Sobre el Programa MOEBIUS

1. Qué es Moebius.
2 . Seis tareas divertidas de matemática.

por Eleonora Catsigeras[1]

Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay
Desde el 2 de julio al 15 de octubre de 2014.

El objeto geométrico de la figura se llama "cinta de Moebius". Es una superficie de una sola cara.

Se obtiene de una cinta con dos caras uniendo adecuadamente sus extremos inicial y final.

La unión, si es adecuada, permitirá avanzar a lo largo de la cinta sobre una de las caras, pasando imperceptiblemente a lo que antes era la otra cara, sin atravesar extremos, bordes o fronteras, ni hundirse bajo la superficie.

En sentido figurado, en forma análoga a esa propiedad geométrica matemática, el proyecto *"Moebius"* aspira diseñar, implementar y experimentar

módulos de enseñanza integrada entre el bachillerato y la universidad,

que permitan unir adecuadamente el extremo final de una etapa del proceso educativo con el inicial de la otra, y facilitar el pasaje de una a la otra diluyendo las fronteras.

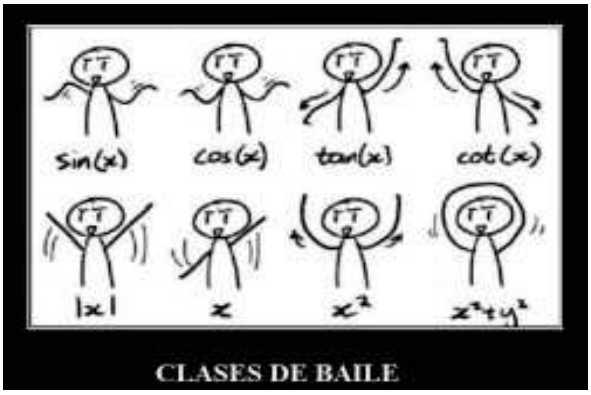
El proyecto *"Moebius"* abarcaría las asignaturas de Física, Matemática y Química.

---

1 Profesora Grado 4 del Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia", Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. Dirección Av. Herrera y Reissig 565, C.P. 11300 Montevideo. Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

TAREA OPTATIVA “DANZA DE FUNCIONES”

Observa el siguiente dibujo:



Responde las siguientes preguntas en el foro.
Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas
y/o subirse fotos o videos de las soluciones, por ejemplo tomados con un celular.

DISEÑO

a) Busca en internet o pregunta a tus profesores, cómo son las “curvas” gráficas de las siguientes funciones y croquízalas aproximadamente:

$$\sin(x), \cos(x), \tan(x), |x|, x^2, \sqrt{|x|}$$

Lo mismo que en la pregunta anterior, pero para la siguiente ecuación:

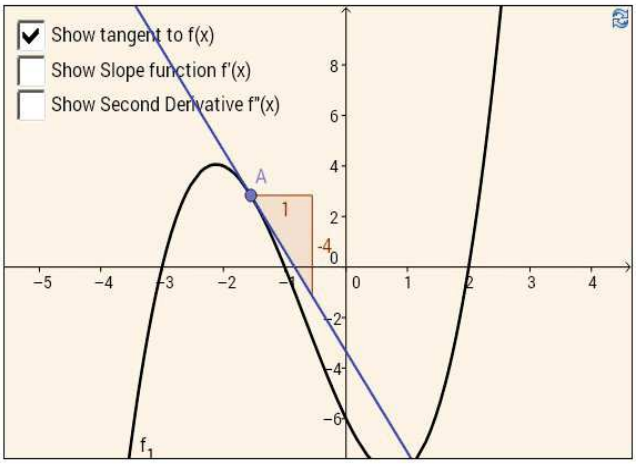
$$x^2 + y^2 = 1.$$

b) Diseña objetos, edificaciones, esculturas, coreografías, imágenes, actividades, etc que utilicen en forma aproximada las formas de gráficas de esas u otras funciones.

c) ¿Por qué o para qué la forma de cada función que elegiste es adecuada o significativa en relación al objeto o actividad diseñados? (La razón puede ser científica, utilitaria o artística)

TAREA OPTATIVA
“DERIVADA Y TANGENTE”

Experimentar con el programa interactivo siguiente
sobre la curva “cúbica” gráfica de la función y = (x-2)(x+1)(x+3)
http://geogebratube.com/student/m12373



Responde las siguientes preguntas en el foro.
Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas
y/o subirse fotos o videos de las soluciones, por ejemplo tomados con un celular.

Alicia Castilla "Tangentes"
Collage- Febrero 2014
Librería La Fugitiva

a) En el programa interactivo ¿cuánto vale la derivada primera en los puntos de la curva cúbica donde la recta tangente es horizontal?
¿Puedes calcular esos puntos directamente a partir de la función sin usar el programa interactivo?

b) ¿Es siempre la derivada primera igual al cociente entre el cateto vertical y el horizontal en el triángulo sombreado?
¿Puedes explicar por qué?

c) ¿Cuánto vale la derivada segunda en el punto donde la recta tangente tiene la mayor inclinación negativa (punto de inflexión)?
¿Puedes calcular ese punto de inflexión sin usar el programa interactivo?

d) ¿Qué objeto o fenómeno natural o artificial se podría modelar aproximadamente usando los conceptos de derivada y/o recta tangente?

TAREA OPTATIVA “CAÍDA LIBRE”

Experimenta con el recurso interactivo
http://geogebratube.com/student/m136554
sobre “Caída Libre”.

Si deseas conocer las fórmulas matemáticas involucradas
puedes mirar por ejemplo los videos
https://www.youtube.com/watch?v=VSEvl9W7fn8 y
https://www.youtube.com/watch?v=RK9En0ggDaI).

Responde las siguientes preguntas en el foro.
Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas
y/o subirse fotos de las soluciones, por ejemplo tomadas con un celular.

1. DESDE EL CERRO

Después de una larga caminata en subida llegaste casi sin aliento a la parte más alta de la cruz que está en la cima del Cerro Pan de Azúcar a 500 metros de altura, cargando una mochila con una naranja de 100 gramos y un zapallo de 10 kilogramos.

a) ¿Cuánto demora la naranja cuando la sueltas en caída libre desde la parte más alta de la cruz que está en la cima del Cerro Pan de Azúcar, si no tropieza con nada hasta llegar al piso que está a 0 metro de altura?

b) ¿Qué velocidad lleva la naranja al tocar el piso?

c) ¿Y si en vez de la naranja tiras el zapallo, cuánto demora y qué velocidad tiene al tocar el piso?

2. EL MONO Y EL TIGRE

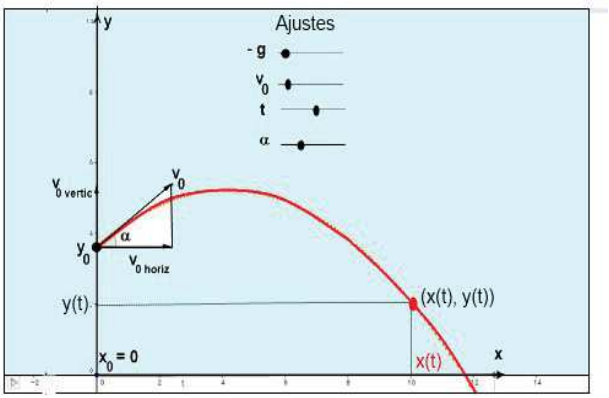
Ver video del mono y el tigre en
https://www.youtube.com/watch?v=5qqdovHOgvU

a) ¿Cuánto demora el mono en tocar la oreja del tigre desde que se suelta de la rama en caída libre (sin impulsarse) desde una altura de 50 metros sobre el piso, sabiendo que la oreja del tigre está justo en la misma vertical que el mono y a 50 centímetros sobre el piso?

b) Si el mono saltara verticalmente desde la rama hacia arriba y con una velocidad inicial de 10 metros por segundo, ¿qué altura máxima alcanzaría antes de empezar su caída?

TAREA
"PROYECTIL - CAÑONES Y FLECHAS"[1]

1. TRAYECTORIA DEL PROYECTIL



Considerar las fórmulas del CUADRO 1 (página siguiente) que dan la posición del proyectil en función del tiempo.

a) Determinar si hay un ángulo de lanzamiento a nivel del suelo que haga máximo el alcance del proyectil. ¿Depende este ángulo de la velocidad?

b) Determinar la altura máxima alcanzada por un proyectil conocida la velocidad inicial (con su ángulo).

c) ¿Puedes explicar por qué la trayectoria del proyectil es una parábola?

2. LOS CAÑONES DE SANTA TERESA

El 9 de setiembre de 1769 un cañón de la Fortaleza de Santa Teresa, a 80 metros de altura sobre el nivel del mar, lanzó una bala a la velocidad máxima que podían disparar sus cañones, 100 metros/segundo. Alcanzó su blanco en el mar a 500 metros de distancia.

¿Con qué ángulo disparó el cañón?

¿Cuál era la distancia máxima de alcance de los cañones de la Fortaleza?

3. EL ARQUERO

En el mes de abril de 2013 los atletas de pueblos indígenas de la Amazonia compitieron deportivamente en la Vila Olímpica de Manaus en la modalidad de arco y flecha[2]. Durante la competencia, un turista novato en ese deporte disparó una flecha horizontalmente a 40 metros del blanco al que apuntaba. Después dijo a la prensa que su flecha impactó a 10 cm del blanco. ¿A qué velocidad habría disparado la flecha el turista? ¿Mintió a la prensa?

---

1 Resolver en equipo y responder esta tarea en el foro.Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas y/o subirse fotos o videos de las soluciones, por ejemplo tomados con un celular.

2. Información extraída de http://www.amazonianarede.com.br "Projeto Arquearia Indígena e Ribeirinha nos Jogos Rio 2016"

CUADRO 1

"Fórmulas matemáticas del movimiento de un proyectil"[3]

Si t denota el tiempo,
la posición del proyectil en el instante t
tiene coordenadas

$$x(t) = x(0) + t\, v_{0,horiz}\,, \qquad y(t) = y(0) + t\, v_{0,vertic} + g\, t^2/2$$

En particular en la Tierra:
$g = -9.81\, metros/segundo^2$
es la aceleración gravitatoria.
Es negativa porque apunta hacia abajo.

---

3 En los siguientes cinco videos se puede ver una clase teórica expositiva, parecida a algunas que tendrán en la Facultad el año que viene. En ella se explica por qué rigen las fórmulas matemáticas del CUADRO 1. Se sugiere mirar los videos en el orden dado.

Duración total de los cinco videos: 45 minutos. Encender audio.

- En el eje horizontal (eje de las x) **"Movimiento rectilíneo a velocidad constante"**

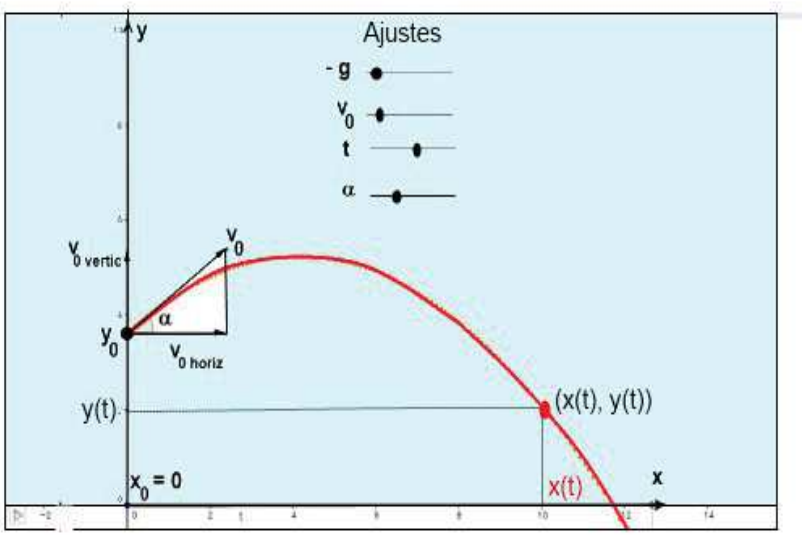
  Moebius 01 Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=M5dtdA1vzq8
  Moebius 01 Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=XzJcWnAoims
  Moebius 01 Parte 3 https://www.youtube.com/watch?v=ITjqaaQhVM0

- En el eje vertical (eje de las y) **"Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado"**

  Moebius 03 Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=VSEvl9W7fn8
  Moebius 03 Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=RK9En0ggDaI).

TAREA OPTATIVA
"PROYECTIL - EXPERIMENTO MATRIX"[1]

1) Experimentar con el recurso interactivo siguiente de simulación de "Proyectil":
http://geogebratube.com/student/m39135



EXPERIMENTO MATRIX

2) Realizar varias veces el siguiente experimento, ajustando a diferentes valores la velocidad inicial v_0 el ángulo α y la aceleración vertical $-g$ (hacia abajo) en cada simulación:

- Iniciar el lanzamiento del proyectil en el instante 0 y detener el proyectil antes de que toque el suelo, como Keanu Reaves en Matrix, con cara de recio y usando una sola mano (en el ratón de la computadora).
- Medir en qué instante y en qué posición quedó "congelado" el proyectil.
- Chequear si se cumplen (aproximadamente) las fórmulas matemáticas[2], del CUADRO 1 (ver página siguiente) y estimar los errores de medición.

1 Resolver en equipo y responder esta tarea en el foro.Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas y/o subirse fotos o videos de las soluciones, por ejemplo tomados con un celular.

2 Observar que v_0 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial.

CUADRO 1

"Fórmulas matemáticas del movimiento de un proyectil"[3]

Si t denota el tiempo,
la posición del proyectil en el instante t
tiene coordenadas

$$x(t) = x(0) + t\, v_{0,horiz}\,, \qquad y(t) = y(0) + t\, v_{0,vertic} + g\, t^2/2$$

En particular en la Tierra:
$g = -9.81\ metros/segundo^2$
es la aceleración gravitatoria.
Es negativa porque apunta hacia abajo.

---

3 En los siguientes cinco videos se puede ver una clase teórica expositiva, parecida a algunas que tendrán en la Facultad el año que viene. En ella se explica por qué rigen las fórmulas matemáticas del CUADRO 1. Se sugiere mirar los videos en el orden dado.

Duración total de los cinco videos: 45 minutos. Encender audio.

- En el eje horizontal (eje de las x) **"Movimiento rectilíneo a velocidad constante"**

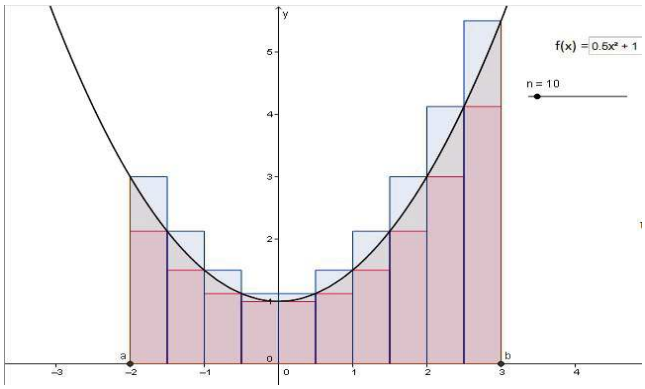
  Moebius 01 Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=M5dtdA1vzq8
  Moebius 01 Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=XzJcWnAoims
  Moebius 01 Parte 3 https://www.youtube.com/watch?v=ITjqaaQhVM0

- En el eje vertical (eje de las y) **"Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado"**

  Moebius 03 Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=VSEvl9W7fn8
  Moebius 03 Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=RK9En0ggDaI).

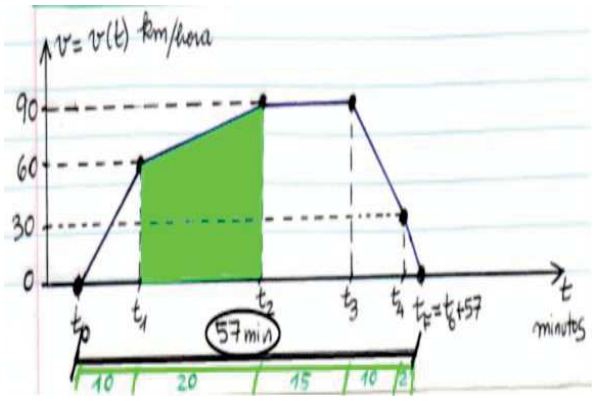
TAREA OPTATIVA
"INTEGRAL Y ÁREA"

Experimentar con el programa interactivo siguiente sobre suma de Riemann, cálculo de área e Integral
https://eva.fing.edu.uy/mod/page/view.php?id=36060



Mirar los videos expositivos siguientes:
Moebius 02 Parte 1 https://www.youtube.com/watch?v=kz1tp_semqY
Moebius 02 Parte 2 https://www.youtube.com/watch?v=VQXT4pqvJAQ
Moebius 02 Parte 3 https://www.youtube.com/watch?v=xwztQ2wYjRc
Moebius 02 Parte 4 https://www.youtube.com/watch?v=jwWIDPqeSq8

Responder las siguientes preguntas en el foro.
Las respuestas pueden ser en archivo electrónico o manuscritas y/o subirse fotos o videos de las soluciones, por ejemplo tomados con un celular.



1. Usando el programa interactivo para la función $f(x)=0.5\,x^2+1$ en el intervalo $-2\leq x\leq 3$:

a) ¿Cuánto vale la suma superior de Riemann y cuánto vale la suma inferior de Riemann?

b) ¿Cuánto vale el área exacta abajo de la curva gráfica?

c) ¿Cómo se calcula esa área directamente a partir de la primitiva de la función y aplicando la Regla de Barrow, sin usar el programa interactivo?

2. Justificar gráficamente con un ejemplo que la distancia recorrida por un móvil a velocidad variable es igual al área abajo de la curva gráfica de la velocidad en función del tiempo.