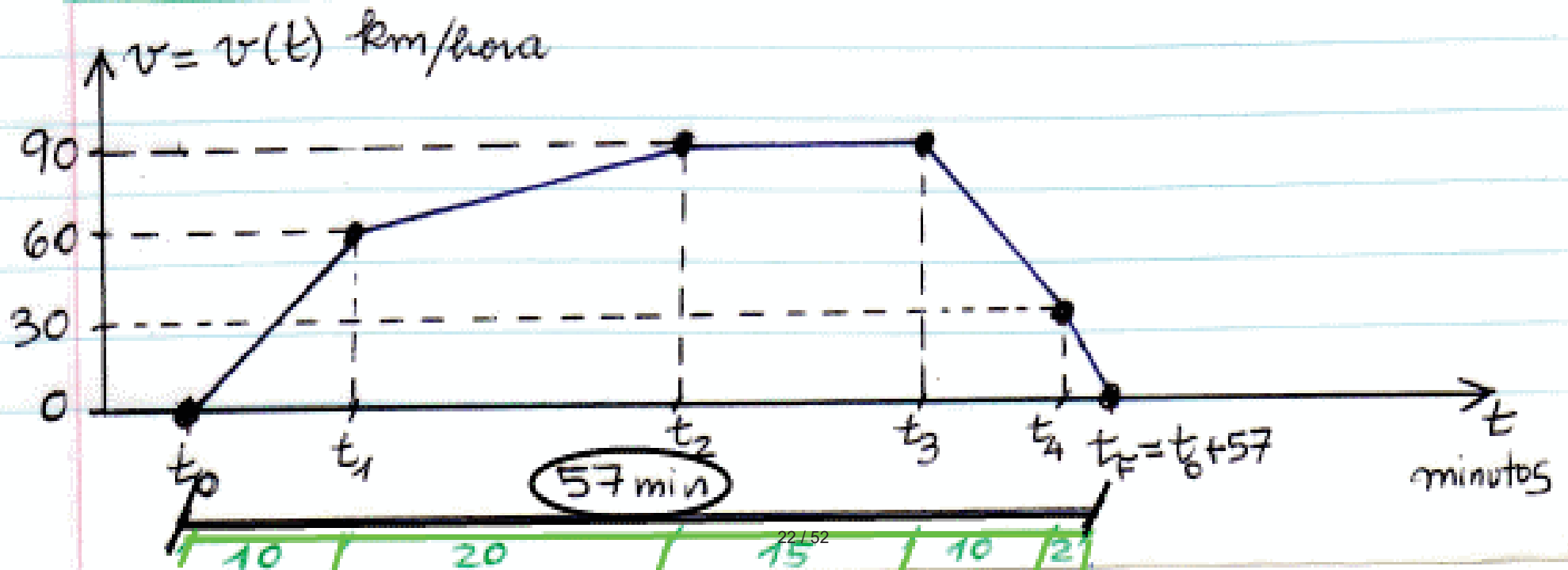
Recorrido de un ómnibus de línea debe respetar la siguiente tabla de velocidades

¿Cuál es la aceleración en cada tramo?

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$	ACELERACIÓN $a(t)$
instante inicial $= t_0$	0 km/hora	
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora	$\frac{60 \text{ km/hora} - 0}{10 \text{ minutos}} = 100 \text{ metros/min}^2$
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora	$\frac{30 \text{ km/hora} - 60 \text{ km/hora}}{20 \text{ minutos}} = 25 \text{ metros/min}^2$
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora	
	90 km/hora	$\frac{0 \text{ km/hora} - 90 \text{ km/hora}}{15 \text{ min}} = 0 \text{ metros/min}^2$
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora	$\frac{-60 \text{ km/hora} - 90 \text{ km/hora}}{10 \text{ minutos}} = -100 \text{ metros/min}^2$
instante final $= t_f = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora	$\frac{-30 \text{ km/hora} - 30 \text{ km/hora}}{2 \text{ minutos}} = -250 \text{ metros/min}^2$

INSTANTE t	VELOCIDAD $v(t)$
instante inicial $= t_0$	0 km/hora
$t_1 = t_0 + 10 \text{ min.}$	60 km/hora
$t_2 = t_0 + 30 \text{ min}$	90 km/hora
$t_3 = t_0 + 45 \text{ min}$	90 km/hora
$t_4 = t_0 + 55 \text{ min}$	30 km/hora
instante final $= t_F = t_0 + 57 \text{ min}$	0 km/hora

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



EN EL EJEMPLO DEL RECORRIDO DE ÓMNIBUS

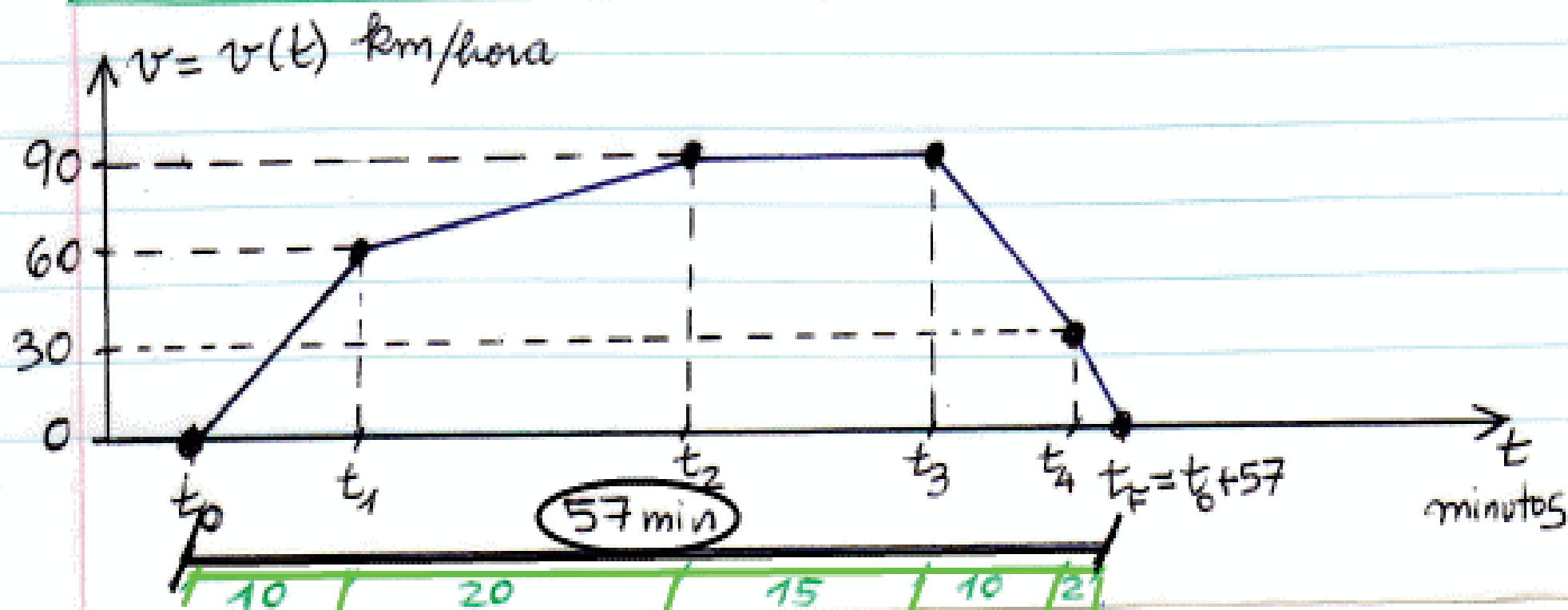
$$\boxed{\text{DISTANCIA RECORRIDA}} = \boxed{\text{ÁREA ABATO DE LA CURVA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VELOCIDAD } v = v(t)}$$

$x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}$

Integral de $v(t)$

Demostración
geométrica

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



EN EL EJEMPLO DEL RECORRIDO DE ÓMNIBUS

$$\boxed{\text{DISTANCIA RECORRIDA}} = \boxed{\text{ÁREA ABATO DE LA CURVA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VELOCIDAD } v = v(t)}$$

Demostración geométrica

$x_{\text{FINAL}} - x_{\text{INICIAL}}$

Integral de $v(t)$

En el 1er tramo desde instante inicial t_0 hasta instante $t_1 = t_0 + 10 \text{ minutos}$

Velocidad $v(t)$ crece

desde $v(t_0) = 0 \text{ km/hora}$

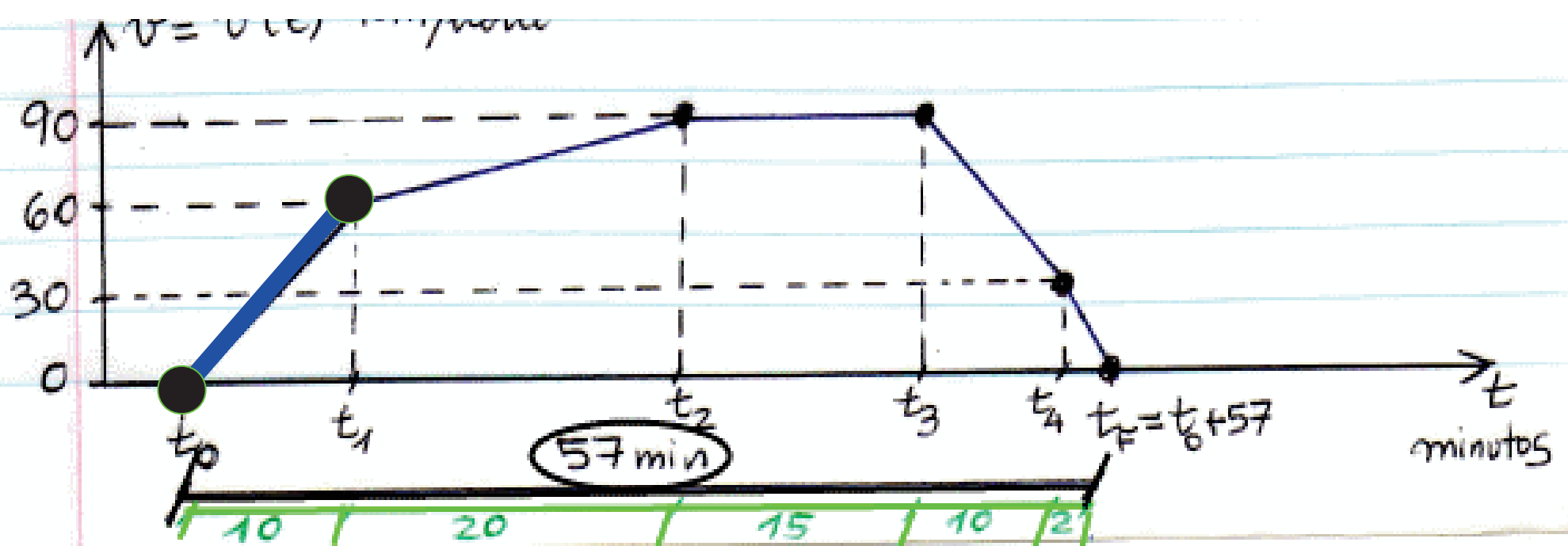
↓ velocidad inicial

hasta $v(t_1) = 60 \text{ km/hora}$

1. ¿qué distancia recorrió en el 1er tramo?

← FALTA DATO de cómo fue acelerando

2. Supongamos que fue acelerando de manera "uniforme" para pasar de 0 a 60 km/hora en el 1er tramo



Supongamos que fue acelerando de manera "uniforme" para pasar de 0 a 60 km/hora

VELOCIDAD PROMEDIO en el 1er tramo:

durante el primer tramo

• velocidad promedio: 30 km/hora en ese tramo

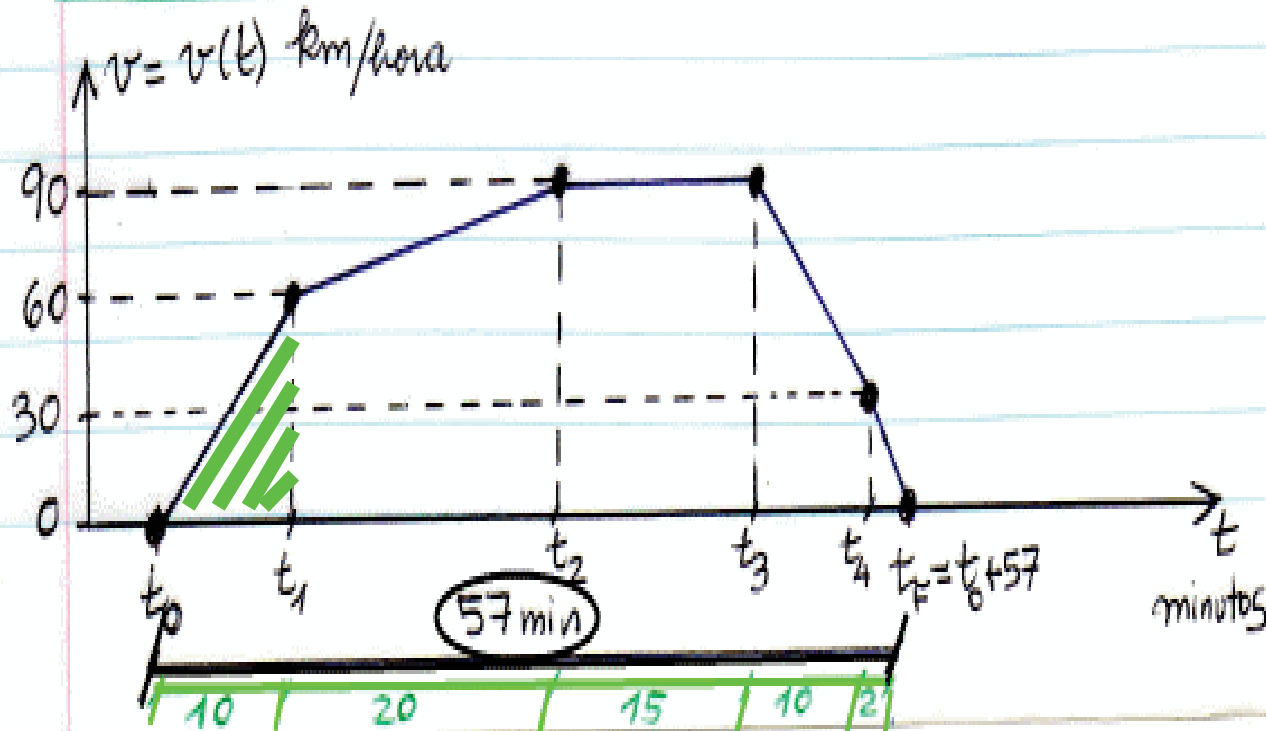
• Duración del tramo 10 minutos

• * Distancia recorrida en el 1er tramo = 30 km/hora • 10 min *

$$= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ minutos}} \cdot 10 \text{ minutos} = \frac{300}{60} \text{ km} = 5 \text{ km}$$

DISTANCIA RECORRIDA EN EL 1ER. TRAMO = 30 Km/hora • 10 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



ÁREA ABajo de curva
GRÁFICA de la
FUNCIÓN velocidad
en el 1er tramo

=
ÁREA del TRIÁNGULO
de BASE $\Delta t = 10$ minutos
ALTURA $60 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$

son iguales

Área triángulo

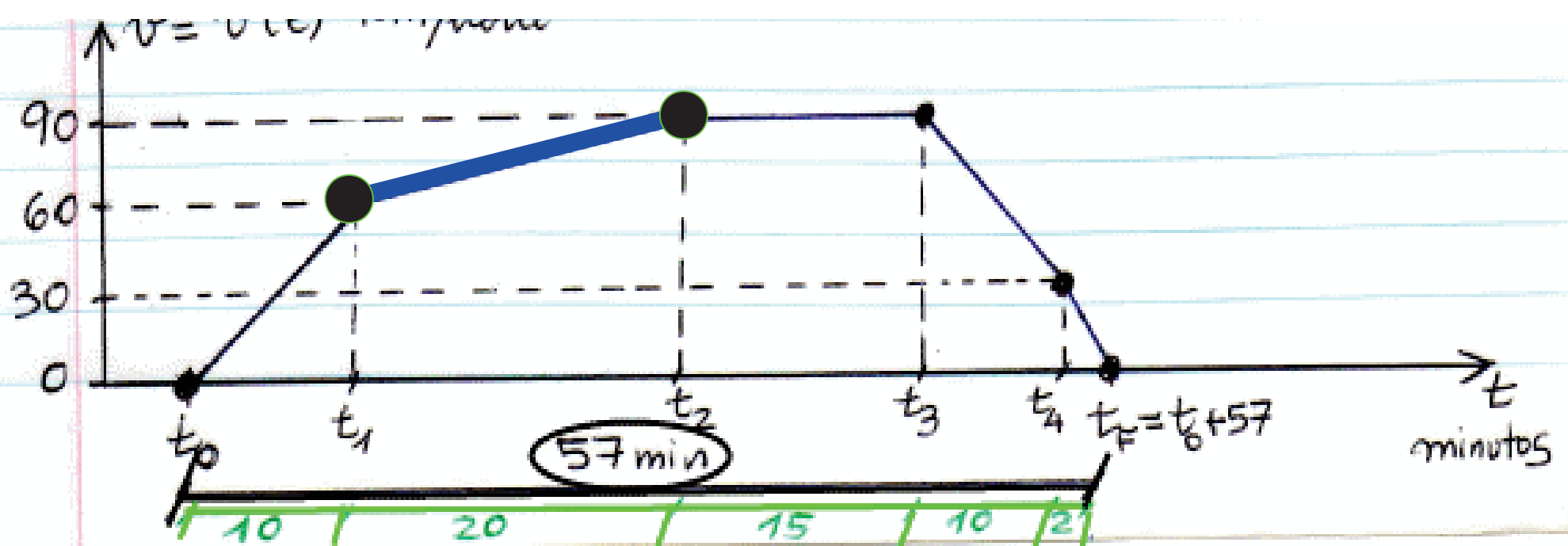


$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{10 \text{ minutos}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{60 \frac{\text{km}}{\text{hora}}}_{\text{altura}} \right) = \underbrace{30 \frac{\text{km}}{\text{hora}}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{10 \text{ min}}_{\text{altura}}$$

Área triángulo



= Distancia recorrida en el primer tramo



VELOCIDAD PROMEDIO en 2do tramo:

- $\text{veloc. promedio} = 60 + \frac{90 - 60}{2} = 60 + 15 = 75 \text{ km/hora}$

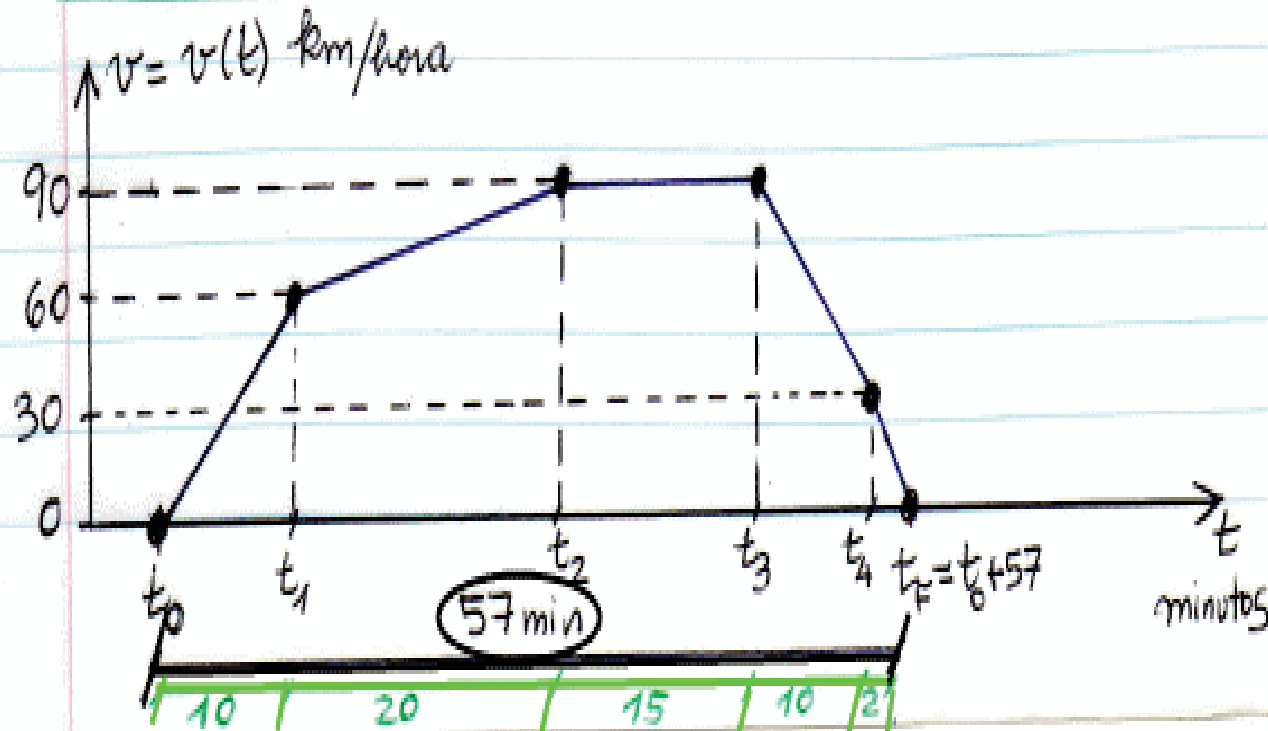
- $\text{tiempo transcurrido} = 20 \text{ minutos} = \frac{1}{3} \text{ hora}$
(Duración del 2do tramo)

- $\text{Distancia recorrida en el 2do tramo} = 75 \text{ km/hora} \cdot 20 \text{ minutos}$

$$= 75 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \cdot \frac{1}{3} \text{ hora} = 25 \text{ km}$$

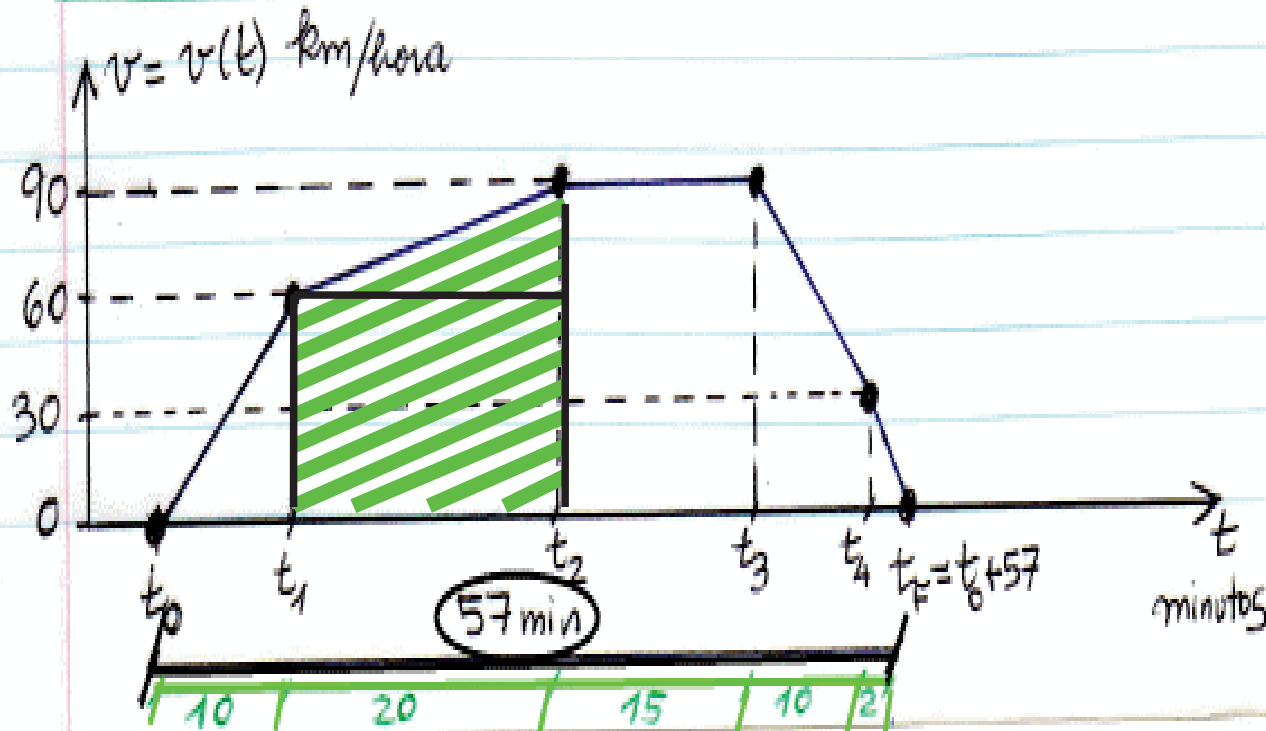
DISTANCIA RECORRIDA EN EL 2do. TRAMO = 75 Km/hora • 20 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



DISTANCIA RECORRIDA EN EL 2do. TRAMO = 75 Km/hora • 20 minutos

curva gráfica de la velocidad en función del tiempo



ÁREA ABajo de CURVA
GRÁFICA de la
FUNCIÓN velocidad
en el 2d tramo

Área del TRAPÉCIO  = $75 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \cdot 20 \text{ minutos}$

  $\Rightarrow$ Área del trapecio  = Distancia recorrida
en el 2do tramo

Análogamente ; tramo por tramo:

Área abajo de curva
GRÁFICA de la
FUNCIÓN VELOCIDAD
en CADA TRAMO = Distancia
recorrida en
CADA TRAMO

"Integrando" todos los tramos (sumando
las áreas abajo de cada tramo y sumando
las distancias recorridas en cada tramo:

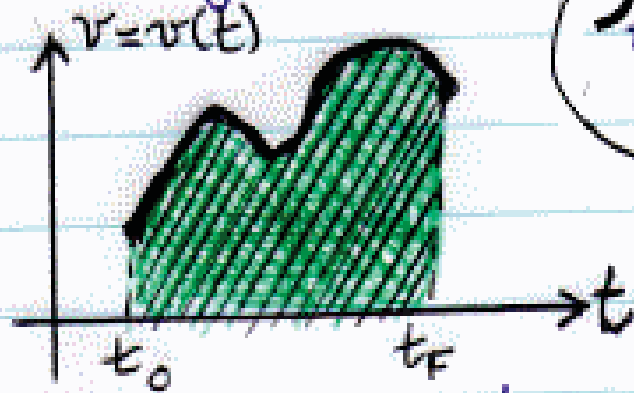
ÁREA ABAJO de CURVA
GRÁFICA de la
FUNCIÓN VELOCIDAD $v = v(t)$
dependiendo del tiempo,
entre INSTANTE INICIAL t_0
e INSTANTE FINAL t_f = Distancia
recorrida
total =
POSICIÓN FINAL x_f
- POSICIÓN INICIAL x_0

ÁREA, INTEGRAL, PRIMITIVA Y REGLA DE BARROW

Ya tenemos:

① **ÁREA** abajo de la curva gráfica de la función velocidad $v(t)$ = **DISTANCIA** recorrida total

Esta **ÁREA** se llama **INTEGRAL** de $v(t)$ y se denota



$$\int_{t_0}^{t_F} v(t) dt$$

$$x(t_F) - x(t_0)$$

t_0 = instante inicial

t_F = instante final

$$\text{Área} = \int_{t_0}^{t_F} v(t) dt = x(t_F) - x(t_0) = x_F - x_0$$

② FUNCIÓN VELOCIDAD $v(t)$ que depende del tiempo t = DERIVADA de la función posición $x = x(t)$ con respecto del tiempo t

$$v(t) = x'(t)$$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$ y quiero encontrar la función velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $v(t) = x'(t)$

ejemplo $x(t) = 4 + t + \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{9}$

$$\Rightarrow v(t) = 1 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{3}t^2$$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$
y quiero encontrar la función
velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $\boxed{v(t) = x'(t)}$

Problema inverso Conozco la función velocidad $v(t)$
y quiero encontrar la distancia recorrida
 $x(t) - x_0$

Problema : Conozco la función posición $x(t)$
y quiero encontrar la función
velocidad $v(t)$

Solución : derivar $x(t)$ $\boxed{v(t) = x'(t)}$

Problema inverso Conozco la función velocidad $v(t)$
y quiero encontrar la distancia recorrida
 $x(t) - x_0$

Solución : Calculo el área abajo de la gráfica de $v(t)$

Es decir, "integrar" $v(t)$: $x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v(t) dt$

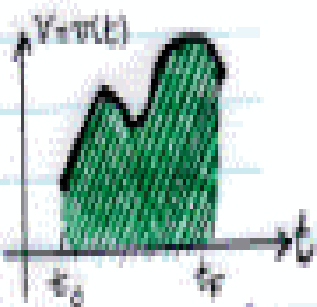
Pero ¿cómo hago para calcular esa área?

¿Cómo hago para calcular el área verde?

Es decir para calcular

$$\int_{t_0}^{t_F} v(t) dt \quad \text{"INTEGRAL"}$$

de la función $v(t)$



Idea: En el ejemplo del recorrido del ómnibus

la calculamos geométricamente como **suma**

de áreas de rectángulos, triángulos, trapecios

Obstrucción:

Pero ahora la curva gráfica no forma

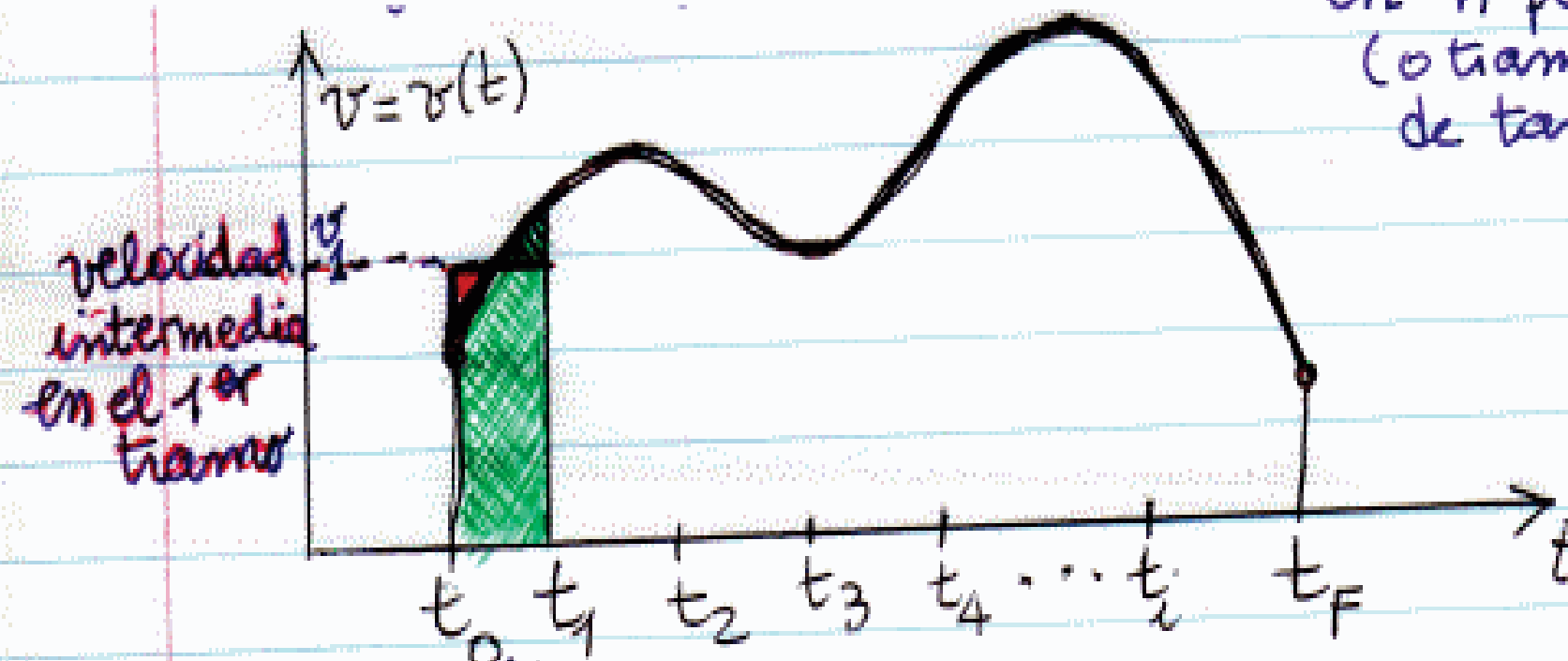
figuras geométricas cuyas áreas

sepa calcular! (rectángulos, triángulos, etc)

SOLUCIÓN: Varios métodos

Integración por SUMA de RIEMANN

Parto el INTERVALO de tiempo $[t_0, t_F]$
en n pedacitos
(o tramos)
de tamaño Δt



1er tramo Δt

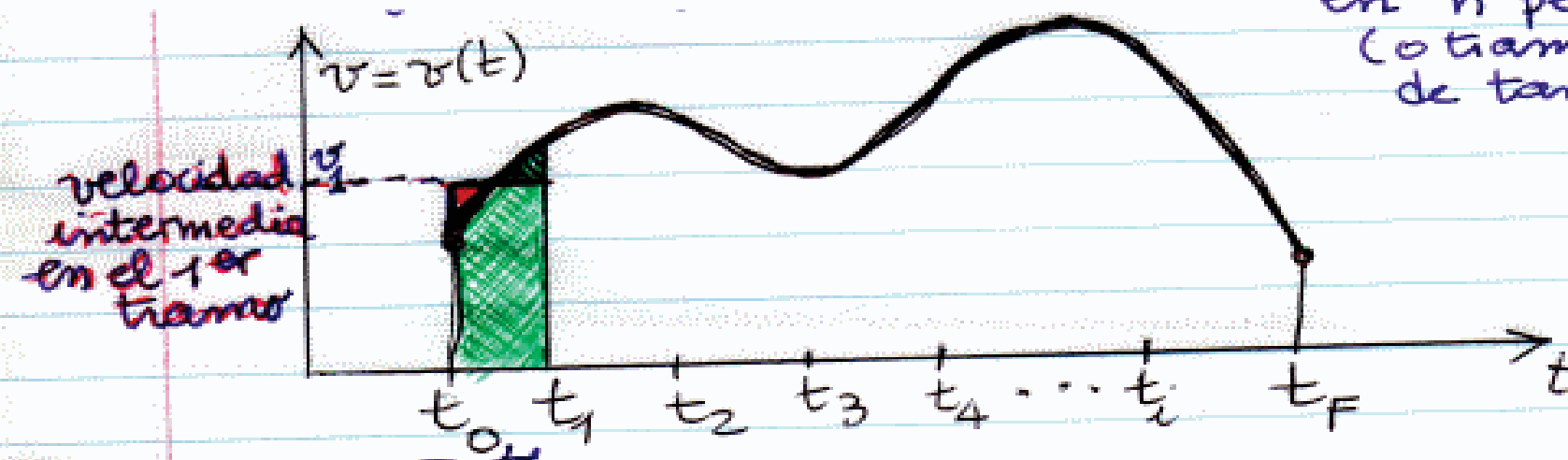
Área verde  = área rectángulo 

error $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{l} - \text{área "esquina" izquierda superior} \\ + \text{área "esquina" derecha superior} \end{array} \right)$

SOLUCIÓN: Varios métodos

Integración por SUMA de RIEMANN

Parto el INTERVALO de tiempo $[t_0, t_F]$
en n pedacitos
(o tramos)
de tamaño Δt



$$\text{SUMA de ÁREAS VERDES} = \int_{t_0}^{t_F} v(t) dt$$

$$\approx \text{SUMA de Áreas de RECTÁNGULOS}$$

$$\approx \text{SUMA de (Bases} \cdot \text{alturas)}$$

$$\approx \text{SUMA de } \underbrace{\text{alturas}}_{v_i} \cdot \Delta t$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t \quad \leftarrow \text{"SUMA de RIEMANN"}$$

MÉTODO
de

INTEGRACIÓN POR SUMAS de RIEMANN

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivada de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

• Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivada de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

• Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

● Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

Ejemplo: Si $v(t) = 45 - t^2$

Entonces puedo elegir

$$x(t) = 45t - \frac{t^3}{3} + \sqrt{2}$$

"Primitiva"
de $v(t)$

HAY MUCHAS

porque $x'(t) = \left(45t - \frac{t^3}{3} + \sqrt{2}\right)' =$

$$= 45t' - \frac{(t^3)'}{3} + (\sqrt{2})' =$$

$$= 45 \cdot 1 - \frac{3t^2}{3} + 0$$

$$= 45 - t^2$$

Método de INTEGRACIÓN por PRIMITIVA y REGLA de BARROW

Recordemos el planteo del problema:

- Sabemos que $x'(t) = v(t)$ (velocidad = derivada de posición)
- Conocemos $v(t)$
- Queremos hallar la distancia recorrida que es $x(t_f) - x(t_0)$ pero no conocemos la función $x(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

• Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$

1er paso

PRIMITIVACIÓN

● Encontrar (ingeniárselas) alguna función

$x(t)$ CUYA DERIVADA sea la función $v(t)$ dada

2do paso

REGLA DE BARROW

● En la función $x(t)$ encontrada

SUSTITUYO $t = t_f$

y SUSTITUYO $t = t_0$

y RESTO: $x(t_f) - x(t_0)$

DISTANCIA RECORRIDA $= x(t_f) - x(t_0)$

CONCLUSIÓN

$$\int_{t_0}^{t_f} v(t) dt = x(t_f) - x(t_0)$$

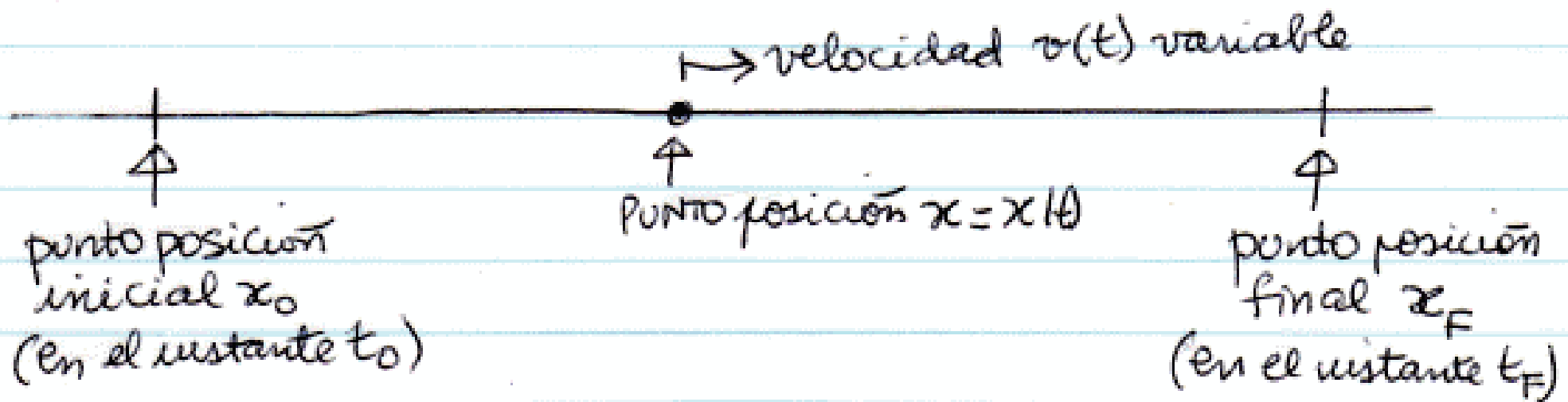
DONDE $x(t)$ es UNA primitiva de $v(t)$

CLASE MOEBIUS 03

Fotos de los pizarrones

MOVIMIENTO RECTILÍNEO VARIABLE

VELOCIDAD
VARIABLE



t tiempo (instante)

$$x = x(t)$$

variable dependiente

x es función de t

variable independiente

velocidad

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

distancia recorrida
(incremento en x)

tiempo transcurrido
(incremento en t)

variable que depende del tiempo t :

Velocidad
Variable
con Aceleración
Constante

EN ESTE CASO

es una constante a

significa que la velocidad se incrementa siempre 2 metros/segundo en cada segundo transcurrido.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = v(t) - v_0$$

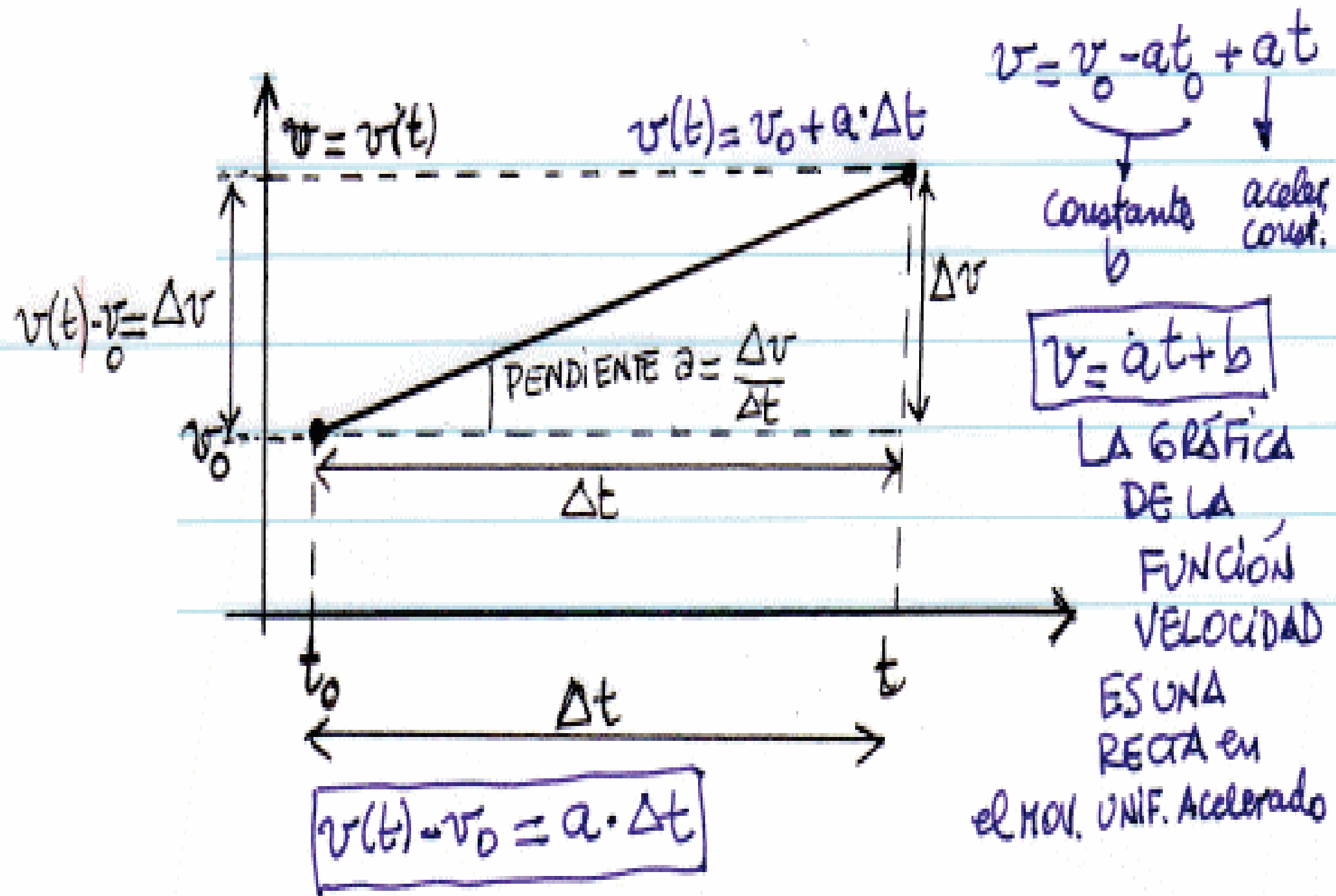
↳ velocidad inicial, en el instante inicial t_0 , o sea $v_0 = v(t_0)$

$$\Delta t = t - t_0$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$v(t) - v_0 = a \cdot (t - t_0) \Leftrightarrow v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

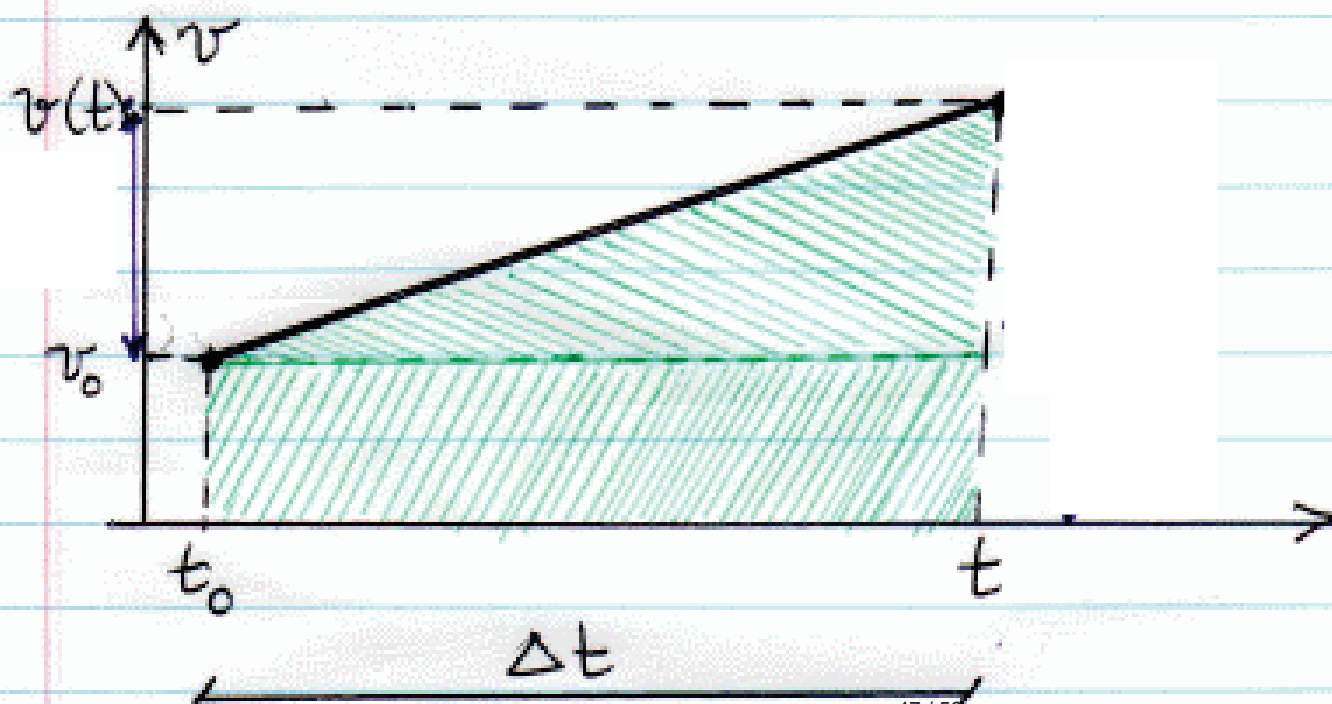
FÓRMULA DE LA FUNCIÓN VELOCIDAD EN EL MOVIM. UNIFORMEMENTE ACELER.



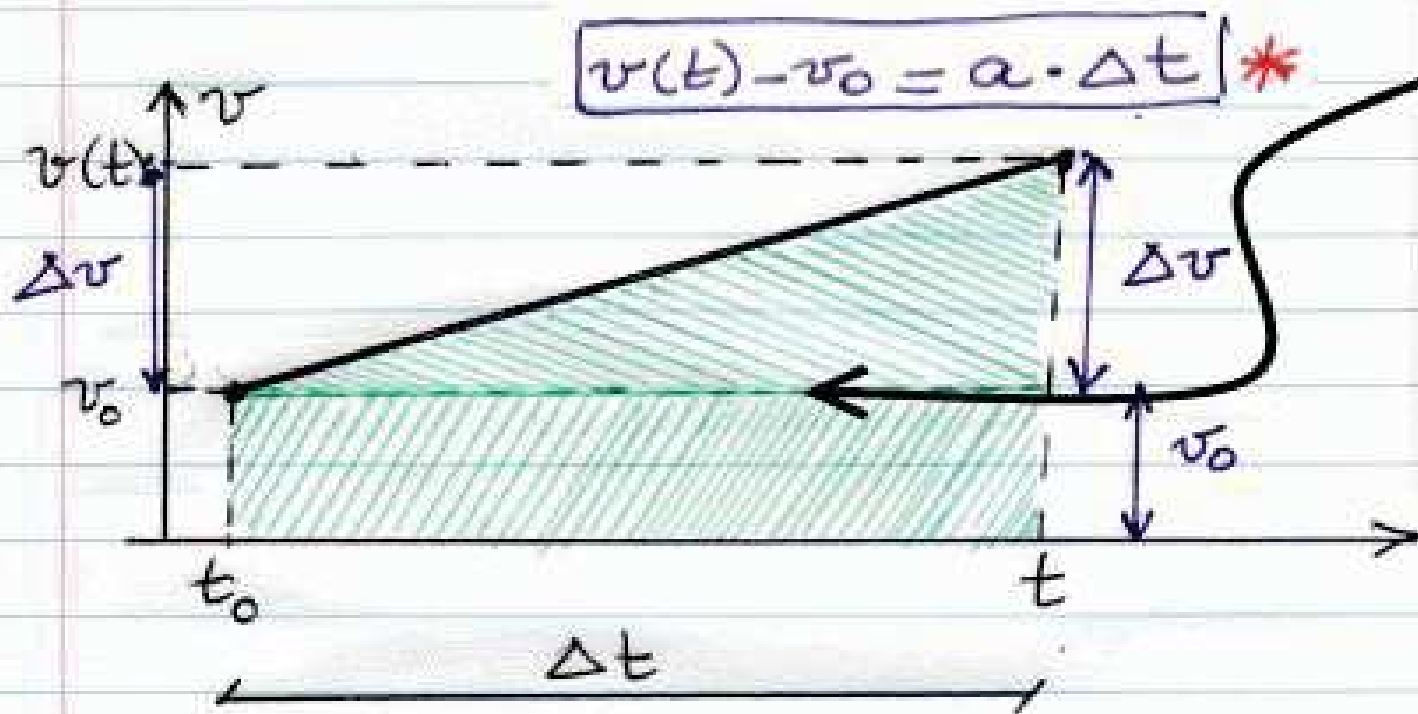
Sabemos que $v(t) - v_0 = a \cdot \Delta t$ *
el movimiento uniformemente acelerado

¿Cuál es la función posición?
 $x = x(t)$

Vimos que la distancia recorrida =
área abajo de la gráfica de la
función velocidad $v = v(t)$



(Esa área se
llama "INTEGRAL"
de la función
 $v(t)$.
 $\int_{t_0}^t v(t) dt$)



Esa área se llama "INTEGRAL" de la función $v(t)$.

$$\int_{t_0}^t v(t) dt$$

Distancia recorrida = Área verde

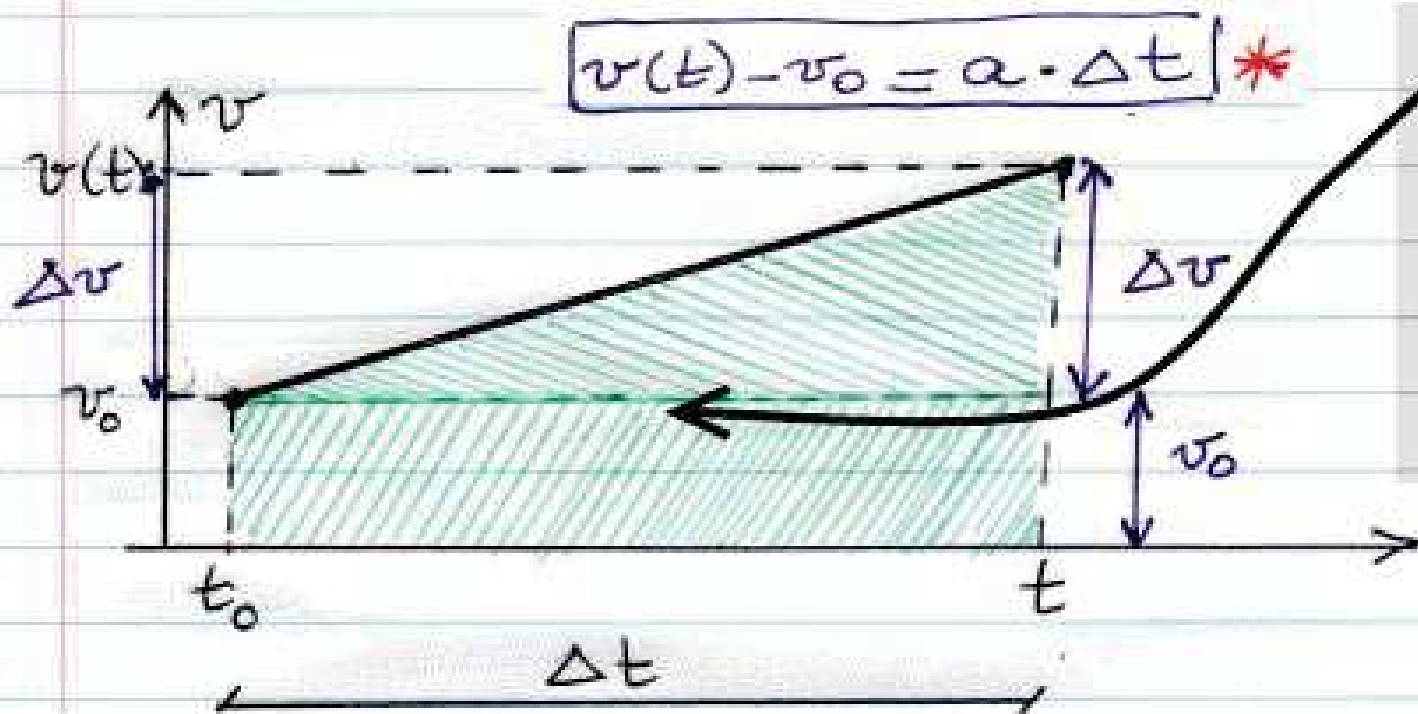
Posición en el instante t - posición inicial = Área verde

$x(t) - x_0$ = Área rectángulo + Área triángulo

↓
Posición inicial

$$x(t) - x_0 = \underbrace{\text{base}}_{\Delta t} \cdot \underbrace{\text{altura rectángulo}}_{v_0} + \frac{\underbrace{\text{base}}_{\Delta t} \cdot \underbrace{\text{altura triángulo}}_{\Delta v}}{2}$$

$$x(t) - x_0 = \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t \cdot \Delta v}{2}$$



(Esa área se llama "INTEGRAL" de la función $v(t)$.)
 $\int_{t_0}^t v(t) dt$

$$x(t) - x_0 = \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t \cdot \Delta v}{2}$$

$$x(t) - x_0 = \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t \cdot (v(t) - v_0)}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{\Delta t \cdot (v(t) - v_0)}{2}} \right\} \text{Usé } *$$

$$x(t) - x_0 = \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t \cdot (a \cdot \Delta t)}{2}$$

$$x(t) - x_0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} (\Delta t)^2 \quad \text{donde } \Delta t = t - t_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2} (t - t_0)^2$$

FÓRMULA de la
FUNCIÓN POSICIÓN
en el MOV. U.A.

CONCLUSIONES:

En el movimiento ^{rectilíneo} uniformemente acelerado

la FÓRMULA de la VELOCIDAD en FUNCIÓN del tiempo t es

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

velocidad
en el
instante t

velocidad inicial

instante inicial
aceleración constante

LA FÓRMULA de la POSICIÓN $x(t)$ en FUNCIÓN del tiempo t es

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2} (t - t_0)^2$$

velocidad
inicial

posición inicial (en la recta donde se
mueve)

posición en el instante t en la recta donde se mueve

CONCLUSIONES:

En el movimiento ^{rectilíneo} uniformemente acelerado

la FÓRMULA de la VELOCIDAD en FUNCIÓN del tiempo t es

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

velocidad
en el
instante t

velocidad inicial

instante inicial
aceleración constante

LA FÓRMULA de la POSICIÓN $x(t)$ en FUNCIÓN del tiempo t es

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2} (t - t_0)^2$$

velocidad
inicial

posición inicial (en la recta donde se
mueve)

posición en el instante t en la recta donde se mueve

Fórmulas de velocidad y posición en función del tiempo del mov. rectilíneo uniformemente acelerado

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

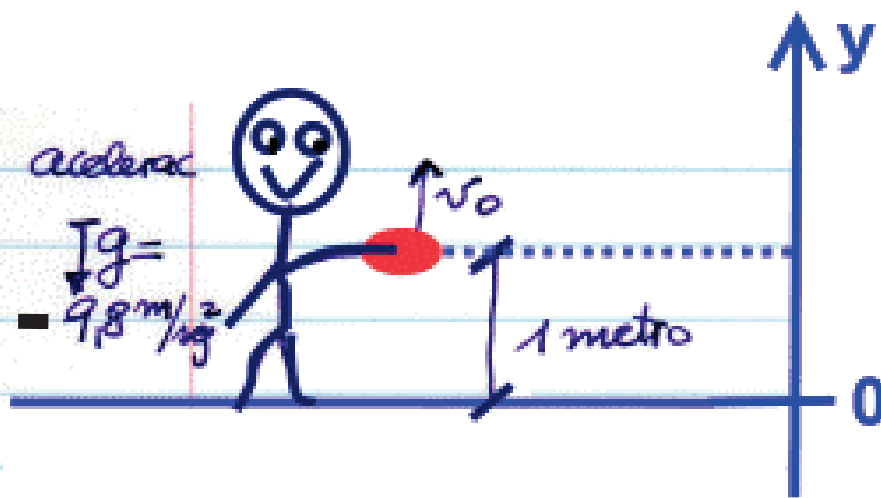
$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2$$

EJEMPLO:

En el instante inicial una persona lanza un objeto hacia arriba verticalmente con cierta velocidad inicial v_0 .

¿Cuál es el valor de v_0 sabiendo que el objeto demora 3 segundos en caer al piso?

(Nota: la aceleración de la gravedad, constante, es igual a $9,8 \text{ metros/segundo}^2$.)



Fórmula de posición $y(t)$ en función del tiempo t

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

Datos

$$\begin{aligned} t &= 3 \text{ seg} \\ y(t) &= y(3) = 0 \text{ metro (piso)} \\ y_0 &= 1 \text{ metro} \\ t_0 &= 0 \text{ seg} \\ a &= -9,8 \text{ metros/seg}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + v_0(3 - 0) - \frac{9,8}{2}(3 - 0)^2 = 1 + 3v_0 - \frac{9,8 \cdot 9}{2} = 1 + 3v_0 - 44,1 \\ -1 &= 3v_0 - 44,1 \Rightarrow 3v_0 = 43,1 \Rightarrow v_0 = \frac{43,1}{3} = 14,36 \text{ m/seg} \end{aligned}$$