

CURSO AUDIOVISUAL DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras¹

6 de setiembre de 2013

Ir al índice de clases con enlaces a los videos y a las fotos de los pizarrones [aquí](#)

XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICA EMALCA- VENEZUELA 2013

**Facultad de Ciencias - Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela
del 1 al 6 de setiembre de 2003**

Resumen

El curso de Teoría Ergódica de la XXVI de la Escuela Venezolana de Matemática estaba previsto que se desarrollara en la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, y fue preparado desde el año 2012 en que fue aceptada por la Organización de la EMALCA- Venezuela 2013, mi propuesta para dictar dicho curso. Su temática sigue el libro [1], incluyendo una primera parte introductoria a la Teoría Ergódica de los Sistemas Dinámicos por iterados de una transformación, y una segunda parte enfocada a la Teoría Ergódica de los Atractores Topológicos y Estadísticos. Debido a un inesperado quebranto de salud, no he podido viajar desde Uruguay a Venezuela y lamentablemente no he podido cumplir con la presentación de dicho curso en forma presencial en la EMALCA- Venezuela- 2013. Por este motivo, he grabado en videos, con audio a tiempo real, todas las clases de este curso y las he publicado en Internet. En este documento incluyo los enlaces a dichos videos. Si bien estos videos no equivalen ni contienen la necesaria riqueza de las clases presenciales con interacción entre la expositora y los participantes de la Escuela, en forma directa y en vivo, quizás sean útiles para sustituir en parte dichas clases, teniendo en cuenta la circunstancia de mi imprevista ausencia en el evento.

¹ Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Rafael Laguardia” (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Av. Herrera y Reissig 565, C.P.11300 Montevideo, URUGUAY
Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

Los videos del curso breve de Teoría Ergódica de la Escuela Venezolana de Matemática EMALCA 2013 fueron grabados en Montevideo en el año 2013.

Están publicados en YouTube en el siguiente canal
<https://www.youtube.com/@eleonora17s/videos>

Índice clase a clase de temas con los enlaces al video de cada clase y a las fotos de los pizarrones
Clases [1A](#), [1B](#), [1C](#), [2A](#), [2B](#), [2C](#), [3A](#), [3B](#), [3C](#), [4A](#), [4B](#), [4C](#), [5A](#), [5B](#), [6A](#), [6B](#), [6C](#).

Clase1ParteA <https://youtu.be/yoZIufZQW-4>

Sistema dinámico por iterados de T. Medidas de probabilidad invariantes. Topología débil* en espacio de probabilidades. Teorema de existencia de medidas de prob. invariantes (enunciado y demostración)

Pizarrones: <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/TeoriaErgodicaVideos2013/TeoErgClase1.pdf>
[Inicio](#)

Clase1ParteB <https://youtu.be/cWyZbVJhISM>

Definición de omega-límite y recurrencia Lema de recurrencia de Poincaré- versión medible y versión topológica (enunciados y demostración) Definición de Ergodicidad Caracterización de la ergodicidad Enunciado del teorema de existencia de medidas ergódicas Promedios temporales Enunciado del Teorema Ergódico de Birkhoff Singularidad mutua de medidas ergódicas.

Pizarrones: <http://www.fing.edu.uy/~eleonora/TeoriaErgodicaVideos2013/TeoErgClase1.pdf>
[Inicio](#)

Clase1ParteC <https://youtu.be/z4qP7FfQXdU>

Convexidad, Teorema de Krein Milman del Análisis Funcional (solo enunciado) Extremalidad de las medidas ergódicas Demostración del teorema de existencia de medida ergódicas.

[Pizarrones](#) [Inicio](#)

Clase2 ParteA <https://youtu.be/8uNUHrWTD7Y>

Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin: Enunciado Corolarios: promedio de medida de transitividad, tiempo medio de estadía, caracterizaciones de la ergodicidad. Teorema ergódico subaditivo de Kingmann (solo enunciado)

[Pizarrones](#) [Inicio](#)

Clase2 ParteB <https://youtu.be/a5Q4qNd4pJc>

Demostración del teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin, Teorema ergódico maximal (enunciado, demostración y corolarios)

[Pizarrones](#) [Inicio](#)

Clase2 ParteC <https://youtu.be/9aITvvNSAIQ>

Ergodicidad única. Definición y teorema de caracterización de transformaciones únicamente ergódicas. Demostración que la rotación irracional del círculo es únicamente ergódica.

[Pizarrones](#) [Inicio](#)

Clase2 ParteD <https://youtu.be/NRifLYApZSE>

Medidas mixing. Definición. Ejemplos: rotación irracional no es mixing. Tent map en $[0,1]$ es mixing. Teorema de descomposición ergódica (enunciado solo) Conjuntos de probabilidad total.

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase3 ParteA <https://youtu.be/W2X27xU6YU8>

Automorfismo lineal en el toro $2,1,1,1$.

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase3 ParteB <https://youtu.be/IPqUjthiQe0>

Difeomorfismos de Anosov y conjuntos uniformemente hiperbólicos Herradura de Smale. Teorema de subvariedades invariantes en conjuntos uniformemente hiperbólicos (solo enunciado).

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase3 ParteC https://youtu.be/d_mrmCJ0wd8

Definiciones de puntos regulares, exponentes de Lyapunov y subespacios de Oseledets. Teorema de Oseledets (enunciado solo) Definición de Región de Pesin y de medidas hiperbólicas. Teorema de subvariedades invariantes locales en Región de Pesin (solo enunciado).

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase4 ParteA <https://youtu.be/d365KMQVzyw>

Definición de atractor topológico y estabilidad orbital. Ejemplos. Cuenca global de atracción topológica. Existencia de medidas invariantes y ergódicas soportadas en atractor topológico.

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase4 ParteB https://youtu.be/bi_jlBdwEMc

Atractores de Milnor, α -observabilidad y α -obs. minimalidad: definiciones y ejemplos (advertencia: hay un error en el libro en la definición 6.1.1, donde dice $m(E(K))=1$ debe decir $m(E(K))>0$.) Teorema de existencia de atractores de Milnor α -obs. minimales (enunciado y demostración)

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase4 ParteC <https://youtu.be/FPpL4xqEBPg>

Atractores ergódicos (definición y ejemplos) Atracción estadística y medidas SRB o físicas (definiciones)

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase5 ParteA https://youtu.be/16_K7isNae4

Atractores estadísticos o de Ilyashenko (Definición) Caracterización de la atracción estadística (enunciado y demostración) Relación entre medidas SRB o físicas (cuando existen) y los atractores estadísticos (enunciado, demostración y ejemplo)

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase5 ParteB https://youtu.be/eRO_10oh0is

Ejemplos de atractores estadísticos (automorfismo lineal en el toro, ejemplos de Hu-Young y ojo de Bowen). Alfa-obs. minimalidad de atractores estadísticos (definición) Teorema de existencia de atractores estadísticos alfa-observable minimales.

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase6 ParteA <https://youtu.be/GlwKExCOKhE>

Definición de cuenca de atracción estadística epsilon-débil de una medida de probabilidad. Medidas SRB-like o pseudo-físicas (definición). Teorema de existencia de medidas SRB-like (enunciado y demostración)

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase6 ParteB <https://youtu.be/SkUJMt4T4vI>

Teorema de optimalidad estadística del conjunto de medidas SRB-like (enunciado y demostración).

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

Clase6 ParteC https://www.youtube.com/watch?v=TumdtYK_GvE

Teorema de caracterización de atractores estadísticos o de Ilyashenko por medidas SRB-like (enunciado y demostración).

[Pizarrones](#)

[Inicio](#)

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 1 PARTE A

¡GRACIAS!

**MI PEDIDO DE DISCULPAS POR NO
ESTAR PRESENTE
(por motivos de salud no pude viajar)**

Eleonora



**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

eleonora.wikispaces.com

- Este material cubre solo la parte expositiva teórica del curso
- La numeración de las definiciones, teoremas, ejemplos y ejercicios coincide con la numeración en el libro

“Teoría Ergódica de los Atractores Topológicos y Estadísticos”

de la XXVI Escuela Venezolana de Matemática

editado por el IVIC - Setiembre de 2013-

- En el libro están los enunciados de los ejercicios, la mayoría con sugerencias
- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es

eleonora@fing.edu.uy

DEF. 1.1.1

Sistema dinámico por iterados de T

$$\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_n$$

$$T^0 = \text{Id.}$$

$(X, \mathcal{A})$ espacio medible

$T: X \rightarrow X$ medible

$x \in X$ estado inicial

DEF. 1.1.2

$\sigma^+(x) = \{T^n(x)\}_{n \geq 0}$ Órbita (futura) de x .

μ medida de probabilidad en $(X, \mathcal{A})$: $\mu(X) = 1$

DEF. 1.1.4

μ es T -invariante (T preserva μ) si

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

NOTACIÓN:

$\mathcal{M}_T = \{\mu \text{ med. prob. } T\text{-invariante}\}$, $\mathcal{M} = \{\mu \text{ med. prob.}\}$

EXERC. 1.1.8

μ es T -invariante $\Leftrightarrow \forall f \in L^1(\mu)$

se cumple $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ (probarlo)

Objetivo: Probar el siguiente Teorema.

TEOREMA 1.1.5 $\left. \begin{array}{l} X \text{ esp. métrico compacto} \\ T: X \rightarrow X \text{ CONTINUA} \end{array} \right\} \Rightarrow M_T \neq \emptyset$

Antes contraejemplo: Si T no es continua puede ser $M_T = \emptyset$

EJEMPLO 1.1.7



$$T: [0,1] \rightarrow [0,1] \quad \begin{cases} T(x) = \frac{1}{2}x & \text{si } x \neq 0 \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

$M_T = \emptyset$ dem:

Sea $\mu \in M_T$

Por absurdo supongamos que μ es T -invar. $\nearrow \nwarrow$

$$a = \mu\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) \geq 0 \quad a \leq \mu\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = \mu\left(\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]\right) = \dots = \mu\left(\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mu([0,1]) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a \leq 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\mu(\{0\}) = \mu([0,1]) - \mu((0,1]) = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow \mu(\{1\}) = 0 \quad \Rightarrow \mu(T^{-1}\{1\}) = \mu(\{0\}) \neq \mu(\{1\})$$

$$\Rightarrow \mu \notin M_T \quad \forall \mu \in M$$

TEOREMA 1.15

X esp. métrico compacto } $\Rightarrow M_+ \neq \emptyset$
T: $X \rightarrow \mathbb{R}$ continuo

ANTES de la PRUEBA: Resultados preliminares de Teo de la Medida

$M = \{ \mu \text{ medida de probabilidad en } (X, \mathcal{A}) \}$ $\mathcal{A} = \sigma\text{-álgebra de Borel}$

CAS MÉTRICA en M :

$$\text{dist}(\mu, \nu) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ \left| \int \psi_j d\mu - \int \psi_j d\nu \right| }{2^j}$$

donde $\{ \psi_j \}_{j \in \mathbb{N}}$ denso en $C^0(X, [0,1])$

espacio de funciones continuas $\psi: X \rightarrow [0,1]$
con norma del máximo

$$\| \psi_1 - \psi_2 \|_{C^0} := \max_{x \in X} | \psi_1(x) - \psi_2(x) |$$

TOPOLOGÍA DEBIL* en M

Definición 1.21 La inducida por dist en M

CARACTERIZACIÓN $\mu_n \rightarrow \mu$ en M (con la top. debil*)

si y solo si

$$\lim \int \psi d\mu_n = \int \psi d\mu \quad \forall \psi \in C^0(X, \mathbb{R})$$

TEOREMA 1.15

X esp. métrico compacto } $\Rightarrow M_+ \neq \emptyset$
T: $X \rightarrow \mathbb{R}$ continuo

ANTES de la PRUEBA: Resultados preliminares de Teo de la Medida

$M = \{ \mu \text{ medida de probabilidad en } (X, \mathcal{A}) \}$ $\mathcal{A} = \sigma\text{-álgebra de Borel}$

CAS MÉTRICA en M :

$$\text{dist}(\mu, \nu) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ \left| \int \psi_j d\mu - \int \psi_j d\nu \right| }{2^j}$$

donde $\{ \psi_j \}_{j \in \mathbb{N}}$ denso en $C^0(X, [0,1])$

espacio de funciones continuas $\psi: X \rightarrow [0,1]$
con norma del máximo.

$$\| \psi_1 - \psi_2 \|_{C^0} := \max_{x \in X} | \psi_1(x) - \psi_2(x) |$$

TOPOLOGÍA DEBIL* en M

Definición 1.21 La inducida por dist en M

CARACTERIZACIÓN $\mu_n \rightarrow \mu$ en M (con la top. debil*)

si y solo si

$$\lim \int \psi d\mu_n = \int \psi d\mu \quad \forall \psi \in C^0(X, \mathbb{R})$$

TEOREMA 1.2.6

M con la topol. débil* es

- COMPACTO
- METRIZABLE
- SECUENCIALMENTE COMPACTO : toda sucesión $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tiene alguna subsecuencia convergente.

DEFINICIÓN 1.2.10

PULL BACK $T^*: M \rightarrow M$ dada $T: X \supset \rightarrow Y$ es

$$(T^*\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

PROPOSICIÓN 1.2.12

(X esp. metr. compacto)

$\left[\begin{array}{l} T: X \supset \rightarrow Y \text{ CONTINUA} \\ T^*: M \supset \rightarrow M \text{ CONTINUA (con la top. débil*)} \end{array} \right. \Rightarrow$

EJERCICIO 1.2.11

$$\int f d(T^*\mu) = \int f \circ T d\mu \quad \forall f \in L^1(\mu)$$

Demostración del Teorema 1.15 de existencia de medidas de prob. T -invariantes.

TEOREMA 1.15 : $\left. \begin{array}{l} X \text{ esp. metr. compacto} \\ T: X \rightarrow X \text{ continua} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{M}_T \neq \emptyset$

Dem. $T^*: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ continua
 $\mathcal{M}_T = \{ \mu \in \mathcal{M} : T^* \mu = \mu \}$
 $\mathcal{M}$ compacto y sec. compacto $\} \Rightarrow \mathcal{M}_T$ es compacto (con la top. débil σ -finita) y sec. compacto.

Sea $P \in \mathcal{M}$

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j P$$

$$T^* \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^{j+1} P \longrightarrow \exists \mu \text{ tal que } \mu_n \text{ es converg.}$$

$$\mu = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} (T^*)^j \rho$$

Basta probar que $T^* \mu = \mu$

→ $\forall \psi \in C^0(X, \mathbb{R})$ se cumple

$$\bullet \int \psi d\mu = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int \psi d\left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} (T^*)^j \rho\right) =$$

$$= \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \int \psi \circ T^j d\rho$$

$$\bullet \int \psi dT^* \mu = \int \underbrace{\psi \circ T}_{\text{CONTINUA}} d\mu = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \int \psi \circ T \circ T^j d\rho$$

$$= \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \int \psi \circ T^j d\rho$$

$$\Rightarrow \left| \int \psi d\mu - \int \psi dT^* \mu \right| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} \left| \int \psi \circ T^{n_i} d\rho - \int \psi d\rho \right|$$

$$\leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_i} 2 \|\psi\|_{C_0} = 0 \quad \text{TEO DE BIRNBAUM Y YETZ} \Rightarrow \mu = T^* \mu \quad \square$$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 1 PARTE B

DEFINICION 1.4.1Sea $x \in X$ $T: X \rightarrow X$ OMEGA LÍMITE de x $\omega(x) := \{y \in X : \exists n \rightarrow +\infty \text{ tal que } T^n(x) \rightarrow y\}$  x es "RECURRENTE" si $x \in \omega(x)$ **TEOREMA 1.5.2** (Lema de Recurrencia de Birkhoff - Version HEBERLE)Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\exists \mu \in \mathcal{M}_T$ Sea $E \subset X$ medible tal que $\mu(E) > 0$

Entonces

 μ -c.t.p $x \in E$ vuelve infinitas veces a E es decir $\exists n \rightarrow +\infty$ tal que $T^n(x) \in E \quad \forall j \in \mathbb{N}$ **TEOREMA 1.5.3** (Lema de Recurrencia de Poincaré - Version TOPOLÓGICA) X esp. métrico compacto. Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\exists \mu \in \mathcal{M}_T$ Entonces μ -c.t.p $x \in X$ es recurrente

Defn. TED 1.5.2 (Lema de Lebesgue-Poincaré Medible)

$$F_N := \bigcap_{n \geq N} T^{-n}(x \setminus E) \quad F := \bigcup_{N \geq 0} F_N$$

$x \in F \Leftrightarrow T^{-n}(x) \notin E \quad \forall n \geq N$ para algun $N \in \mathbb{N}$.

Probar que $\mu(F \cap E) = 0$

$$T^{-1}(F_N) = F_{N+1} \Rightarrow \mu(F_{N+1}) = \mu(F_N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(F_N) = \mu(F_0) \\ F_N \subset F_{N+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(F_N) = \mu(F_0)$$

$$F_0 \subset F, \mu(F) = \mu(F_0) \Rightarrow \mu(F \setminus F_0) = 0$$

$$E \cap F_0 = \emptyset \Rightarrow E \cap F \subset F \setminus F_0$$

$$\Rightarrow \mu(E \cap F) = 0. \text{ D.}$$

Defn. TED 1.5.3 (Lema de Lebesgue-Poincaré - Topológico)

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ base numerable de abiertos en X .

$$x \notin \omega(x) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \text{ donde } A_j := \{x \in V_j : x \text{ no vuelve a } V_j\}$$

$$\text{Poincaré Medible} \Rightarrow \mu(A_j) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 0. \quad \square$$

ERGODICIDAD

DEFINICIÓN 1.6.2 μ es ergódica ^{para T} si y solo si

- μ es invariante y
- $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A)$ es 0 ó 1.

TEOREMA 1.6.3 Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$. Entonces:

μ es ergódica si y solo si

$\forall U$ y V medibles con $\mu(U) > 0$ y $\mu(V) > 0$

existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

§ 1.6.8 PROMEDIOS TEMPORALES

Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$ $\psi \in L^1(\mu)$

prom. temporal de ψ a lo largo de la órbita de $x \in X$ es, cuando $\exists$

$$\tilde{F}(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x)$$

Teorema ergódico de Birkhoff (a demostrar en próxima clase) $\mu \in \mathcal{M}_T, \psi \in L^1(\mu) \Rightarrow \exists \tilde{F}(x)$ μ -a.p.a

TEOREMA 1.6.9 (Ergodicidad) Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$. Entonces μ es ergódica si y solo si

$\forall \psi$ medible y acotada

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) = \underbrace{\int \psi d\mu}_{\text{promedio temporal } \bar{\psi}(x)} \quad \mu\text{-c.p.p. } x \quad \underbrace{\int \psi d\mu}_{\text{promedio espacial (valor cuando } \psi \text{ probab. } \mu)}$$

TEOREMA 1.7.1 (Existencia de medidas ergódicas)

X esp. métrico compacto } $\Rightarrow \exists \mu$ ergódico para T
 $T: X \rightarrow X$ CONTINUA

(Demostración al final de esta clase usando
teor. ergódico de Birkhoff)

Resultados previos para demostrar existencia Medida Carathéodory

§ 1.7.2 SINGULARIDAD MUTUA y CONTINUIDAD ABSOLUTA

Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}$

DEF $\mu \perp \nu$ si $\exists A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 1$ y $\nu(A) = 0$

DEF $\mu \ll \nu$ si $\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

DEF $\mu \sim \nu$ si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.

DESCOMPOSICIÓN DE LEBESGUE-RADON-NIKODYM

Dadas $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ $\exists \mu_1$ y $\mu_2 \in \mathcal{M}$ y $t \in [0, 1]$
tales que

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$$
$$\mu_1 \ll \nu, \mu_2 \perp \nu$$

Además

t es único y si $t \neq 0, t \neq 1$ entonces

μ_1 y μ_2 son únicos.

TEOREMA 1.7.3. SINGUL MUTUA DE MEDIDAS ERGÓDICAS

Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que existen μ, ν ergódicas p.m.T.
Entonces

$$\mu \neq \nu \Rightarrow \mu \perp \nu$$

Dem. ① Afirmación Teoría

Si $\forall A$ inv. p.m.T. se cumple $\mu(A) = \nu(A)$ entonces $\mu = \nu$

Dem. Afirmación: Sea $B \in \mathcal{A}$ χ_B func. característica

$$\mu \text{ ergódica} \Rightarrow \tilde{\chi}_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_B \circ T^j(x) =$$

$$= \int \chi_B d\mu = \mu(B) \text{ para } \mu\text{-c.t.p. } x \in X$$

$$\text{idem}^\nu: \tilde{\chi}_B(x) = \nu(B) \text{ para } \nu\text{-c.t.p. } x \in X$$

$$A_1 = \{x \in X: \tilde{\chi}_B(x) = \mu(B)\}, \mu(A_1) = 1$$

$$A_2 = \{x \in X: \tilde{\chi}_B(x) = \nu(B)\}, \nu(A_2) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} T^{-1}(A_1) = A_1 \\ T^{-1}(A_2) = A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu(A_1) = \nu(A_1) = 1 \\ \mu(A_2) = \nu(A_2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu(A_1 \cap A_2) = 1 \\ \nu(A_1 \cap A_2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(B) = \nu(B)$$

TEOREMA 1.7.3. SINGUL MUTUA DE MEDIDAS ERGÓDICAS

Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que existen μ, ν ergódicas p.m.T.
Entonces

$$\mu \neq \nu \Rightarrow \mu \perp \nu$$

Dem. ① AFIRMACIÓN PREVA

Si $\forall A$ inv. p.m.T. se cumple $\mu(A) = \nu(A)$ entonces $\mu = \nu$

② AFIRMACIÓN TESTES TEOR. 1.7.3

$$\mu \neq \nu \Rightarrow \mu \perp \nu$$

Dem. AFIRMACIÓN TESTES: Por la afirmación previa

$$\mu \neq \nu \Leftrightarrow \exists A \text{ inv. p.m.T. tal que } \mu(A) \neq \nu(A)$$

$$\begin{array}{l} \mu \text{ ergódica} \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ o } \mu(A) = 1 \\ \nu \text{ ergódica} \Rightarrow \nu(A) = 0 \text{ o } \nu(A) = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(A) = 1 \text{ y } \nu(A) = 0 \\ \text{o} \\ \mu(A) = 0 \text{ y } \nu(A) = 1 \end{array} \Rightarrow \exists A \text{ tal que } \mu(A) = 1 \text{ y } \nu(A) = 0 \text{ (o al revés)}$$

$$\Rightarrow \mu \perp \nu \quad \square$$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 1 PARTE C

DEFINICIONES 1.7

Sea $K \neq \emptyset$ subconjunto de espacio vectorial topológico

DEF. K es convexo si $\left. \begin{array}{l} \forall a, b \in K \\ \forall t \in [0, 1] \end{array} \right\} \underbrace{ta + (1-t)b \in K}_{\text{"combinación convexa de } a \text{ y } b"}$

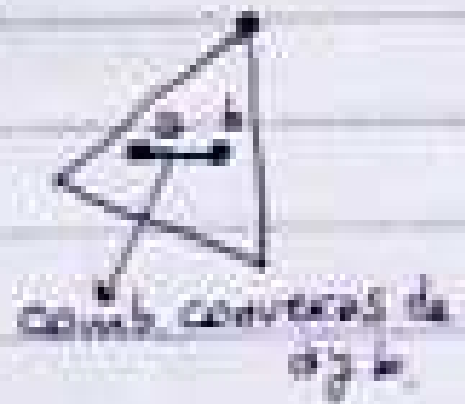
DEF. envolvente convexa de A ($e.c.(A)$)

Sea $A \neq \emptyset$ subconjunto de espacio vectorial topológico

$$e.c.(A) := \{ ta + (1-t)b : a, b \in A, t \in [0, 1] \}$$

DEF. envolvente convexa cerrada ($e.c.c.(A)$)

$$e.c.c.(A) := \overline{e.c.(A)}$$



DEF. Si $K \neq \emptyset$ es compacto y convexo

$a \in K$ se llama "punto extremo de K "

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} tb + (1-t)c = a \\ b, c \in K \\ t \in [0, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow b = a \text{ y } c = a$$

TEOREMA KREIN - MILMAN (del Análisis Funcional)

Si $K \neq \emptyset$ es compacto y convexo (en un espacio vectorial topológico)

Entonces

$$K = \text{e.c.c.}(E) \text{ donde } E \text{ es el conjunto de puntos extremales de } K \text{ (luego } E \neq \emptyset).$$

TEOREMA 1.7.5

X es métrico compacto
 $T: X \rightarrow X$ continua

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} M_T \text{ compacto y convexo} \\ \textcircled{2} \mu \text{ ergódica para } T \text{ si y solo si } \mu \text{ es extremal en } M_T \end{array} \right.$

TEOREMA 1.7.5

X esp métrico compacto
 $T: X \rightarrow X$ continua

$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} M_T \text{ compacto y convexo} \\ \textcircled{2} \mu \text{ ergódica para } T \text{ si y solo si} \\ \mu \text{ es extremal en } M_T \end{array} \right\} \Rightarrow$

Demo. de $\textcircled{2}$

"si"

μ extremal $\Rightarrow \mu$ ergódica

Demo μ no ergódica $\Rightarrow \exists A$ invariante por T tal que $0 < \mu(A) < 1$

Definimos

$$\forall B \in \mathcal{A}: \mu_1(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}$$

$$\mu_2(B) := \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)}$$

$$\lambda = \mu(A), \quad 1 - \lambda = \mu(A^c) \Rightarrow \mu(B) = \lambda \mu_1(B) + (1 - \lambda) \mu_2(B)$$

$$\mu_1(A) = 1, \quad \mu_2(A) = 0$$

$$\mu_1 \neq \mu_2, \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\mu = \lambda \mu_1 + (1 - \lambda) \mu_2$$

μ no extremal. $\square$

TEOREMA 1.7.5

X esp métrico compacto
 $T: X \rightarrow X$ continua

$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} M_T \text{ compacto y convexo} \\ \textcircled{2} \mu \text{ ergódica para } T \text{ si} \\ \text{y solo si} \\ \mu \text{ es extremal en } M_T \end{array} \right\} \Rightarrow$

Dem. de $\textcircled{2}$

"solo si" μ ergódica $\Rightarrow \mu$ extremal

Dem. Sea $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ con $\left\{ \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2 \in M_T \\ t \in [0,1] \end{array} \right.$
Probar que $\mu_1 = \mu$ ó $\mu_2 = \mu$.

- Si $t=0$ ó $t=1$ entonces $\mu_1 = \mu$ ó $\mu_2 = \mu$.
- Si $0 < t < 1$ entonces $\mu_1 \ll \mu$ y $\mu_2 \ll \mu$

Sea $A \subset X$ inv. por T

μ ergódica $\Rightarrow \mu(A) = 0$ ó $\mu(A^c) = 0$

$\mu_1 \ll \mu \Rightarrow \mu(A) = 0$ ó $\mu_1(A^c) = 0$

luego μ_1 es ergódica

μ, μ_1 ergódicas $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ó bien } \mu = \mu_1 \\ \text{ó bien } \mu \perp \mu_1 \end{array} \right.$

$\mu_1 \ll \mu \Rightarrow \mu \not\perp \mu_1 \Rightarrow \mu = \mu_1. \quad \square$

Fin Dem. TEOR. 1.7.4 (Existencia de med. ergódicas)

TEOR. 1.7.4 :

$\left. \begin{array}{l} X \text{ esp. métrico compacto} \\ T: X \rightarrow X \text{ CONTINUA} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \mu \text{ ergódica para } T$

Dem

$M_T \neq \emptyset$ (por teor. de $\exists$ med. T -invariantes)

M_T débil* - compacto y convexo

TEOR. de KREIN MILMAN $\Rightarrow E \neq \emptyset$ $E =$ conjunto de medidas extremales de M_T

TEOR. 1.7.5 : $\forall \mu \in M_T$ entonces μ extremal en M_T si y solo si μ ergódica para T

$\Rightarrow E = \{ \mu \in M_T : \mu \text{ ergódica para } T \} \neq \emptyset \quad \square.$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 2 PARTE A

**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

eleonora.wikispaces.com

- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas
por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es eleonora@fing.edu.uy



Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin

TEOREMA 2.1.2.

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio medible.

Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$.

Entonces, $\forall \mu \in \mathcal{M}_T$, $\forall f \in L^1(\mu)$ se cumple

(a)
$$\exists \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X$$

(b)
$$\tilde{f} \circ T = \tilde{f} \quad \mu\text{-c.t.p.}; \quad \tilde{f} \in L^1(\mu) \quad y$$

$$\int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu$$

(c) Si además $f \in L^p(\mu)$ para algún $p \geq 1$
entonces $\tilde{f} \in L^p(\mu)$ y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \xrightarrow{L^p(\mu)} \tilde{f}.$$

(Dem: luego)

Ejercicio 2.1.4 En las hipótesis del Teo. de Birkoff, si además $T: X \rightarrow X$ bimedible, entonces

$$\exists \begin{cases} \tilde{f}^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j & \mu\text{-c.t.p.} \\ \tilde{f}^- = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{(-n)} \sum_{j=0}^{(-n)-1} f \circ T^{-j} & \mu\text{-c.t.p.} \end{cases}$$

y $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-$ μ -c.t.p.

COROLARIOS del Teo de Birkhoff

COROLARIO 2.1.5. Promedio de medida de transitividad

$$\exists \tau(A, B) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^j A \cap B) = \int \tilde{\chi}_A \cdot \chi_B d\mu$$

DEFINICIÓN 2.1.9 y EJERCICIO 2.1.10 Tiempo medio de estadía

$$\exists \tau_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in A\} \quad \mu\text{-c.t.p. } x$$

COROLARIOS del Teo de Birkhoff

COROLARIO 2.1.5 Promedio de medida de transitividad

$$\exists \bar{I}(A, B) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}A \cap B) = \int \hat{\chi}_A \cdot \chi_B d\mu$$

DEFINICIÓN 2.1.9 y EJERCICIO 2.1.10 Tiempo medio de estadía

$$\exists \tau_A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \# \{ 0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in A \}$$

μ -c.t.p. x
 Caracterizaciones de la ERGODICIDAD

TEOREMAS 2.2.1 y 2.2.6 y EJERCICIO 2.2.2

Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$. Entonces μ ergódica $\Leftrightarrow \forall f \in L^1(\mu) \int f d\mu = \bar{f}(x) \mu$ -c.t.p. x
 $\Leftrightarrow \forall A, B$ medibles $\bar{I}(A, B) = \mu(A)\mu(B) \Leftrightarrow \tau_A(x) = \mu(A) \mu$ -c.t.p. $x \in X$

TEOREMA 2.1.2 B)**TEOREMA ERGÓDICO SUBADITIVO DE KINGHANN.**

Sea

$(X, \mathcal{A})$ espacio medible y $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$

Sea $f_n \in L^1(\mu)$ subaditiva:

$$f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ T^n \quad \forall n, m \geq 1 \text{ naturales.}$$

Entonces:

$$\exists \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} \quad \mu\text{-c.t.p. } x.$$

$$\int \tilde{f} d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{f_n}{n} d\mu = \inf_{n \geq 1} \int \frac{f_n}{n} d\mu.$$

{Este teorema implica el Teo de Birkhoff porque $\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\}_{n \geq 1}$ es una sucesión subaditiva de funciones en $L^1(\mu)$.

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 2 PARTE B

Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin

TEOREMA 2.1.2.

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio medible.

Sea $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$.

Entonces, $\forall \mu \in \mathcal{M}_T$, $\forall f \in L^1(\mu)$ se cumple

(a)
$$\exists \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X$$

Demostración del Teor. ergódico de Birkhoff (Esto no está en el libro)

Resultado previo

TEOREMA ERGÓDICO MAXIMAL Sea $\mu \in \mathcal{M}$

Si $f \in L^1(\mu)$ sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ y sea n

$$F_n := \max \left\{ f, f + f \circ T, \dots, f + f \circ T + \dots + f \circ T^{n-1} \right\}$$

$$E(f) := \left\{ x \in X : \sup_{n \geq 1} F_n > 0 \right\}$$

Entonces

$$\int_{E(f)} f d\mu \geq 0$$

Dem: $E_n := \{x, F_n > 0\}$, $E_n \subset E_{n+1}$ $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu = I_n; \quad I_n = \int_{\substack{F_n > 0 \\ F_n \circ T \leq 0}} f d\mu + \int_{\substack{F_n > 0 \\ F_n \circ T > 0}} f d\mu$$

Continuação de dem: $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

$$I_n = \int_{F_n > 0, F_n \circ T \leq 0} f d\mu + \int_{\substack{F_n \circ T > 0 \\ F_n > 0}} f d\mu.$$

$$\downarrow \\ f = F_n.$$

$$f + F_n \circ T \geq F_n$$

$$f \geq F_n - F_n \circ T$$

$$\Rightarrow I_n \geq \int_{F_n > 0, F_n \circ T \leq 0} F_n d\mu + \int_{F_n > 0, F_n \circ T > 0} F_n - F_n \circ T d\mu$$

$$I_n \geq \int_{F_n > 0, F_{n \circ T} \leq 0} F_n d\mu + \int_{F_n > 0, F_{n \circ T} > 0} F_n - F_{n \circ T} d\mu$$

$$I_n \geq \int_{F_n > 0} F_n d\mu - \int_{F_{n \circ T} > 0, F_n > 0} F_{n \circ T} d\mu$$

μ est inv. $\rightarrow$ II

$$I_n \geq \int_{F_{n \circ T} > 0} F_{n \circ T} d\mu - \int_{F_{n \circ T} > 0, F_n > 0} F_{n \circ T} d\mu$$

$$= \int_{F_n \leq 0, F_{n \circ T} > 0} F_{n \circ T} d\mu \geq 0 \quad . \quad \square$$

COROLARIOS del TEOR. ERGÓDICO MAXIMAL

COROLARIO 1 Sea $E_\alpha = \{x \in X : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j > \alpha\}$

Entonces

$\forall A \subset E_\alpha$ tal que $\bar{T}^{-1}A = A$ se cumple

$$\int_A f d\mu \geq \alpha \mu(A).$$

Dem. Si $\alpha = 0$, sea $g = f \chi_A$
 $E(g) = \{x : \sup_{n \geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j > 0\}$

Teo. erg. maximal: $\int_{E(g)} g d\mu \geq 0$; $\int_{E(g)} \chi_A \cdot f d\mu \geq 0$

$A \subset E(g)$ pues $A \subset E_{\alpha=0}(f)$

$$\Rightarrow \int_A \chi_A \cdot f d\mu \geq 0 \\ \int_A f d\mu \geq 0 \quad \square$$

• Si $\alpha \neq 0$ aplicamos el primer caso a $f - \alpha$ en vez de f

$$\int_A (f - \alpha) d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_A f d\mu \geq \alpha \mu(A) \quad \square$$

COROLARIO 2 Sea $f_n = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$

$$\text{Sea } \overline{G}_\alpha = \{x \in X : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} > \alpha\}$$

$$\underline{G}_\beta = \{x \in X : \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} < \beta\}$$

$$\text{Sea } A := \overline{G}_\alpha \cap \underline{G}_\beta$$

$$\text{Entonces: } \int_A f d\mu \geq \alpha \mu(A) \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\leq \beta \mu(A) \quad \textcircled{\text{II}}$$

Dem. $\textcircled{\text{I}}$ $\overline{G}_\alpha \subset E_\alpha = \{x \in X : \sup_{n \geq 1} f_n > \alpha\}$

A es T -invariante

COROLARIO 1: $\int_A f d\mu \geq \alpha \mu(A)$

Dem $\textcircled{\text{II}}$ Aplicar tesis $\textcircled{\text{I}}$ a $-f$ en lugar de f . $\square$

(No está en el libro:)

FIN DE LA DEMOSTRACIÓN de la parte a) del
TEOREMA ERGÓDICO de BIRKHOFF-KHINTCHIN

Probar que $\exists \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)}_{f_n} \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X$

Dem. Sean $\alpha < \beta$ racionales

$$\bar{G}_\alpha = \{x \in X : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} > \alpha\}$$

$$G_\beta = \{x \in X : \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} < \beta\}$$

COROLARIO (2) del TEOR. ERGÓDICO MAXIMAL $\Rightarrow$

$$\int_{\bar{G}_\alpha \cap G_\beta} f d\mu \geq \alpha \mu(\bar{G}_\alpha \cap G_\beta) \leq \beta \mu(\bar{G}_\alpha \cap G_\beta)$$

$$\Rightarrow \mu(\bar{G}_\alpha \cap G_\beta) = 0 \quad \forall \alpha < \beta \text{ racionales}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{\substack{\alpha < \beta \\ \text{racionales}}} \bar{G}_\alpha \cap G_\beta\right) = 0 \quad \text{luego } \mu\text{-c.t.p. } x \in X \\ \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{n} \quad \square$$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 2 PARTE C

ERGODICIDAD ÚNICA

DEFINICIÓN 2.3.1. Sea $T: X \rightarrow X$. Se dice que T es "únicamente ergódica" si $\# \mathcal{M}_T = 1$.

OBS. Si X es esp. métrico compacto, entonces T únicamente ergódica $\Rightarrow$ única μ invariante y ergódica.

TEOREMA 2.3.2. CARACTERIZACIÓN de la ERGODICIDAD ÚNICA

Sea $T: X \rightarrow X$ CONTINUA en X esp. métrico compacto. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones

- (i) T es únicamente ergódica
- (ii) $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R}) \quad \forall x \in X \quad \exists \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{independiente de } x} \text{ y es } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$
- (iii) $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ converge uniform. en X a una constante,

Demostración del teorema 2.3.2 de CARACTERIZACIÓN de ERGODICIDAD ÚNICA

1ª parte: (i) $\Rightarrow$ (iii) HIPÓTESIS (i) T es únicam. ergódica

TESIS (iii) $\left\{ \begin{array}{l} f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \text{ CONV. UNIFORM} \\ \text{en } X \text{ a } \int f d\mu \\ \forall f \in C^0(X, \mathbb{R}) \end{array} \right.$

Dem Sea $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ fija.

Por absurdo, supongamos que $\exists \epsilon > 0$ y $n_i \rightarrow +\infty$ tal que
 que $\max_{x \in X} |f_{n_i}(x) - \int f d\mu| \geq \epsilon \quad \forall i \quad (*)$

Sea $x_i \in X$ donde se alcanza ese máximo

Sea $\mu_i \in \mathcal{M}$ tal que $f_{n_i}(x_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} f \circ T^j = \int f d\mu_i$
 $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$

($\exists \mu_i$ por el teor. de repres. de Riesz)

Sea una subsucesión de μ_i convergente a $\nu \in \mathcal{M}$

idem. dem. teor. $\exists$ de medidas invariantes: $\nu \in \mathcal{M}_T$

HIP $\mathcal{M}_T = \{\mu\} \Rightarrow \nu = \mu$

$\mu_i \rightarrow \nu \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \int f d\mu_i = \int f d\mu \\ f \in C^0(X, \mathbb{R}) \end{array} \right.$

$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x_i) = \int f d\mu \quad \text{CONTRADICCIÓN } (*)$
 $\square$

Demostración del teorema 2.3.2 de CARACTERIZACIÓN de ERGODICIDAD ÚNICA

2da parte: $\text{iii)} \Rightarrow \text{ii)}$ { HIPÓTESIS (iii) $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$
la sucesión $f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$
Conv. uniform. en X a $\int f d\mu$
TESIS (ii)
 $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$ $f_n(x)$ converge
a una cte $\forall x \in X$

Dem. trivial pues C. U en $X \Rightarrow$ convergencia $\forall x \in X$

Demstración del teorema 2.3.2 de Caracterización de la Ergodicidad Única

3ra parte: $ii) \Rightarrow i)$

HIPÓTESIS (ii) $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$
$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

converge a una c de $\forall x \in X$.

TESIS i) $\exists$ única medida de probab. invariante por T .

Dem. Sea $\Lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} \quad \forall x \in X$
 Λ es un operador lineal $\Lambda: C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ positivo
y acotado $\Lambda(1) = 1 \Rightarrow$ (Teo. de representación de Riesz
 $\exists$ única $\mu \in \mathcal{M}$ t.q. $\Lambda(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$
Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n \circ T(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} \Rightarrow \int f \circ T d\mu = \int f d\mu$
 $\forall f \in C^0(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \mu$ es T -invariante.

∃ única $\mu \in \mathcal{M}$ t.q. $\Lambda(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n \circ T(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} \Rightarrow \int f \circ T d\mu = \int f d\mu$$

$\forall f \in C^0(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \mu$ es T -invariante

Problemas que $\forall \nu \in \mathcal{M}_T$ erg. $\nu = \mu$.

$$\nu \in \mathcal{M}_T \quad \text{erg\u00f3dica} \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n} = \int f d\nu \quad \text{p.p. } x$$

luego. $\Lambda(f) = \int f d\nu \quad \forall f \in C^0(X, \mathbb{R})$

Por la unicidad de la medida del Teo de repres. de Riesz

$$\nu = \mu. \quad \square$$

ROTACIÓN en el CÍRCULO

$$S^1 = [0, 1] / \text{mód } \mathbb{Z} = \mathbb{R} / \text{mód } \mathbb{Z}$$

$$T_\alpha: S^1 \rightarrow S^1$$

$$T_\alpha(x) := x + \alpha \pmod{1} \quad \alpha = \text{cte real}$$

ROTACIÓN IRRACIONAL: α irracional

T_α preserva la medida de Lebesgue $m \in \mathcal{M}_{T_\alpha}$

TEOREMA 2.4.1

La rotación irracional en S^1 es ÚNICAMENTE ERGÓDICA.

Dem. Por el teorema de caracterización de la ergodicidad única basta probar que

$$\forall f \in C^0(S^1, \mathbb{R}) \quad \forall x \in S^1 \quad \text{la sucesión}$$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \quad \text{converge a una cte } (\forall x \in S^1)$$

TEO. ERG. BIRKHOFF $\exists \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ p.p. m-c.t.p. x.

$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uniform. CONTINUA

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$T^j(y) = y + j\alpha = (y - x_1) + (x_1 + j\alpha) = (y - x_1) + T^j(x_1)$$

$$|y - x_1| < \delta \Rightarrow |T^j(x_1) - T^j(\alpha)| = |y - x_1| < \delta \Rightarrow$$

$$|f \circ T^j(x_1) - f \circ T^j(\alpha)| < \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x_1) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(\alpha) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$

$\tilde{f}(x_1)$ si elegimos x_1 cumple Teo Birkhoff a dist δ de y

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(\alpha) - \tilde{f}(x_1) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$\forall y \in S^1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_1$ que cumple Teo Birkhoff

tal que $|y - x_1| < \delta$ Hemos

probado que $\exists \tilde{f}(y) \quad \forall y \in S^1$ y además

$$\tilde{f} : S^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ es CONTINUA?} \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \Rightarrow \tilde{f} \circ T = \tilde{f} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si } \exists \text{ una } \text{órbita} \\ \text{densa entonces} \\ \tilde{f} \text{ es cte.} \end{array}$$

Basta probar que $\exists$ una órbita $\sigma^+(x_1)$ densa en S^1 .

Prueba de que para la rotación irracional $T: S^1 \rightarrow S^1$
 $\exists$ una órbita δ densa en S^1 . (cualquier $\delta > 0$)

m.c.t.p $\exists \delta(x_1)$ (Teo de Birkhoff)

Teo de recurrencia de Poincaré (versión topológica) $\Rightarrow$

m.c.t.p $x_1 \in S^1$ es recurrente $\Rightarrow$

$$\exists n_1 \geq 1 \text{ t.q. } |T^{n_1}(x_1) - x_1| < \delta$$

$$T^{n_1}(x_1) = x_1 + n_1 \alpha \Rightarrow |n_1 \alpha| < \delta$$

$$T^{2n_1}(x_1) = x_1 + 2n_1 \alpha$$

$$T^{2n_1}(x_1) - T^{n_1}(x_1) = n_1 \alpha \Rightarrow |T^{2n_1}(x_1) - T^{n_1}(x_1)| < \delta$$

por inducción en $k \in \mathbb{N}$:

$$|T^{(k+1)n_1}(x_1) - T^{kn_1}(x_1)| = |n_1 \alpha| < \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Sea

$$A := \left\{ \underbrace{T^{Rn_1}}_{\substack{\text{para } \neq \text{valores de } R \in \mathbb{N} \\ \alpha \notin \mathbb{Q}}} (x_1) : R \in \mathbb{N} \right\}$$

$\left. \begin{array}{l} x_1 + Rn_1\alpha \\ \alpha \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow$ se obtienen puntos $\neq$ del conjunto A.

A tiene infinitos puntos tales que 2 consecutivos
distan ^{una constante} menor que $\delta \Rightarrow A$ es δ -denso en S^1
 $\Rightarrow \sigma^+(x_1)$ es δ -denso en S^1 . $\square$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 2 PARTE D

MEDIDAS MIXING. § 2.5.

Recordemos COROLARIO 2.1.5 y TEOR. 2.2.1.

Si μ es ergódica para T entonces el promedio de medida de transitividad:

$$\tau(A, B) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}A \cap B)$$

existe y es igual a $\mu(A)\mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$

Y RECÍPROCAMENTE

DEFINICIÓN 2.5.1 Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$. μ se dice "MIXING" para T

si $\forall A, B \in \mathcal{A}$

existe $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mu(T^j A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$

TEOREMA 2.5.2 μ mixing $\Rightarrow \mu$ ergódica

Dem. Si una sucesión a_n de reales es convergente con límite $a \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_n$ es convergente con el mismo límite a . (SUMA de CÉSAR)

Tomando

$$a_n = \mu(T^n A \cap B) \Rightarrow (\mu \text{ mixing} \Rightarrow \mu \text{ ergódica}) \quad \square$$

CONTRA EJEMPLO: μ érgódica $\nrightarrow \mu$ mixing.

EJEMPLO 2.5.5

La medida de Lebesgue m en el círculo S^1 es érgódica para la rotación irracional $T: S^1 \rightarrow S^1$ PERO NO ES MIXING para T .

Dem. de que m no es mixing para T



Sean U, V dos intervalos abiertos en S^1 de longitudes $m(U), m(V)$ pequeñas > 0 .

Suponemos por absurdo que m es mixing.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(T^n(U) \cap V) = m(U) \cdot m(V) > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad T^n(U) \cap V \neq \emptyset (*) \Rightarrow T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$$

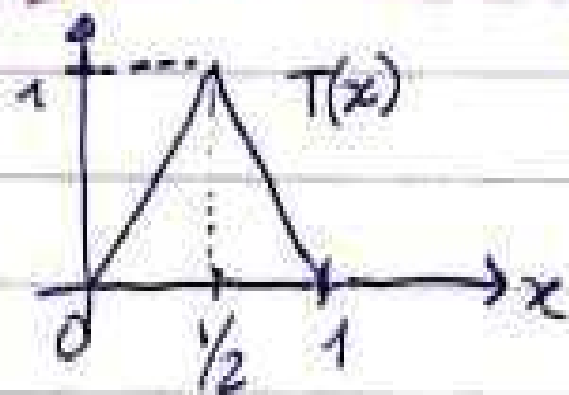
$$T^{n_0+n_1}(U) = T^{n_0}(U) + \alpha$$

Pero si elegimos V pequeño tal que $m(V) < \alpha$

$$\text{entonces } (T^{n_0}(U) + \alpha) \cap V = \emptyset \text{ CONTRADIENDO } (*). \quad \square$$

EJEMPLO 2.5.7

$T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ "TENT MAP"



definido por
$$\begin{cases} T(x) = 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ T(x) = 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Probar que T preserva la medida de Lebesgue m .
Probar que m es mixing para T .

DESCOMPOSICIÓN ERGÓDICA § 2.6

DEFINICIÓN 2.6.1

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio medible y $T: X \rightarrow X$ medible tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. Sea $\mu \in \mathcal{M}_T$

Decimos que " μ tiene descomposición ergódica" si para μ -c.t.p. $x \in X$ $\exists$ una medida ergódica μ_x (llamada componente ergódica de μ) tal que

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \int \mu_x(A) d\mu$$

$$\forall h \in L^1(\mu) : \int h d\mu = \int \left(\int h d\mu_x \right) \cdot d\mu.$$

TEOREMA 2.6.2. $\exists$ descomposición ergódica

Sea X espacio métrico compacto, $T: X \rightarrow X$ tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. Entonces toda $\mu \in \mathcal{M}_T$ tiene descomposición ergódica.

COROLARIO 2.6.3

Existencia de medidas ergódicas

En las hipótesis del Teorema 2.6.2 existen medidas ergódicas para T .

DEFINICIÓN Se dice que un conjunto medible A "tiene probabilidad total" si $\mu(A) = 1 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_T$.

COROLARIO 2.6.4 $A \in \mathcal{A}$ tiene probabilidad total si y solo si $\nu(A) = 1$ para toda medida ν ergódica para T .

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 3 PARTE A

**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

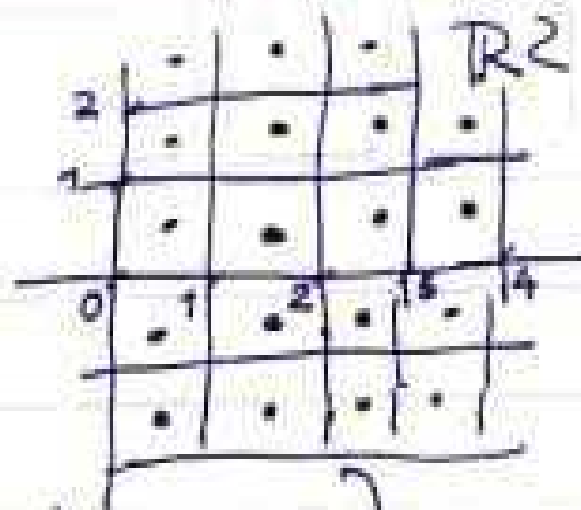
eleonora.wikispaces.com

- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas
por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es eleonora@fing.edu.uy

AUTOMORFISMO LINEAL en el TORO T^2 § 3.1.

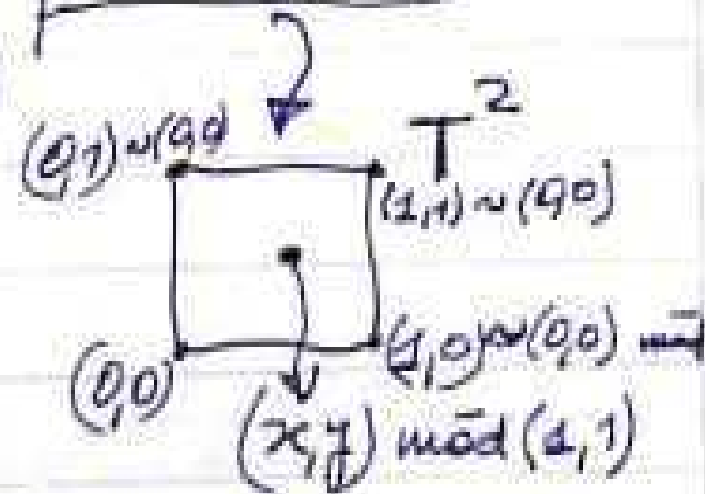
$$T^2 = \mathbb{R}^2 / \sim \quad \sim \text{mód}(1,1)$$



$$f: T^2 \rightarrow T^2$$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x, y) \text{ mód}(1,1)$$

$$f(x, y) = (2x + y, x + y) \text{ mód}(1,1)$$



EJERCICIO 3.1.1 $(0,0)$ es ÚNICO PTO FIJO por f

Encontrar pts periódicos por f de períodos 2 y 3, es decir

$$f^2(x, y) = (x, y) \quad f(x, y) \neq (x, y)$$

$$f^3(x, y) = (x, y) \quad f(x, y) \neq (x, y)$$

Proposición 3.1.2 m medida de Lebesgue en T^2
es INVARIANTE por $f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

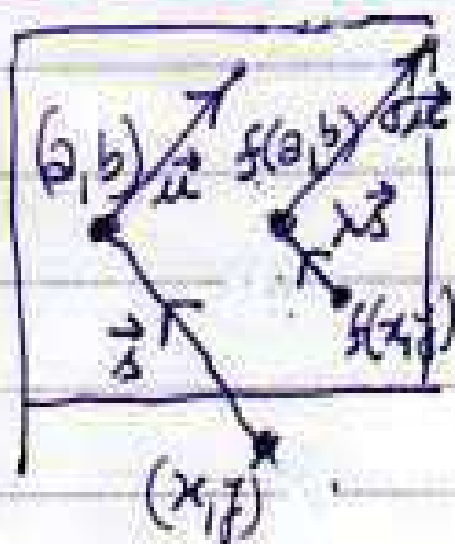
Dem.

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad m(f^{-1}(B)) = \int \chi_{f^{-1}(B)} dm = \int \chi_B \circ f dm =$$

$$= \int \chi_B \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} dm = \int \chi_B dm = m(B). \quad \square$$

(Al final del curso veremos que m es ergódica para f
Además m es mixing)

VARIETADES INVARIANTES



$$f(x, y) - f(a, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

VALORES PROPIOS de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

son $\sigma = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$

$$0 < \lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

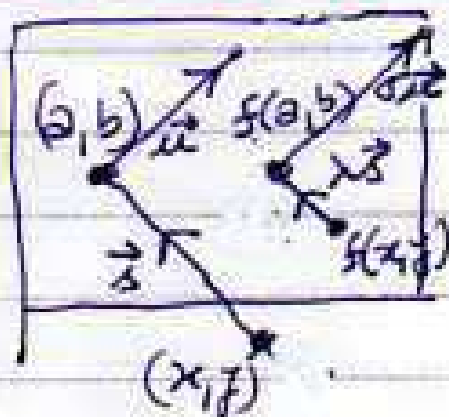
DIRECC. PROPIAS $\begin{cases} \vec{u} \text{ con valor propio } \sigma > 1 \\ \vec{v} \text{ " " " } 0 < \lambda < 1 \end{cases}$

$$\|f(x, y) - f(a, b)\| = \lambda \|(x, y) - (a, b)\| \text{ si } (x-a, y-b) = \vec{v}$$

$$\|f^n(x, y) - f^n(a, b)\| = \lambda^n \|(x, y) - (a, b)\| \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow +\infty \text{)}$$

VAR. ESTABLE $W^s(a, b) := \{(x, y) \in T^2 : \text{dist}(f^n(x, y), f^n(a, b)) \rightarrow 0\}$

VARIETADES INVARIANTES



$$f(x,y) - f(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

VALORES PROPIOS de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

son $\sigma = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$

$$0 < \lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

DIRECC. PROPIA $\vec{u}$ con valor propio $\sigma > 1$

$$\| \underbrace{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{a}, \tilde{b})}_{df \cdot \vec{u}} \| = \underbrace{\sigma}_{>1} \| \underbrace{(\tilde{x}, \tilde{y}) - (\tilde{a}, \tilde{b})}_{\vec{u} = \tilde{f}'(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{f}'(\tilde{a}, \tilde{b})} \|$$

$$\| \tilde{f}'(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{f}'(\tilde{a}, \tilde{b}) \| = \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma} \right)}_{<1} \| (\tilde{x}, \tilde{y}) - (\tilde{a}, \tilde{b}) \|$$

$$\| \tilde{f}^n(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{f}^n(\tilde{a}, \tilde{b}) \| = \left(\frac{1}{\sigma} \right)^n \| (\tilde{x}, \tilde{y}) - (\tilde{a}, \tilde{b}) \| \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} 0$$

VAR.
INESTABLE

$$W^u(\tilde{a}, \tilde{b}) := \{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T^2 :$$

$$\text{dist}(\tilde{f}^n(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}^n(\tilde{a}, \tilde{b})) \rightarrow 0 \}$$

EXPONENTES de LYAPUNOV de $f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en T^2 :

$$\chi^+ := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df^n \vec{u}\| / \|\vec{u}\|}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \sigma^n}{n} = \underline{\underline{\log \sigma > 0}}$$

$$\chi^- := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df^n s\| / \|s\|}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \lambda^n}{n} = \underline{\underline{\log \lambda < 0}}$$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 3 PARTE B

DIFEOMORFISMOS de ANOSOV

§ 3.2

M variedad diferenciable compacta

$f \in \text{Diff}^1(M) : f : M \rightarrow M$ invertible, $df \exists$ y es continua,
 $df^{-1} \exists$ y es continua.

DEFINICIÓN 3.2.1

$f \in \text{Diff}^1(M)$ se llama "DIFEOMORFISMO de ANOSOV" si

$\exists$ "splitting" $TM = S \oplus U$ no trivial

df -invariante : $df S = S$, $df U = U$

y $\exists$ ctes. $c > 0$ y $0 < \lambda < 1 < \sigma$ tales que



$$\|df^n v\| \leq c \lambda^n \|v\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall v \in S$$

$$\|df^n u\| \geq c^{-1} \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U$$

$$\|df^{-n} u\| \leq c \sigma^{-n} \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

S, U se llaman subfibrados "estable" e

"inestable" respect.

S_x, U_x " " subespacios de $T_x M$ estable e inestable resp.

Ejercicios Sección 3.2

Probar que si f es Dif de Anosov

entonces el splitting $TM = S \oplus U$ es único y continuo.

EXPONENTES de LYAPUNOV PARA f difeo de ANOSOV

$\forall \mu \in \mathcal{M}_f \quad \exists$

$$\chi^-(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} \frac{\log \|df_x^n s\| / \|s\|}{n} \leq \log \lambda < 0$$

$\forall s \in S_x, \mu\text{-c.t.p } x$

$$\chi^+(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} \frac{\log \|df_x^n u\| / \|u\|}{n} \geq \log \gamma > 0$$

$\forall u \in U_x, \mu\text{-c.t.p } x$

AL FINAL del CURSO VEREMOS el SIGUIENTE

TEOREMA

Si f es difeo de Anosov, si f preserva la medida de Lebesgue, y si f_n es TRANSITIVO ($\forall V, W$ abiertos $\exists n \geq 1$ t.q. $f^n(V) \cap W \neq \emptyset$) entonces m es ergódica.

HIPERBOLICIDAD UNIFORME

§ 3.3.

DEFINICIÓN 3.3.1 Sea M variedad difer. COMPACTA

Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$

Sea $\Lambda \subset M$ invariante por f ($f^{-1}\Lambda = \Lambda$)

Λ se llama "CONJUNTO UNIFORMEMENTE HIPERBÓLICO" si

• $\Lambda \neq \emptyset$ es compacto

• $\forall x \in \Lambda \exists$ "splitting" $T_x M = S_x \oplus U_x$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} df_x S_x = S_{f(x)} \\ df_x U_x = U_{f(x)} \end{array} \right\} \text{df-invariante}$$

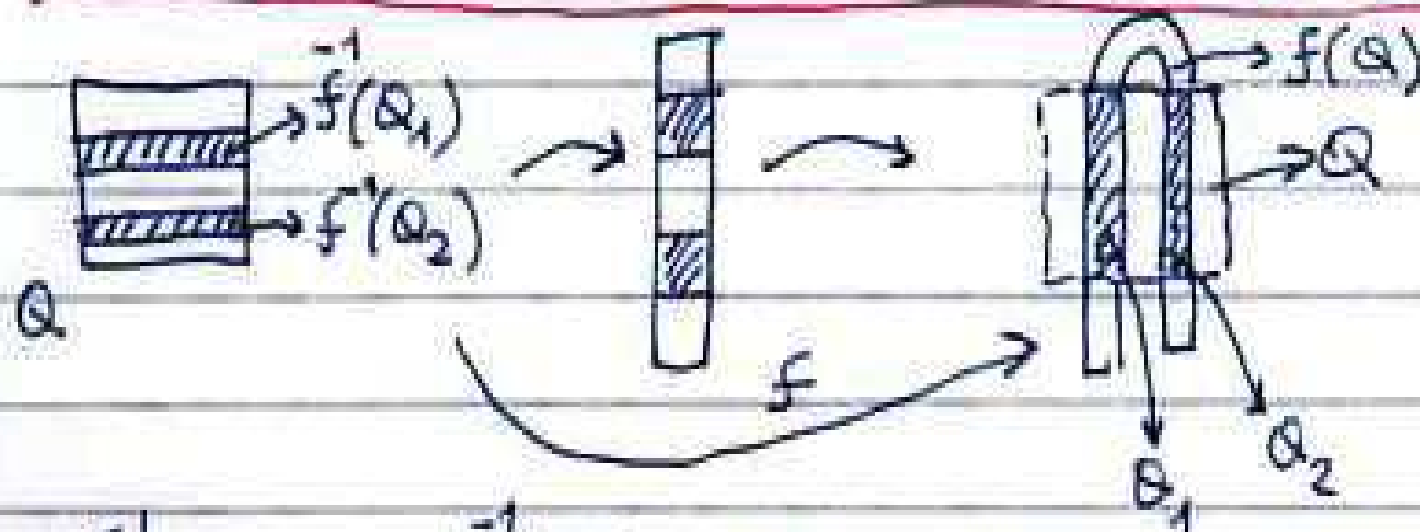
• $\exists$ ctes $c > 0$ y $0 < \lambda < 1 < \sigma$ tales que

$$\|df_x^n v\| \leq c \lambda^n \|v\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in \Lambda \quad \forall v \in S_x$$
$$\|df_x^n u\| \geq c^{-1} \sigma^n \|u\| \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in \Lambda \quad \forall u \in U_x$$

S_x, U_x se llaman subespacios "estable" e "inestable" en $x \in \Lambda$ resp.

OBS. Si $f \in \text{Diff}^1(M)$ es difeo de Anosov, entonces toda la variedad M es un conjunto uniform. hiperbólico.

HERRADURA de SMALE LINEAL 3.4



$$f|_{f^{-1}(Q_1)} : f^{-1}(Q_1) \rightarrow Q_1 \quad \text{AFIN CON MATRIZ} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$f|_{f^{-1}(Q_2)} : f^{-1}(Q_2) \rightarrow Q_2 \quad \text{" " " " } \begin{bmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) \quad f|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda \quad \boxed{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Lambda \text{ es CANTOR}}$$

PROBAR QUE Λ es CONJUNTO UNIFORME HIPERBÓLICO CON
 $U_x = \text{Vertical}$ $S_x = \text{Horizontal}$ $\lambda = 1/5$ $\sigma = 5$

SUBVARIETADES INVARIANTES de CONJ. UNIFORM. HIPERBÓLICOS

3.5

TEOREMA 3.5.1 Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$ y sea $\Lambda \subset M$ Λ uniform. hiperbólico

con splitting $T_x M = S_x \oplus U_x \quad \forall x \in \Lambda$

Entonces

$\forall x \in \Lambda \quad \exists$ únicas subvariedades $W^s(x)$ y $W^u(x)$ inmersas en la variedad M tales que:

• invariencia:
$$\begin{cases} f(W^s(x)) = W^s(f(x)) \\ f(W^u(x)) = W^u(f(x)) \end{cases}$$

•
$$T_x W^s(x) = S_x \quad ; \quad T_x W^u(x) = U_x$$

SUBV. "ESTABLE"

•
$$W^s(x) = \{ y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0 \}$$

SUBV. "INESTABLE"

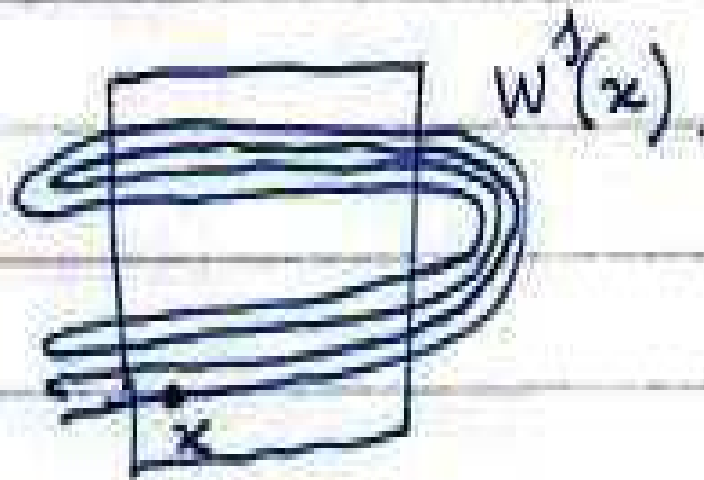
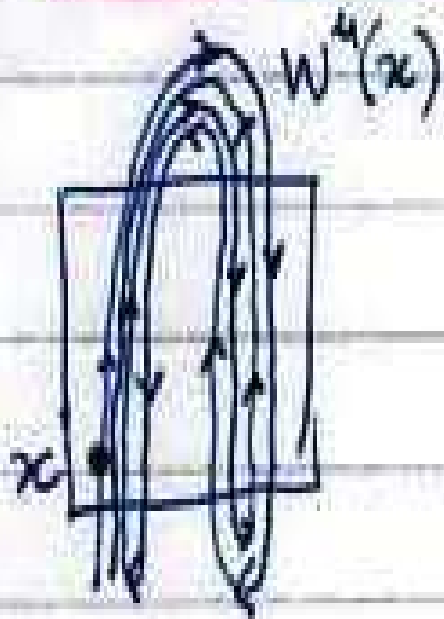
•
$$W^u(x) = \{ y \in M : \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0 \}$$

EN PARTICULAR

• Si f es Anosov $\forall x \in M \exists W^u(x), W^s(x)$

(por ej. automorfismo lineal en T^2 $f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$)

• En herradura de Smale lineal:



**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 3 PARTE C

EXPONENTES de LYAPUNOV - 3.8

DEFINICIÓN 3.8.2

Sea M variedad dif. compacta. Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$.
UN PUNTO $x \in M$ es "débilmente regular" si $\exists$ los
siguientes límites $\forall v \in T_x M \setminus \{\vec{0}\} : (v \neq \vec{0})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df_x^n v\| / \|v\|}{n} = \chi_v^+(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{exp. de Lyapunov} \\ \text{en dirección } v \\ \text{hacia el futuro} \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df_x^{-n} v\| / \|v\|}{n} = \chi_v^-(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"hacia el} \\ \text{pasado} \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df_x^n v\| / \|v\|}{n} = \chi_v^+(x) \quad \boxed{\text{exp. de Lyapunov en dirección } v \text{ hacia el futuro}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \|df_x^{-n} v\| / \|v\|}{n} = \chi_v^-(x) \quad \text{"hacia el pasado"}$$

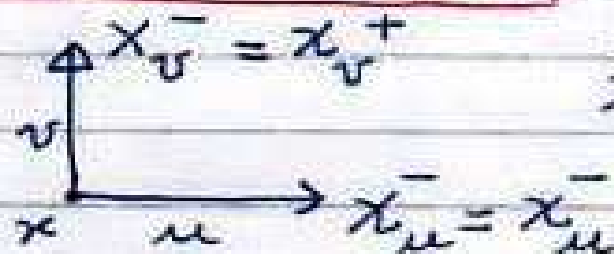
EJERCICIO 3.8.4

ASÚMASE QUE $\exists u, v \in T_x M$ t.q.

$$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}; \quad \chi_v^-(x) = \chi_v^+(x);$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ L.I.}; \quad \chi_u^-(x) = \chi_u^+(x);$$

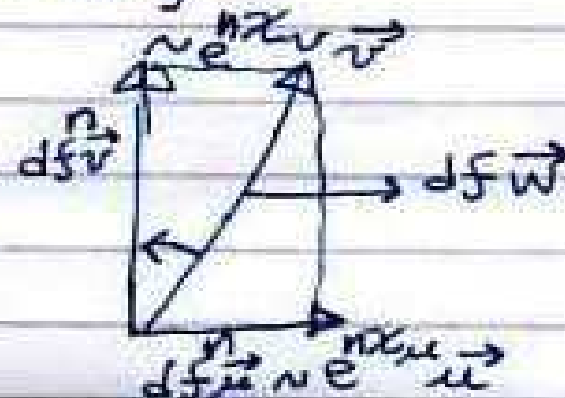
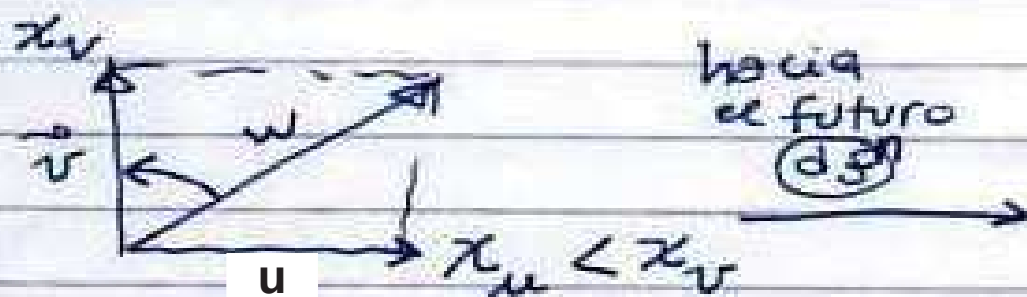
$$\chi_v(x) \neq \chi_u(x)$$



Probar que $\forall w$ que sea comb. lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se cumple

$$\chi_w^+ = \max \{ \chi_u^+, \chi_v^+ \}$$

$$\chi_w^- = \min \{ \chi_u^-, \chi_v^- \}$$



DEFINICIÓN 3.8.6 | PUNTOS LYAPUNOV REGULARES

Un punto $x \in M$ es "LYAPUNOV REGULAR" (en breve "regular") si $\exists$ un splitting

$$T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2 \oplus \dots \oplus E_x^{k(x)} \quad \begin{matrix} k(x) \geq 1 \\ k(x) \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

tal que

$$\forall \vec{v} \in E_x^i \setminus \{\vec{0}\} \quad \exists \chi_v^+(x) = \bar{\chi}_v^-(x) = \chi_v(x)$$

$$\text{y } \chi_1(x) < \chi_2(x) < \dots < \chi_{k(x)}(x)$$

E_x^i se llaman "SUBESPACIOS de OSELEDETS"

EXP. de
LYAPUNOV"
en SUBESPACIO
 E_x^i

TEOREMA 3.8.8

TEOREMA de OSELEDETS

Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$ Sea $\mu \in \mathcal{M}_f$
Entonces μ -c.t.p $x \in M$ es LYAPUNOV REGULAR

($\exists$ splitting de $T_x M = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^{R(x)}$ en subespacios de Oseledets E_x^i tales que

$\forall \vec{0} \neq \vec{v} \in E_x^i \exists$ exponente de Lyapunov $\chi_i(x)$
hacia el futuro = hacia el pasado

$$\chi_i(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow -\infty}} \frac{\log \|df_x^n v\| / \|v\|}{n}$$

$$\gamma \quad \chi_1(x) < \chi_2(x) < \dots < \chi_i(x) < \dots < \chi_{R(x)}(x)$$

DEFINICIÓN 3.10.1

REGIÓN de PESIN

Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$. Se llama Región de Pesin P_f al conjunto (quizás vacío) de puntos x que son Lyapunov regulares y cuyos exponentes de Lyapunov $\chi_i(x)$ son TODOS $\neq 0$.

$$\text{OBS. } f^{-1}(P_f) = P_f$$

DEFINICIÓN 3.10.3

Una medida ^{de prob.} $\mu \in \mathcal{M}_f$ se llama "HIPERBÓLICA" si $\mu(P_f) = 1$.

En ese caso, el soporte de μ se llama "NO UNIFORMEMENTE HIPERBÓLICO".

OBS.

Si μ es hiperbólica y ergódica, entonces $\chi_i(x) = \text{cte}$ para μ -c.t.p $x \in M$.

SUBVARIEDADES INVARIANTES LOCALES en REGIÓN de PESIN

§ 3.11

Sea $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$ (f diffeo $C^1 + \text{Hölder}$)
Esto es $f \in \text{Diff}^1(M)$ y además df y df^{-1} son
 α -Hölder continuas para $\alpha > 0$; es decir

$\exists$ una constante $K > 0$ tal que

$$\|df_x - df_y\| \leq K (\text{dist}(x, y))^\alpha.$$

Por ej. si
 $f \in \text{Diff}^2(M)$

TEOREMA 3.11.1

existencia de $W_{loc}^s(x), W_{loc}^u(x)$
 $\forall x \in P_f$

Sea $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$

Sea $x \in P_f$ (Región de Pesin).

Entonces existen subvariedades C^1 locales

$W_{loc}^s(x), W_{loc}^u(x)$ encajadas en M
entorno de x en M

tales que

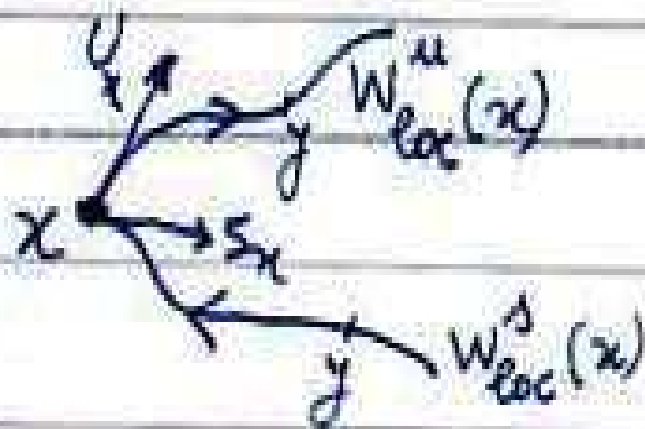
• invariancia $\left\{ \begin{array}{l} df_x W_{loc}^s(x) \subset W_{loc}^s(f(x)) \\ df_x W_{loc}^u(x) \supset W_{loc}^u(f(x)) \end{array} \right.$

• $T_x W_{loc}^s(x) = S_x := \bigoplus$ Subespacios de Oseledets $E_i(x)$
tales que $\lambda_i(x) < 0$

$T_x W_{loc}^u(x) = U_x := \bigoplus$ Subespacios de Oseledets $E_i(x)$
tales que $\lambda_i(x) > 0$

• $y \in W_{loc}^s(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0$

$y \in W_{loc}^u(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = 0$



**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 4 PARTE A

**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

eleonora.wikispaces.com

- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas
por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es eleonora@fing.edu.uy

ATRACTORES TOPOLÓGICOS. Capítulo 4

Definición 4.1.2 y 4.1.1

Sea X esp. métrico compacto
 $f: X \rightarrow X$ CONTINUA.

Un conjunto $K \subset X$ es "ATRACTOR TOPOLÓGICO" si es

- $K \neq \emptyset$, K compacto, K f -invariante ($f^{-1}(K) = K$)
- $\exists$ abierto $V \supset K$ tal que

$$x \in V \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n x, K) = 0 \quad \text{"atracción topológica"}$$

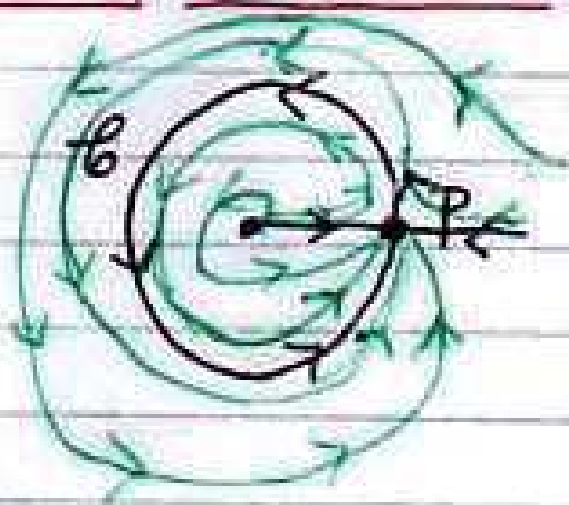
Atractor topológico es "orbitalmente estable" si además

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\text{dist}(x, K) < \delta \Rightarrow \text{dist}(f^n(x), K) < \varepsilon \quad \forall n \geq 0$$

EJEMPLOS

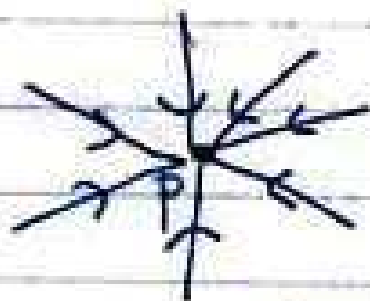
FIGURA 4.1



$\mathcal{C}$ es atractor topológico orbit. estable.

$\{p\}$ es atractor topológico no orbitalmente estable

POZO (Ejercicios 1.4)



$$f(p) = p$$

$df|_p$ tiene valores propios todos con módulo < 1

$\Rightarrow \{p\}$ atractor topológico orbit. estable.

(pto. fijo hiperbólico con $|v. \text{propios}| < 1$ = "pozo")

PROPOSICIÓN 4.1.9

K compacto $\neq \emptyset$ f -invariante.

K es atractor topológico orbit. estable si y solo si $\exists V$ abierto $V \supset K$ tal que

$$\overline{f(V)} \subset V \quad \text{y} \quad K := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(V)$$

DEFINICIÓN 4.2.1 Sea $K \subset X$ un atractor topológico

Se llama "CUENCA GLOBAL" de ATRACCIÓN TOPOLOGICA de K

$$C(K) := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0\}$$

PROPOSICIÓN 4.2.2

$C(K)$ es abierto, no vacío, f -invariante
y $K \subset C(K)$. $(f^{-1}(C(K)) = C(K))$

Sea $f|_{C(K)} : C(K) \rightarrow C(K)$

PROPOSICIÓN 4.2.3

- (a) $\exists \mu$ invariantes para $f|_{C(K)}$
- (b) $\exists \mu$ " y ergódica para $f|_{C(K)}$
- (c) $\forall \mu \in \mathcal{M}_{f|_{C(K)}} \quad \mu(K) = 1$

(Las medidas invariantes por $f|_{C(K)}$ están soportadas en K)

Dem. ③ y ⑥ $f|_K: K \rightarrow K$ es continua en el esp. métrico compacto K
 Por los teos. de existencia de medidas invariantes y de existencia de medidas ergódicas

- $\exists \nu \in \mathcal{M}_{f|_K}$
- $\exists \nu \in \mathcal{M}_{f|_K}$ ergódica para $f|_K$

Construimos $\mu \in \mathcal{M}_{f|_{C(K)}}$ así:

$$\forall B \in \mathcal{A} (B \subset C(K)) \quad \mu(B) := \nu(B \cap K)$$

$$\text{luego } \left\{ \begin{array}{l} \nu \in \mathcal{M}_{f|_K} \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_{f|_{C(K)}} \\ \nu \text{ ergódica para } f|_K \Rightarrow \mu \text{ ergódica para } f|_{C(K)} \end{array} \right.$$

⑦ Sea $\mu \in \mathcal{M}_f(C(K)) \Rightarrow \mu(C(K)) = 1$. Por el lema de recurrencia de Poincaré μ -c.t.p. es recurrente. Basta probar que x es recurrente $\Rightarrow x \in K$.

$$x \text{ recurrente} \Rightarrow \exists n_j \rightarrow +\infty \text{ tal que } x = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x)$$

$$K \text{ atractor topológico con cuenca } C(K) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, K) = 0 \quad (K \text{ compacto}) \Rightarrow x \in K. \quad \square$$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 4 PARTE B

ATRACTORES de MILNOR § 6.1

DEFINICIÓN 6.1.1 Sea M variedad dif compacta Riemanniana.
Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA.

Sea m la medida de Lebesgue en M . rescalada
 $m(M)=1$

ATRATOR de MILNOR (para f en M) es $K \subset M$ tal que

- $K \neq \emptyset$, K compacto, K es f -invar ($f^{-1}(K) = K$)
- $m(E(K)) > 0$ → (esto hay error en el libro DEF. 6.1.1)

donde $E(K) := \{x \in M: \text{dist}(f^n(x), K) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$
es la "cuenca de atracción topológica" de K .

DEFINICIÓN 6.1.4 Un atractor de Milnor $K \subset M$ es

- α -observable si $m(E(K)) \geq \alpha$ (α cte real)
($0 < \alpha \leq 1$)
- α -obs. minimal si $m(E(K)) \geq \alpha$ y si
para todo compacto $\emptyset \neq K' \subset K$ o bien
 $m(E(K')) < \alpha$
o bien $K' = K$.

TEOREMA 6.1.5 (Existencia de atr. Milnor α -obs. minimales)

Sea M var. compacta (Riemanniana)

Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA.

Sea α real, $0 < \alpha \leq 1$

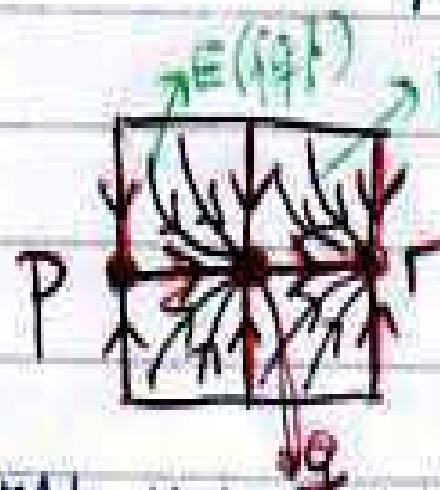
Entonces existe atractor de Milnor K α -obs. minimal.

Además, si $\alpha = 1$, el " " " 1-obs. minimal es ÚNICO.

(Demostración luego)

EJEMPLO 6.1.7.

$\{q, r\}$ es ATR. MILNOR
1-MINIMAL

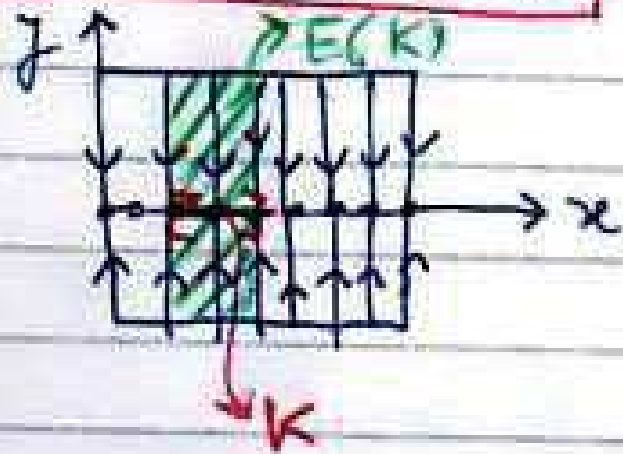


$\{q, r\}$ es ATR.
MILNOR
 α -OBS. MINIMAL
 $\forall \alpha > \frac{1}{2}$

$\{q\}$ es ATR. MILNOR α -MINIMAL $\forall \alpha > 0, \alpha \leq \frac{1}{2}$; $\{q\}$ NO es atractor topológico

$\{r\}$ " " " " " " " " ; $\{r\}$ es atr. topológico

EJEMPLO 6.1.9



$$f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) := \left(x, \frac{y}{2}\right)$$

Cualquier segmento compacto

$$K \subset [0,1] \times \{0\}$$

con longitud > 0 es atractor de Milnor.

K es atr. de Milnor α -obs. minimal si y solo si la medida de Lebesgue (el área) del rectángulo rayado $E(K)$ es $\geq \alpha$.

Demostración del Teorema de Existencia de TEO 6.15 ATRACTORES de MILNOR α -obs. minimales

$$N_\alpha := \{ K \subset M, K \neq \emptyset, K \text{ compacto}, \underbrace{m(E(K))}_{K \text{ es } \alpha\text{-obs.}} \geq \alpha \}$$

$$N_\alpha \neq \emptyset \text{ pues } K=M \in N_\alpha$$

REL. de ORDEN PARCIAL en N_α
 $K_1 \subset K_2$

Sea $\{K_i\}_{i \in I}$ cadena en N_α (Subc. de N_α totalm. ordenado)

AFIRMACIÓN (i) $K := \bigcap_{i \in \mathbb{I}} K_i \in \mathcal{N}_\alpha$

Prueba de afirmación (i): $K \neq \emptyset$, compacto.

Basta probar que $m(E(K)) \geq \alpha$.

Sea $V_j \supset K$ $V_j := \{y \in M : \text{dist}(K, y) < \frac{1}{j}\}$ ($j \in \mathbb{N}^+$).

$\exists K_{i_j} \subset V_j$

Sea $x \in E(K_{i_j}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), K_{i_j}) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), K) \leq \frac{1}{j}$

Sea $x \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} E(K_{i_j}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0$ (pues $\leq \frac{1}{j}$ $\forall j \in \mathbb{N}^+$)

$K_{i_{j_1}} \subset K_{i_{j_2}} \Rightarrow E(K_{i_{j_1}}) \subset E(K_{i_{j_2}})$

$m(E(K_{i_j})) \geq \alpha \Rightarrow m\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} E(K_{i_j})\right) = \lim_{j \rightarrow +\infty} m(E(K_{i_j})) \geq \alpha$

$E(K) \supset \bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} E(K_{i_j}) \Rightarrow m(E(K)) \geq \alpha$ FIN PRUEBA AFIRMACIÓN (i).

Luego ^{para} toda cadena en $\mathcal{N}_\alpha$ existe un elemento minimal en $\mathcal{N}_\alpha$.

Por el LEMA de ZORN existen minimales en $\mathcal{N}_\alpha$.

$\exists K \subset M, K \neq \emptyset, K$ compacto, $m(E(K)) \geq \alpha$

tal que $\forall K' \neq \emptyset, \text{compacto}, K' \subsetneq K, m(E(K')) < \alpha$

Luego $\exists K$ atráctor de Milnor α -Obs. minimal. $\square$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 4 PARTE C

ATRACTORES ERGÓDICOS § 4.4

Sea M variedad compacta Riemanniana

$f: M \rightarrow M$ CONTINUA

m medida de Lebesgue en M
re-escalada para que sea
una probabilidad: $m(M) = 1$

Sea $K \subset M$. K es un "atractor ergódico" si

• $K \neq \emptyset$, K compacto, K es f -invariante ($f^{-1}(K) = K$)

• $\exists V$ abierto $V \supset K$ tal que

⊗ para m-c.t.p $x \in V$ hay "atracción topológica" a K :

es decir: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n x, K) = 0$ m-c.t.p $x \in V$

⊗ para m-c.t.p $x \in V$ hay "atracción estadística" a

una medida de probab. $\mu \in \mathcal{M}_{f|K}$ ERGÓDICA:

es decir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu \quad \text{para m-c.t.p } x \in V$$

(lim en la topol. débil estrecha de $\mathcal{M}_f$)

(o sea $\forall \psi \in C^0(M, \mathbb{R})$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi d\mu \quad \text{para m-c.t.p } x \in V$$

DEF.

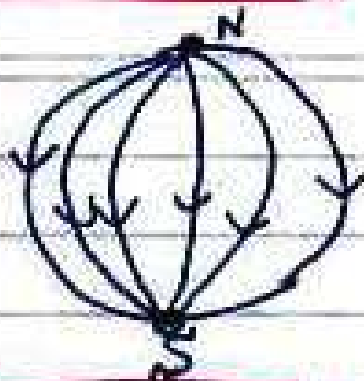
La medida de probabilidad ergódica μ soportada en un atractor ergódico, se llama

"MEDIDA SRB ergódica" o "MEDIDA FÍSICA ergódica"

ADVERTENCIA de NOTACIÓN

Varios autores importantes llaman SRB a medidas que cumplen otras CONDICIONES

EJEMPLO 4.4.10



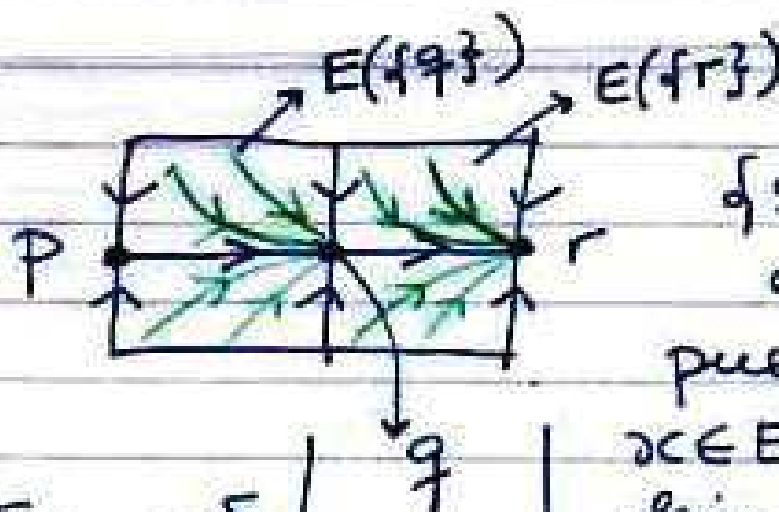
FLUJO POLO NORTE - POLO SUR en la ESFERA S^2

$\{S\}$ atractor ergódico

la medida física ergódica
es δ_S

EJEMPLO 6.1.7.

$f: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^2$



$\{q, r\}$ no es
atractor ergódico

pues

$$x \in E(\{r\}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \delta_r$$

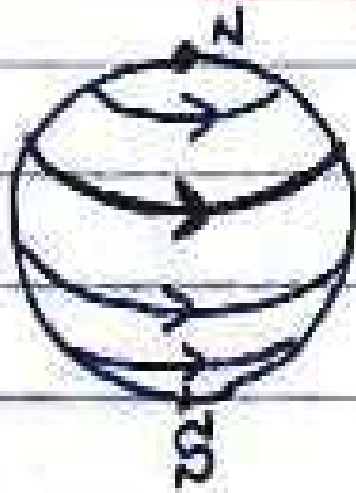
$$x \in E(\{q\}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \delta_q$$

$\nexists$ μ ergódica que atraiga estadísticamente
a m-c.t.p x de un entorno abierto de $\{q, r\}$

$\{q\}$ tampoco es atractor ergódico
 $\{r\}$ es un atractor ergódico.

EJEMPLO 4.4.11

ROTACIÓN IRRACIONAL DE LA
ESFERA S^2



$\nexists$ atractores ergódicos.

ATRACCIÓN ESTADÍSTICA y MEDIDAS SRB o FÍSICAS

2.4.5

DEFINICIÓN 4.5.1

Sea M variedad compacta Riemanniana

Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA

m med. de Lebesgue re-escalada $m(M)=1$

Dada $\mu \in \mathcal{M}_f$. Se llama

"CUENCA de ATRACCIÓN ESTADÍSTICA" $B(\mu)$
(quizás vacía) de μ a

$$B(\mu) := \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}}_{\text{"PROBABILIDAD EMPÍRICA"}} = \mu \right\}$$

límite en
la topología
débil-estrella.

"PROBABILIDAD EMPÍRICA"

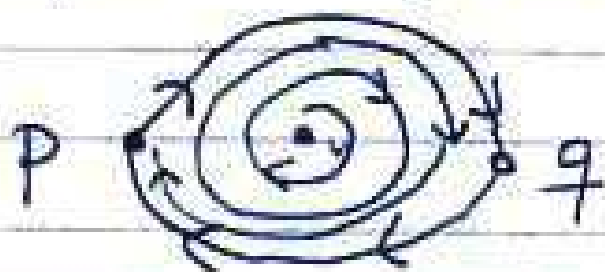
OBSERVACIÓN

$$\mu \text{ ergódica} \Leftrightarrow \mu(B(\mu)) = 1.$$

CONTRA EJEMPLO

$B(\mu)$ puede ser $\neq \emptyset$, e incluso
 $m(B(\mu)) = 1$ pero μ no
ser ergódica

Ejemplo del "ojo de Bowen"



$\mu = \text{csc de } \delta_p \text{ y } \delta_q$
 μ no ergódica

$B(\mu) \supset \bigcup \text{interior del "ojo"}$

DEFINICION 4.5.6

MEDIDA SRB o FÍSICA

Sea $\mu \in \mathcal{M}_f$. μ se llama SRB o FÍSICA
si $m(B(\mu)) > 0$.

ADVERTENCIA de NOTACIÓN: Autores importantes llaman
SRB a medidas que cumplen OTRAS CONDICIONES
Para ellos SRB no es sinónimo de física.
Para nosotros SRB = física.

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 5 PARTE A

**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

eleonora.wikispaces.com

- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas
por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es eleonora@fing.edu.uy

ATRACTORES ESTADÍSTICOS o de ILYASHENKO § 6.2

DEFINICIÓN 6.2.1 Sea M variedad compacta (Riemanniana)
Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA

Sea m la medida de Lebesgue en M (re-escalada $m(M)=1$)

Sea $K \subset M$ ~~compacto~~ ~~no vacío~~ K es "atractor de Ilyashenko" o "atractor estadístico"

si $m(A_K) > 0$ ← OJO: en el libro hay error en esta definición

donde A_K ("cuenca de atracción

estad. de K ") $A_K := \{x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j x, K) = 0\}$

DEFINICIÓN 4.5.2 Sea $x \in M$. Se llama "PROBABILIDAD EMPÍRICA de la ÓRBITA de x HASTA TIEMPO n " a

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}.$$

(en gual $\sigma_{n,x}$
NO es invariante cont)

DEFINICIÓN 4.5.2 Sea $x \in M$. Se llame "PROBABILIDAD EMPÍRICA de la ÓRBITA de x HASTA TIEMPO n " a

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}.$$

(en gral $\sigma_{n,x}$
NO es invariante cont)

Recordamos que $\mu \in M_f$ es "SRB" o "FÍSICA" si $m(B(\mu)) > 0$ donde $B(\mu)$ es la cuenca de atracción estadística de la medida μ , definida por:

$$B(\mu) := \{x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,x} = \mu\}.$$

OBS. : Aunque no existan medidas μ SRB o físicas, la sucesión $\{\sigma_{n,x}\}_{n \geq 1}$ de probabilidades empíricas de cualquier órbita $\sigma^+(x)$ TIENE subsucesiones convergentes.

PROPOSICIÓN 6.3.1 CARACTERIZACIÓN de la ATRACCIÓN ESTADÍSTICA

Sea K un atrator estadístico y sea

A_K su cuenca de atracción estadística:

$$A_K := \left\{ x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j x, K) = 0 \right\}.$$

Entonces:

$x \in A_K$ si y solo si $\exists \mu \in \mathcal{M}_f$ que sea límite de alguna subsucesión converg.

de $\{\sigma_n, x\}$ se cumple $\mu(K) = 1$.

$n \geq 1$ Recordar: $\sigma_n, x := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$ "PROB. EMPÍRICA"

DEMOSTRACIÓN

"Solo si"

$$\text{Hip)} \begin{cases} K \text{ atractor estadístico o de Ilyashenko} \\ x \in A_K \\ \mu = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_L} \sum_{j=0}^{n_L-1} \delta_{f^j(x)} \end{cases}$$

TESIS a probar:

$$\text{Dem: } \forall \psi \in C^0(M, \mathbb{R}) \quad \mu(K) = 1 \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_L} \sum_{j=0}^{n_L-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi d\mu$$

$$\text{En particular } \psi = \text{dist}(x, K) \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_L} \sum_{j=0}^{n_L-1} \text{dist}(f^j(x), K) = \int \text{dist}(x, K) d\mu$$

$$x \in A_K \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j x, K) = 0$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{\text{dist}(x, K)}_{\geq 0} d\mu = 0 \Rightarrow \text{dist}(x, K) = 0 \text{ } \mu\text{-c.t.p } x$$

K compacto $\Rightarrow x \in K$ μ -c.t.p x

$$\Rightarrow \mu(K) = 1. \quad \square$$

DEMOSTRACIÓN

"Si"

HIP)

K attractor estadístico o de Ilyashenko

$\forall \mu$ tal que $\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \delta_{f^j(x)}$
con $n_i \rightarrow \infty$

se cumple $\mu(K) = 1$

Tesis a probar) $x \in \Delta_K$ es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j x, K) = 0$$

Dem: Basta probar que si $n_i \rightarrow \infty$ cumple que $\exists$
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \text{dist}(f^j x, K) = a$ entonces $a = 0$.

Sea una subsucesión de $\{n_i\}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{n_i, x} = \mu \exists$

Sea $\psi = \text{dist}(x, K) \in C^0(M, \mathbb{R})$

$$\int \psi d\sigma_{n_i, x} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \psi \circ f^j(x) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \text{dist}(f^j x, K)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{n_i, x} = \mu \Rightarrow \int \psi d\sigma_{n_i, x} \rightarrow \int \psi d\mu = \int_K \text{dist}(x, K) d\mu = 0$$

pues $\mu(K) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \text{dist}(f^j x, K) = 0. \quad \square$$

DEFINICIÓN 6.3.2 Sea $\mu \in \mathcal{M}$. "SOPORTE COMPACTO de μ " es $\text{sop}_c(\mu)$ el menor compacto (no vacío) tal que $\mu(\text{sop}_c(\mu)) = 1$.

PROPOSICIÓN 6.3.3 RELACIÓN entre MEDIDAS SRB o físicas (cuando existen) y ATRACTORES ESTADÍSTICOS

Sea $f: M \rightarrow M$ tal que $\exists \mu \in \mathcal{M}_f$ "SRB o física".
Entonces

$K := \text{sop}_c(\mu)$ es un atractor estadístico o de Ilyashenko.

(OBS.) el recíproco es falso como veremos luego con contraej.)

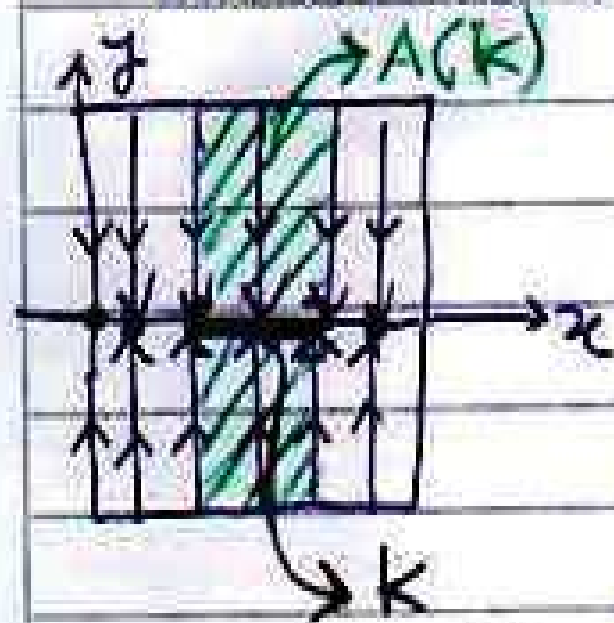
Dem. μ es SRB o física $\Leftrightarrow m(B(\mu)) > 0$.

Basta probar que $B(\mu) \subset A_K$

$$x \in B(\mu) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi d\mu \quad \forall \psi \in C^0(M, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{En particular } \psi = \text{dist}(x, K) &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j x, K) = \\ &= \int \text{dist}(x, K) d\mu = 0 \text{ pues } \mu(K) = 1; \Rightarrow x \in A_K. \quad \square \\ x \in M \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 6.3.3. CONTRAJENCIÓN de $\exists$ atractor estadístico o de Ilyashenko, pero $\nexists$ medida SRB o física



$$f: [0,1]^2 \rightarrow f(x,y) = \left(x, \frac{y}{2}\right)$$

$$K = [a,b] \times \{0\} \quad a < b \in [0,1]$$

$$m(A(K)) > 0$$

$\Rightarrow K$ atr. estadístico

pero no existe μ tal que $m(B(\mu)) > 0$.

$$\mu = \delta_{(x_0,0)} \Rightarrow B(\mu) = \{(x,y) \in [0,1]^2; x = x_0\} \neq \emptyset$$

$$m(B(\mu)) = 0$$

$$\mu \neq \delta_{(x_0,0)} \Rightarrow B(\mu) = \emptyset.$$

República

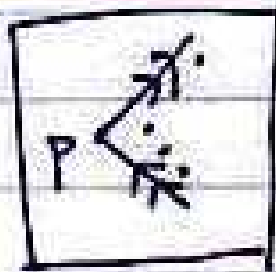
**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 5 PARTE B

EJEMPLO 6.5.1



Automorfismo lineal en T^2

$$f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

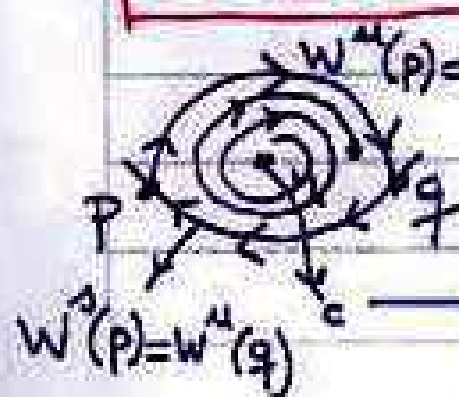
m medida de Lebesgue es ergódica para f

$\Rightarrow m$ -c.i.t.p. x se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi d m \cdot \forall \psi \in C^0(T^2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = m$$

Luego $m(B(m)) = 1 \Rightarrow \text{sup}_e(m) = T^2$ es atractor estadístico o de Ilyashenko

EJEMPLO "OTO de BOWEN"



$$W^u(p) = W^s(q) \quad \forall x \in U \setminus \{c\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x)(p, q)) = 0$$

$K = \{p, q\}$ es atractor estadístico o de Ilyashenko. No es atractor topológico

$W^u(p) \cup W^s(p)$ es atractor topológico

EJEMPLO 6.5.3. de ATRACTOR ESTADÍSTICO o de ILYASHENKO Ejemplo HU-YOUNG



$f \in \text{Diff}^2(T^2)$ $f(p) = p$
 f obtenido por isotopía de un Anosov en T^2
 de modo que $df|_p$ tiene un valor
 propio $0 < \lambda < 1$ (contracción fuerte - exponencial
 dirección $\vec{z} \in T_x M$)

y otro valor propio $\sigma = 1$ (dilatación débil
 dirección $\vec{u} \in T_x M$)

HU-YOUNG prueban que para Lebesgue c.t.p $x \in T^2$

se cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{n,x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \delta_p$

δ_p es SRB o física con $m(B(\mu)) = 1$

$\Rightarrow \{p\}$ es ATRACTOR ESTADÍSTICO o de ILYASHENKO

Pero $\{p\}$ NO es ATRACTOR TOPOLÓGICO porque $\omega(x) = T^2$
 para m.c.t.p. x .

DEFINICIÓN 6.4.1 α -obs. minimalidad.

Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA en VARIEDAD COMPACTA M .

Sea K atractor estadístico o de Ilyashenko
con cuenca de atracción estadística $A(K)$

K se dice " α -observable" si $m(A(K)) \geq \alpha$
(α real $0 < \alpha \leq 1$)

K se dice " α -obs. minimal" si $m(A(K)) \geq \alpha$ y
 $\forall K' \neq \emptyset$, compacto tal que $K' \not\subseteq K$ se
cumple $m(A(K')) < \alpha$.

EXISTENCIA de ATRACT. ESTADÍSTICOS α -obs. minimales.

TEOREMA 6.4.3 Sea $f: M \rightarrow M$ CONTINUA, M var. compacta.

Sea $0 < \alpha \leq 1$. Entonces existen atractores
estadísticos (o de Ilyashenko) α -obs. minimales
Además si $\alpha = 1$ el atractor de "1-obs. minimal es UNICO.

Dem. (Similar a dem. de Teor. de $\exists$ de atract. de Milnor)

Sea $\mathcal{X}_\alpha := \{K \subset M: \emptyset \neq K \text{ compacto}, m(A(K)) \geq \alpha\}$

$\mathcal{X}_\alpha \neq \emptyset$ pues $M \in \mathcal{X}_\alpha$. Sea $\{K_i\}_{i \in I}$ cadena en $\mathcal{X}_\alpha$ (subconj. totalmente ordenado de $\mathcal{X}_\alpha$ con la relación de orden parcial $K_1 \subset K_2$)

$\forall j \in \mathbb{N}^+ \quad V_j := \{x \in M: \text{dist}(x, K) < \frac{1}{j}\}$

donde $K := \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, compacto

$\exists K_{i_j} \subset V_j$

Afirmac: $x \in A(K) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \text{dist}(f^h x, K) < \frac{1}{j}$

Luego

$x \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} A(K_{i_j}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \text{dist}(f^h x, K) = 0$

$\Rightarrow x \in A(K) \quad : \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} A(K_{i_j}) \subset A(K)$

$K_{i_1} \subset K_{i_2} \Rightarrow A(K_{i_1}) \subset A(K_{i_2}) \quad m(A(K_{i_j})) \geq \alpha$ pues $K_{i_j} \in \mathcal{X}_\alpha$

Luego $m(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^+} A(K_{i_j})) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(A(K_{i_j})) \geq \alpha \Rightarrow m(A(K)) \geq \alpha$
 $\Rightarrow K \in \mathcal{X}_\alpha$: Toda cadena tiene minimal - Lema de Zorn $\Rightarrow \exists$ minimales en $\mathcal{X}_\alpha$. $\square$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 6 PARTE A

**ESTOS VIDEOS CON AUDIO Y LAS FOTOS DE LOS
PIZARRONES PUEDEN BAJARSE DE**

eleonora.wikispaces.com

- **Durante la XXVI EVM responderé preguntas y dudas
por correo electrónico**

Mi dirección electrónica es eleonora@fing.edu.uy

MEDIDAS SRB-LIKE O PSEUDO FÍSICAS

Sea $\mu \in \mathcal{M}_f$

Recordar "cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ de μ "

$$(*) \quad B(\mu) := \{x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{T_n}_\mu x = \mu\}$$

PROB. EMPÍRICA $T_n, x := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$

DEFINICIÓN 6.6.1

" ω omega límite"

(omega límite en el espacio de las medidas de probab)

Sea $x \in M$

$$pw(x) := \{\mu \in \mathcal{M} : \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } T_{n_i}, x \rightarrow \mu\}$$

$$pw(x) \text{ es } \neq \emptyset, \text{ compacto } - \subset \mathcal{M}_f \quad \forall x \in M$$

$$(*) \quad B(\mu) := \{x \in M : pw(x) = \{\mu\}\} \quad \text{"cuenca de atracción estadística de } \mu \text{"}$$

DEFINICIÓN 6.6.3

cuenca de atracción estadística ϵ -débil de μ es

$$A_\epsilon(\mu) := \{x \in M : \text{dist}(pw(x), \mu) < \epsilon\}$$

* $B(\mu) := \{x \in M : pw(x) = \{\mu\}\}$ "cuena de atrac. estadística de μ "

DEFINICIÓN 6.6.3 Cuena de atracción estadística ϵ -débil de μ es

$$A_\epsilon(\mu) := \{x \in M : \text{dist}(pw(x), \mu) < \epsilon\}$$

DEFINICIÓN 4.5.6 μ es "SRB o física" si $m(B(\mu)) > 0$

DEFINICIÓN 6.6.4 μ es "SRB-like" o "pseudo-física" si $m(A_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0$

Recordar: Pueden no existir medidas SRB o físicas. Queda existen sus soportes compactos son atractores de Ilyashenko.
 • Siempre $\exists$ atractores estadísticos o de Ilyashenko. Además:

TEOREMA 6.6.6 Existencia de medidas SRB-like o pseudo-físicas

M var. compacta
 $f: M \rightarrow M$ CONTINUA } $\Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{M}_f$ SRB-like o pseudo-física

• El conjunto $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{M}_f$ de medidas de prob. " " es compacto

TEOREMA 6.7.2 Atractores de Ilyashenko y medidas SRB-like

K es atract. estadístico o de Ilyashenko 1-obs. minimal
 si y solo si

K es el soporte compacto común de todas las
 medidas de prob. SRB-like (o pseudofísicas)

(i.e: K es el mínimo compacto tal que $\mu(K)=1 \forall \mu \in \mathcal{O}_f$)

TEOREMA 6.6.6

Existencia de medidas de probab.
SRB-like o pseudo-físicas

- (a) $\exists \mu \in \mathcal{M}_f$ SRB-like (o pseudofísica)
(b) El conjunto $\mathcal{Q}_f \subset \mathcal{M}_f$ de medidas SRB-like es compacto

Dem.

(a) por absurdo $\mathcal{Q}_f = \emptyset \Rightarrow \mu \notin \mathcal{Q}_f \forall \mu \in \mathcal{M}$ $V_\varepsilon(\mu) := \{ \nu \in \mathcal{M} : \text{dist}(\nu, \mu) < \varepsilon \}$
 $\Rightarrow m(\{x \in M : p\omega(x) \cap V_\varepsilon(\mu) \neq \emptyset\}) = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M}$
 (para cierto $\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0$)

Cubrim. finito del compacto $\mathcal{M}$ con los abiertos V_ε

$\Rightarrow m(\{x \in M : p\omega(x) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}) = 0$

Pero $\forall x \in M \neq p\omega(x) \subset \mathcal{M}$ ABURDO. $\square$

- (b) $\mathcal{Q}_f \subset \mathcal{M}_f$, $\mathcal{M}_f$ compacto. Basta probar que $\mathcal{Q}_f$ es cerrado.

Sea $\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$ $\mu_i \in \mathcal{Q}_f$ Sea $V_\varepsilon(\mu)$

$\{x \in M : p\omega(x) \cap V_\varepsilon(\mu) \neq \emptyset\} \supset \{x \in M : p\omega(x) \cap V_{\varepsilon_i}(\mu_i) \neq \emptyset\}$ donde $V_{\varepsilon_i}(\mu_i) \subset V_\varepsilon(\mu)$

$\mu_i \in \mathcal{Q}_f \Rightarrow m(\{x \in M : p\omega(x) \cap V_{\varepsilon_i}(\mu_i) \neq \emptyset\}) > 0$
 $\Rightarrow m(A_\varepsilon(\mu)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$
 $\Rightarrow \mu \in \mathcal{Q}_f. \quad \square$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 6 PARTE B

TEOREMA 6.6.7 *Optimalidad estadística del conjunto $\mathcal{O}_f$ de medidas SRB-like o pseudofisicales*

- (a) $p\omega(x) \subset \mathcal{O}_f$ para m-c.t.p $x \in M$
 (b) $\mathcal{O}_f$ es el mínimo compacto del espacio de prob $\mathcal{M}$ tal que $p\omega(x) \subset \mathcal{O}_f$ para m-c.t.p $x \in M$

Dem.

(a) Sea $\varepsilon > 0$. Sea $V_\varepsilon(\mathcal{O}_f) = \{ \nu \in \mathcal{M} : \text{dist}(\nu, \mathcal{O}_f) < \varepsilon \}$

Sea $\mathcal{C}_\varepsilon = \mathcal{M} \setminus V_\varepsilon(\mathcal{O}_f)$ COMPACTO.

$\nu \in \mathcal{C}_\varepsilon \Rightarrow \exists \varepsilon' = \varepsilon'(\nu)$ t.q. $m(\{x \in M : p\omega(x) \cap V_{\varepsilon'}(\nu) \neq \emptyset\}) = 0$
 (pues $\nu \notin \mathcal{O}_f$)

Cubrimos finito de $\mathcal{C}_\varepsilon$ con $V_{\varepsilon_1}(\nu_1), V_{\varepsilon_2}(\nu_2), \dots, V_{\varepsilon_k}(\nu_k)$

$\Rightarrow m(\{x \in M : p\omega(x) \cap \mathcal{C}_\varepsilon \neq \emptyset\}) = 0 \Rightarrow$ m c.t.p $x \in M$
 se cumple $p\omega(x) \subset V_\varepsilon(\mathcal{O}_f)$.

Esta inclusión vale para todo $\varepsilon > 0$. Luego para m-c.t.p. x el conjunto $p\omega(x)$ está contenido en $\mathcal{O}_f$, como queríamos demostrar.

TEOREMA 6.6.7 *Optimalidad estadística del conjunto $\mathcal{Q}_f$ de medidas SRB-like o pseudofrías*

- (a) $p_w(x) \subset \mathcal{Q}_f$ para m-c.t.p $x \in M$
- (b) $\mathcal{Q}_f$ es el mínimo compacto del espacio de prob. tal que $p_w(x) \subset \mathcal{Q}_f$ para m-c.t.p $x \in M$

Dem.

(b) Sea $K' \neq \emptyset$ K' compacto $K' \not\subset \mathcal{Q}_f$

$\Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{Q}_f \setminus K' \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $V_\varepsilon(\mu) \cap K' = \emptyset$

$\mu \in \mathcal{Q}_f \Rightarrow m(\{x \in M : p_w(x) \cap V_\varepsilon(\mu) \neq \emptyset\}) > 0$

$\Rightarrow p_w(x) \not\subset K'$ para un conjunto de $x \in M$ con medida de Lebesgue $m > 0$.

No se cumple $p_w(x) \subset K'$ para m c.t.p $x \in M$. $\square$

**XXVI Escuela Venezolana de
Matemáticas
EMALCA 2013
Mérida
del 1 al 6 de setiembre de 2013**

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA

Eleonora Catsigeras
Univ. de la República
Montevideo, Uruguay

CLASE 6 PARTE C

TEOREMA 6.7.2 | Atractores de Ilyashenko y medidas SRB-like

K es atractor de Ilyashenko 1-obs. minimal
si y solo si

K es el soporte compacto común de todas las medidas de prob $\mu \in \mathcal{Q}_f$ (pseudofísicas o SRB-like)

(Es decir: K es el mínimo compacto de la variedad M tal que $\mu(K) = 1 \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}_f$)

Demostación

Continuación de la dem. del "solo si" del Teorema 6.7.2

Sea $\varphi = \text{dist}(x, K)$

Hip) $\Rightarrow m(A(K)) = 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j(x) = 0$ m.c.t.p.x

Teorema de optimalidad estadística $p\omega(x) \in \mathcal{Q}_f$ m.c.t.p.x

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j(x) = \int \varphi d\mu \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}_f$

$\Rightarrow \int \varphi d\mu = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}_f : \int_{x \in M} \text{dist}(x, K) d\mu = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}_f$

$\Rightarrow \mu(K) = 1 \quad \forall \mu \in \mathcal{Q}_f. \quad \square$

Demostación (CONTINUACIÓN) del Teo 6.7.2,

"si" Hip) K_2 es el mínimo soporte compacto
común de todas las medidas $\mu \in \mathcal{E}_f$

Test) K_2 es atractor de Ilyasheenko 1-obs. minimal.

Dem:

Sea K el atractor de Ilyasheenko 1-obs. minimal.

Por lo probado en la parte anterior $K = K_2$. $\square$.