Curso Audiovisual de Cálculo Diferencial e Integral I. Cálculo en Una Variable Real. (Incompleto).

Eleonora Catsigeras

Universidad de la República

Montevideo.- Uruguay

2011

Ir al índice de clases aquí

RESUMEN

En enero del año 2003 se hicieron algunos videos de clases de Cálculo 1 en una actividad de verano dedicada a estudiantes que estaban preparando el examen para febrero de ese año. Los videos fueron grabados con audio a tiempo real e imágenes móviles de pizarrones, en los que aparecía la escritura a medida que se realizaba. Los archivos generados fueron guardados en un CD y entregados a los estudiantes. Los videos se reproducían con un software que se bajaba en línea de Real Player. Sin embargo, cuatro años después ese software dejó de existir, y no se pudo más reproducir los videos. Los archivos de los videos no eran convertibles a formatos estándard. Por lo que quedaron inutilizados.

En el año 2011, pudo recuperarse los archivos de audio y las fotos fijas de los pizarrones de los videos. Todos esos archivos, que ocupan mucha memoria, junto al índice de clases que figura en este documento, se subieron a una página de internet del sitio que se llamaba "wikispaces", para que los estudiantes pudieran escuchar las clases en línea mientras miraban las fotos fijas de los pizarrones. Ya antes, en 2007, con la intención de completar el

curso se grabaron algunos pizarrones más y los videos de cinco clases. Sin embargo nunca se grabaron los videos que faltan y el curso quedó incompleto.

El sitio de “wikispaces” dejó de existir 8 años después. Y se perdió el acceso a los audios y fotos de los pizarrones. En el año 2024, se recuperaron los archivos de audio y las fotos de los pizarrones de los archivos antiguos que estaban en un CD.

Los archivos de audio fueron convertidos a videos con imagen fija, y se intentó subirlos a YouTube, pero este sitio no los pudo procesar. Se subieron a mi página personal de FING. Los archivos de las fotos de los pizarrones también fueron subidos a mi página personal de FING, para que tengan acceso público. Las fotos de los pizarrones fueron guardados todos juntos en un archivo pdf que será entregado a la Biblioteca Central de la Facultad de Ingeniería, para que, en un futuro próximo, pueda encontrarse accesible en forma permanente y bajarse del sitio biur.edu.uy.

Cada 5 clases de este curso audiovisual corresponden a una semana de clases presenciales del curso de Cálculo 1 de la Facultad de Ingeniería, según el programa de ese curso de los años 2003, 2007 y 2011.

INDICE

Capítulo I. Repaso de Aritmética de números naturales, enteros, racionales y reales. Axioma de completitud y topología en la recta real.

Clases del 2003: B00, B01, B03, B04, B05.

Clases del 2011: 01, 02, 03, 04.

Capítulo II. Números complejos.

Clases del 2011: 05, 06, 07, 07 complementaria.

Capítulo III. Sucesiones de reales.

Clases del 2003: B06, B07, B08, B09, B10.

Clases del 2011: 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 14 complementaria.

Inicio

Indice

Capítulo IV. Funciones y límite de funciones.

Clases del 2011: 15, 16, 17, 18, 19.

Capítulo V. Continuidad de funciones.

Clases del 2003: B27, B28.

Clases del 2011: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Capítulo VI Derivada y diferencial (en construcción). Desarrollo de Taylor.

Clase del 2007: C18.

Clases del 2011: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

Inicio

Indice

Capítulo VII Extremos relativos y absolutos de funciones derivables (en construcción).
Clases del 2011: 36, 37, 38, 39, 40.

Capítulo VIII Integral de Riemann y primitivación.
Clases del 2003: B28, B29, B30, B45, B46.
Clases del 2011: 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Capítulo IX Métodos de integración.
Clases del 2003: B47, B48, B49, B50.
Clases del 2011: 47, 48, 49, 50, 51, 52.

Capítulo X Integrales impropias (en construcción)
Clases del 2011: 53 al 56 (en construcción)

Capítulo XI Series
Clases del 2003: B11, B12, B13, B14.
Clases del 2011: 57, 58, 59, 60.

Capítulo XII. Ecuaciones diferenciales.
Clases del 2007: A01, A02, A03, A04.
Clases del 2011: 61, 62, 63, 64.

Inicio
Indice

Capítulo I.

Repaso de Aritmética de números naturales, enteros, racionales y reales.
Axioma de completitud y topología en la recta real.

Clases del 2003: B00, B01, B03, B04, B05.
Clases del 2011: 01, 02, 03, 04.

Clase B00 del año 2003 Notaciones sobre conjuntos. Idea de sucesión Idea de número real como sucesión de intervalos encajados convergentes.
Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase00del2003.pdf

Audio: Clase B00 parte 1
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB00parte1.mp4
Clase B00 parte2
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB00parte2.mp4
Clase B00 parte3
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB00parte3.mp4

Ir al Indice

Clase 01 Números naturales y axioma de inducción completa.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase01.pdf

Ir al Indice

Clase B01 del año 2003 Principio de inducción completa, conjuntos de números naturales, racionales y reales. Demostración que raiz cuadrada de 2 es irracional. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase01del2003.pdf

Audio: Clase B01 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB01parte1.mp4

Clase B01 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB01parte2.mp4

Clase B01 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB01parte3.mp4

Ir al Indice

Clase 02 Números enteros y racionales. Axiomas de orden y de cuerpo. Valor absoluto.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase02.pdf

Ir al Indice

Clase 03 Números reales. Axiomas de orden y de cuerpo. Demostración que raiz cuadrada de 2 es irracional. Axioma de completitud, supremo e ínfimo de un conjunto acotado no vacío de reales.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase03.pdf

Ir al Indice

Clase B03 del año 2003: Sucesiones de reales: Ejemplo de sucesión geométrica y suma geométrica. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase03del2003.pdf

Audio: Clase B03 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB03parte1.mp4

Clase B03 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB03parte2.mp4

Clase B03 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB03parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B04 del año 2003: Axiomas de cuerpo, orden y completitud de los números reales Demostración que los naturales no están acotados superiormente y que todo conjunto de naturales tiene mínimo. Principio de Arquímedes y definición de parte entera de un real. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase04del2003.pdf

Audio: Clase B04 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB04parte1.mp4

Clase B04 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB04parte2.mp4

Clase B04 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB04parte3.mp4

Ir al Indice

Clase 04 Números reales. Raiz cuadrada real y raiz n-ésima real. Valor absoluto. Topología en la recta.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase04.pdf

Ir al Indice

Clase B05 del año 2003 Topología en la recta: definición de valor absoluto, distancia entre puntos y entorno o bola de radio epsilon. Definición de abierto, cerrado, compacto. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase05del2003.pdf

Audio: Clase B05 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB05parte1.mp4

Clase B05 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB05parte2.mp4

Clase B05 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB05parte3.mp4

Inicio

Indice

Capítulo II.

Números complejos

Clases del 2011: 05, 06, 07, 07 complementaria.

Clase 05 Definición de número complejo y representación gráfica. Módulo, argumento, conjugado, operaciones con los complejos, estructura de cuerpo, interpretación geométrica de suma y producto. Rotohomotecias y Traslaciones. Conjugación. Cálculo del cociente.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase05.pdf

Ir al Indice

Clase 06 Teorema fundamental del álgebra (solo enunciado). Raiz cuadrada compleja. Raiz n-ésima compleja.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase06.pdf

Ir al Indice

Clase 07 Transformaciones de Moebius (definición y ejemplos). Exponencial compleja y logaritmo complejo (solo definiciones). Fórmula de un complejo no nulo como el producto de su módulo por la exponencial de exponente imaginario.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase07.pdf

Ir al Indice

Clase 07 Complementaria. Ejemplos con números complejos.

Ver documento en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase07Comp.pdf

Inicio

Indice

Capítulo III

Sucesiones de números reales.

Clases del 2003: B06, B07, B08, B09, B10.
Clases del 2011: 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 14 complementaria.

Clase 08 Definición de sucesión de reales. Definición de sucesión de sumas acumuladas de reales (reducidas enésimas de series de reales). Ejemplo. Suma acumulada usando inducción completa. Sucesión geométrica. Serie geométrica. Suma de los primeros n naturales.

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B03 del 2003** (en el Capítulo 1)

Ir al Indice

Clase 09 Definición de límite de una sucesión. Sucesiones convergentes. Condición para que una sucesión no converja a L. Sucesiones de Cauchy. Teorema y demostración que toda sucesión de Cauchy es convergente y recíprocamente.

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B06 del 2003**, más abajo en este capítulo.

Ir al Indice

Otra demostación alternativa del teorema de convergencia de sucesiones de Cauchy está más abajo en este capítulo en la clase 14 complementaria, pero tiene como prerrequisito demostrar primero el teorema de Bolzano -Weierstrass.

Clase 10 Sucesiones convergentes, no convergentes, acotadas, no acotadas.

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B07** del 2003, más abajo en este capítulo.

Ir al Indice

Clase 11 Algunas propiedades de límites de sucesiones.

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B08 del 2003** (primera parte), más abajo en este capítulo.

Ir al Indice

Clase 12 Operaciones con límites de sucesiones. Más propiedades sobre límites de sucesiones.

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B09 del 2003** (primera parte), más abajo en este capítulo.

Ir al Indice

Clase 13 Subsucesiones, definición, ejemplos, límites de subsucesiones y ejemplos

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B10 del 2003** (primera parte), más abajo en este capítulo.

Ir al Indice

Clase 14 Teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones (con demostración)

Fotos de pizarrones + audio a tiempo real: ver **Clase B10 del 2003** (primera parte), más abajo en este capítulo.

Otra demostración alternativa del Teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones, con su explicación detallada, está en la clase 14 complementaria.

Ir al Indice

Clase 14 Complementaria Teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones (demostración alternativa por el método de la cumbres) Demostración alternativa del teorema de convergencia de las sucesiones de Cauchy. Definición y ejemplos de conjunto de reales cerrado, completo, compacto y abierto.

Ver documento en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase14Comp.pdf

Ir al Indice

Clase B06 del año 2003 Límite de sucesiones de reales. Sucesión de Cauchy. Toda suc de Cauchy es convergente y recíprocamente. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase06del2003.pdf

Audio: Clase B06 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB06parte1.mp4

Clase B06 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB06parte2.mp4

Clase B06 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB06parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B07 del año 2003 Sucesiones de reales convergentes, no convergentes, acotadas, etc. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase07del2003.pdf

Audio: Clase B07 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB07parte1.mp4

Clase B07 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB07parte2.mp4

Clase B07 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB07parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B08 del 2003 Sucesiones monótonas de reales. Sucesiones potenciales y sucesiones exponenciales. Demostración que toda sucesión de intervalos encajados convergente define un único real (usando el axioma de completitud de los reales) Definición del número e. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase08del2003.pdf

Audio: Clase B08 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB08parte1.mp4

Clase B08 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB08parte2.mp4

Clase B08 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB08parte3.mp4

Clase B08 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB08parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B09 del 2003 Cálculo práctico de límite de sucesiones. Operaciones con límites de sucesiones. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase09del2003.pdf

Audio: Clase B09 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB09parte1.mp4

Clase B09 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB09parte2.mp4

Clase B09 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB09parte3.mp4

Clase B09 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB09parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B10 del 2003 Subsucesiones. Bolzano Weierstrass y caracterización de compactos en la recta por la compacidad secuencial. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase10del2003.pdf

Audio: Clase B10 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB10parte1.mp4

Clase B10 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB10parte2.mp4

Clase B10 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB10parte3.mp4

Clase B10 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB10parte4.mp4

Ir al Indice

Capítulo IV

Funciones y Límite de funciones.

Clases del 2011: 15, 16, 17, 18, 19

Clase 15 Definición de función. Inyectiva. Sobreyectiva. Biyectiva. Función inversa. Gráfica. Ejemplos: sen (1/x), x sen(1/x), x^2 sen(1/x).

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase15.pdf

Ir al Indice

Clase 16 Conjuntos imagen y preimagen. Ejemplos. Propiedades.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase16.pdf

Ir al Indice

Clase 17 Límite de funciones. Definición. Negación de existencia de limite. Ejemplos. Propiedades de unicidad del límite y linealidad.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase17.pdf

Ir al Indice

Clase 18 Ley de conservación del signo del límite (para funciones no necesariamente continuas) Monotonía del límite. Existencia del límite por teorema del sandwich.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase18.pdf

Ir al Indice

Clase 19 Teorema del pasaje a límite de función por límite de sucesiones. Enunciado y demostración. Corolarios y ejemplos.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase19.pdf

Inicio

Indice

Capítulo V

Continuidad de funciones.

Clases del 2003: B27, B28.
Clases del 2011: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Clase 20 Continuidad de función en un punto. Definición. Ejemplos. Ley de conservación del signo para funciones continuas. Definición de continuidad en un intervalo compacto. Propiedades aritméticas de la continuidad.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase20.pdf

Ir al Indice

Clase 21 Módulo de continuidad. Ejemplos y estrategia de cálculo del módulo de continuidad. Continuidad de funciones invertibles en intervalos y monótonas.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase21.pdf

Ir al Indice

Clase 22 Teorema del pasaje de límite por sucesiones a continuidad de una función en un punto. Corolarios y Ejemplos. Teorema de continuidad de la función compuesta.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase22.pdf

Ir al Indice

Clase 23 Teorema de Bolzano (enunciado y demostración) Teorema de Bolzano-Darboux. Límite cuando x tiende a +- infinito. Función que tiende a + o - infinito. Propiedades aritméticasde los límites (solo enunciados). Límite de polinomios cuando x tiende a + o - infinito. Corolario del teorema de Bolzano: Existencia de raíz real de polinomio de grado impar.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase23.pdf

Ir al Indice

Clase 24 Funciones acotadas, definiciones y ejemplos de supremo, ínfimo, máximo y mínimo de una función en un intervalo acotado o no acotado

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase24.pdf

Ir al Indice

Clase 25 Intevalos compactos. Teorema de Bolzano Weierstrass para invervalos compactos (compacidad sequencial). Teorema de Weierstrass : Existencia de mínimo y máximo absolutos. Enunciado y demostración.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase25.pdf

Ir al Indice

Clase 26 Continuidad uniforme. Definición. Ejemplos de cálculo de módulo de continuidad uniforme y no uniforme.

Pizarrones + audio: Clase B27 del 2003 (Ver más abajo en este capítulo)

Ir al Indice

Clase 27 Teorema de Heine-Cantor de continuidad uniforme en compactos. Enunciado y demostración.

Pizarrones + audio: Clase B28 del 2003 (Ver más abajo en este capítulo)

Ir al Indice

Clase B27 del 2003 Módulo de continuidad. Continuidad uniforme. Módulo de continuidad uniforme. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase27del2003.pdf

Audio: Clase B27 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB27parte1.mp4

Clase B27 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB27parte2.mp4

Clase B27 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB27parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B28 del 2003 Teorema de Heine-Cantor (Continuidad uniforme en conjuntos compactos). Calibre de una partición y oscilación de una función continua en una partición. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase28del2003.pdf

Audio: Clase B28 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte1.mp4

Clase B28 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte2.mp4

Clase B28 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte3.mp4

Clase B28 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte4.mp4

Inicio

Indice

Capítulo VI

Derivación y diferenciabilidad (en construcción) Desarrollo de Taylor.

Clase del 2007: C18.
Clases del 2011: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

Clase 28 Definición de derivada. Interpretación gráfica. Recta tangente. Ejemplos. Propiedades de la derivada: de la suma, del producto, del cociente, de la función compuesta (enunciados).

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase28.pdf

Ir al Indice

Clase 29 Teorema de continuidad de las funciones derivables. Ejemplos xsen(1/x) continua y no derivable y x^2sen(1/x) continua y derivable.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase29.pdf

Ir al Indice

Clase 30 Diferenciabilidad. Definición y ejemplos. Método de aproximación por el diferencial. Diferenciabilidad y derivabilidad.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase30.pdf

Ir al Indice

Clase 31 Demostraciones de las propiedades de la derivada y regla de la cadena.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase31.pdf

Ir al Indice

Clase 32 Teorema de Rolle (derivada nula). Enunciado y demostración. Teorema del valor medio del Cálculo diferencial (Teorema de Lagrange) (enunciado y demostración) y Corolarios.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase32.pdf

Ir al Indice

Clase 33 Regla de l'Hôpital. Lema de valor medio de Cauchy. Derivada segunda, y de orden superior. Funciones de clase C^r. Concavidad.

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase33.pdf

Ir al Indice

Clase 34 . Complementos, ejemplos, ejercicios. (En construcción).

Clase 35 Fórmula de desarrollo de Taylor (enunciado y demostración). Aplicación del desarrollo de Taylor al cálculo de límites de funciones. Ejemplos.

Videos + fotos de los pizarrones: ver Clase C18 del 2007 en este capítulo (bajar el cursor).

Ir al Indice

Clase C18 del 2007 Desarrollo de Taylor. Enunciado y demostración. Fórmula de Lagrange para el resto en una variable. Ejemplo de aplicación al cálculo de límites.
Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Clase18del2007.pdf

Videos Clase C18 Parte 1 https://youtu.be/tuPMiwytNH0
Clase C18 Parte 2 https://youtu.be/xbim1mqU_DM

Inicio

Indice

Capítulo VII

Extremos relativos y absolutos de funciones derivables (en construcción).

Clases del 2011: 36, 37, 38, 39, 40.

Clase 36 Extremos relativos o locales y extremos absolutos. Definiciones y ejemplos. Puntos críticos (o singulares o estacionarios) Definición. Teorema de derivada nula (puntos críticos) en extremos relativos (enunciado y demostración)

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase36.pdf

Ir al Indice

Clase 37 Teorema de clasificación de puntos críticos con la derivada segunda. Ejemplos de clasificación de puntos críticos. Ejemplo de cálculo de extremos relativos. Pizarrones (en construcción)

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase37.pdf

Ir al Indice

Clase 38 Extremos absolutos. Estrategia de cálculo de máximo y mínimo absolutos cuando se sabe que existen. Ejemplos de cálculo de máximo y mínimo absolutos. Pizarrones (en construcción)

Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase38.pdf

Ir al Indice

Clase 39 Complementos, ejemplos, ejercicios. (En construcción).

Clase 40 Otros ejemplos y ejercicios. (En construcción).

Inicio

Indice

Capítulo VIII

Integral de Riemann y primitivación.

Clases del 2003: B28, B29, B30, B45, B46.
Clases del 2011: 41, 42, 43, 44, 45, 46.

Clase 41 Calibre de una partición y oscilación de una función continua en una partición.

Pizarrones + audio: Ver Clase B28 del 2003 (última parte) al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 42 Sumas de Riemann y de Darboux de funciones acotadas. Convergencia de sumas de Riemann de funciones continuas. Ejemplo de cálculo exacto de límite de sumas de Riemann.

Pizarrones + audio: Ver Clase B29 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 43 Integrabilidad Riemann. Definición, integrabilidad Riemann de funciones continuas, de continuas a trozos y de funciones monótonas. Integral Riemann de funciones constantes y constantes a trozos (o escalonadas) Aditividad en el intervalo y linealidad de la integral de Riemann.

Pizarrones y audio: Ver Clase B30 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 44 Primitivación. Definición, linealidad, ejemplos Teorema fundamental del cálculo integral y Regla de Barrow (enunciados y demostraciones)

Pizarrones + audio: Ver Clase B45 del 2003 (primera y segunda partes) al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 45 Ejemplos de cálculo de integral de Riemann mediante primitivación. Corolario del teorema fundamental del Cálculo integral. Campana de Gauss.

Pizarrones + audio: Ver Clase B45 del 2003 (segunda y tercera partes) al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 46 Función integral ó Integral indefinida (con límite superior de integración variable). Ejemplos.

Pizarrones + audio: Ver Clase B46 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase B28 del 2003 Continuidad uniforme en conjuntos compactos. Teorema de Heine-Cantor. Calibre de una partición y oscilación de una función continua en una partición. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase28del2003.pdf

Audio: Clase B28 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte1.mp4

Clase B28 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte2.mp4

Clase B28 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte3.mp4

Clase B28 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB28parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B29 del 2003 Sumas de Riemann y de Darboux (sumas de Riemann a valores intermedios) de funciones acotadas. Convergencia de sumas de Riemann de funciones continuas. Ejemplo de cálculo exacto de límite de sumas de Riemann. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase29del2003.pdf

Audio: Clase B29 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB29parte1.mp4

Clase B29 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB29parte2.mp4

Clase B29 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB29parte3.mp4

Clase B29 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB29parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B30 del 2003 Integrabilidad Riemann. Definición, integrabilidad Riemann de funciones continuas, de continuas a trozos y de funciones monótonas. Integral Riemann de funciones constantes y constantes a trozos (o escalonadas) Aditividad en el intervalo y linealidad de la integral de Riemann. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase30del2003.pdf

Audio: Clase B30 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB30parte1.mp4

Clase B30 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB30parte2.mp4

Clase B30 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB30parte3.mp4

Clase B45 del 2003 Primitivación. Definición, linealidad, ejemplos Teorema fundamental del cálculo integral y Regla de Barrow (enunciados y demostraciones) Ejemplos de cálculo de integral de Riemann mediante primitivación. Corolario del teorema fundamental del Cálculo integral. Campana de Gauss. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase45del2003.pdf

Audio: Clase B45 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB45parte1.mp4

Clase B45 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB45parte2.mp4

Clase B45 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB45parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B46 del 2003 Función integral ó Integral indefinida (con límite superior de integración variable). Ejemplos. Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase46del2003.pdf

Audio: Clase B46 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB46parte1.mp4

Clase B46 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB46parte2.mp4

Clase B46 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB46parte3.mp4

Inicio

Indice

Capítulo IX

Métodos de integración.

Clases del 2003: B47, B48, B49, B50.
Clases del 2011: 47, 48, 49, 50, 51, 52.

Clase 47 Métodos de sustitución y de cambio de variables. Ejemplos. Cálculo de integral con radicales.

Pizarrones + audio: Ver Clase B47 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 48 Método de integración por partes. Integrales de las potencias de 1/(1+x^2).

Pizarrones + audio: Ver Clase B48 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 49 Algunas integrales con funciones trigonométricas.

Pizarrones + audio: Ver Clase B49 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 50 Integración de funciones racionales. Casos tipos. Fracciones simples. Descomposición en fracciones simples. Método de la tapadita.

Pizarrones + audio: Ver Clase B50 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 51 Cálculo de áreas. Ejemplos. Pizarrones (en construcción)

Clase 52 Volúmenes de revolución. Ejemplos. Pizarrones (en construcción)

Ir al Indice

Clase B47 del 2003 Métodos de sustitución y de cambio de variables. Ejemplos. Cálculo de integral con radicales. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase47del2003.pdf

Audio: Clase B47 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB47parte1.mp4

Clase B47 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB47parte2.mp4

Clase B47 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB47parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B48 del 2003 Método de integración por partes. Integrales de las potencias de 1/(1+x^2). Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase48del2003.pdf

Audio: Clase B48 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB48parte1.mp4

Clase B48 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB48parte2.mp4

Clase B48 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB48parte3.mp4

Clase B48 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB48parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B49 del 2003 Algunas integrales con funciones trigonométricas. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase49del2003.pdf

Audio: Clase B49 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB49parte1.mp4

Clase B49 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB49parte2.mp4

Ir al Indice

Clase B50 del 2003 Integración de funciones racionales. Casos tipos. Fracciones simples. Descomposición en fracciones simples. Método de la tapadita. Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase50del2003.pdf

Audio: Clase B50 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB50parte1.mp4

Clase B50 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB50parte2.mp4

Clase B50 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB50parte3.mp4

Inicio

Indice

Capítulo X

Integrales impropias (en construcción)

Clase 53 Integrales impropias. Definición. Convergencia. Ejemplos de integrales impropias de primera y segunda especie convergentes y no convergentes. (en construcción)

Clase 54 Integrales impropias de funciones positivas. Criterio de comparación. Ejemplos. (en construcción)

Clase 55 Integrales impropias de funciones de cualquier signo. Convergencia absoluta y convergencia condicional. Ejemplos. (en construcción)

Clase 56 Integrales impropias de segunda y tercera especie. Ejemplos de clasificación de integrales impropias (en construcción)

Inicio

Indice

Capítulo XI

Series.

Clases del 2003: B11, B12, B13, B14.
Clases del 2011: 57, 58, 59, 60.

Clase 57 Series de números reales. Convergencia. Serie geométrica. Series alternadas (criterio de Leibnitz) Series de términos con signo constante. Series telescópicas. Operaciones con series.

Pizarrones + audio. Ver Clase B11 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 58 Límite a cero del término general de serie convergente. Condición de Cauchy. Series potencias de la armónica. Convergencia absoluta.

Pizarrones + audio. Ver Clase B12 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 59 Clasificación de series: Criterios de comparación de series y de comparación por límites. Ejemplos.

Pizarrones + audio. Ver Clase B13 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase 60 Clasificación de series: Criterio de D'Alambert, criterio de Cauchy (o de la raiz n-ésima) y criterio integral.

Pizarrones + audio. Ver Clase B14 del 2003 al final de este capítulo.

Ir al Indice

Clase B11 del 2003 Series de números reales. Convergencia. Serie geométrica. Series alternadas (criterio de Leibnitz) Series de términos con signo constante. Series telescópicas. Operaciones con series.

Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase11del2003.pdf

Audio: Clase B11 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB11parte1.mp4

Clase B11 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB11parte2.mp4

Clase B11 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB11parte3.mp4

Clase B11 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB11parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B12 del 2003 Límite a cero del término general de serie convergente. Condición de Cauchy. Series potencias de la armónica. Convergenciabsoluta.
Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase12del2003.pdf

Audio: Clase B12 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB12parte1.mp4

Clase B12 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB12parte2.mp4

Clase B12 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB12parte3.mp4

Ir al Indice

Clase B13 del 2003 Clasificación de series: Criterios de comparación de series y de comparación por límites. Ejemplos.

Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase13del2003.pdf

Audio: Clase B13 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB13parte1.mp4

Clase B13 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB13parte2.mp4

Clase B13 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB13parte3.mp4

Clase B13 parte 4

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB13parte4.mp4

Ir al Indice

Clase B14 del 2003 Clasificación de series: Criterio de D'Alambert, criterio de Cauchy (o de la raiz n-ésima) y criterio integral.

Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/clase14del2003.pdf

Audio: Clase B14 parte 1

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB14parte1.mp4

Clase B14 parte 2

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB14parte2.mp4

Clase B14 parte 3

https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/Audio/claseB14parte3.mp4

Inicio

Indice

Capítulo XII

Ecuaciones diferenciales.

Clases del 2007: A01, A02, A03, A04.
Clases del 2011: 61, 62, 63, 64.

Clase 61 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones. Ejemplos. Ecuaciones en variables separadas.
Pizarrones + videos: Ver Clase A01 del 2007 al final de este capítulo.
Ir al Indice

Clase 62 Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea y no homogénea. Método de variación de constante.
Pizarrones + videos: Ver Clase A02 del 2007 al final de este capítulo.
Ir al Indice

Clase 63 Ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes. Soluciones exponenciales. Ecuación característica y Solución general.
Pizarrones + videos: Ver Clase A03 del 2007 al final de este capítulo.
Ir al Indice

Clase 64 Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Método de selección.
Pizarrones + videos: Ver Clase A04 del 2007 al final de este capítulo.
Ir al Indice

Clase A01 del 2007 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones. Ejemplos. Ecuaciones en variables separadas.

Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/ClaseA01del2007.pdf

Videos: Clase A01 Parte 1 https://youtu.be/ALbHp6lkcLM
Clase A01 Parte 2 https://youtu.be/zkjEDP1NaC0
Clase A01 Parte 3 https://youtu.be/JixMZMv9mtw

Ir al Indice

Clase A02 del 2007. Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea y no homogénea. Método de variación de constante.

Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/ClaseA02del2007.pdf

Videos Clase A02 parte1 https://youtu.be/9-BmX7nW7bw
Clase A02 parte 2 https://youtu.be/EN0PViehd74
Clase A02 parte 3 https://youtu.be/yWgseXkOZ5s

Ir al Indice

Erratas a la clase A2 parte 1: Ecuación diferencial lineal de primer orden a coeficiente constante: donde **debería decir y' = by** dice y' = bx. La causa de este error está en el siguiente video.
Este es un enlace a un video publicado en YouTube:
http://www.youtube.com/watch?v=s-h2lhJt_pU

Ir al Indice

Clase A03 del 2007. Ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes. Soluciones exponenciales. Ecuación característica y Solución general.
Ver imágenes en
https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/ClaseA03del2007.pdf

Videos Clase A03 parte 1 https://youtu.be/WeGqlxZ3Kj8
Clase A03 parte 2 https://youtu.be/Ieqc20EKN3M
Clase A03 parte 3 https://youtu.be/UOPyM-c6pPY

Ir al Indice

Clase A04 del 2007. Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes. Método de selección.
Ver imágenes en https://www.fing.edu.uy/~eleonora/calcu1/ClaseA04del2007.pdf

Videos: Clase A04 parte 1 https://youtu.be/1Oxsz5zdW7Q
Clase A04 parte 2 https://youtu.be/G0PRuYRH4XM
Clase A04 parte 3 https://youtu.be/dmh0F5HNmjg

Inicio

Indice

IMÁGENES DE LOS PIZARRONES

En las páginas siguientes se adjuntan las imágenes de los pizarrones de las clases, en el siguiente orden:

1. CLASES DEL 2003
B00 y B01
B03 a B14
B27 a B30
B45 a B50

2. CLASES DEL 2011
01 a 07
07 complementaria (documento)
14 complementaria (documento)
15 a 25
28 a 33
36 a 38

3. CLASES DEL 2007
C18
A01 a A04

1

CLASES DEL 2003

B00 y B01
B03 a B14
B27 a B30
B45 a B50

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 00 del año 2003

Notaciones sobre conjuntos

Conjunto A { no importa el orden; no están repetidos

$x \in A$: x elemento del conjunto A

Notaciones — extendido: $A = \{2, 17, 70, 23\}$, $\#A = 4$ (con dos rayitas)

reducida: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$P = \{n \in \mathbb{N} : n = 2p, p \in \mathbb{N}\}$ (: tal que; y además)

$P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$

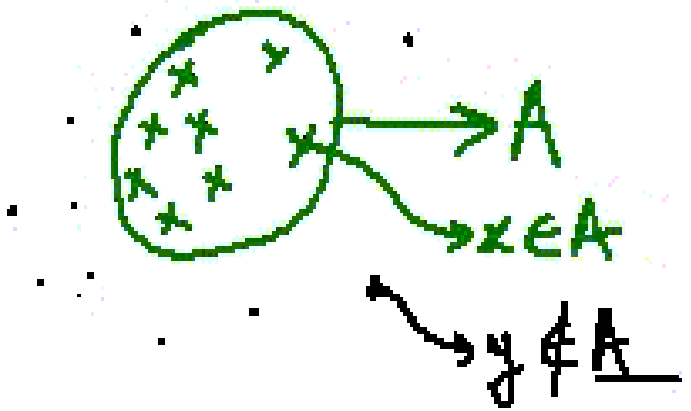
Conjunto vacío $\emptyset = \{\}$ $\boxed{\#\emptyset = 0}$

conj. complementario de $A = \{x \in U : x \notin A\}$

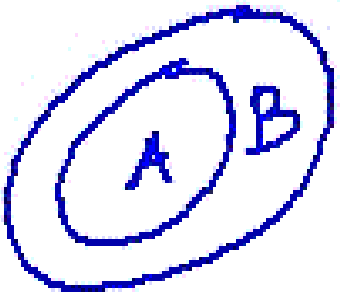
$\mathbb{N}$ $\quad P^c = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ no es par}\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}$

$P = \{x \in \mathbb{N} : x = 2q+1,\ q \in \mathbb{N}\}$

Diagrama de Venn



Def: $A \subset B \quad x \in A \Rightarrow x \in B$



$A \not\subset B$
$x \in A \Rightarrow x \in B$
y $\exists x \in B : x \notin A$

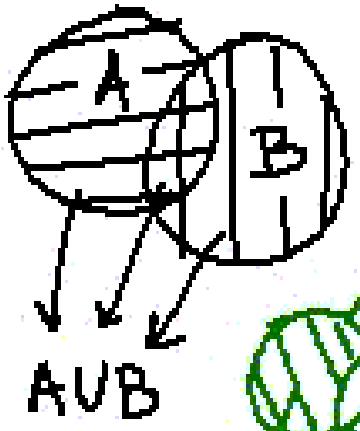
Obs $A \subset A$

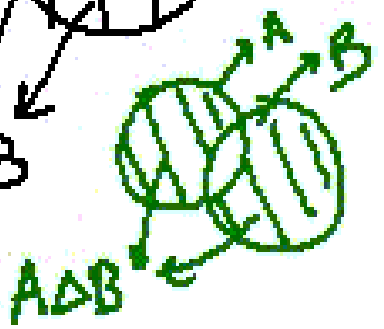
Convención $\phi \subset A$

Def $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$

Def $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$

Def $A \Delta B = \{x : x \in A, x \notin B\} \cup \{x : x \notin A, x \in B\}$





Obs: $A \cap B \subset A \cup B$; $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión de elem. de $A \neq \emptyset$

$\forall n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad (a_n) \in A$

- importa orden
- puede haber repeticiones
- a_n están numerados

n indica posición del elemento a_n

Ejemplo: $A = \{\ell, m, \uparrow\}$

$a_1 = \ell \quad a_2 = m \quad a_3 = \ell \quad a_4 = \ell \quad a_5 = m \quad a_n = m \ \forall n \geq 6$

Otro ejemplo: $a_n = \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

"sucesión constante"

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Ejemplos numéricos : $A = \mathbb{R} = \{\text{números reales}\}$

① $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \pi$, $a_4 = \sqrt{5}$ $a_5 = a_6 = \pi$, $a_n = \sqrt{n^3\pi}$ $\forall n \geq 7$

② $b_1 = \sqrt{5}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \pi$, $b_4 = \sqrt{2}$, $b_5 = b_6 = \pi$

$b_n = \sqrt{n^3\pi}$ $\forall n \geq 7$

③ $c_n = \sqrt{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$

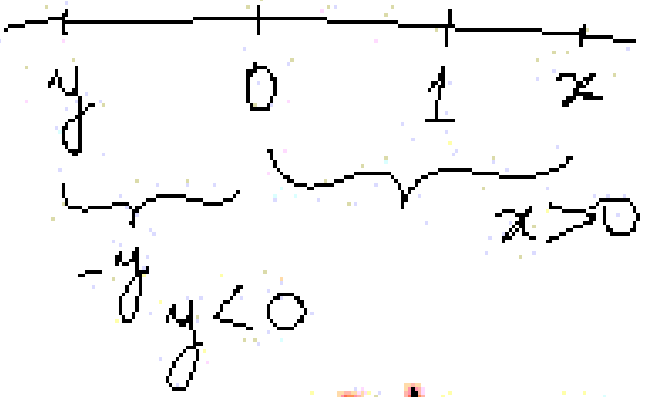
$c_0 = 0$, $c_1 = 1$ y $c_2 = \sqrt{2}$, $c_3 = \sqrt{3}$, ...

fórmula

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión de intervalos

Sea $\mathbb{R} = \{\text{núm. reales}\}$



$a < b$

"Intervalo cerrado"

$$I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

a y b son reales dados con $a < b$.

Def. Longitud de $[a,b]$: $\ell[a,b] = b - a$

a con $a = b$

$$A = \{\text{todos los intervalos cerrados en } \mathbb{R}\}$$

Suc. de intervalos: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$[I_n \in A]^{\forall n \in \mathbb{N}^+}$$

Ejemplo

$$I_n = \left[-\sqrt{n}\,,\ \sqrt{n}+1\right] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

4 sucesiones

1) Suc. de intervalos $\left\{\left[-\sqrt{n}\,,\ \sqrt{n}+1\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$

sucesiones numéricas:

2) $a_n = -\sqrt{n}$ suc. de los extremos izq. de I_n
3) $b_n = \sqrt{n}+1$ " " " " der. de I_n
4) $\ell_n = \ell(I_n) = b_n - a_n = 2\sqrt{n}+1$ suc. de longitudes de I_n

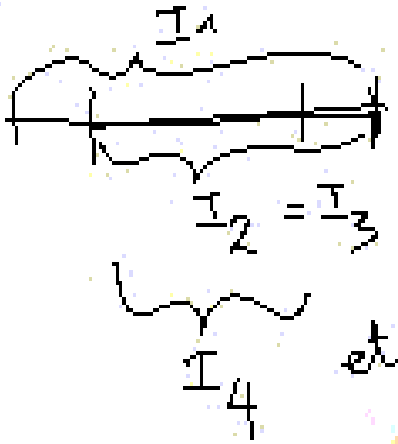
Obs. en este ejemplo $I_{n+1} \supset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

Suc. de intervalos encajados

Def: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$: I_n es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$I_{n+1} \subset I_n$$

Ejemplo:



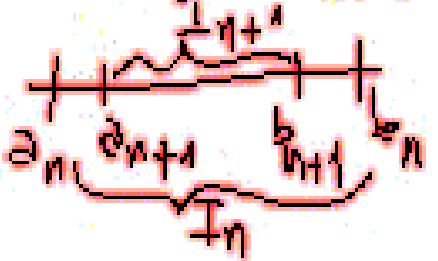
Ejemplo:

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$$

Obs Si $I_n = [a_n, b_n]$

Entonces $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

si $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \geq b_{n+1}$



Dada $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ $\quad I_{n+1}\subset I_n \quad\quad I_n=[a_n,b_n]$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \overset{\text{def}}{=} \{x\in\mathbb{R} : x\in I_n \ \forall n\in\mathbb{N}^+\}$$

$$I_1\cap I_2\cap I_3\cap\ldots\cap I_n\cap\ldots$$

Def. La suc. de int. encajados es "convergente" si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$ para cierto $x_0\in\mathbb{R}$

Ejemplo 1 $\quad I_n=\left[-\frac{1}{\sqrt{n}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \quad \ell(I_n)=\frac{2}{\sqrt{n}}+1$

NO es una suc. de INT. CONVERG. $[0,1]$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \left\{x\in\mathbb{R} : -\frac{1}{\sqrt{n}}\le x\le 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \ \forall n\in\mathbb{N}^+\right\} =$$

$0\le x$ $\quad$ $x\le 1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplo 2

Sucesión de intervalos encajados convergente

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \qquad \ell(I_n) = \frac{2}{n}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^+\right\} = \{x = 0\} = \{0\}$$

$-\frac{1}{n}$ 0 $\frac{1}{n}$

$x \geq 0$ $\qquad$ $x \leq 0$

Teorema Si $I_n = [a_n, b_n]$ es una suc. de int. encajados entonces es CONVERGENTE si $\ell(I_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

y sii $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ y $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

Def Si $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ y I_n son int. encajados de modo que la sucesión I_n define al real x_0.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 01 del año 2003

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PRIMER PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Axioma (I.C.) Si B es un conjunto de núm. natur. $\neq 0$ $(B \subset \mathbb{N}^+)$ tal que 1) $1 \in B$

2) $n \in B \Rightarrow (n+1) \in B$

Entonces $B = \mathbb{N}^+$

Consecuencia Sea $A \neq \emptyset$ Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ suc. dada $a_n \in A$.

Sea $\mathcal{P}$ propedad de algunos elem. de A

Si 1) a_1 tiene la prop $\mathcal{P}$.

2) a_n tiene la prop $\mathcal{P} \Rightarrow a_{n+1}$ también la tiene

Entonces: $\forall n \in \mathbb{N}^+$, a_n tiene la propedad $\mathcal{P}$

Dem. Llamar $B = \{n \in \mathbb{N}^+ : a_n$ tiene prop $\mathcal{P}\}$

1) $1 \in B$

2) $n \in B \Rightarrow n+1 \in B$

Axioma I.C. $B = \mathbb{N}^+$ o sea $\forall n \in \mathbb{N}^+$ a_n tiene la propedad $\mathcal{P}$

Ejemplo:

$A = \{$int. cerrados en $\mathbb{R}\}$

I_n suc. dada de int. encajados tal que $\ell(I_1) \leq 30$

Probar que $\ell(I_n) \leq 30$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$

1) $\ell(I_1) \leq 30$

2) $I_{n+1} \subset I_n \Rightarrow \ell(I_{n+1}) \leq \ell(I_n)$ $\left.\begin{matrix} \ell(I_n) \leq 30 \\ \ell(I_{n+1}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \leq 30$

Prin I.C. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+$ $\ell(I_n) \leq 30$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplo numérico

Probar que $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) $n=1$ ¿ $2^1 \geq 1$? Sí

2) si $2^n \geq n$ entonces ¿ $2^{n+1} \geq n+1$? Sí

$2^n \geq n \Rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n = n+n \geq n+1$

≥ 1

$2^{n+1} \geq n+1$

Luego por I.C.

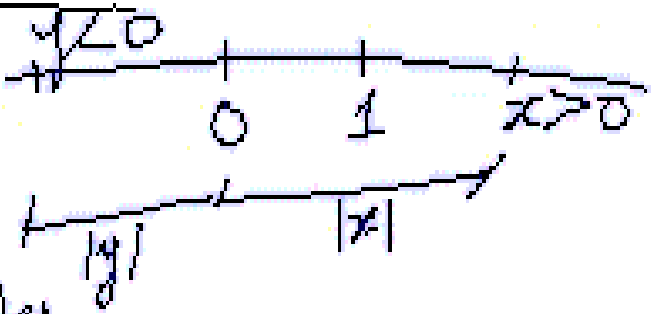
$2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

para $n=0$: ¿ $2^0 \geq 0$? Sí

1

NOTACIÓN de CONJUNTOS NUMÉRICOS

$\mathbb{R} = \{\text{núm. reales}\}$ recta real



$\mathbb{N} = \{\text{núm. naturales}\} \ni 0$

$\mathbb{N}^+$ (a veces también $\mathbb{N}$) : $\{x \text{ naturales } x \geq 1\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{enteros}\} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$\mathbb{Q} = \{\text{racionales}\} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$

$= \{x : x = \frac{p}{q},\ q > 0,\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ UNICOS y } MCD(p,q) = 1\}$

Recordar

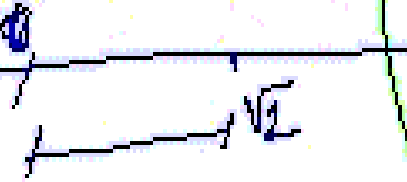
1) Si $x \in \mathbb{Q}$ ∃ UNICOS p, q y

2) Densidad Si $a < b$ reales dados

$\exists\, x \in \mathbb{Q} \cdots a < x < b$

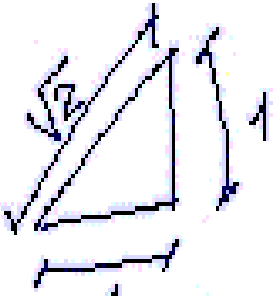
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$



Teorema

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Dem. Por absurdo

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$ $\quad q > 0$ $\quad \text{MCD}(p,q) = 1$

$\frac{p}{q} > 0$ $\quad \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = 2$

$p^2 = 2q^2$

Lema

H) a entero impar

T) a^2 entero impar

Dem. $a = 2k+1$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow a^2$ impar

Es cierto

H) a^2 entero par

T) a entero par

Dem.

Es contrarrecíproca es siempre válida

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Tenemos $p^2 = 2q^2$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$ $\quad q \neq 0$ $\quad MCD(p,q) = 1$

$\Rightarrow p^2$ par $\xrightarrow{\text{LEMA}}$ p par $\Rightarrow p = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2 = 4k^2 \quad \cdot \quad 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ par $\xrightarrow{\text{LEMA}}$ q par

$M.C.D(p,q) \neq 1$ ABSURDO

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 03 del año 2003

Sucesiones de reales

Ejemplo: $a_j = 3j(j+1)$ $\quad j \geq 1$

$a_1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$, $a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ ← etc

$a_3 = 36$, $a_4 = 60$, ...

Def. Dada una sucesión a_j $j \geq 1$ se llama sucesión de sumas acumuladas (o Reducidas n-ésimas) a la NUEVA SUCESIÓN S_n, $n \geq 1$ definida

como $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ...,

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

NOTACIÓN BREVE de es $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$

n → último índice

$j=1$ → por valor del índice j

En el ejemplo $S_1 = 6$

$S_2 = 24$, $S_3 = 60$, $S_4 = 120$, ... etc

En el ejemplo $a_j = 3j(j+1)$, $j \geq 1$

Probar que $S_n = \sum_{j=1}^{n} 3j(j+1) = (n+1)^3 - (n+1)$ (P)

Por inducción completa:

1) ¿P vale para $n=1$?

$n=1$ $\sum_{j=1}^{1} a_j \overset{?}{=} 2^3 - 2 = 6$] = Sí

$S_1 = \sum_{j=1}^{1} a_j = a_1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

2) si P valiera para $n-1$ entonces ¿vale P para n?

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} 3j(j+1) \overset{?}{=} (n+1)^3 - (n+1) \qquad (\mathcal{P})$$

1) para $n=1$ $\quad 6 = 6$ vale $\mathcal{P}$

2) Si $S_{n-1} = n^3 - n$ entonces $S_n = (n+1)^3 - (n+1)$?

$$S_n = S_{n-1} + a_n = n^3 - n + 3n(n+1) =$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$S_n = (n+1)^3 - (n+1)$$

Por I.C 1) y 2)

la propiedad $\mathcal{P}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}^+$

o sea. $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} 3j(j+1) = (n+1)^3 - (n+1)$ $\quad \forall n \geq 1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión de naturales — en $\mathbb{N}$

$a_1 = 1 \; , \; a_2 = 2 \; , \; a_3 = 3 \; , \; \dots \; , \; a_j = j \; , \; \dots$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (2+n-1) + \dots + (n-1+2) + (n+1)}_{n \text{ sumandos todos} = (n+1)}$$

$$2S_n = n \cdot (n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + 200 = \frac{200 \times 201}{2} = 20100$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión geométrica de razón q y primer término α

Def. $a_j \quad j \geq 0$

donde $a_0 = \alpha$

$a_j = \alpha q^j \quad \forall j \geq 1$

α ; q son reales dados fijos

CONVENCIÓN $q^0 = 1$

$a_j = \alpha q^j \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad j \geq 0$

Serie geométrica de razón q y primer término α

Def. $S_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha q^j$; $S_n = \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + .. + \alpha q^n$

Ejemplo razón $q = 2$, primer término $\alpha = 1$

$a_n = 2^n$; $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$

$S_0 = 1 \quad S_1 = 1+2 = 3 \quad S_2 = 7 \ldots S_n = 1 + 2 + \ldots + 2^n$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + aq^{n+1}$$

$$(1-q)S_n = a - aq^{n+1}$$

Si $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

$$\frac{\text{1er término } a \; - \; aq^{n+1}}{1 - \text{razón}}$$

Si $q = 1$

$$S_n = a + a(1)^1 + a(1)^2 + \dots + a(1)^n$$

$$S_n = (n+1)a$$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 04 del año 2003

AXIOMÁTICA NÚM. REAL (Resumen)

(I) AXIOMAS de CUERPO

$+$, $\cdot$ propiedades: CONM, ASOC., DISTRIB, NEUTROS 0 y 1, OPUESTO $-a$, INVERSO si $a \neq 0$ $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Def. $a - b = a + (-b)$

Si $b \neq 0$ $\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$

(II) AXIOMAS de ORDEN

$\exists\, \mathbb{R}^+$ $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} x + y \in \mathbb{R}^+ \\ x \cdot y \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \\ 1 \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \notin \mathbb{R}^+ \\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ si } x \neq 0 \text{ y } x \notin \mathbb{R}^+ \text{ entonces } (-x) \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Def. $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$

Def $a < b$ si $b - a \in \mathbb{R}^+$

$a \leq b$ si $b = a$ o si $b > a$

(III) AXIOMA de COMPLETITUD - A acot sup $\Rightarrow \exists$ sup (A)

Q cumple (I) y (II), no (III)

$A \subset \mathbb{R}$ (inferiormente)

Def A es acot. superiormente si $\exists$ real k (cota superior) tal que $x \leq k \quad \forall x \in A$

$(x \geq k \quad \forall x \in A)$

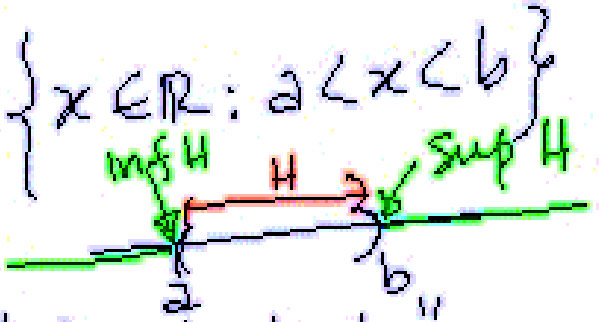
Obs. Si A acot sup $\Rightarrow$ $\exists$ infinitas cotas superiores

Def Se llama "el menor sup" o "supremo" de A (sup A) a un real α (puede o no existir) tal que $x \leq \alpha \ \forall x \in A$ y si $x \leq k \ \forall x \in A$ entonces $k \geq \alpha$

α ES LA MENOR de TODAS LAS COTAS SUPERIORES

Ejemplo 1

$H = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$



"intervalo abierto"

$b+1$ es cota sup. de H

$a-3$ " " inf de H

$b = \sup(H) \notin H$

$a = \inf(H) \notin H$

$\inf(H)$ es LA MAYOR de las COTAS INFERIORES

$A \subset \mathbb{R}$ Si

Teorema: $\sup(A)$ e $\inf(A)$ existen
son ÚNICOS (y pueden o no pertenecer a A)

Dem: Sean γ_1 y γ_2 supremos de A. Probar que $\gamma_1 = \gamma_2$

γ_1 es cota sup de A
γ_2 " " " "
γ_1 es $\leq$ otras cotas sup de A

$$\gamma_1 \leq \gamma_2$$

γ_2 es $\leq$ otras cot sup de A $\quad \gamma_2 \leq \gamma_1$

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

Def. MAX (A) puede existir o no es α t.q:

$$\alpha \in A$$
$$\alpha = \sup A$$

Ejemplo 2

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

M | b

M cot. superiores.

$$\sup M = b$$
$$b \in M$$

$b = \max M$

Def MIN (A) puede existir o no es β t.q

$$\beta \in A$$
$$\beta = \inf A$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

AXIOMA DE COMPLETITUD

- $A \neq \emptyset$ $A \subset \mathbb{R}$
  A acot. sup $\Rightarrow \exists \sup A$
- $B \neq \emptyset$ $B \subset \mathbb{R}$
  B acot. inf $\Rightarrow \exists \inf B$

Obs Ya vimos que $\sup A$ es único
$\inf A$

Obs. $\sup A$ puede o no $\in A$
$\inf A$

b) **Teorema**

a) $\mathbb{N}$ no es acot. superiormente

b) Todo subconj. A de Naturales tiene mínimo

Dem

Supongo absurdo $\mathbb{N}$ es acot sup.

AXIOMA COMPLETITUD $\Rightarrow \exists \sup(\mathbb{N}) = \alpha \in \mathbb{R}$.

α es la MENOR de las cotas sup. de $\mathbb{N}$

$\alpha \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\alpha \geq m+1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha - 1 \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\alpha - 1$ es cota sup. de $\mathbb{N}$

α no es la menor de las cotas sup. de $\mathbb{N}$.

ABSURDO

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

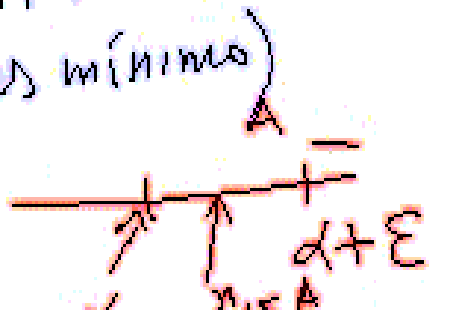
b) $0 \leq n \quad \forall n \in A \subset \mathbb{N}$

A es acot. inf

AXIOMA de COMPLET: $\exists \alpha = \inf A$

Probar que $\alpha \in A$ (α es mínimo)

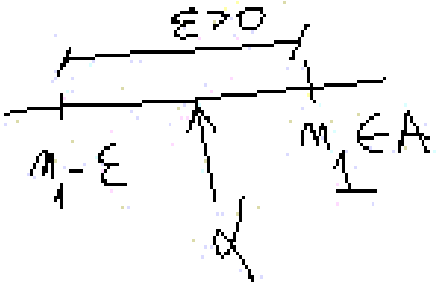
Def. de ínfimo $\alpha \leq n \quad \forall n \in A$



Dado $\varepsilon > 0$ $\alpha + \varepsilon > n_1$ para algún $n_1 \in A$.

$\alpha > n_1 - \varepsilon \qquad \alpha \leq n_1$

$n_1 - \varepsilon < \alpha \leq n_1$



Distancia entre n_1 y α es $< \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$

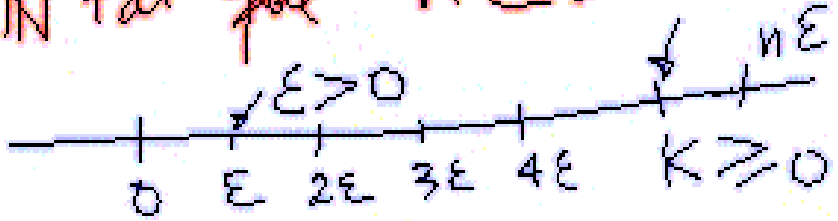
$\Rightarrow n_1 = \alpha \Rightarrow \alpha \in A$

$\alpha = \min A$

PRINCIPIO de ARQUÍMEDES — Teorema

Si $\varepsilon > 0$ y $K \geq 0$ reales dados,

entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n\varepsilon > K$



Dem.

Por absurdo $\forall n \in \mathbb{N}$ $n\varepsilon \leq K$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq \frac{K}{\varepsilon} \Rightarrow \mathbb{N}$ está acot. sup $\frac{K}{\varepsilon}$

ABSURDO

CONSECUENCIA

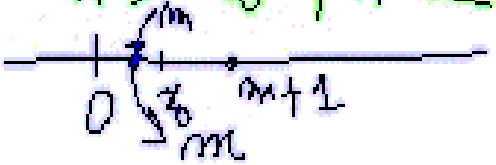
$k = x_0 \geq 0$ dado real; $\varepsilon = 1$; $m = n - 1$

P.A $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n > x_0$

Teor. pasado $\exists$ mín n "

$\exists\, m \leq x_0 < m+1$

$n > x_0$; $n - 1 \leq x_0$



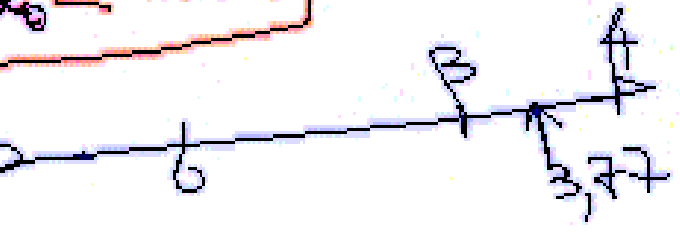
Def. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ $(>0, 0, <0)$

Parte entera de x_0, $ent(x_0)$

es el entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq x_0 < m+1$$

Ejemplos: $ent(3,77) = 3$



$ent(-0,25) = -1$

$ent(-5,87) = -6$

$ent(-3) = -3$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

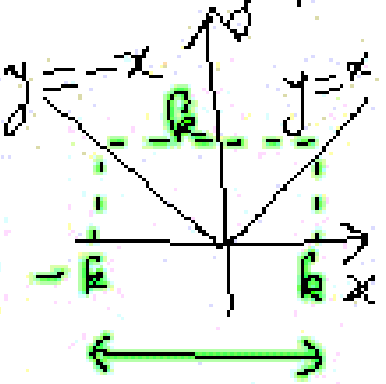
Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 05 del año 2003

Topología en $\mathbb{R}$

Def Si $x \in \mathbb{R}$; $|x|$ por def es $\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $y = |x|$



Obs. $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ $(k > 0)$

Def - Si $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad dist(x,y) \stackrel{def}{=} |x-y|$

TEO. $\mathbb{R}$ es un "espacio métrico", o sea

1) positividad $\begin{cases} dist(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \\ dist(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \end{cases}$

2) Simétrica $\quad dist(x,y) = dist(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

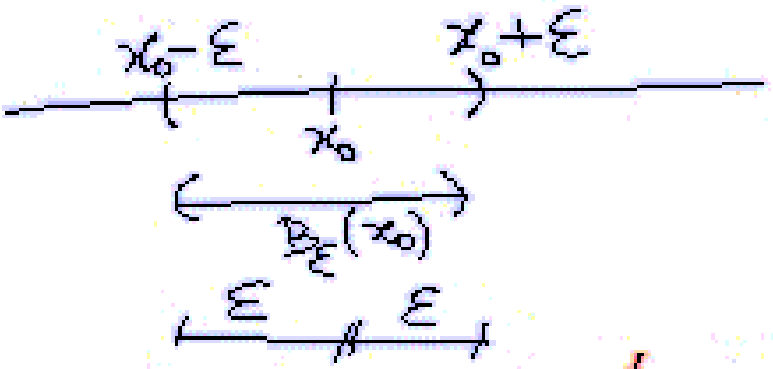
3) triangular $\begin{cases} dist(x,y) \leq dist(x,z) + dist(z,y) \\ \forall x,y,z \in \mathbb{R} \end{cases}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sea $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Def: "Entorno simétrica o bola" de centro x_0 y radio ε

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ y \in \mathbb{R} : dist(x_0, y) < \varepsilon \}$$



Obs: $x_0 \in B_\varepsilon(x_0)$

$B_\varepsilon(x) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) =$ intervalo abierto de extremos $\begin{cases} x_0 - \varepsilon \notin B_\varepsilon(x) \\ x_0 + \varepsilon \notin B_\varepsilon(x) \end{cases}$

$= \{ y \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < y < x_0 + \varepsilon \}$

su longitud es 2ε

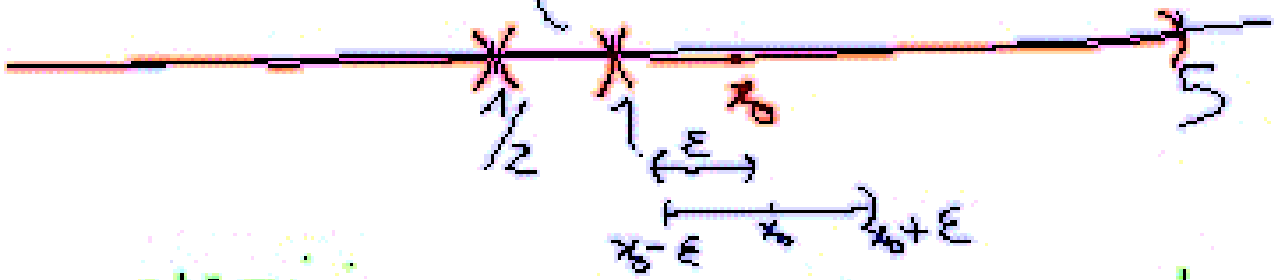
Subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$

Def $U \subset \mathbb{R}$ es "abierto" si $U = \emptyset$

o si $U \neq \emptyset$ y $\forall x_0 \in U \ \exists \varepsilon > 0$ (ε dep. de x_0)

tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset U$

Ejemplo $U = \{x \in \mathbb{R} : x < 5, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}\}$



Ejercicio Probar que "int abierto" $\{a < x < b\}$ es un conj abierto

Probar que la unión de conj abiertos es abierta

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Obs. $\mathbb{R}$ es un abierto en $\mathbb{R}$

ϕ " " " " $\mathbb{R}$.

Def: Se $F \subset \mathbb{R}$; F se llama "cerrado" (o

sf. si F^c es abierto $\left(F^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}\right)$

Obs. ϕ es cerrado (porque $\phi^c = \mathbb{R}$ abierto)

$\mathbb{R}$ " " (" $\mathbb{R}^c = \phi$ " ")

Ejemplo

$F = U^c = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\} \cup \{1\} \cup \{\frac{1}{2}\}$

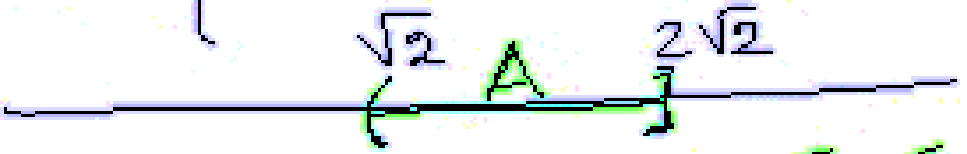
$F^c = U = \{x \in \mathbb{R} : x < 5, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}\}$

es abierto

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplo

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt{2}\}$



A no es abierto porque $2\sqrt{2} \in A$

$\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(2\sqrt{2})$ no está contenida en A

en efecto $2\sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(2\sqrt{2})$

$\notin A$

A no es cerrado porque A^c no es abierto, pues:

$A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\sqrt{2}\}$

$\sqrt{2} \in A^c$ y $\forall \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(\sqrt{2})$ no está en A^c

Luego A^c no es abierto

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejercicio a) El intervalo $I = \{a \leq x \leq b\}$

es un conj. cerrado de $\mathbb{R}$ que contiene a sus extremos a y b

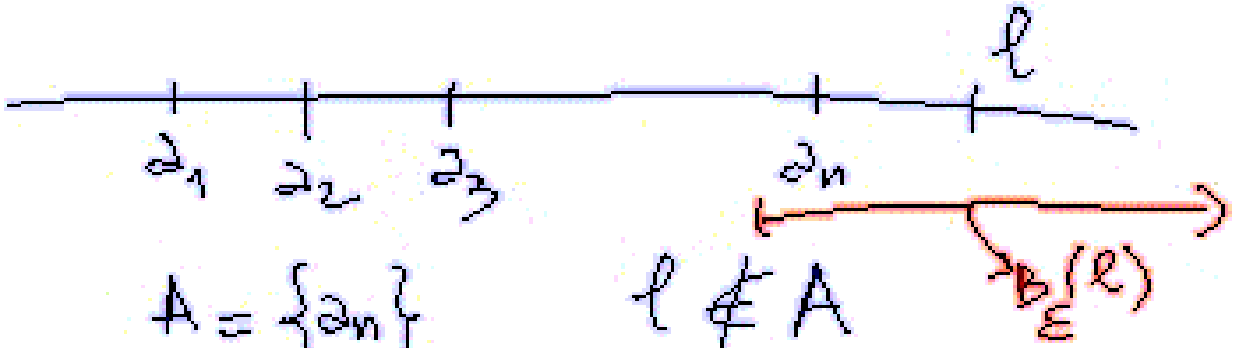
b) La intersección de conj cerrados en $\mathbb{R}$ es un subconj cerrado de $\mathbb{R}$

Ejemplo $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sucesión de reales tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

① $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}$

② $\sup\{a_n\} = \ell \in \mathbb{R}$

$A = \{a_n\}$ no es abierto



$A = \{a_n\}$ $\quad l \notin A$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

A^c no es abierto pues $l \in A^c$

$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(l) \ni a_n$ para algún n

$B_\varepsilon(l) \not\subset A^c$

$H = A \cup \{l\}$ $\quad$ H es cerrado

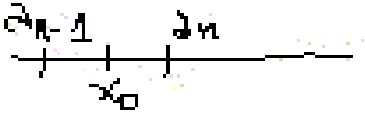
H^c es abierto? $\quad$ Sea $x_0 \in H^c$ $\quad (x_0 \notin H)$

$x_0 \neq l$

$x_0 \neq a_n \ \forall n$

$<$ x_0 es cota sup de A : $x_0 > l$

x_0 no es " " " "



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

CONJUNTOS COMPACTOS en $\mathbb{R}$

Def. $K \subset \mathbb{R}$, K se llama compacto si es cerrado y acotado. (sup e inf)

Ejemplo 1 $[a,b]$, $a<b$ en $\mathbb{R}$ dados

Ejemplo 2 Sea $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1}$ tal que sea acotada; $\exists\, \ell = \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$

Sea $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$

Vimos antes que K es cerrado

Además $a_1 \le x \le \ell \quad \forall x \in K$.

K es acotado

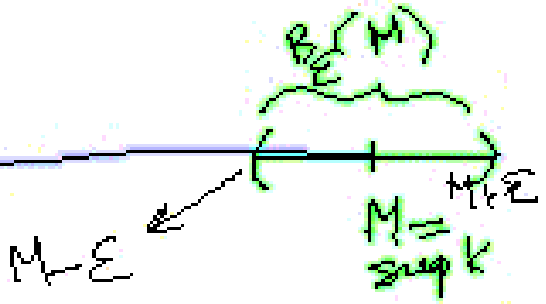
K es COMPACTO

Teorema

Hip) $K \subset \mathbb{R}$ K compacto

Tesis $\exists\, m = \min(K) \in \mathbb{R}$

$\exists\, M = \max(K) \in \mathbb{R}$



Dem. ¿$\exists\, M = \max K$? Por def M máximo de K si $\begin{cases} M = \sup K \\ M \in K \end{cases}$

1º) K acotado superiormente $\Rightarrow \exists\, \sup(K)$ lo llamo M ↑ Ax. de COMPLETITUD de $\mathbb{R}$

2º) ¿$M \in K$? Por absurdo $M \notin K$

K cerrado $\Rightarrow K^c$ abierto $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(M) \subset K^c$

$M \in K^c$

$\forall x \in K \begin{cases} x \notin B_\varepsilon(M) \\ x \leq M \end{cases} \Rightarrow x \leq M - \varepsilon \quad \forall x \in K$

$M - \varepsilon$ es cota sup de K

M no es $\sup K$

ABSURDO

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 06 del año 2003

LÍMITES de SUCESIONES

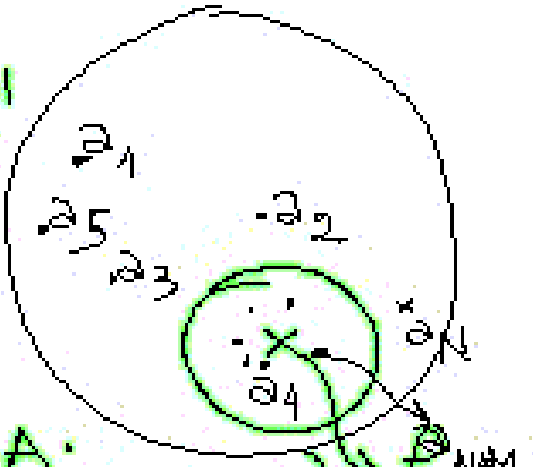
Sea $A \neq \emptyset$ cont. cualquiera

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ suc de elem. de A

Sea A "esp métrico" (definida dist(x,y) $\forall x,y \in A$

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

"MARGEN de PERCEPCIÓN de ERROR"



Def $x \tilde{\varepsilon} y$ ("se confunden x e y") si dist$(x,y) < \varepsilon$

Sea $\ell \in A$, $B_\varepsilon(\ell) = \{a \in A : \text{dist}(a,\ell) < \varepsilon\}$

Def $a_n \to \ell$ (a_n convergente en A con límite $\ell \in A$)

si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal

que $a_n \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall n > N$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

En $\mathbb{R}$, caso particular

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ Sec. de $a_n \in \mathbb{R}$ **Def.** es CONVERGENTE

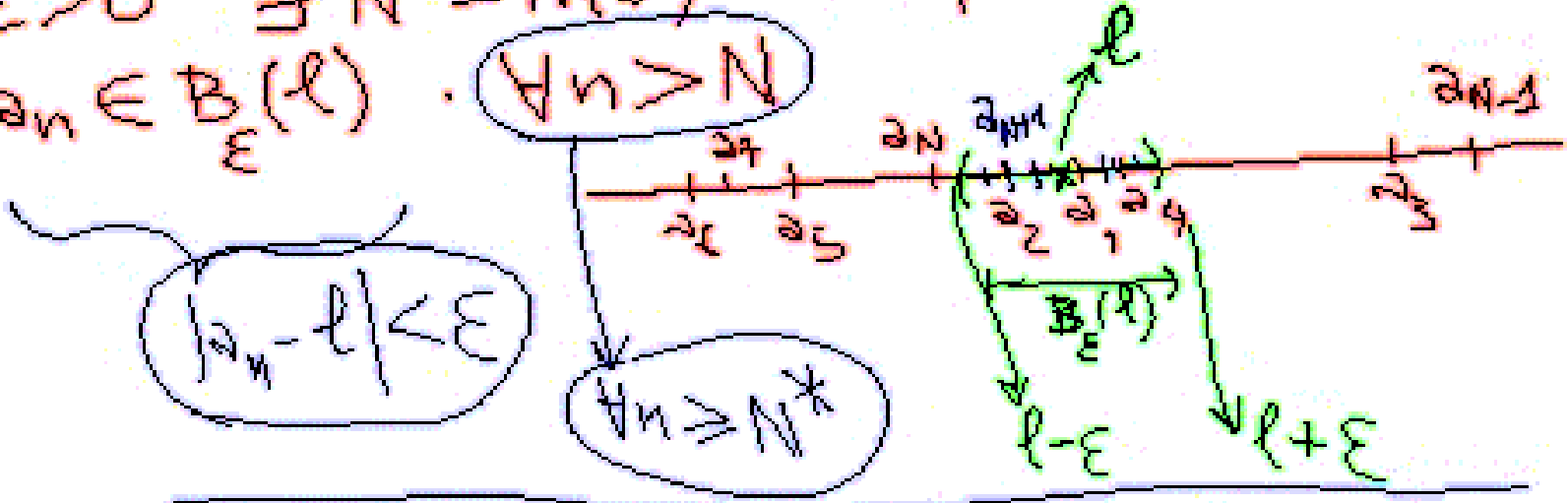
si $\exists \boxed{\ell \in \mathbb{R}}$ (que se llama límite de a_n)

y se denota $\lim a_n = \ell$ ó $a_n \to \ell$)

cuando $(N^* = N+1)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$a_n \in B_\varepsilon(\ell)$. $(\forall n > N$



$|a_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall n \geq N^*$

¿Hay que conocer ℓ para verificar si $a_n \to \ell$) convergente?

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Condición de Cauchy

Es una condición que cumplen algunas sucesiones de reales y otras no y que no requiere conocer de antemano a ℓ (candidato a límite de a_n) para poder demostrar teóricamente si la sucesión es o no es convergente

Ejercicio Deducir que dado $\ell \in \mathbb{R}$ fijo dada a_n suc. de reales, entonces

$a_n \not\to \ell$ ($\lim a_n$ no existe o existe y es $\neq \ell$)

sii para algún $\varepsilon > 0$ no existe N tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n > N$

sii para algún $\varepsilon > 0$ $\forall N \in \mathbb{N}$, $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ para algún $n > N$

COND de CAUCHY Sea $\{a_n\}$ suc. de reales.

Def. $\{a_n\}$ cumple la cond. de cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n, m > N$

TEOREMA de COMPLETITUD En $\mathbb{R}$ toda sucesión convergente es de Cauchy y recíprocamente

Obs. En cualquier espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy pero no necesariamente se cumple el recíproco.

Def Un esp. métrico se llama completo si se verifica el recíproco del teorema anterior

TEOREMA de completitud de $\mathbb{R}$ (otro enunciado) $\mathbb{R}$ es espacio metrico completo

OBS AXIOMA de COMPLET. de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ TEOREMA de COMPLETITUD de $\mathbb{R}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem. del Teor. de completitud en $\mathbb{R}$

Directo H) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ T) $\{a_n\}$ es de Cauchy

Probar que dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\text{dist}(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N \qquad (*)$$

H) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon^* > 0$ $\exists\, N^* = N^*(\varepsilon^*)$ t.q.

$\text{dist}(a_n, \ell) < \varepsilon^*$ $\forall\, n > N^*$

En particular elijo $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}$

Llamo $N = N^*(\varepsilon^*)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dist}(a_n, \ell) < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} & \forall\, n > N^* \\ \text{dist}(a_m, \ell) < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} & \forall\, m > N^* \end{array}\right\}$$

$$\text{dist}(a_n, a_m) \leq \text{dist}(a_n, \ell) + \text{dist}(a_m, \ell) < 2\varepsilon^* = \varepsilon$$

prop triangular

$\forall\, n, m > N^* = N$

Dem. Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

(Recíproco) Hip) $\{a_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ T) $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ t.q $a_n \to \ell$ (la sucesión es convergente)

H) Dado $\varepsilon_1 > 0$, en particular $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$

$\exists N_1$ t.q $|a_n - a_m| < \frac{1}{4}$ $\forall n, m > N_1$

$A_1 = \{a_n : n > N_1\}$; elijo un $m_1 > N_1$

$a_{m_1} - \frac{1}{4} < a_n < a_{m_1} + \frac{1}{4}$ $\forall n > N_1$

A_1 está acotado ; AXIOMA de COMPL de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \sup(A_1) = s_1 \leq a_{m_1} + \frac{1}{4}$

$\inf(A_1) = i_1 \geq a_{m_1} - \frac{1}{4}$

$0 \leq s_1 - i_1 < \frac{1}{2}$

Dem. Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

(Recíproco) Hip) $\{a_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ T) $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ t.q $a_n \to \ell$ (la sucesión es convergente)

H) Dado $\varepsilon_2 > 0$, en particular $\varepsilon_2 = \frac{1}{8}$

$\exists N_2$ + q $|a_n - a_m| < \frac{1}{8}$ $\forall n, m > N_2 > N_1$

$A_2 = \{a_n : n > N_2\}$; elijo un $m_2 > N_2$

$a_{m_2} - \frac{1}{8} < a_n < a_{m_2} + \frac{1}{8}$ $\forall n > N_2$

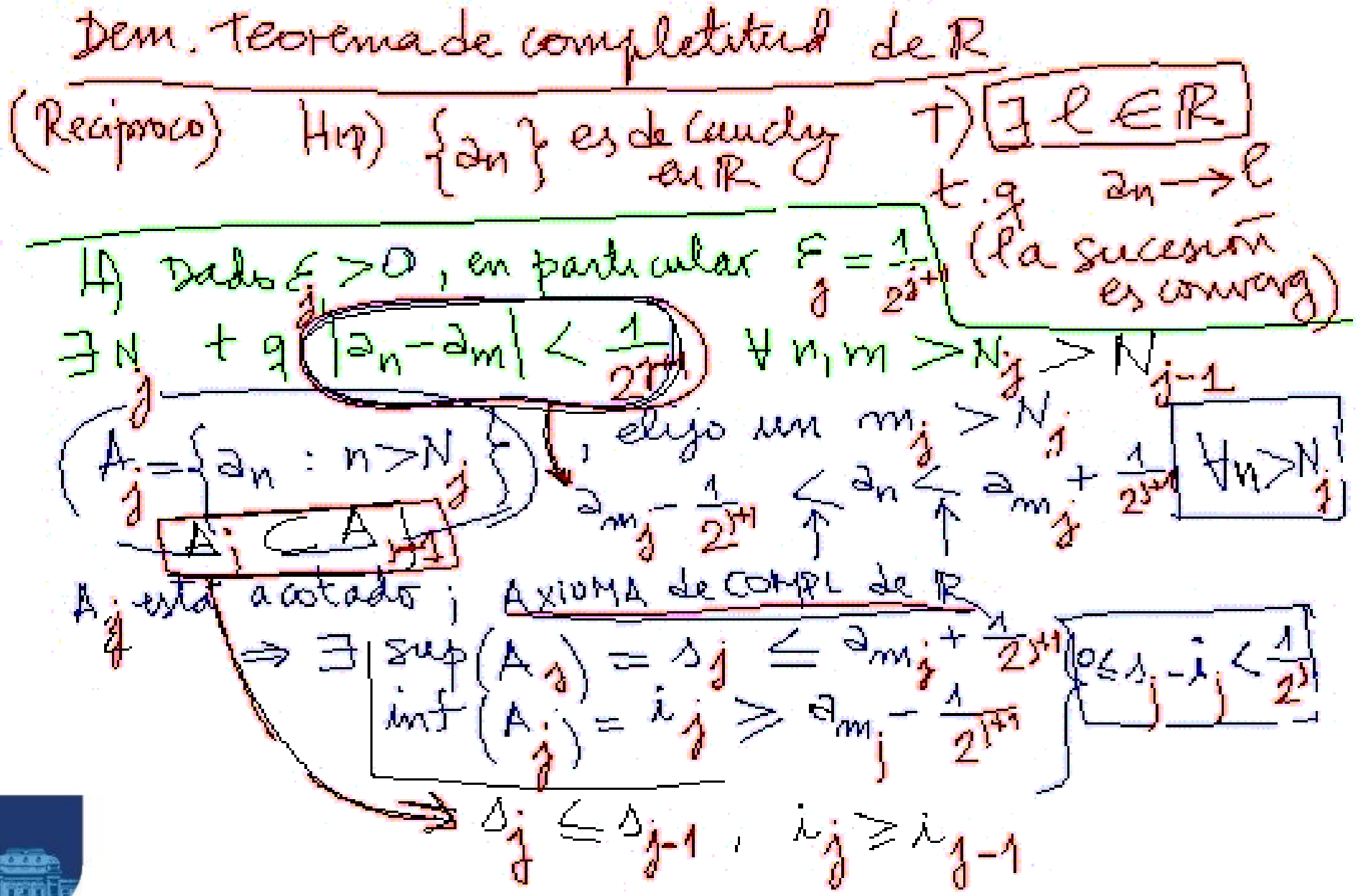
$A_2 \subset A_1$

A_2 está acotado ; AXIOMA de COMPL de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \begin{cases} \sup(A_2) = s_2 \leq a_{m_2} + \frac{1}{8} \\ \inf(A_2) = i_2 \geq a_{m_2} - \frac{1}{8} \end{cases}$ $0 \leq s_2 - i_2 < \frac{1}{4}$

$\Rightarrow s_2 \leq s_1$, $i_2 \geq i_1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY


Dem. Teorema de completitud de ℝ
(Recíproco) Hip) {a_n} es de Cauchy en ℝ
T) ∃ ℓ ∈ ℝ. t.q. a_n → ℓ (la sucesión es convergente)
H) Dado ε > 0, en particular ε = 1/2^{j+1}
∃ N_j + q (|a_n − a_m| < 1/2^{j+1}) ∀ n, m > N_j > N_{j−1}
A_j = {a_n : n > N_j}
A_j ⊂ A_{j−1}
elijo un m_j > N_j
a_{m_j} − 1/2^{j+1} < a_n < a_{m_j} + 1/2^{j+1}
∀ n > N_1
A_j está acotado ⇒ AXIOMA de COMPL de ℝ
∃ sup(A_j) = s_j ≤ a_{m_j} + 1/2^{j+1}
∃ inf(A_j) = i_j ≥ a_{m_j} − 1/2^{j+1}
0 ≤ s_j − i_j < 1/2^j
s_j ≤ s_{j−1}, i_j ≥ i_{j−1}

$$A_j = \{a_n : n > N_j\}$$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_{j-1} \supset A_j$$

$$s_j = \sup A_j \qquad \forall j \geq 1$$

$$i_j = \inf A_j$$

$A_j =$

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_j \leq \dots \leq s_j \leq s_{j-1} \leq \dots \leq s_2 \leq s_1$$

$$0 \leq s_j - i_j \leq \frac{1}{2^j}$$

Dado $\varepsilon > 0$; $0 < \frac{1}{2^j} < \varepsilon$ para j fuerte

$$|\ell - a_n| \leq s_j - i_j \leq \frac{1}{2^j} < \varepsilon \quad \forall n > N_j$$

Por def de límite

$\ell = \inf\{s_j\}$

$\ell^* = \sup\{i_j\}$

$\Rightarrow 0 \leq \ell - \ell^* < \frac{1}{2^j}$

$\Rightarrow \ell = \ell^*$

$a_n \to \ell$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 07 del año 2003

Sucesiones convergentes

Sea a_n suc. de reales tal que $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (convergente)

o sea

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ t.q. $\forall n > N$

$dist(a_n, \ell) < \varepsilon$

" $|a_n - \ell| < \varepsilon$

Propiedades

1) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ell$ es único

2) Si $b_n = a_{n+k}$ $\forall n$, $k \in \mathbb{N}$ fijo

$a_n \to \ell \Leftrightarrow b_n \to \ell$

3) $a_n \to \ell \Leftrightarrow a_n + \alpha \to \ell + \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Dem. 1) $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$

Probar que $\ell_1 = \ell_2$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1$ t.q. $dist(a_n, \ell_1) < \varepsilon$ $\forall n > N_1$

$\exists N_2 \geq N_1$ t.q. $dist(a_n, \ell_2) < \varepsilon$ $\forall n > N_2$

$0 \leq dist(\ell_1, \ell_2) \leq dist(\ell_1, a_n) + dist(a_n, \ell_2) < 2\varepsilon$

(elegí un $n > N_2$)

indep de n, indep de ε

$0 \leq dist(\ell_1, \ell_2) < 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Downarrow$

$dist(\ell_1, \ell_2 = 0)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem 2) ¿ $a_n \to \ell \Leftrightarrow b_n \to \ell$? siendo $b_n = a_{n+k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ algún $k \in \mathbb{N}$ fijo

$a_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q $|a_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n > N$

$m = n - k$

$n = m + k$

$n > N \Leftrightarrow m > N - k = M$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M$ t.q $|a_{m+k} - \ell| < \varepsilon$ $\forall m > M$

$\Updownarrow$

$b_m \to \ell$

b_m

Dem 3 Ejercicio

Ejemplo 1) Sea $\beta \in \mathbb{R}$ fijo

¿ $\frac{\beta}{n} \to 0$? $\forall n \geq 1$

Dado $\varepsilon > 0$ ← PR. ARQUÍMEDES $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $N > \frac{|\beta|}{\varepsilon}$

$\forall n > N \quad n > N > \frac{|\beta|}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon n > |\beta| \Rightarrow \frac{|\beta|}{n} < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$; $n \geq 1$; $n > 0$

$\left|\frac{|\beta|}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Probamos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $\forall n > N \quad \left|\frac{|\beta|}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \lim \frac{|\beta|}{n} = 0$

$\frac{\beta}{n+k} + \gamma \to \gamma$ $\quad k \in \mathbb{N}$ fijo

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fijos.

Convergencia y acotación

Teorema $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, a_n convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ es acotado

Dem

$a_n \to l \Rightarrow$ Dado $\varepsilon = 1$ $\exists N$ t.q $l-1 < a_n < l+1$ $\forall n > N$

Luego $\forall n \geq 1$

$a_n \leq \max\{l+1, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N\} = K$ una cota Sup de $\{a_n\}$

$a_n \geq \min\{l-1, a_0, a_1, \ldots, a_N\} = k$ → una cota inf de $\{a_n\}$

Teorema V verdadero y demostrado $H) \Rightarrow T$ ⇒ Contrarecíproco es verdadero $N_o T) \Rightarrow N_o H$

Teorema: $\{a_n\}$ no acotada $\Rightarrow a_n$ no convergente.

Ejemplo $a_n = n\ \forall n \in \mathbb{N}$ no acotada

$\Rightarrow a_n = n$ no convergente

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DIRECTO

Teorema verdadero (ya probado)

$H) \Rightarrow T)$

En un caso recíproco

$T) \overset{?}{\Rightarrow} H)$

puede ser verdadero — hay que demostrar)
o falso — dar un "contraejemplo"
exhibir un caso en que se cumpla T) y no se cumpla H)

Enunciado "CONTRARIO"

$No\ H) \overset{?}{\Rightarrow} No\ T)$

Recíproco del teor acotación es FALSO

a_n acotada $\not\Rightarrow$ a_n convergente

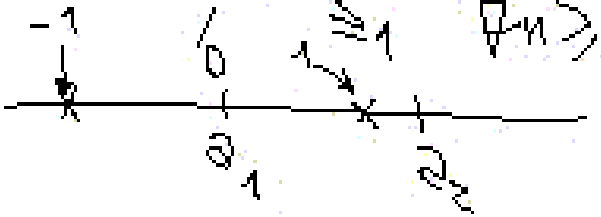
a_n acotada, a_n puede ser no convergente o a_n puede ser convergente

Prueba: Contraejemplo $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$|a_n| \leq 1 + \left|\frac{1}{n}\right| \leq 2 \quad \forall n \geq 1$

$-2 \leq a_n \leq 2$

$\{a_n\}$ acotada



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Probar que $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ no es convergente.

(otra demostración)

Basta probar que no es de Cauchy

Por absurdo, supongo que sí es de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$

elijo $\varepsilon = 1$, n par $> N$, $m = n+1$ $\Big\}$ $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; $a_m = -1 + \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow a_n - a_m = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} \geq 2$

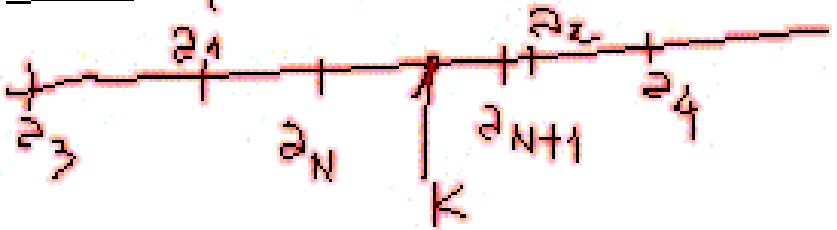
$1 = \varepsilon > |a_n - a_m| = a_n - a_m \geq 2 \Rightarrow$

$1 \geq 2$ absurdo

Sucesiones reales no convergentes

(Def $a_n \not\to l$ real para ningún $l \in \mathbb{R}$)

Def $a_n \to +\infty$ (diverge a $+\infty$)
Si $\forall K > 0 \ \exists N$ t.q. $a_n > K$ $\forall n > N$

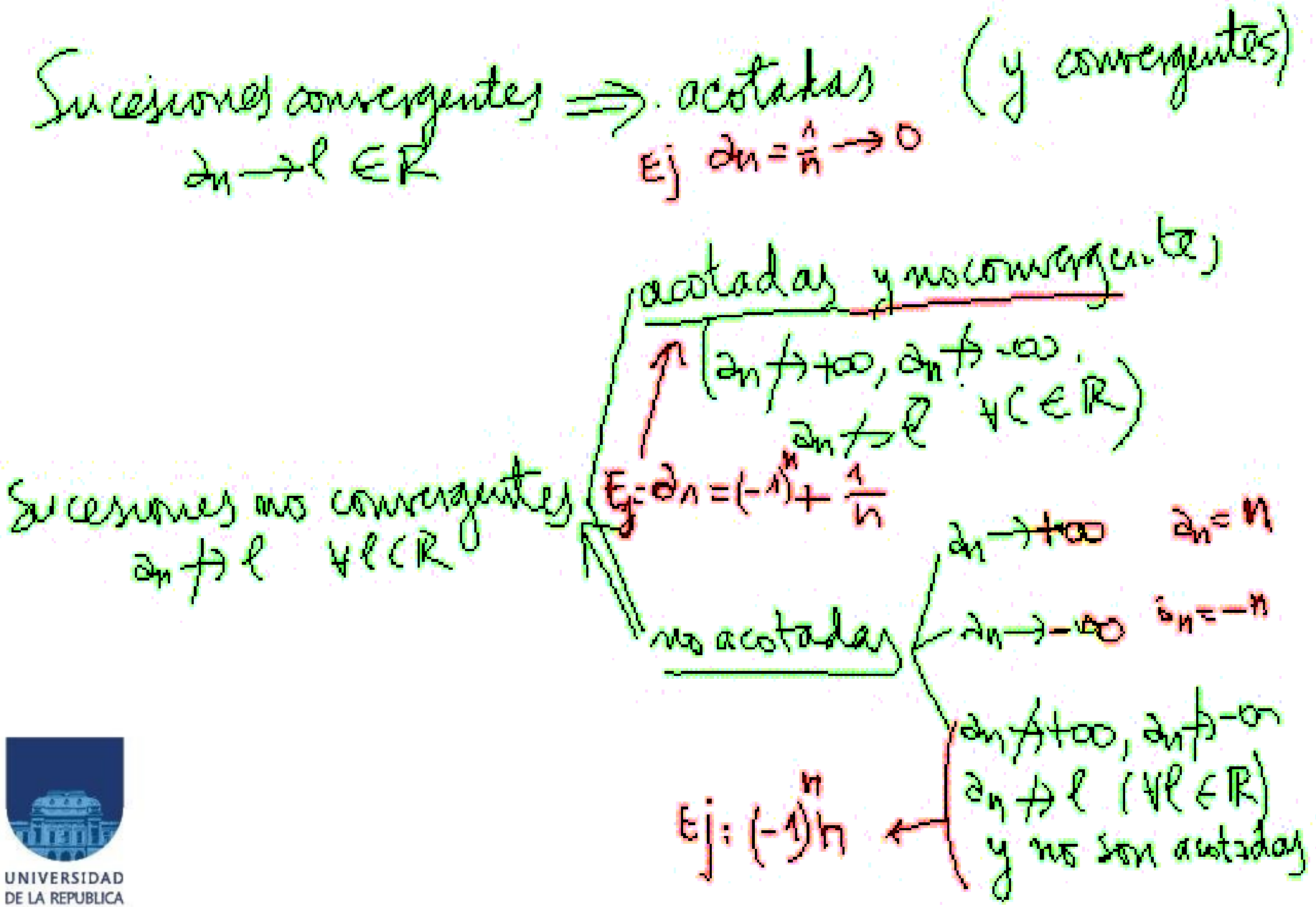


Def $a_n \to -\infty$ (diverge a $-\infty$)
Si $\forall k < 0 \ \exists N$ t.q. $a_n < k$ $\forall n > N$

Obs Si $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$ entonces a_n no acotada
$\Rightarrow a_n$ no convergente

Ejemplo $a_n = (-1)^n$
No tiende a $+\infty$
No " a $-\infty$
No convergente - No tiende a $l \in \mathbb{R}$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY


Sucesiones convergentes ⇒ acotadas (y convergentes)
$a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
Ej $a_n = \frac{1}{n} \to 0$
Sucesiones no convergentes
$a_n \not\to \ell \quad \forall \ell \in \mathbb{R}$
acotadas y no convergen. (Ej)
$(a_n \not\to +\infty, a_n \not\to -\infty$ y $a_n \not\to \ell \quad \forall \ell \in \mathbb{R})$
Ej: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
no acotadas
$a_n \to +\infty \quad a_n = n$
$a_n \to -\infty \quad a_n = -n$
$a_n \not\to +\infty, a_n \not\to -\infty$
$a_n \not\to \ell \ (\forall \ell \in \mathbb{R})$
y no son acotadas
Ej: $(-1)^n n$

Propiedades

1) $a_n \to +\infty \iff \frac{1}{a_n} \to 0^+$

2) $a_n \to -\infty \iff \frac{1}{a_n} \to 0^-$

3) $a_n \to +\infty \iff -a_n \to -\infty$

4) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \iff -a_n \to -\ell$

5) $\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \iff \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}$

Def $(b_n \to 0^-)$

$b_n \to 0^+$ si $b_n \geq 0$ $\forall n > n_0$ $(b_n \leq 0)$ y $b_n \to 0$

Dem 1

$a_n \to +\infty \iff \forall k > 0 \ \exists n \text{ t.q. } a_n > k \ \forall n > N$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ t.q. } \left(a_n > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall n > N\right) \iff \varepsilon > \frac{1}{a_n} \ \forall n > N$

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\quad a_n > 0$.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 08 del año 2003

- Sucesiones monótonas de reales
  - crecientes (en sentido amplio)
    - estrictam.
    - no estrict.
  - decrecientes (en sentido amplio)

Def. $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Def creciente estrictam $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

" no estrict $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Teorema (Monotonía y convergencia)

(1) a_n suc. monótona de reales $\Rightarrow a_n$ es convergente
y acotada

(1a) $a_n \uparrow$, acot $\Rightarrow \lim a_n = \sup a_n \in \mathbb{R}$

(1b) $a_n \downarrow$, acot $\Rightarrow \lim a_n = \inf a_n \in \mathbb{R}$

(2) a_n suc monótona de reales $\Rightarrow a_n$ es convergente
y no acotada

(2a) $a_n \uparrow$, no acot $\Rightarrow a_n \to +\infty$

(2b) $a_n \downarrow$, no acot $\Rightarrow a_n \to -\infty$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Lem 1a) $a_n \nearrow$, a_n acot $\Rightarrow \exists \sup a_n = S \in \mathbb{R}$ ax completit. de $\mathbb{R}$

$S \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (A)

S es cota sup de $\{a_n\}$

$\forall \varepsilon > 0$ $S - \varepsilon$ no es cota sup de $\{a_n\}$

$\Rightarrow \exists N$ t.q. $a_N > S - \varepsilon$

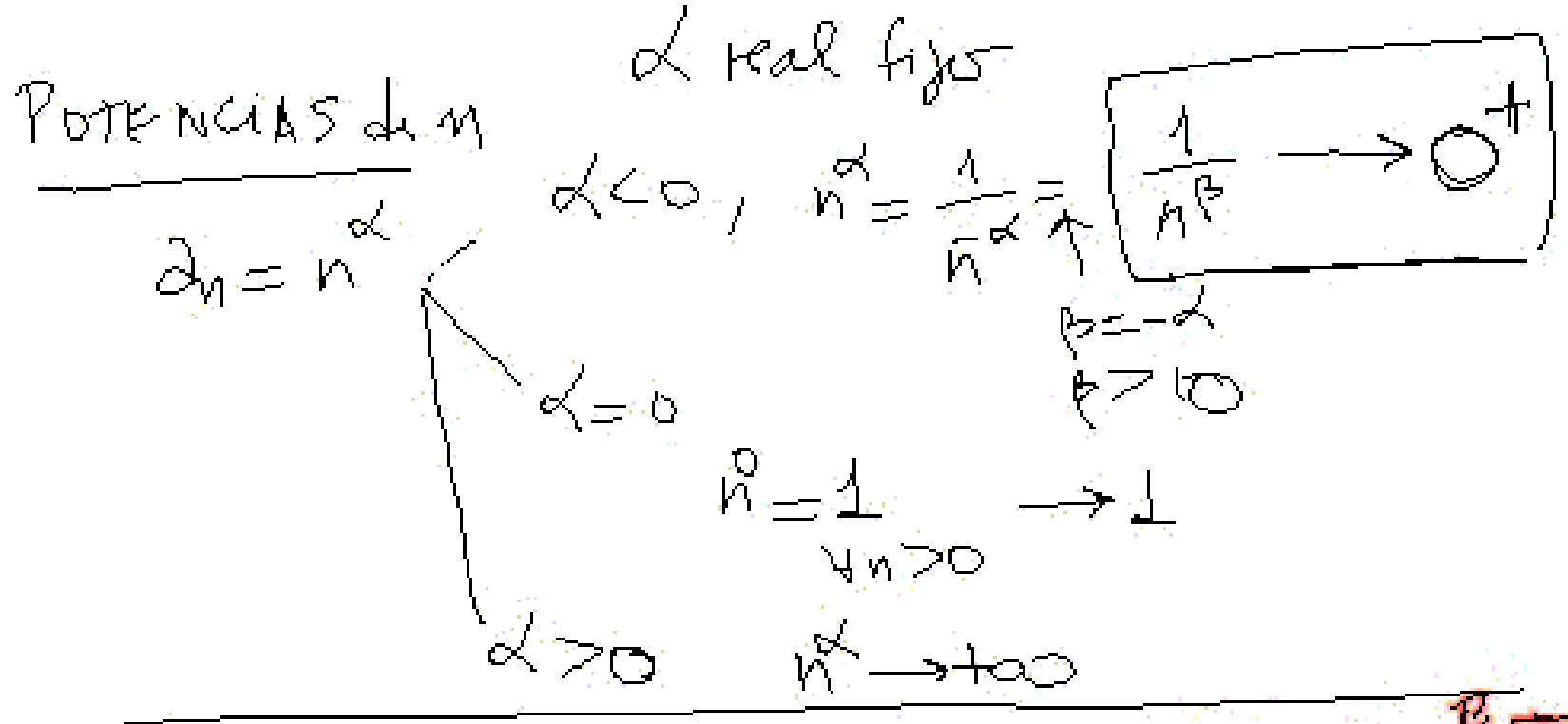
$a_n \uparrow \Rightarrow \forall n > N \quad a_n \geq a_N$

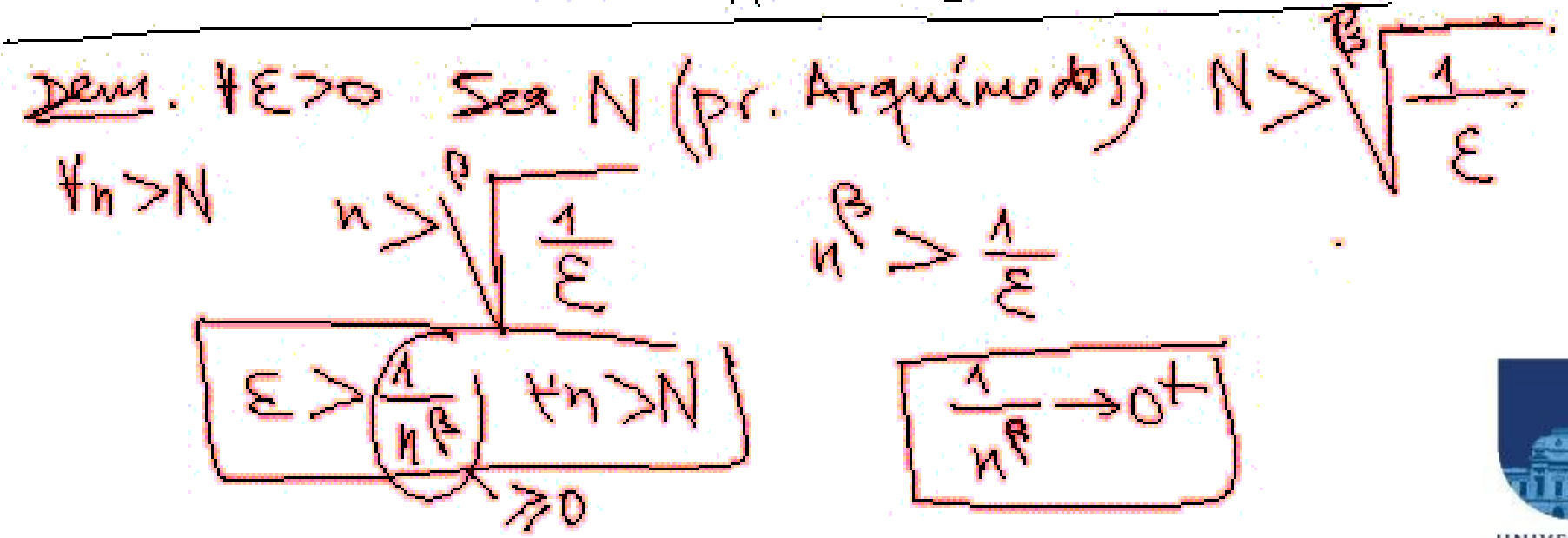
$\forall n > N \quad a_n > S - \varepsilon$ (B)

$S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon \quad \forall n > N$

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $)$

$a_n \to S$





UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión exponencial

Sea $\lambda \geq 0$ real fijo

$a_n = \lambda^n$

- $\lambda = 0$ $\quad 0^n = 0 \ \forall n \geq 1$ $\quad a_n \to 0$
- $0 < \lambda < 1$: $\lambda^n \to 0^+$ (A)
- $\lambda = 1$ $\quad 1^n = 1, \ \forall n \geq 0$ $\quad a_n \to 1$
- $\lambda > 1$ $\quad \lambda^n \to +\infty$ (B)

Dem. de (A) $\forall \varepsilon > 0$, Pr. Arquím.

$\exists N > \log_{10} \varepsilon / \log_{10} \lambda$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$N > \log_{10}\varepsilon / \log_{10}\lambda$

$\Rightarrow \forall n > N \quad n > \log_{10}\varepsilon / \log_{10}\lambda$

< 0 pues $0 < \lambda < 1$

$n \log_{10}\lambda < \log_{10}\varepsilon$

$10^{\log_{10}(\lambda^n)} < 10^{\log_{10}\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\lambda^n < \varepsilon \ \forall n > N}$

$\lambda^n \to 0^+$

≥ 0

Dem de (B): Sea $\mu = \frac{1}{\lambda}$

$\lambda > 1 \Rightarrow 0 < \mu < 1 \xrightarrow{(A)} \mu^n \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{\mu^n} \to +\infty$

$a_n = \lambda^n = \frac{1}{\mu^n}$

Teorema (Suc. de int. encajados en $\mathbb{R}$)

Sea $I_n = [a_n; b_n]$ una sucesión de int. cerrados, en $\mathbb{R}$, encajados, es decir $I_n \supset I_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

La suc. $\{I_n\}$ define un único real x_0 (es decir $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$)

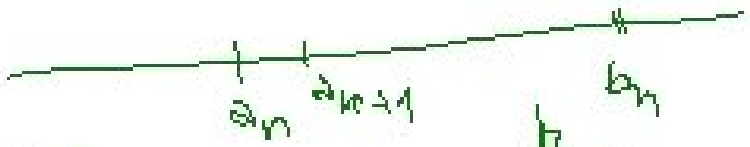
sii

$l(I_n) \to 0$

sii

$a_n \to x_0$ y $b_n \to x_0$ para el mismo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dem. $a_n \leq b_n$ $\forall n$



$I_n \supset I_{n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ b_n \geq b_{n+1} \end{cases}$

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots b_2 \leq b_1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\{a_n\} \uparrow$ y acot. sup por cualquier b_m

$\Rightarrow \exists \lim a_n = \sup a_n = a \leq b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$\{b_m\} \downarrow$ y acot inf por cualquier a_m

$\exists \lim b_m = \inf b_n = b \geq a_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b \; ; \; \sup a_n \leq x \leq \inf b_n$

$\Leftrightarrow a_n \leq x \leq b_m \; \forall n \Leftrightarrow x \in [a_n, b_n] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ $\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$

$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Leftrightarrow \{x_0\} = [a,b] \Leftrightarrow a = b = x_0$

$\Leftrightarrow a_n \to x_0, \; b_n \to x_0$

$b - a = 0$

$\Leftrightarrow \lim (b_n - a_n) = 0$

$\ell(I_n) \to 0$

Definición del número e

$\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Propiedades

1) $0 < a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$b_n = \underbrace{a_n}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} \geq a_n$$

2) $\{a_n \uparrow, b_n \downarrow$ (o sea $I_n \supset I_{n+1}$ donde $I_n = [a_n, b_n]$) → dem muy difícil

$\Downarrow$

$\exists a = \sup a_n \in \mathbb{R}$

$\exists b = \inf b_n \in \mathbb{R}$

3) $b_n - a_n \to 0$ Dem:

$$0 \leq b_n - a_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{a_n}{n} \leq \frac{a}{n} \to 0$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\} \quad \text{donde}$$

$$I_n = [a_n, b_n] \quad \text{con} \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{y} \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$b_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Rightarrow \quad \frac{1}{b_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

$b_{n-1} \to e$

$a_n \to e \qquad b_n \to e$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \log e = 1$$

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$$

$$n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) \to \log e^{-1} = -1$$

$$n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) \to -1$$

$$-n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) \to 1$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 09 del año 2003

Cálculo práctico de límites

Ejercicio Probar que 1) $a_n \to 0$ sii $|a_n| \to 0$

2) $a_n \to \ell$ sii $|a_n - \ell| \to 0$ sii $a_n - \ell \to 0$

1) $\boxed{a_n \to 0} \iff$ def. de límite

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $|a_n| < \varepsilon \ \forall n > N$

$\Updownarrow$ $b_n = |a_n|$; $b_n = |b_n|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $|b_n| < \varepsilon \ \forall n > N$

$\Updownarrow$ def. de límite

$b_n \to 0$ o sea $\boxed{|a_n| \to 0}$

Ejercicio Probar

Teorema de comparación de límites de sucesiones.

1) $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a \leq b$

2) $a_n \to +\infty$, $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow b_n \to +\infty$

3) $b_n \to -\infty$, $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n \to -\infty$

4) $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, $b_n \to l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \boxed{c_n \to l}$

Dem. de 4

$a_n \to \ell$, $b_n \to \ell$ $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1$ t.q. $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > N_1$

$\exists N_2 > N_1$ t.q. $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > N_2$

$\ell - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > N_2$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2$ t.q. $c_n \in B_\varepsilon(\ell)$

$\boxed{c_n \to \ell}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Ejemplo

¿Es convergente $\frac{\cos n}{n} + 5$?

Si lo es, ¿cuál es su límite?

$$0 \leq \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\cos n}{n}\right| \to 0 \Rightarrow \frac{\cos n}{n} \to 0$$

$$\frac{\cos n}{n} + 5 - 5 \to 0 \qquad a_n - \ell \to 0 \Rightarrow a_n \to \ell$$

a_n , ℓ

$$\boxed{\frac{\cos n}{n} + 5 \to 5}$$

Operaciones con límites de sucesiones y con suc. convergentes

Ejercicio Probar que:

$a_n \to a \in \mathbb{R}$
$b_n \to b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n b_n \to ab$ (en part. $\lambda a_n \to \lambda a$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ fijo)
- $a_n - b_n \to a - b$ (porque $a - b = a + (-b)$)
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$
  $\to +\infty$ si $b = 0^+$ y $a \neq 0$
  $\to -\infty$ si $b = 0^-$ y $a \neq 0$

No tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$, ni a $l \in \mathbb{R}$) si $a \neq 0$, $b = 0$ pero b no es 0^+ ni 0^-

Dem 1ª parte

$a_n \to a$, $b_n \to b$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N_1$ t.q. $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$
$\exists N_2 \geq N_1$ t.q. $|b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$

$|a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \quad \forall n > N_2$

$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \quad \forall n > N_2$

Dado $\varepsilon^* > 0$ elijo $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2}$

$\forall \varepsilon^* > 0 \quad \exists N_2$ t.q. $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon^* \quad \forall n > N_2$

$a_n + b_n \to a + b$

Ejercicio Probar que si $a_n \to 0$, y $b_n \to 0$ y $b_n \neq 0 \ \forall n$ entonces $\frac{a_n}{b_n}$ puede tender a $\ell \in \mathbb{R}$ (o sea convergente o sea tiene límite (en $\mathbb{R}$))

puede tender a $+\infty$ (no convergente)
puede " a $-\infty$ (no convergente)
puede no tener límite (en $\mathbb{R}$) ni tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$ (no convergente)

Sugerencia: exhibir un ejemplo de cada caso, con α y β naturales fijos > 0.

$\frac{1/n^\alpha}{1/n^\beta}$

Caso 2 una suc acotada y la otra $\to +\infty$ ó $\to -\infty$

Ejercicio Probar que

$\alpha \le a_n \le \beta$ $\forall n > N$,

$b_n \to +\infty$

$(-b_n \to -\infty)$

$\Rightarrow$

- $a_n + b_n \to +\infty$
- $a_n + (-b_n) \to -\infty$
- $a_n \cdot b_n \to +\infty$ si $\alpha > 0$
  $\to -\infty$ si $\beta < 0$
- $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Caso 3 Ambas suc tienden a $+\infty$ o $-\infty$

Ejercicio Enunciar y probar (en este caso) resultados generales sobre límite y convergencia, o no convergencia de

- $a_n + b_n$
- $a_n \cdot b_n$
- a_n / b_n

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sucesión polinómica en n

$$P(n) = \alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \cdots + \alpha_{p-1} n + \alpha_p$$

donde $p \geq 1$ natural fijo grado de $P(n)$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ son reales fijos dados con $\alpha_0 \neq 0$

Ejercicio Probar que

$\alpha_0 > 0 \Rightarrow P(n) \to +\infty$

$\alpha_0 < 0 \Rightarrow P(n) \to -\infty$

Dem

$$P(n) = n^p \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{n^p} \right) \to +\infty$$

- n^p: potencia de n con $p > 0$, $n^p \to +\infty$
- $\alpha_0 > 0$
- $\frac{\alpha_1}{n} \to 0$
- $\frac{\alpha_2}{n^2} \to 0$
- $\frac{\alpha_p}{n^p} \to 0$

Sucesiones cociente de polinomios en n

$a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ $\forall n > n_0$ natural ; donde P polin de grado p y su término de mayor grado es $\alpha_0 n^p$ con $\alpha_0 \neq 0$ real fijo

y Q es polin. de grado q y su término " " es $\beta_0 n^q$ con $\beta_0 \neq 0$ real fijo

Ejercicio – Probar que

grado $P <$ grado $Q \Rightarrow \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to 0$

" $=$ " $\Rightarrow$ " $\to \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$

" $>$ " $\Rightarrow$ " $\to +\infty$ si $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0} > 0$

" $\to -\infty$ " " < 0

Sug: Sacar n^p de factor común en $P(n)$ y n^q " " " " en $Q(n)$

Sucesiones con radicales de n

Ejemplo

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{- \quad -} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0^+$$

$\sqrt{n+1} \to +\infty$, $\sqrt{n} \to +\infty$, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \to +\infty$

· EXPONENCIAL de una sucesión

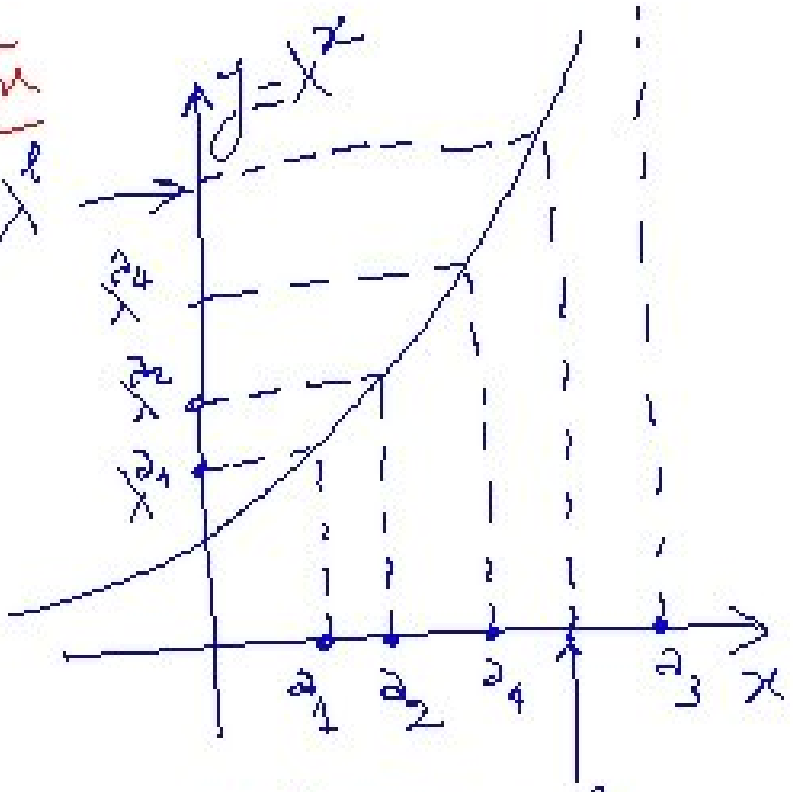
Teorema

Sea $\lambda > 1$ real fijo

1) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \iff \lambda^{a_n} \to \lambda^{\ell}$

2) $a_n \to +\infty \iff \lambda^{a_n} \to +\infty$

3) $a_n \to -\infty \iff \lambda^{a_n} \to 0^+$



Dem que $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda^{a_n} \to \lambda^{\ell}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q $(-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon) \ \forall n > N$

Dado $\varepsilon^* > 0$ elijo $\varepsilon = \log_\lambda (1+\varepsilon^*)$

$(1+\varepsilon^*)^{-1} < \lambda^{a_n - \ell} < 1 + \varepsilon^*$

$\forall \varepsilon^* > 0 \ \exists N$ tal que $\forall n > N$

$\log_\lambda (1+\varepsilon^*)^{-1} < a_n - \ell < \log_\lambda (1+\varepsilon^*)$

$\forall \varepsilon^* > 0 \quad \exists N$ t.q

$$-\frac{1}{1+\varepsilon^*} < \lambda^{a_n - \ell} - 1 < \varepsilon^* \qquad \forall n > N$$

$-\varepsilon^*/1+\varepsilon^*$

$$\varepsilon^* > 0 \Rightarrow 1+\varepsilon^* > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon^*} < 1 \Rightarrow \frac{-1}{1+\varepsilon^*} > -1$$

$$\frac{-\varepsilon^*}{1+\varepsilon^*} > -\varepsilon^*$$

$\forall \varepsilon^* > 0 \; \exists N$ t.q

$$-\varepsilon^* < \frac{-\varepsilon^*}{1+\varepsilon^*} < \lambda^{a_n - \ell} - 1 < \varepsilon^* \qquad \forall n > N$$

$\lambda^{a_n - \ell} \to 1$

$\lambda^{\ell} \lambda^{a_n - \ell} \to \lambda^{\ell}$

$\lambda^{a_n} \to \lambda^{\ell}$

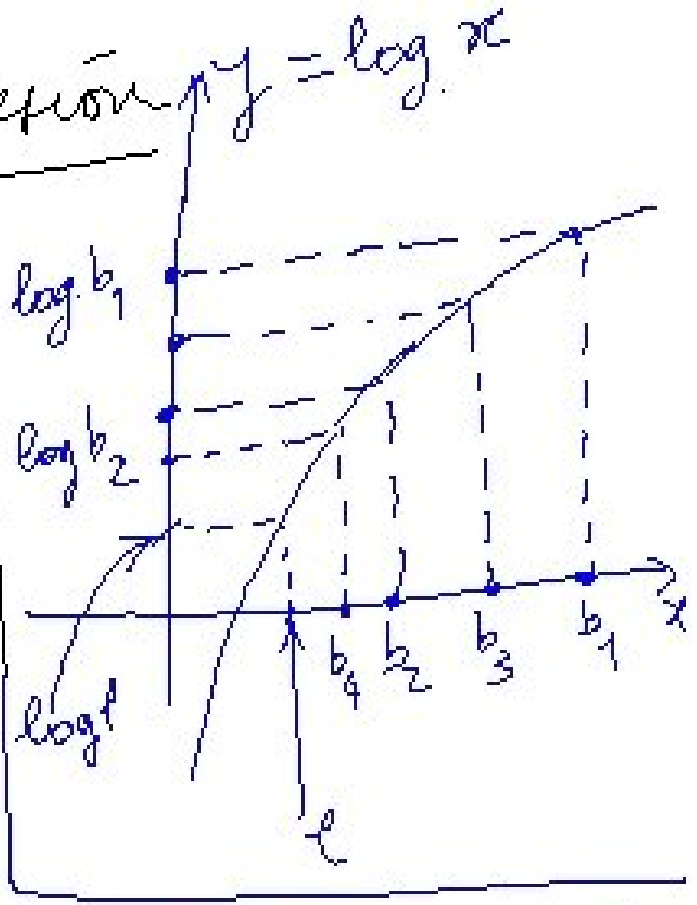
Corolario Logaritmos de una sucesión

Sea $\lambda > 1$ real fijo

1) $0 < b_n \to b > 0 \iff \log_\lambda b_n \to \log_\lambda b$

2) $b_n \to +\infty \iff \log_\lambda b_n \to +\infty$

3) $b_n \to 0^+ \iff \log_\lambda b_n \to -\infty$



Dem de 1 llamo $a_n = \log_\lambda b_n$

$a = \log_\lambda b$

$b_n = \lambda^{a_n}$; $b = \lambda^a$

$\lambda^{a_n} \to \lambda^a \iff a_n \to a \in \mathbb{R}$

$b_n \to b \iff \log_\lambda b_n \to \log_\lambda b$

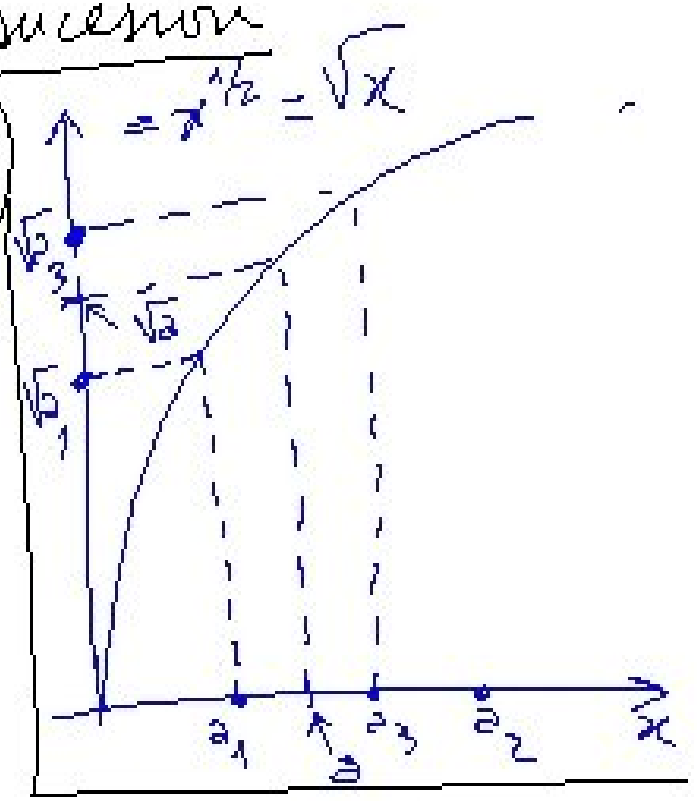
Corolario Potencias de una sucesión

Sea $\gamma > 0$ real fijo (por ej $\gamma = 1/2$)

1) $a_n \to a > 0 \iff a_n^\gamma \to a^\gamma$

2) $a_n \to +\infty \iff a_n^\gamma \to +\infty$

3) $a_n \to 0^+ \iff a_n^\gamma \to 0^+$



Demo de 1

$a_n \to a > 0 \iff \log a_n \to \log a \iff \gamma \log a_n \to \gamma \log a \iff$

(regla anterior)

$\log a_n^\gamma \to \log a^\gamma \iff e^{\log a_n^\gamma} \to e^{\log a^\gamma}$ ($\gamma \neq 0$)

(Teorema anterior)

$\iff a_n^\gamma \to a^\gamma$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 10 del año 2003

SUBSUCESIONES

A conj cualquiera $A \neq \emptyset$

Sea $\{a_n\}$ sucesión de elem. de A $(n \in \mathbb{N})$

Def $\{b_j\}$ (suc. de elem de A) $(j \in \mathbb{N})$ se llama SUBSUCESIÓN de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si para cada $j \in \mathbb{N}$ $b_j =$ algún a_n para cierto $n = n(j)$ tal que

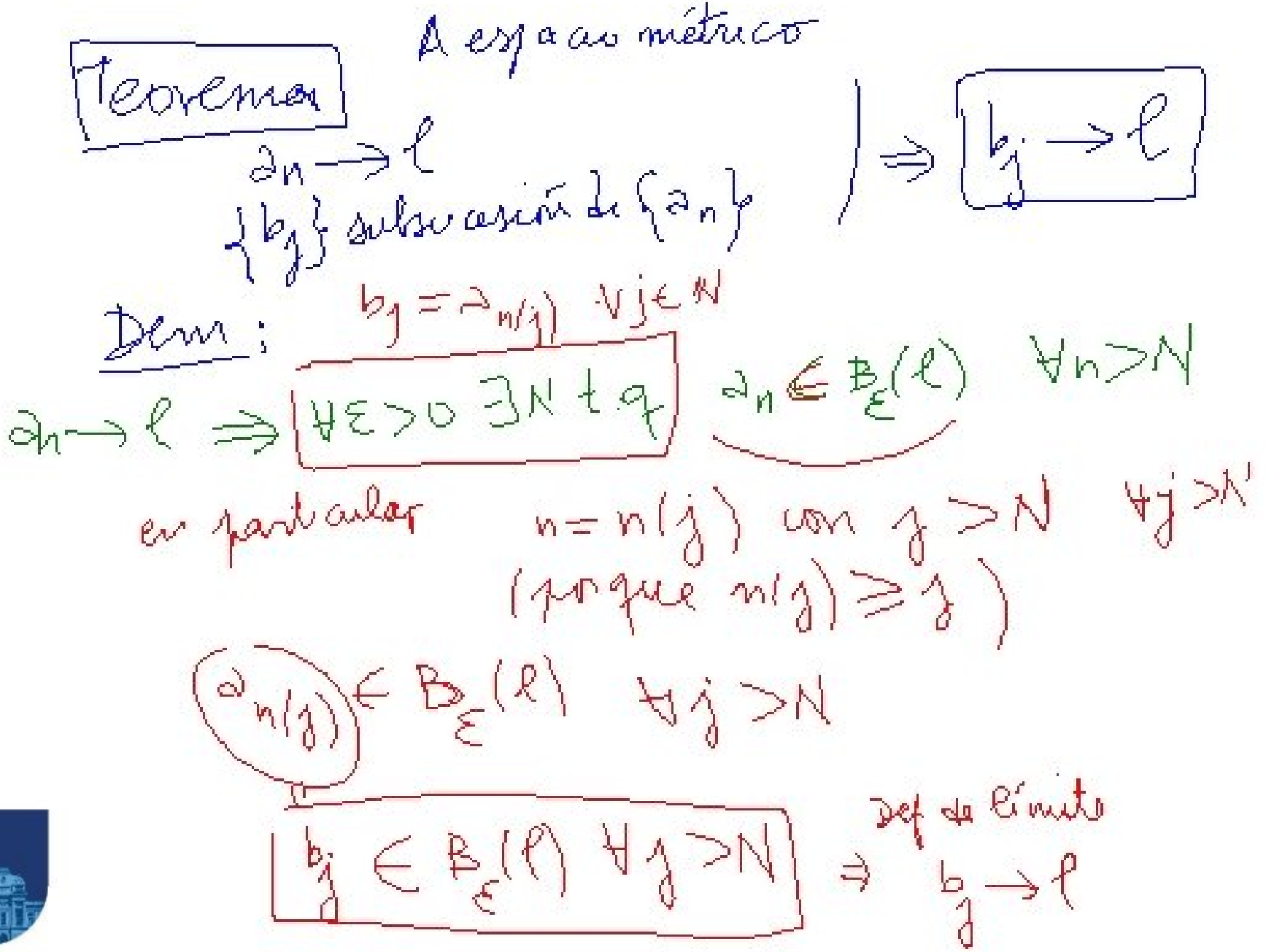
$$n(j+1) > n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Elijo por ejemplo

$b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_{10}$, $b_4 = a_{12}$, $\ldots$

Obs $n(j) \geq j \quad \forall j \in \mathbb{N}$ Dem: Si $n(1) \geq 1$ entonces $n(j+1) > j \Rightarrow n(j+1) \geq j+1$.


A esp a.a. métrico
Teorema
$a_n \to \ell$
$\{b_j\}$ subsucesión de $\{a_n\}$
$\Rightarrow b_j \to \ell$
Dem:
$b_j = a_{n(j)}$ $\forall j \in \mathbb{N}$
$a_n \to \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.q.
$a_n \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall n > N$
en particular $n = n(j)$ con $j > N$ $\forall j > N$
(porque $n(j) \geq j$)
$a_{n(j)} \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall j > N$
$b_j \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall j > N$
$\Rightarrow$ def de límite
$b_j \to \ell$

Teorema A espacio métrico

$a_n \to \ell$

$\{b_j\}$ subsucesión de $\{a_n\}$ $\Rightarrow$ $b_j \to \ell$

Dem $b_j = a_{n(j)}$ $\forall j \in \mathbb{N}$

$a_n \to \ell \Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.q. $a_n \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall n > N$

en particular si $n = n(j)$ $\forall j > N$ se cumple

$n(j) \geq j > N$, luego $a_{n(j)} \in B_\varepsilon(\ell)$

$\| b_j$

Tenemos $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.q. $b_j \in B_\varepsilon(\ell)$ $\forall j > N$

Def. de límite: $b_j \to \ell$

Hip a_n suc de reales.

① $a_n \to l$, b_j subsuc de a_n $\Rightarrow b_j \to l$ (ya visto)

② $a_n \to +\infty$, b_j subsuc de a_n $\Rightarrow b_j \to +\infty$

③ $a_n \to -\infty$, b_j subsuc de a_n $\Rightarrow b_j \to -\infty$

① ya probado

Ejer ② y ③ copiar la dem de ① sustituyendo la def. de $a_n \to p$ por la definición de $a_n \to +\infty$ (o a $-\infty$)

Teo (ya visto) Sea a_n suc. de reales,

Suc. convergente $\Rightarrow$ es acotada

$\not\Leftarrow$

Contraejemplo: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ es acotada pero no es convergente; subsuc $b_j = a_{2j} \to 1$ es convergente

TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para sucesiones)

¡ muy importante !

Teorema

a_n suc. de reales acotada $\Rightarrow$ tiene alguna subsucesión convergente

Dem $\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n > 0$

1er PASO AXIOMA de COMPL $\exists s_1 = \sup\{a_n, n>0\}$

$a_n \leq \beta \ \forall n > 0$

s_1 la menor de las cotas superiores de $\{a_n, n>0\}$

$\alpha \leq a_n \leq s_1 \quad \forall n > 0 \Rightarrow \alpha \leq s_1$

$s_1 \leq \beta$

$s_1 - 1$ no es cota sup de $\{a_n : n>0\}$

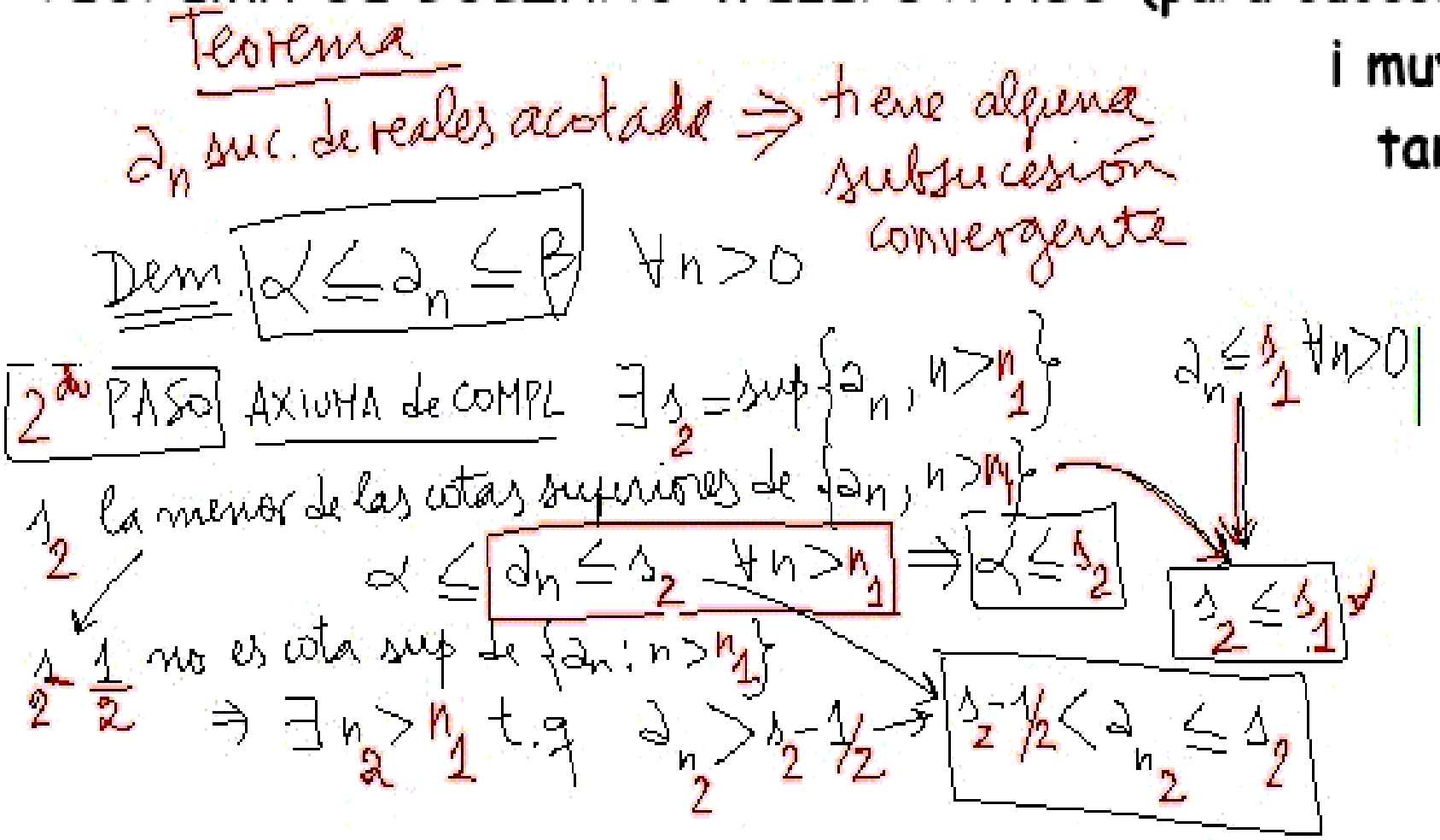
$\Rightarrow \exists n_1 > 0$ t.q $a_{n_1} > s_1 - 1$

$s_1 - 1 < a_{n_1} \leq s_1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

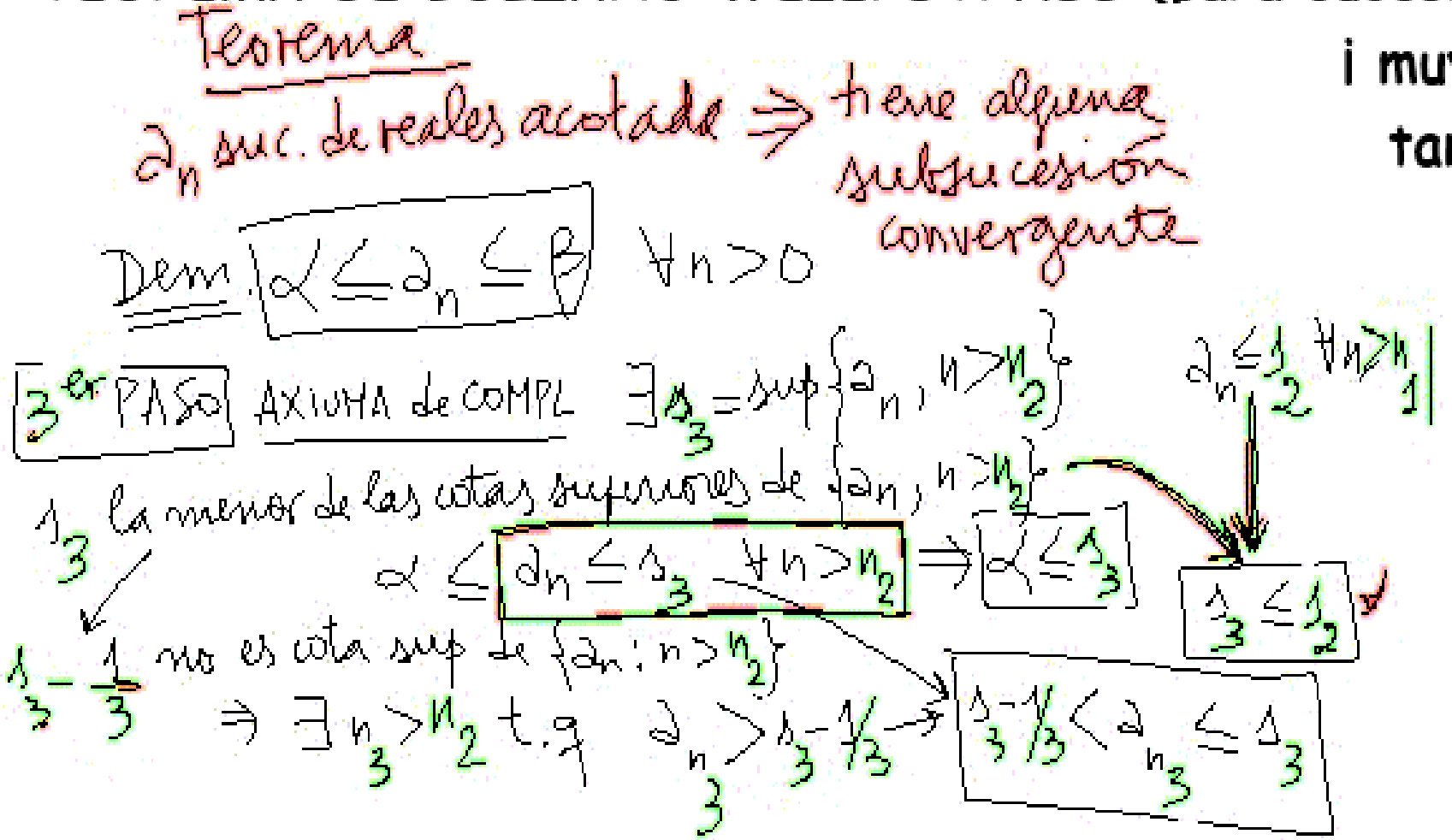
TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para sucesiones)

¡ muy importante !



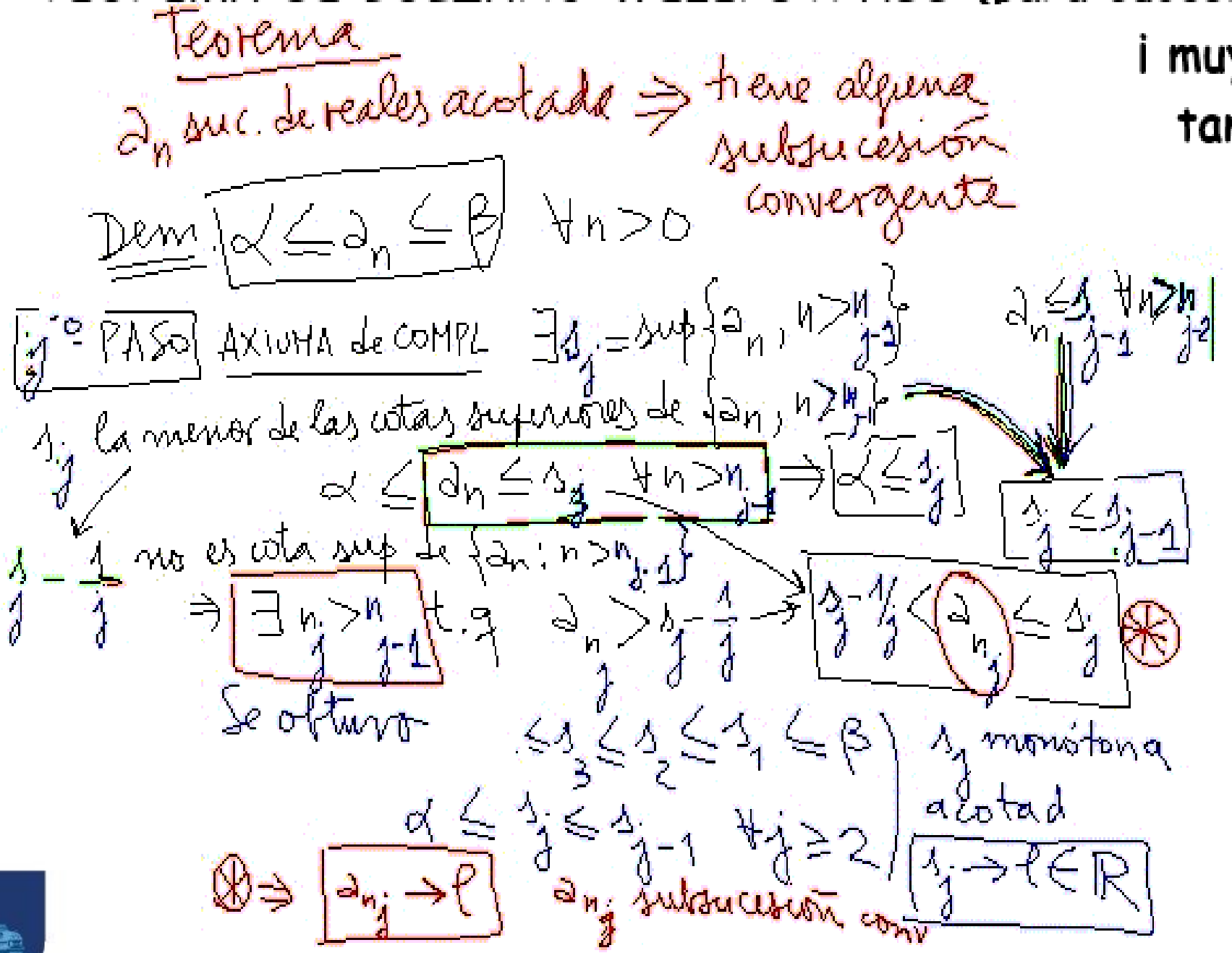
TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para sucesiones)

¡ muy importante !



TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para sucesiones)

¡ muy importante !



Caracterización de compactos en $\mathbb{R}$

Def $K \subset \mathbb{R}$; K "compacto" si es cerrado y acotado.

Def K "acotado" si $\begin{cases} \exists\, \alpha \leq \beta \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ \alpha \leq x \leq \beta \quad \forall x \in K \end{cases}$

Def K "cerrado" si K^c es abierto

Def K^c "abierto" si $\forall \ell \in K^c$ (o sea $\ell \notin K$)

$\exists\, B_\varepsilon(\ell) \subset K^c \quad (\varepsilon > 0)$

(o sea si $|y - \ell| < \varepsilon$ entonces $y \notin K$)

TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para conjuntos)

TEOREMA (caracteriz. de compactos) $K \subset \mathbb{R}$

K es compacto si y solo si

(#) Toda sucesión de elementos de K ($x_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$) tiene alguna subsucesión convergente con límite que $\in K$

Ejemplo

$K = [0,2) = \{0 \leq x < 2\}$

es acotado pero no es cerrado; K no compacto

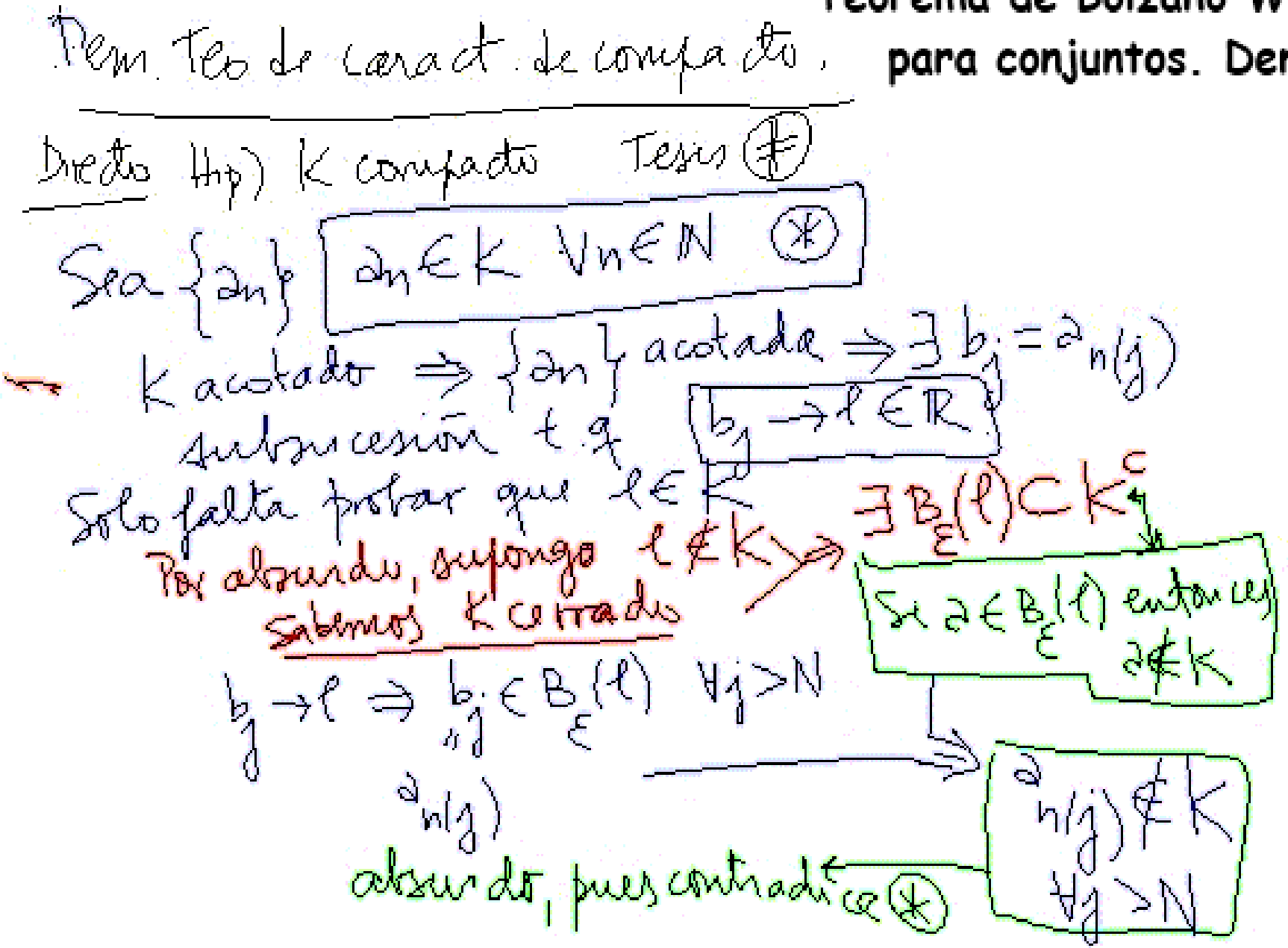
alguna sucesión $a_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$ no tiene subsucesiones convergentes con límite en K

pues $a_n = 2 - \frac{1}{n} \in K \ \forall n \geq 1$

$a_n \to 2 \Rightarrow$ toda subsucesión de $a_n \to 2$

pero $2 \notin K$

Teorema de Bolzano Weierstrass para conjuntos. Demostración



Ejemplo

$K = [0,2) = \{0 \leq x < 2\}$

es acotado pero no es cerrado; K no compacto

alguna sucesión $a_n \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$ no tiene subsucesiones convergentes con límite en K

pues $a_n = 2 - \frac{1}{n} \in K \ \forall n \geq 1$

$a_n \to 2 \Rightarrow$ toda subsucesión de $a_n \to 2$

pero $2 \notin K$

$l \notin K \quad (l \in K^c)$

Por absurdo, sup. que $\forall \varepsilon > 0$, la bola $B_\varepsilon(l)$ no está contenida en K^c (o sea $B_\varepsilon(l)$ tiene algún elemento de K)

en particular, elijo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ n natural ≥ 1

llamo $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(l)$, $a_n \in K$

$0 \leq \text{dist}(a_n, l) < \varepsilon = \frac{1}{n}$

$0 \to 0$ $\quad |a_n - l| \to 0$

$\Rightarrow a_n \to l$

toda subsucesión de a_n cumple $b_1 \to l$

$l \notin K$ / contradice ⊕

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 11 del año 2003

Series de reales

Sea $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}^+$ sucesión dada de reales

Def. $\{S_N\}$, $N \in \mathbb{N}^+$, se llama sucesión de "sumas acumuladas" o de "reducidas N-ésimas" con "término general a_n" si

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

$\ldots, S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots + a_N, \ldots$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \ldots$$

Def. Se llama "Serie de Térm. general a_n" a la "Sucesión de sumas N. ésimas"

Ejemplo $a_n = a_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_0 = (N+1)a_0$$

Obs.: a_n es convergente en este ejemplo $\Leftrightarrow a_n = a_0 \ \forall n$

$\Leftrightarrow a_n \to a_0$

$S_N = (N+1)a_0$ no es convergente si $a_0 > 0$

$S_N \to +\infty$ en este ejemplo si $a_0 > 0$

NOTACIÓN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$ indica que $S_N \left(= \sum_{n=1}^{N} a_n\right) \to \ell$

$= +\infty$ $\to +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ indica que $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n = S_N\right) \to \ell \in \mathbb{R}$

NOTACIÓN

y ℓ se llama "SUMA de la SERIE"

y la serie es "CONVERGENTE"

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ No converge indica que la serie, o sea la sucesión de $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ $\forall N \in \mathbb{N}^+$

NOTACIÓN

no tiene límite (real)

o sea $\sum_{n=1}^{N} a_n$ no tiene límite (real)

$N \to \infty$

Casos de series no convergentes

Notación

$\sum_{n=1}^{N} a_n = S_N$

- $\to +\infty$ (se indica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$)
- $\to -\infty$ (" " $= -\infty$)
- no tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$ y tampoco tiene límite real

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge y $\neq +\infty$ $\neq -\infty$

Ejemplos

$\sum_{n=1}^{N} (k) = Nk$ (k veces) $a_n = k$ de $\forall n$

Si $k>0$ $\sum_{n=1}^{\infty} k = +\infty$

Si $k<0$ $\sum_{n=1}^{\infty} k = -\infty$

Si $k=0$ $\sum_{n=1}^{\infty} k = 0$ (serie converg)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ej $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $a_4 = -2$, $a_5 = 3$, $a_6 = -3$

Serie

$S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 2$, $S_4 = 0$, $S_5 = 3$, $S_6 = 0$

no tiende a $+\infty$ ni a $-\infty$ ni tiende a $\ell \in \mathbb{R}$

Obs en este ejemplo la serie es acot. inf pero la suc de term general a_n no lo era

Obs. a_n acot inf $\not\Rightarrow$ S_N acot inf

por ejemplo $a_n = \$1$ ctes $\forall n$ es acot inf

$S_N = -N \to -\infty$ no acot. inf

Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_0 \lambda^n}_{a_n}$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_0 \lambda^n =$$

$$S_N = \begin{cases} \dfrac{a_0 - a_0 \lambda^{N+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1 \\ (N+1)\, a_0 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$

- Si $a_0 > 0$: $S_N \to +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 = +\infty$, NO CONVERGENTE
- Si $a_0 < 0$: $S_N \to -\infty$, NO CONVERG., $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 = -\infty$
- Si $a_0 = 0$: $S_N = 0 \ \forall N \to 0$, CONV., $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Si $\lambda \neq 1$ $\quad S_N = \sum_{n=0}^{N} a_0 \lambda^n = \dfrac{a_0(1-\lambda^{N+1})}{1-\lambda}$

$a_0 \neq 0$

$|\lambda| < 1$

$\lambda^{N+1} \to 0$

$S_N \to \dfrac{a_0}{1-\lambda}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n = \frac{a_0}{1-\lambda}$$

convergente

$\lambda = -1$ $\quad S_N = \dfrac{a_0}{1-\lambda} - \dfrac{a_0}{1-\lambda}(\lambda^{N+1})$ → no tiene límite (real) si $a_0 \neq 0$

S_N no tiene límite (real)

$|\lambda| > 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_0(\lambda)^n$ no convergente

Resumen Serie geométrica

$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n$

- $a_0 = 0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$ convergente

  $S_N = \sum_{n=0}^{N} 0 = 0 \quad \forall N \to 0$

- $a_0 \neq 0$
  - $|\lambda| < 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n = \frac{a_0}{1-\lambda}$ convergente

    $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_0 \lambda^n \to \frac{a_0}{1-\lambda}$
  - $|\lambda| \geq 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n$ no converge (no $\exists$ límite (real) de S_N)

    $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_0 \lambda^n$

    No tiene lim. real ($\lambda \to \infty$)

Serie $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

$S_N - S_{N-1} \geq 0 \quad \forall N$

$\Leftrightarrow a_N \geq 0 \quad \forall N$

monótona
- $S_N \geq S_{N-1}$ (creciente)
- $S_N \leq S_{N-1}$ (decreciente) $\forall N \Leftrightarrow a_N \leq 0 \quad \forall N$

no monótona

Ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ no converge, pues $S_0 = 1$, $S_1 = a_0 + a_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, $S_N = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ par} \\ 0 & \text{si } N \text{ impar} \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ "serie armónica alternada" ES convergente pues:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Sirve "armonica alternada"

Teorema Criterio de Leibnitz

1) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = (-1)^n \cdot b_n$ con $b_n > 0$ $\forall n$

$b_n \to 0$ (por def. de "suma alternada")

Si $b_{n+1} < b_n$ $\forall n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es CONVERG

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente (pues $b_n = \frac{1}{n} > 0$ $\forall n$

$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$

$b_n = \frac{1}{n} \to 0$)

Dem. de parte 1 (criterio de Leibnitz)

AFIRMACIONES

(a) Si N es par ≥ 2 entonces $S_{N-1} < S_N < S_{N-2}$

(b) " " " impar ≥ 3 " $S_{N-1} > S_N > S_{N-2}$

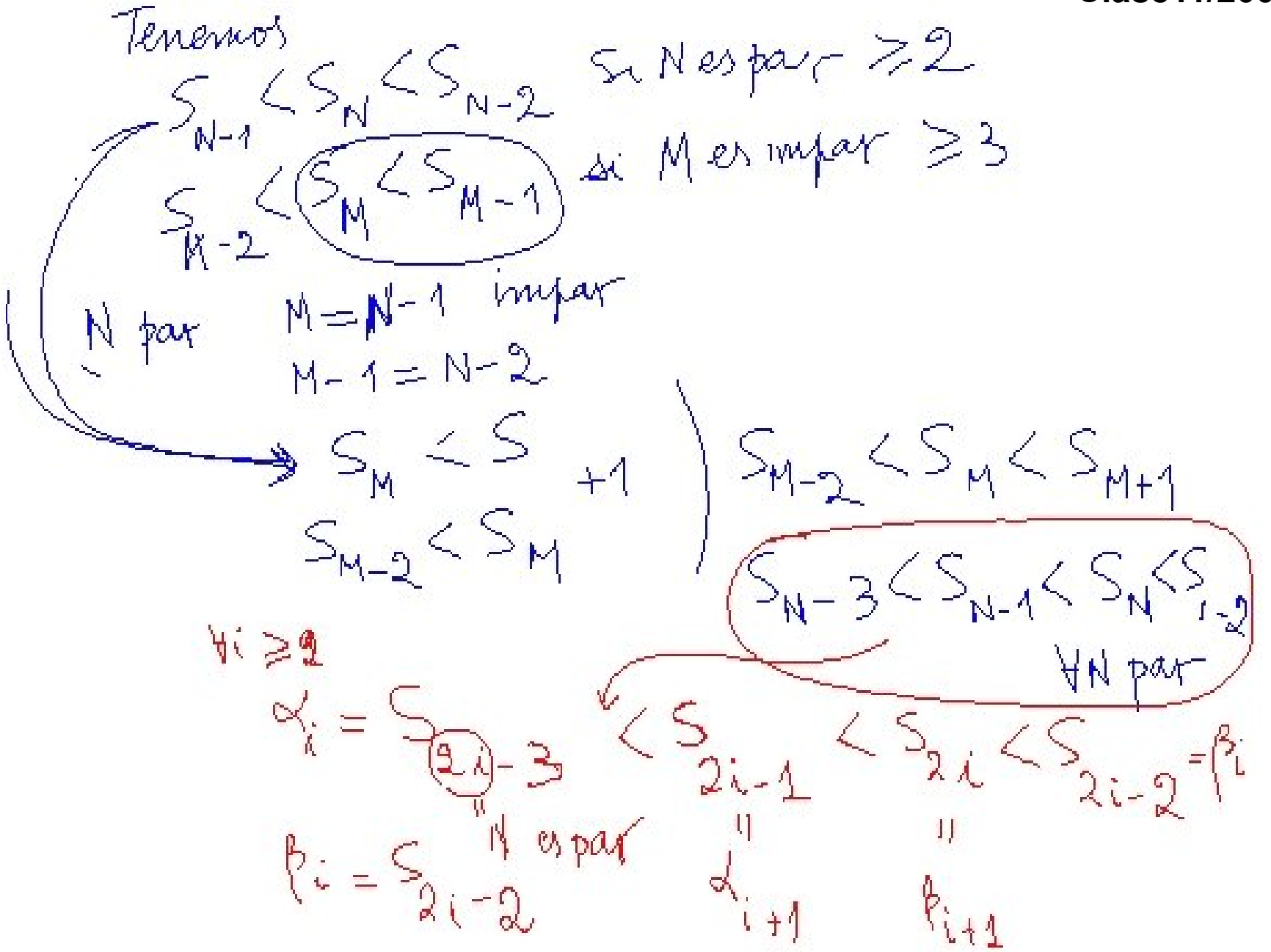
(*) $S_N - S_{N-1} = a_N = (-1)^N b_N \begin{cases} > 0 \text{ si } N \text{ par} \\ < 0 \text{ si } N \text{ impar.} \end{cases}$

(**) $S_N - S_{N-2} = a_{N-1} + a_N = (-1)^{N-1} b_{N-1} + (-1)^N b_N = (-1)^{N-1} \underbrace{(b_{N-1} - b_N)}_{>0}$

$\begin{cases} > 0 \text{ si } N \text{ es impar} \\ < 0 \text{ " " " par} \end{cases}$

Si N par (*) $S_N > S_{N-1}$, (**) $S_N < S_{N-2}$ $\Rightarrow$ afirmación (a)

Si N impar (*) (**) $\Rightarrow$ afirmación (b)


Tenemos
$S_{N-1} < S_N < S_{N-2}$
Si N es par ≥ 2
$S_M < S_{M-1}$
si M es impar ≥ 3
S_{N-2}
N par
$M = N-1$ impar
$M-1 = N-2$
$S_M < S$
$+1$
$S_{M-2} < S_M$
$S_{M-2} < S_M < S_{M+1}$
$S_{N-3} < S_{N-1} < S_N < S_{1-2}$
$\forall N$ par
$\forall i \geq 2$
$\alpha_i = S_{2i-3}$
N es par
$\beta_i = S_{2i-2}$
$< S_{2i-1} < S_{2i} < S_{2i-2} = \beta_i$
α_{i+1}
β_{i+1}

$\alpha_1 < \alpha_{i+1} < \beta_{i+1} < \beta_i$ donde

$I_i = [\alpha_i, \beta_i]$

suc. de int. encajados en $\mathbb{R}$

$\alpha_i = S_{2i-3}$

$\beta_i = S_{2i-2}$

$\text{long}(I_i) = \beta_i - \alpha_i \to 0 \Leftarrow \beta_i - \alpha_i = a_{2i-2} = (-1)^{2i-2} h_{2i-2} \to 0$

Teor. de int. encajados en $\mathbb{R}$

$\exists\, l \in \mathbb{R}$ $\alpha_i \to l$, $\beta_i \to l$

$S_{2i-3} \to l$, $S_{2i-2} \to l$

$S_N \to l$

Serie es convergente

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Series monótonas y de términos con signo dte

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

S_N es creciente $\Leftrightarrow a_n \geq 0 \ \forall n$

S_N es decreciente $\Leftrightarrow a_n \leq 0 \ \forall n$

Ejemplos

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ $\quad \frac{n+1}{n} > 1$

$a_n \geq 0$

es monótona creciente

$a_n = \log(n+1) - \log n$

$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N =$

$$S_N = \underbrace{\log 2 - \log 1}_{a_1} + \underbrace{(\log 3 - \log 2)}_{a_2} + \underbrace{(\log 4 - \log 3)}_{a_3} + \dots$$

$$+ \dots + \underbrace{\log(N+1) - \log N}_{a_N} .$$

$S_N = -\log 1 + \log(N+1) \longrightarrow +\infty$ Serie no convergente no tiene límite (real)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$$

$$a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

$a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente.

Ejemplo 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)}_{a_n}$$

$$\rho_n = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to 1$$

$a_n < 0 \ \forall n$

$\Rightarrow S_N$ es decreciente

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(Serie telescópica)

$$S_N = -\log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \to -\log 2$$

$a_n = \log \rho_n \to 0$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$$

$0 < \rho_n < 1 \Rightarrow \log \rho_n < 0$

$a_n < 0 \ \forall n$

Serie telescópica

Def $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad \forall n$ para cierta suc λ_n dada

Obs

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) + (\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_4 - \lambda_3) + \dots + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)$$

$$\boxed{S_N = \lambda_{N+1} - \lambda_1}$$

La serie telescópica es convergente $\Leftrightarrow$

$$\exists \ell = \lim_{n} \lambda_n \in \mathbb{R}$$

y en ese caso suma de la serie $= \ell - \lambda_1$

Operaciones con series

Teorema

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente con suma A

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ conv' " B

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ converg con suma αA

del de

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converg con suma $A + B$

Dem Ejercicio

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{2^n} \right]$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ geométrica razón $\frac{1}{2}$

1er término es $\frac{3}{2}$

Es CONVERGente y su suma es $\frac{3/2}{1-1/2} = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)$$

$a_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$

$\lambda_n = -\frac{1}{n} \to 0$

Converg suma 1

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 12 del año 2003

Teorema $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$

Corolario Si $a_n \not\to 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge

Dem. del Teorema

Hip): $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \to l \in \mathbb{R}$

$S_N - S_{N-1} \to l - l = 0$

$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$

$S_{N-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$

$S_{N-1} \to l$

$= a_N$

$\boxed{a_N \to 0}$

Recíproco es falso $a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ convergente

(Otra vez Si $a_n \to 0$ la serie puede ser convergente o no serlo)

Contraejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$ (no converge)

$a_n \to 0$

Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ armónica

Teorema

(A) Si $\alpha < 1$ entonces $\sum \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ (NO CONVERGE)
(ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ no converge)

(B) Si $\alpha = 1$ " $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ (NO CONVERGENTE)

(C) Si $\alpha > 1$ " $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ convergente (ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)

Dem. de (C) (Teorema en las próximas 2 clases)
" " (B) (" en esta clase, más el final)
" " (A). abusa:

Dem de (A)

H) $\alpha < 1$ $\quad S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \underbrace{\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots \frac{1}{N^\alpha}}_{N \text{ sumandos}}$

todos $\geq \frac{1}{N^\alpha}$

Si $\alpha > 0$:

$1 > \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha > \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha > \cdots > \left(\frac{1}{N}\right)^\alpha$

$S_N \geq \frac{N}{N^\alpha} = N^{1-\alpha} \longrightarrow +\infty$

($1-\alpha > 0$ por H)

Si $\alpha \leq 0$

$a_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} = n^\beta$ $\quad \beta = -\alpha \geq 0$

$\begin{cases} \to +\infty \text{ si } \beta > 0 \\ \to 1 \text{ si } \beta = 0 \end{cases}$

$a_n \not\to 0$ $\Rightarrow$ S_N no converge

S_N crece $\Rightarrow$ $S_N \to +\infty$

Condición de Cauchy para series de reales

Una serie de reales (suc. de sumas acumuladas o reduc. enésimas de reales) como toda suc. de reales es CONVERG sii es de Cauchy.

$\{S_N\}$ es de Cauchy, por def, si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N^* \in \mathbb{N}$ tal que $|S_M - S_N| < \varepsilon \quad \forall M > N > N^*$

caso particular de serie $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

$S_M = a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots + a_M$

$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$

$|S_M - S_N| = |a_{N+1} + \dots + a_M|$

$\sum a_n$ es de Cauchy, por definición, si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N^* \text{ tal que}$

$|a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_M| < \varepsilon \quad \forall M > N > N^*$

$\sum a_n$ es convergente si y sólo si es de Cauchy

Ejemplo 1

Serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$

Demostrar que no es converg

Por abs., si fuera de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0$

en part. para $\varepsilon = 1/4$

$\exists N^* \text{ t.q.}$

$\left| \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \ldots + \frac{1}{N+N} \right| < \frac{1}{4}$

$\forall M > N > N^*$

en part. para $M = 2N$

N sumandos $\geq \frac{1}{2N}$

$\text{ls} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$ → ABSURDO

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es no convergente. Probar que $S_N \to +\infty$

$\forall N \quad S_N < S_{N+1}$ porque $S_{N+1} = S_N + \frac{1}{N+1} > 0$

Luego $S_N \uparrow$

S_N no convergente $\Rightarrow$ $S_N \to +\infty$

Hemos probado la parte (B) del teorema sobre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ enunciado al principio de esta clase.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\boxed{\alpha > 1}$

Probar que es convergente

Sea $S_N = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{N^\alpha}$

$$S_{2N} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \left(\frac{1}{N^\alpha}\right) + \underbrace{\frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{(N+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(N+N)^\alpha}}_{N \text{ sumandos}}$$

todos > 0

todos $< \frac{1}{N^\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{0 < S_{2N} - S_N < \frac{N}{N^\alpha} = \frac{1}{N^{\alpha-1}}}$$

$$0 < S_4 - S_2 < \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$0 < S_8 - S_4 < \frac{1}{4^{\alpha-1}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2$$

$$0 < S_{16} - S_8 < \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3$$

$$0 < S_{2N} - S_N < \frac{1}{N^{\alpha-1}} \qquad \forall N \geq 1$$

en particular para $N = 2^j$ $\quad j$ natural ≥ 1

$$0 < S_{2 \cdot 2^j} - S_{2^j} < \frac{1}{(2^j)^{\alpha-1}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^j$$

$j=1 \quad 0 < S_4 - S_2 < \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

$j=2 \quad 0 < S_8 - S_4 < \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2$

$j=3 \quad 0 < S_{16} - S_8 < \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3$

$\vdots$

$j=j \quad 0 < S_{2^{j+1}} - S_{2^j} < \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^j$

+

$$0 < S_{2^{j+1}} - S_2 < \frac{a_0 - a_0 \lambda^{j+1}}{1-\lambda} < \frac{a_0}{1-\lambda}$$

serie geométrica con $a_0 = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$ (1er término) y razón λ:

$0 < \lambda = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ $\quad \alpha > 1$

$$0 < S_{2^{j+1}} - S_2 < \frac{\alpha_0}{1-\lambda}$$ independiente de j real

$$\forall j \geq 1 : \quad S_{2^{j+1}} < S_2 + \frac{\alpha_0}{1-\lambda} = K$$ K real independiente de j

Por otro lado $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$

$$S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)^\alpha} > 0$$

$$S_N < S_{N+1} \quad \forall N \geq 1$$

S_N creciente

$$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < \dots < S_N < S_{N+1} < \dots < S_{2^{j+1}}$$

Dado N natural $\exists$ j natural tal que $2^{j+1} > N$

$S_N < S_{2^{j+1}} < K$ cte real $\{S_N\}$ acotada

S_N converge

Convergencia absoluta

Teorema

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\not\Leftarrow$

Ejemplo 1) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$ converge porque

$\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ y $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge cuando $\alpha > 1$

Contraejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ armónica alternada

es convergente (por criterio de Leibnitz)

$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ armónica es no convergente

Convergencia absoluta

Teorema

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\not\Leftarrow$

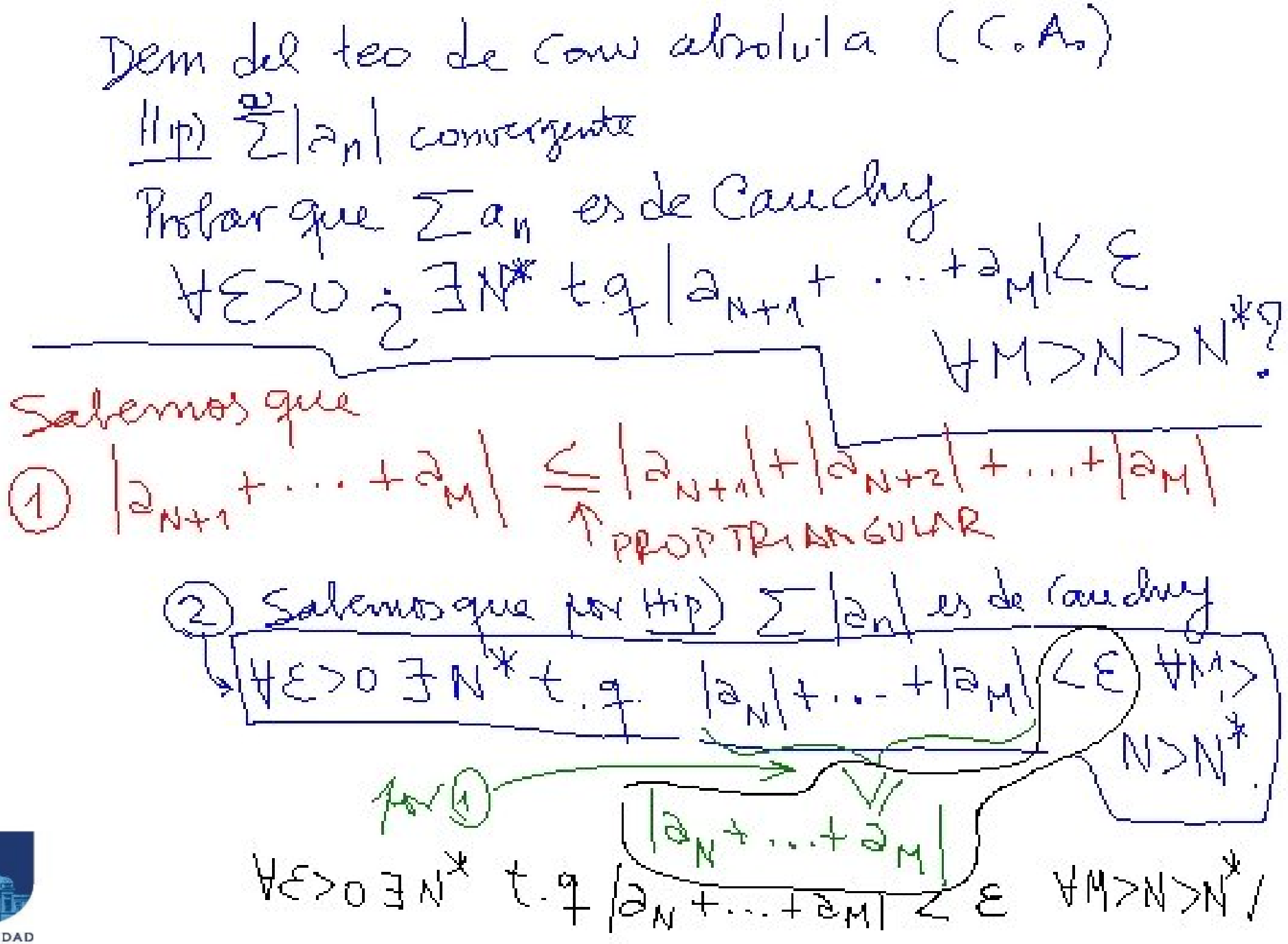
Ejemplo 1) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$ converge porque

$\left|\frac{-1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ y $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge cuando $\alpha > 1$

Contrajemplo $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ con $\alpha < 1$ y $\alpha > 0$

es convergente (por criterio de Leibniz)

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ vimos que es no convergente si $\alpha < 1$


Dem del teo de conv absoluta (C.A.)
Hip $\sum |a_n|$ convergente
Probar que $\sum a_n$ es de Cauchy
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N^* / |a_{N+1} + \dots + a_M| < \varepsilon \; \forall M > N > N^*$?
Sabemos que
① $|a_{N+1} + \dots + a_M| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots + |a_M|$
PROP TRIANGULAR
② Sabemos que por Hip $\sum |a_n|$ es de Cauchy
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N^* / |a_N| + \dots + |a_M| < \varepsilon \; \forall M > N > N^*$
por ①
$|a_N + \dots + a_M|$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N^* / |a_N + \dots + a_M| < \varepsilon \; \forall M > N > N^*$!

Definiciones Se dice que:

1) "$\sum a_n$ C.A (converge absolutam)" si $\sum |a_n|$ es convergente (y entonces por el teorema anterior también que $\sum a_n$ es convergente)

2) "$\sum a_n$ C.C (converge condicionalmente)" si $\sum a_n$ converge y además $\sum |a_n|$ no converge.

Ejemplos

Sea $\sum a_n$

- $a_n \to 0$ $\in$ A $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$
- $\in$ C $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ con $0 < \alpha \leq 1$
- No $\in$ (no C.A) $\begin{cases} a_n \not\to 0 \\ a_n \to 0 \end{cases}$ $\quad \sum (-1)^n n^\beta$ con $0 \leq \beta$

$\sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n + \frac{1}{3}}{n}$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 13 del año 2003

Criterio de comparación de series de reales

TEOREMA

1) $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n > N \Rightarrow \sum a_n$ converge
$\sum b_n$ converge

2) $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n > N \Rightarrow \sum b_n$ no converge
$\sum a_n$ no converge

(2) es un corolario inmediato de (1)

3) $|a_n| \le |b_n| \quad \forall n > N \Rightarrow \sum a_n$ C.A.
$\sum b_n$ C.A.

(3) es un corolario inmediato de (1).

4) $\lim \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}$
$\sum b_n$ C.A. $\Rightarrow \sum a_n$ C.A.

5) Si $0 \le a_n$, $0 < b_n$ $\forall n > N$, si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$

5 es corolario doble de (4)

Si $\sum a_n$ NO entonces $\sum b_n$ NO conv

Ejemplos

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(\sqrt{n})^3}$

$x \in \mathbb{R}$ fijo cualquiera

$a_n = \frac{\cos nx}{n^{3/2}} \to 0 \quad n \to +\infty$

$|a_n| = \frac{|\cos nx|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} = b_n$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $\Leftarrow \frac{3}{2} > 1$

(crit. de comparación)

$|a_n| \leq b_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ converge

$\sum a_n$ C.A.

Ejemplo 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

$b_n = \frac{1}{\log n} \to 0$

$n > \log n \quad \forall n \geq 1$

(porque $e^n > 2^n > n \quad \forall n > 0$

$\log_e e^n > \log n \quad \forall n \geq 1$

n)

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n} \quad \forall n \geq 2$

a_n b_n

$a_n < b_n \quad \forall n \geq 2$

$\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ armónica No $\not<$

Criterio de comparación

$\Rightarrow$ $\sum b_n$ NO $\not<$

$\sum \frac{1}{\log n}$ No Conv

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplo 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n^\alpha}$$

con α real cualquiera fijo

Probar que $\sum$ sii $\alpha > 1$

$a_n > 0$

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} > 0$$

Criterio de comp. por límites (4)

Si $\alpha > 1$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ ✓ (para $\alpha > 1$) $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} \to e \in \mathbb{R}$$

Si $\alpha \leq 1$ $\quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{e} \in \mathbb{R}$ $\quad \sum a_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ NO converge ($\alpha \leq 1$)

comparación por límites (ejerc 5) $\Rightarrow \sum a_n$ NO CON

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem. del teor de comparación series

Probar partes 1) y 4)

Parte 1

Hip $\left[0 \le a_n \le b_n \quad \forall n > N_0 \right]$ $\sum b_n$ converge.

Probar que $\sum a_n$ converge.

$\sum b_n$ converge, es de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N^* \text{ t.q}$

$\forall M > N > N^*$

$b_{N+1} + \ldots + b_M < \varepsilon$

≥ 0

$\Downarrow$

$a_{N+1} + \ldots + a_M$

$\Rightarrow \sum a_n$ es de Cauchy

$\sum a_n$ es convergente

Parte 4

H) $\lim \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}$ y $\sum b_n \notin A$.

Probar que $\sum a_n \notin A$.

en particular para $\varepsilon = 1$

T) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \underbrace{\ell + 1}_{>0}$ $\forall n > N$

$\ell - 1 <$

$0 \le \frac{|a_n|}{|b_n|} < (\ell+1) \quad \forall n > N$

$0 \le \underbrace{|a_n|}_{A_n} \le \underbrace{(\ell+1)|b_n|}_{B_n} \quad \forall n > N$

H) $\sum b_n \notin A$

$\Rightarrow \sum |b_n| \notin$

$\exists S = \sum |b_n| \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\ell+1)S = \sum (\ell+1)|b_n|$ converge

Criterio de comparación (parte 1 ya probada)

$0 \le A \le B_n \quad \forall n > N$

$\sum B_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum A_n$ converge

$\sum |a_n|$ converge

$\sum a_n \notin A$

Corolario del teor. de comparación de series

$0 < h_n$, $0 < k_n$, $\forall n > N$, $\lim \frac{h_n}{k_n} = l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sum h_n$ y $\sum k_n$ son de la misma clase (ambas cvrg. o no cvrg.)

Dem: Si $\sum k_n$ cvrge $\Rightarrow$ (Parte 4) del Teor. de comp.) $\sum h_n$ cvrge (aunque l fuera 0)

- Si $\sum k_n$ no cvrge; $\lim \frac{k_n}{h_n} = \frac{1}{l} \in \mathbb{R}$ (pues $l \neq 0$)

Parte 5) del Teor. comp. $\Rightarrow$ $\sum h_n$ no cvrge

Series con term. gral = cociente de polinomios

Teor $\sum a_n$ converge si $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ con P y Q polinomios

es convergente si y sólo si grado Q > (grado P) + 1

y además en ese caso, es conv. absolutamente.

Dem.

$$n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha_0 n^p + \ldots + \gamma_0}{\beta_0 n^q + \ldots + \delta_0}$$

Obs. Sea $n >$ la mayor de las raíces reales de los pol. P y Q el signo $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) =$ signo $\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)$

Si $\operatorname{sgno}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right) > 0$ entonces $a_n > 0 \ \forall n > N$

Si $\operatorname{sgno}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right) < 0$ " $a_n < 0 \ \forall n > N$

y estudio la convergencia de la serie $\sum (-1)^n a_n = (-1)^n \sum a_n$

$> 0 \ \forall n > N$

Basta demostrar que si el cociente de polin. cumple $\operatorname{sgno} \frac{\alpha_0}{\beta_0} > 0$, entonces se verifica la tesis

$$b_n = \frac{1}{n^{q-p}} > 0 \ \forall n \geq 1$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \cdot \frac{1}{n^{q-p}} = \frac{\alpha_0 n^p + \ldots + \gamma}{\beta_0 n^q + \ldots + \delta_0} \cdot n^{q-p} \to \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

1er de comp por límites (corolario)

$\sum a_n$ $\sum b_n$ tienen la misma convergencia

$b_n \sim \frac{1}{n^{q-p}}$

$\sum a_n$ converge si $q-p-1$

o sea $q > p+1$

(grado Q > (grado P) + 1

Además si converge

hay C.A. porque $a_n > 0 \ \forall n > N$

Ejemplo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+5n^2}{100n^4+1}$ no converge

Ejemplo

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1/3}{n}$ no convergente

$\left(a_n = \frac{(-1)^n + 1/3}{n}\right)$ no es cociente de polinomios.

$$a_n = \frac{4/3}{n} \quad \text{si } n \text{ es par}$$

$$a_n = \frac{-2/3}{n} \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

Serie alternada

Sea N par $S_N = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{N-1} + a_N) = \sum_{\substack{n \text{ impar} \\ n \le N}} (a_{n-1} + a_n)$

$a_{n-1} + a_n = \frac{-2/3}{n-1} + \frac{4/3}{n} = \frac{2n-1}{3(n-1)n}$

$n-1$: impar, n: par

Si N es par $\quad S_N = \sum_{n \text{ pares} \geq 2 \text{ y} \leq N} \frac{2n-4}{3n(n-1)}$

$N = 2M \qquad n = 2m \qquad 1 \leq m \leq M$

$$S_{2M} = \sum_{m=1}^{M} \frac{4m-4}{6(2m-1)}$$

Probar que S_N tiene límite Por absurdo $\exists \lim S_N = S \in \mathbb{R}$

S_N con N par es una subsucesión

S_N es una subsucesión $\quad S_{2M} \to S$

$S_{2M} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-4)}{(6m(2m-1))}$ grado $P = 1$, grado $Q = 2$

serie convergente y es NO convergente

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 14 del año 2003

Criterio del cociente o de D'Alembert

Teorema $\sum a_n$ serie de reales

$a_n > 0 \quad \forall n > N_0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$ {

- $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ no converge
- $+\infty \Rightarrow$ " " "

Ejemplos 1) $\sum \frac{n}{2^n}$ $\quad a_n = \frac{n}{2^n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n}{2^n}$ converge

2) $\sum \frac{n!}{2^n}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} \to +\infty$

$\Rightarrow \sum n!/2^n$ no converge.

Ejemplo 3

$\sum \frac{n \cos n}{2^n}$ $\quad |a_n| = \frac{n|\cos n|}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$

por el criterio del cociente o de D'Alembert

$\sum \frac{n}{2^n}$ (ejemplo 1) converge.

por comparación $\sum \frac{n|\cos n|}{2^n}$ converge

por definición de C.A $\sum \frac{n \cos n}{2^n}$ Conv. absolutamente

(⇒ converge)

Dem. del teorema (crit del cociente o de D'Alembert)

H) $0 < a_n$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to q$ real < 1 $\Rightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N$ t. q

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

dijo $\varepsilon = 1 - q > 0$

$\lambda = q + \varepsilon$, $\lambda < 1$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$

$\lambda < q + 1 - q = 1$

$a_n > 0 \Longrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, $\lambda > 0$

$$0 < a_{n+1} < \lambda a_n \qquad \forall n \geq N$$

$0 < a_{n+1} < \lambda a_n \quad \forall n \geq N \quad N$ fijo

λ fijo

$0 < \lambda < 1$

$a_{N+1} < \lambda a_N$

$a_{N+2} < \lambda a_{N+1} < \lambda^2 a_N$

$a_{N+3} < \lambda a_{N+2} < \lambda^3 a_N$

$\vdots$

$a_{(N+k)} < \lambda^k a_N \quad \forall k$ natural ≥ 0

$n \geq N$

$0 < a_n < \lambda^{n-N} a_N = \lambda^n \left(\frac{a_N}{\lambda^N}\right) = (\lambda^n \alpha)$ α fijo

$\forall n \geq N$

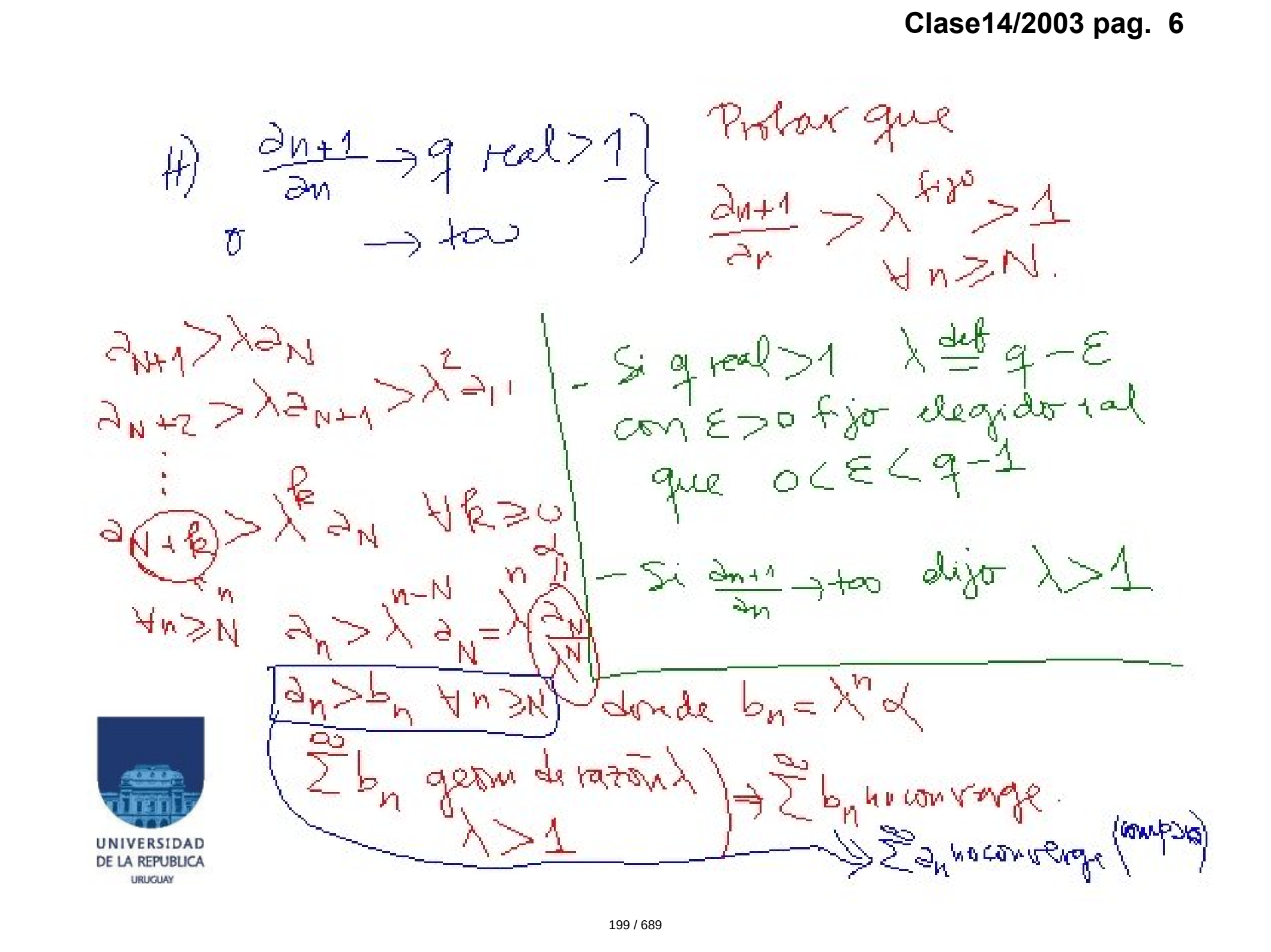
$\sum \lambda^n \alpha$ es geométrica, razón λ $\quad b_n$

es convergente

$0 < a_n < \lambda^n \alpha \quad 0 < \lambda < 1$

$\forall n \geq N$

$\Rightarrow$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ conv


H) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$ real > 1
$a_n \to +\infty$
Probar que
$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda$ fijo > 1
$\forall n \geq N$.
$a_{N+1} > \lambda a_N$
$a_{N+2} > \lambda a_{N+1} > \lambda^2 a_N$
$a_{N+k} > \lambda^k a_N$ $\forall k \geq 0$
$\forall n \geq N$
$a_n > \lambda^{n-N} a_N = \lambda^n \left(\frac{a_N}{\lambda^N}\right) = \lambda^n \alpha$
$a_n > b_n$ $\forall n \geq N$
donde $b_n = \lambda^n \alpha$
$\sum b_n$ geom de razón λ
$\lambda > 1$
$\Rightarrow \sum b_n$ no converge.
$\Rightarrow \sum a_n$ no converge (compara)
- Si q real > 1 $\lambda \overset{\text{def}}{=} q - \varepsilon$
con $\varepsilon > 0$ fijo elegido tal
que $0 < \varepsilon < q - 1$
- Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$ dijo $\lambda > 1$

Criterio de la raíz o de Cauchy

Teorema $\sum a_n$ serie de reales

$0 < a_n \quad \forall n > N$

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \begin{cases} q \text{ real} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ q \text{ real} > 1 \Rightarrow \text{" no converge} \\ \to +\infty \end{cases}$

Dem: $\sqrt[n]{a_n} \to q$ real : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tal que

$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

- Sea $q < 1$ elijo fijo $\varepsilon > 0$; $\varepsilon < 1 - q$

$\lambda \overset{\text{def}}{=} q + \varepsilon < q + 1 - q = 1$

$0 < \sqrt[n]{a_n} < \lambda < 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \boxed{0 < a_n < \lambda^n \quad \forall n \geq N}$

Comparación con $\sum \lambda^n$ converg. $\Rightarrow \boxed{\sum a_n \text{ converge}}$

Criterio de la raíz de Cauchy

Teorema $\sum a_n$ serie de reales

$0 < a_n \quad \forall n > N$

$\sqrt[n]{a_n} \to \begin{cases} q \text{ real} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ q \text{ real} > 1 \Rightarrow \text{" no converge} \\ \to +\infty \end{cases}$

Dem. $\sqrt[n]{a_n} \to q$ real: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tal que

$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

- Si $q > 1$ elijo fijo $\varepsilon > 0$; $\varepsilon < q - 1$

$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} q - \varepsilon > q - (q-1) = 1$

$0 < \sqrt[n]{a_n} > \lambda > 1 \quad \forall n \geq N$

$a_n > \lambda^n \quad \forall n \geq N$

Comparación con $\sum \lambda^n$ no converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ no converge

Criterio de la raíz o de Cauchy

Teorema $\sum a_n$ serie de reales

$0 < a_n \quad \forall n > N$

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \begin{cases} q \text{ real} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ q \text{ real} > 1 \Rightarrow \text{" no converge} \\ \longrightarrow +\infty \end{cases}$

Dem $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$: $\forall K > 0 \ \exists N$ tal que $\forall n \geq N$

$K < \sqrt[n]{a_n}$

[rectángulo] elijo $k > 1$ fijo

$\lambda = k > 1$

$0 < \sqrt[n]{a_n} > \lambda > 1 \quad \forall n \geq N$

$a_n > \lambda^n \quad \forall n \geq N$

Comparación con $\sum \lambda^n$ no converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ no converge

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplos

1) $\sum^{\infty} \left(\frac{n+1}{7n+2}\right)^n$ $\qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{7n+2} \to \frac{1}{7} < 1$

criterio de la raiz o de Cauchy

la serie dada es convergente

2) $\sum^{\infty} \left(\frac{10n+1}{7n+2}\right)^n$ $\qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{10n+1}{7n+2} \to \frac{10}{7} > 1$

la serie dada no converge

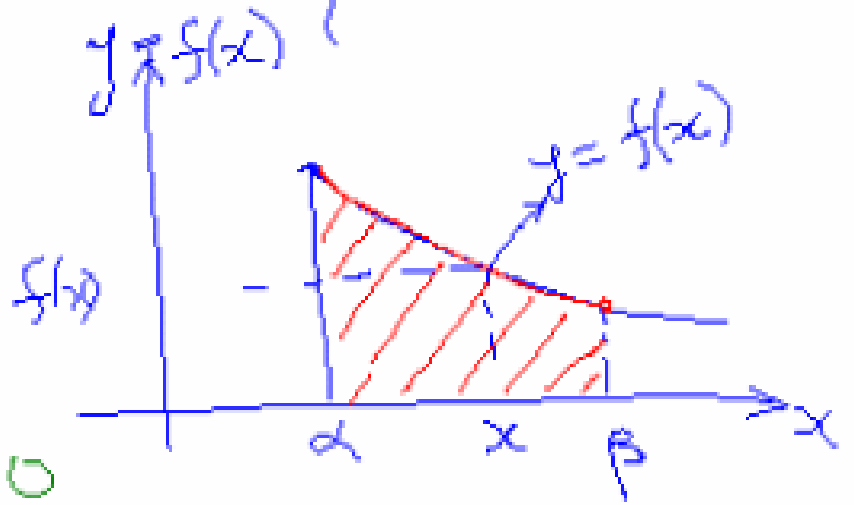
Criterio integral para clasificar series de reales (clase 16)

Recordando: Dada $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$

Hip) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.

f es CONTINUA

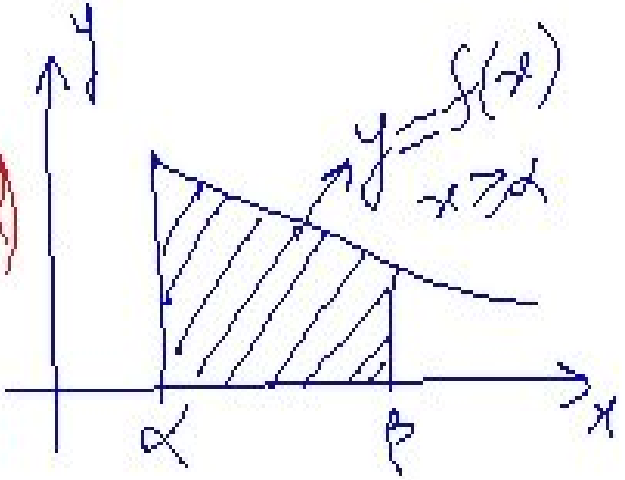
Elijo $\beta > \alpha$



Se demuestra que $\exists$ un número real ≥ 0 igual al "área" de la región rayada.

Se denota $\text{Área}_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Def "Integral impropia" $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ "es" el límite (cuando existe) (real) de $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ cuando $\beta \to +\infty$ (α fijo)



Si $\exists\, \ell$ real $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = \ell$ se dice "convergente"

Si $\nexists\, \ell$ real $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ " " "no convergente"

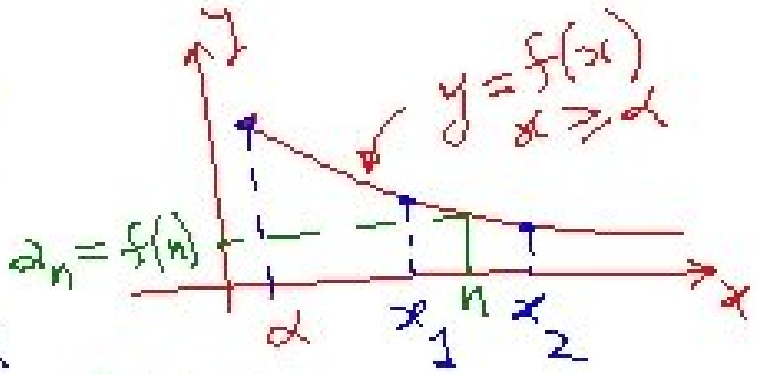
Teorema (criterio integral)

Hip) Si $f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$ es una función tal que

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq \alpha$
2) CONTINUA $\forall x \geq \alpha$
3) f decreciente $\forall x \geq \alpha$

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

si $x_2 > x_1 \geq \alpha$

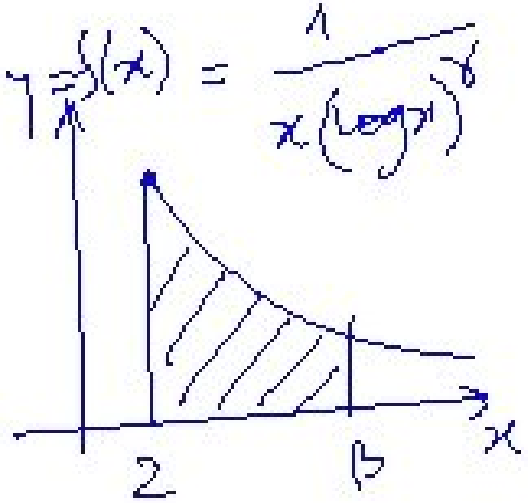


Si $a_n = f(n)$ $\quad \forall n$ natural $\geq \alpha$

Tesis) $\sum_{n=\alpha}^{\infty} a_n$ es convergente **si y solo si** $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$ es " .

Ejemplos $f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^\gamma}$ γ real fijo

$\forall x$ real ≥ 2



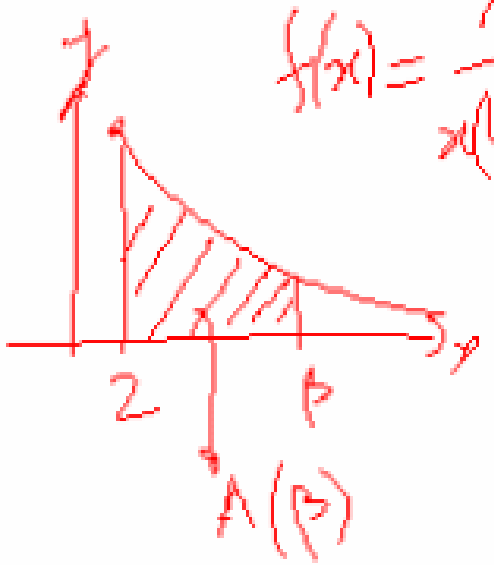
1) f continua $\forall x \geq 2$
2) $f \searrow$
3) $f > 0$

] Hip del criterio integral

$\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\log n)^\gamma}$ converge si y solo si $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$ es convergente

ésta, si y solo si $\lim_{\beta \to +\infty} \int_2^{\beta} \dfrac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$ existe real

Admitamos que $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\gamma}$



$$A(\beta) = \int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$$ es igual a

$(u = \log x)\ \left(\int \frac{du}{u^\gamma}\right)$

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma \neq 1 & A(\beta) = \frac{1}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{(\log 2)^{\gamma-1}} - \frac{1}{(\log\beta)^{\gamma-1}}\right] \\ \text{Si } \gamma = 1 & A(\beta) = \log(\log\beta) - \log(\log 2) \end{cases}$$

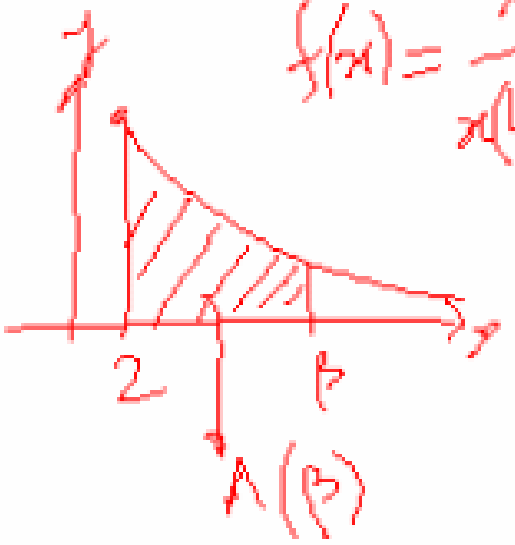
$$A(\beta) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\gamma}\,dx$$

Si $\gamma > 1$ $\quad \frac{1}{(\log\beta)^{\gamma-1}} \to 0$ $\quad \beta \to +\infty$

$\Rightarrow A(\beta) \to \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

$\Rightarrow \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\gamma}$ converge si $\gamma > 1$

Admitamos que $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\gamma}$



$\rightarrow A(\beta) = \int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^\gamma} dx$ es igual a

$(u = \log x)\ (\int \frac{du}{u^\gamma})$

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma \neq 1 & A(\beta) = \frac{1}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{(\log 2)^{\gamma-1}} - \frac{1}{(\log\beta)^{\gamma-1}}\right] \\ \text{Si } \gamma = 1 & A(\beta) = \log(\log\beta) - \log(\log 2) \end{cases}$$

$A(\beta) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\gamma} dx$

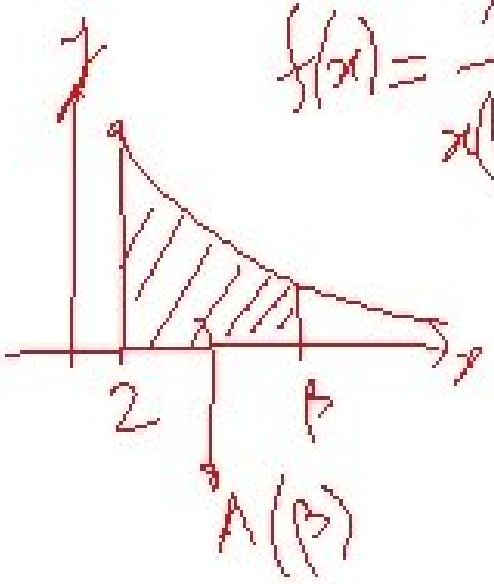
Si $\gamma < 1$ $\quad \frac{1}{(\log\beta)^{\gamma-1}} = (\log\beta)^{1-\gamma} \to +\infty$ $\quad \beta \to +\infty$

$\Rightarrow A(\beta) \not\to$ real $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)dx$ no converge

$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n(\log n)^\gamma}$ no converge si $\gamma < 1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Admitamos que $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\gamma}$ $\longrightarrow$ $A(\beta) = \int_2^\beta \frac{1}{x(\log x)^\gamma} dx$ β igual a



$(u = \log x)$ $\left(\int \frac{du}{u^\gamma}\right)$

$$\begin{cases} \text{Si } \gamma \neq 1 & A(\beta) = \frac{1}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{(\log 2)^{\gamma-1}} - \frac{1}{(\log \beta)^{\gamma-1}}\right] \\ \text{Si } \gamma = 1 & A(\beta) = \log(\log \beta) - \log(\log 2) \end{cases}$$

$A(\beta) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\gamma} dx$

Si $\gamma = 1$ $\log(\log \beta) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow A(\beta) \not\to \ell$ real $\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ No converge

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\gamma}$ no converge si $\gamma = 1$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 27 del año 2003

MÓDULO de CONTINUIDAD

Def

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D$

f es CONTINUA en $a \in D$

si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

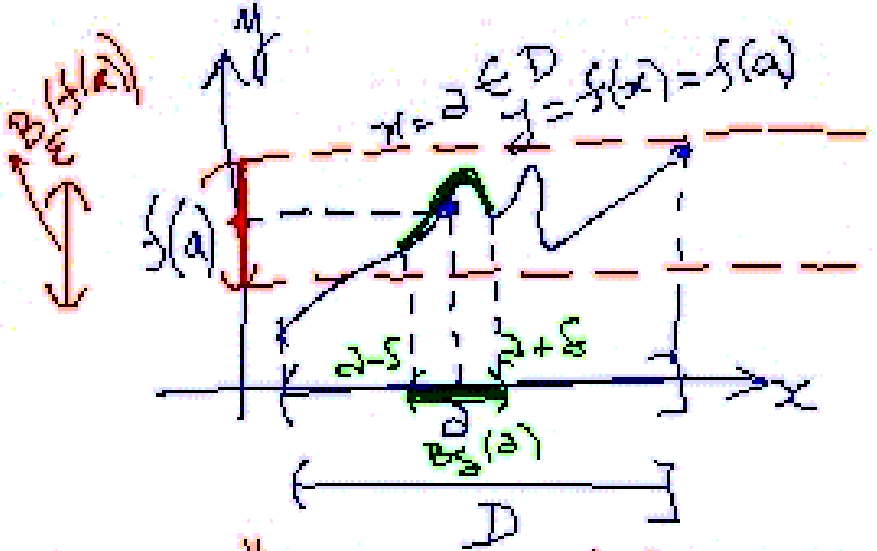
(δ puede depender de ε y de a $\boxed{\delta = \delta(\varepsilon, a)}$

tal que

$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

si $x \in D$ y además

$x \in B_\delta(a)$



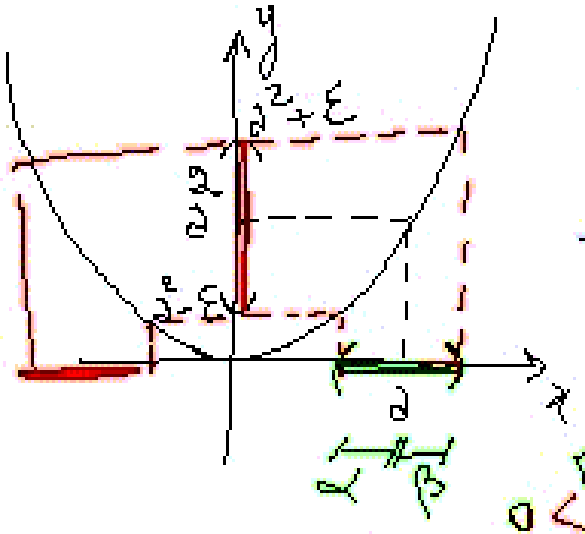
Obs Si un cierto $\delta > 0$ verifica la def. anterior entonces elijo $\delta^* > 0$, $\delta^* < \delta$ y δ^* también la verifica

$\varepsilon > 0$ "margen de tolerancia de error a la "salida" (o sea en la var. dependiente $y = f(x)$)

$\delta > 0$ precisión a pedir a la entrada, o sea en la var. indep $x \in D$

"módulo de continuidad"

Ejemplo Hallar el módulo más de continuidad de $f(x)=x^2$ en $x=a$ (Hallar $\delta_{max}(\varepsilon, a)$ tal que si $x \in B_{\delta_{max}}(a)$ entonces $x^2 \in B_\varepsilon(a^2)$



1er caso $a>0$; $a^2-\varepsilon \geq 0$ $(\varepsilon \leq a^2)$

$f(x)$ $\nearrow$ $\forall x>0$

$$0 < \sqrt{a^2-\varepsilon} < x < \sqrt{a^2+\varepsilon} \Rightarrow$$

$$a^2-\varepsilon < x^2 < a^2+\varepsilon$$

$f(x)$ $f(a)$

Sea $\alpha = a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$

$\beta = \sqrt{a^2+\varepsilon}-a$

$\alpha = \dfrac{\varepsilon}{a+\sqrt{a^2-\varepsilon}}$ $\beta = \dfrac{\varepsilon}{a+\sqrt{a^2+\varepsilon}}$ $\Rightarrow \beta < \alpha$

$\delta_{max} = \beta = \dfrac{\varepsilon}{a+\sqrt{a^2+\varepsilon}}$

Ejercicio Probar que si $a \leq 0$ o si $a>0$ y $\varepsilon \geq a^2$, el mismo δ_{max} sirve

CONTINUIDAD UNIFORME $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f es uniformemente continua en D

si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ (\delta = \delta(\varepsilon)$ pero no depende de $a \in D)$ tal que

$$dist(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ si } dist(x,a) < \delta \quad (\forall x, a \text{ en } D)$$

Obs. f es unif continua en $D \Rightarrow f$ es continua $\forall a \in D$
(tomar $\delta(\varepsilon, a) = \delta(\varepsilon) \ \forall a \in D$)

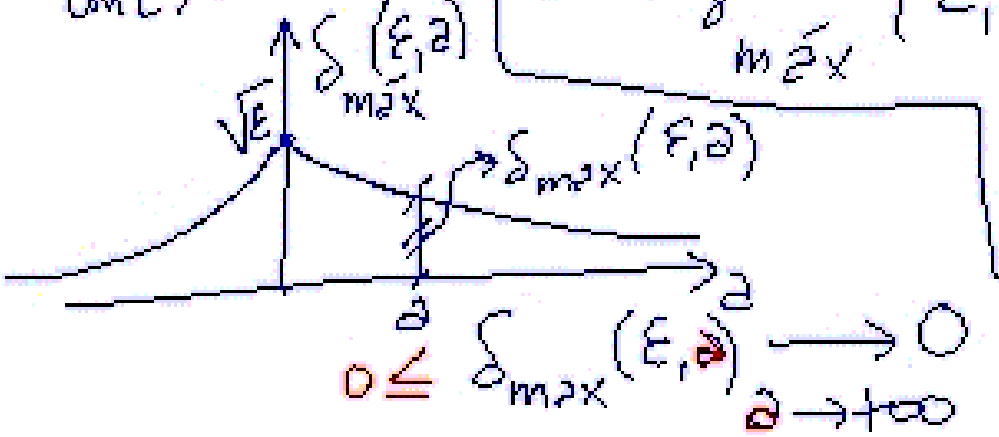
El recíproco es falso: una f puede ser continua $\forall a \in D$ y no ser unif. continua en D.

Contraejemplo: $f(x) = x^2$ con $D = \mathbb{R}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

En efecto:

$f(x) = x^2$ es continua $\forall a \in \mathbb{R}$

con $\varepsilon > 0$ dado



con $\delta_{max}(\varepsilon,a) = \dfrac{\varepsilon}{|a| + \sqrt{a^2+\varepsilon}}$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0$

Probar que $f(x) = x^2$ no es UNIF continua en $\mathbb{R}$

Por absurdo, si existiera $\delta = \boxed{\delta(\varepsilon) > 0}$ módulo de continuidad UNIFORME en $\mathbb{R}$; $\boxed{\delta(\varepsilon) \text{ indep. de } a}$

$$\delta(\varepsilon) \leq \delta_{max}(\varepsilon,a) \to 0 \quad (a \to \infty)$$

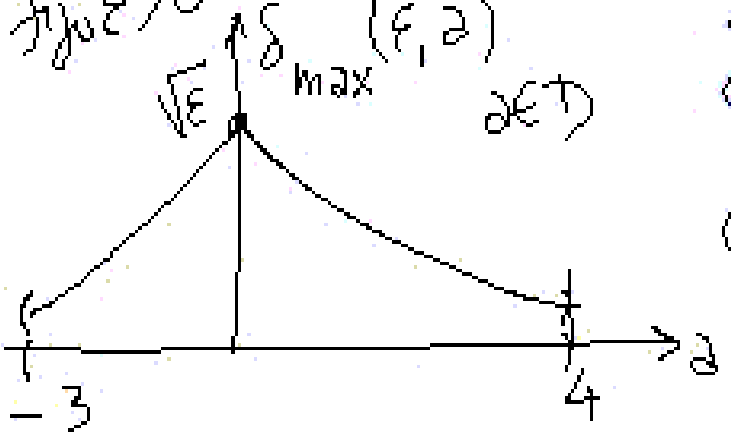
$\delta(\varepsilon)$ indep de a

$\Rightarrow \delta(\varepsilon) \leq 0$
$\delta(\varepsilon) > 0$ | absurdo

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$f(x) = x^2$ $\quad D = \{-3 < x < 4\} = (-3, 4)$

es continua $\forall a \in D$ con



$$\delta_{max} = \frac{\varepsilon}{|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon}} \qquad \forall a \in D \quad \forall \varepsilon > 0$$

con $\varepsilon > 0$ fijo

$$\inf_{a \in D} \delta_{max}(\varepsilon, a) = \frac{\varepsilon}{4 + \sqrt{16 + \varepsilon}}$$

indep de $a \in D$

lo llamo $\delta = \delta(\varepsilon)$

$\forall x, a \in D$

$\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|x - a| < \delta(\varepsilon) \le \delta_{max}(\varepsilon, a)$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow f$ es UNIF continua en D.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo de módulo de continuidad uniforme

Ejemplo

Demostrar que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es UNIF continua en $\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ probar que $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ indep de $a \in \mathbb{R}$

t.q $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Suponer un $\delta > 0$ "PREFABRICADO"

$|x-a| < \delta \overset{?}{\Rightarrow} |f(x) - f(a)| < \varepsilon$?

Supongo $x > a$ (sino cambiamos de x y a entre sí)

si $0 < x - a < \delta$ entonces. $f(x) - f(a) < \varepsilon$?

$$a < x < a + \delta \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{a+\delta} < \sqrt[3]{a + \delta + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{\delta} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{\delta^2}}$$

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\delta}\right)^3} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\delta}$$

$$0 < \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{\delta}$$

o sea $|f(x) - f(a)| < \sqrt[3]{\delta}$

En resumen, hasta aquí, usando un $\delta > 0$ desconocido "PREFABRICADO", probamos que

Si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \sqrt[3]{\delta}$

Nuestro objetivo era construir $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ tal que

si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Basta definir δ de modo que $\sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$

o sea " $\delta = \varepsilon^3$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 28 del año 2003

TEOREMA DE HEINE-CANTOR (de continuidad uniforme)

(IMPORTANTE)

Teorema de continuidad uniforme

f es continua $\forall x \in K \subset D$(dominio de f)

K es compacto

$\Rightarrow$ f es unif. continua en K

Consecuencia (caso particular)

f definida y es continua $\forall x \in [a,b]$ ($a < b$ reales fijos)

$\Rightarrow$ f es unif. continua en $[a,b]$

(porque $[a,b]$ es compacto)

Obs. f puede ser unif continua en K sin que K sea compacto. Ejemplo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$

Teorema de Heine-Cantor (continuidad uniforme)

Demostración

Tesis del teo de cont. uniforme

Tesis a probar: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $\begin{cases} |x-a| < \delta \\ x, a \in K \end{cases}$

Por absurdo, supongo que lo anterior es falso:

$\exists$ para algún $\varepsilon > 0$ / $\nexists \delta > 0$ t.q. $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ si $\begin{cases} |x-a| < \delta \\ x a \in K \end{cases}$

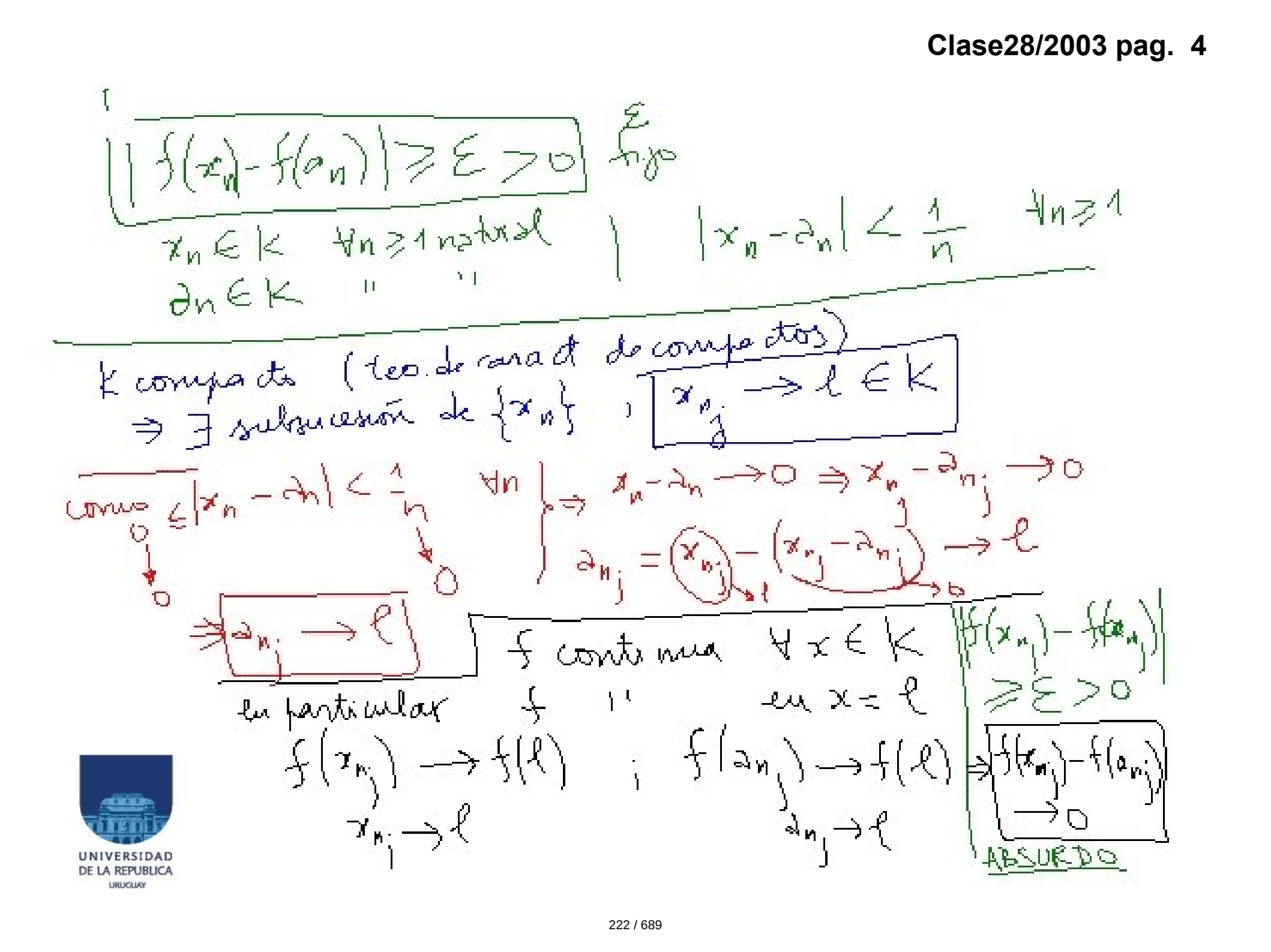
o sea " " $\varepsilon > 0$; $\forall \delta > 0$ no se cumple " " " ;

" " " " " " se cumple $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ para algún $x, a \in K$ t.q. $|x-a| < \delta$

En particular elijo $\delta = \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(a_n)| \geq \varepsilon$

para ciertos x_n y a_n en K t.q. $|x_n - a_n| < \frac{1}{n}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY


$|f(x_n) - f(a_n)| \geq \varepsilon > 0$
$x_n \in K \quad \forall n \geq 1$ natural
$a_n \in K$ " "
$|x_n - a_n| < \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$
K compacto (teo. de caracterización de compactos)
$\Rightarrow \exists$ subsucesión de $\{x_n\}$: $x_{n_j} \to l \in K$
$\forall n \Rightarrow |x_n - a_n| < \frac{1}{n} \to 0$
$x_n - a_n \to 0 \Rightarrow x_{n_j} - a_{n_j} \to 0$
$a_{n_j} = x_{n_j} - (x_{n_j} - a_{n_j}) \to l$
$a_{n_j} \to l$
f continua $\forall x \in K$
en particular f " en $x = l$
$f(x_{n_j}) \to f(l)$; $f(a_{n_j}) \to f(l)$
$x_{n_j} \to l$ $a_{n_j} \to l$
$|f(x_{n_j}) - f(a_{n_j})| \geq \varepsilon > 0$
$f(x_{n_j}) - f(a_{n_j}) \to 0$
ABSURDO

Proposición

Si f es continua uniform en $A \subset D$ (D dominio de f)
entonces f es " en cualquier subconjunto.
$B \neq \phi$; $B \subset A$

Dem por Hip: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q.
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $\begin{cases} x, a \in A \\ |x - a| < \delta \end{cases}$

simple en particular es ambos

$\forall \begin{cases} x, a \in B \\ |x - a| < \delta \end{cases}$ (porque $B \subset A$)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si
$x, a \in B$ y $|x - a| < \delta$; por def f un.cont en B

COROLARIO 1 del Teorema de Heine-Cantor de Continuidad Uniforme

Corolario 1 del Teo. de cont. uniforme.

Si f es continua en K compacto, Si $B \neq \emptyset$ $B \subset K$ $\Rightarrow$ f es uniformemente continua en B

Ejemplo $f(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si elijo $K = [a,b]$ $a < b$ reales fijos — compacto

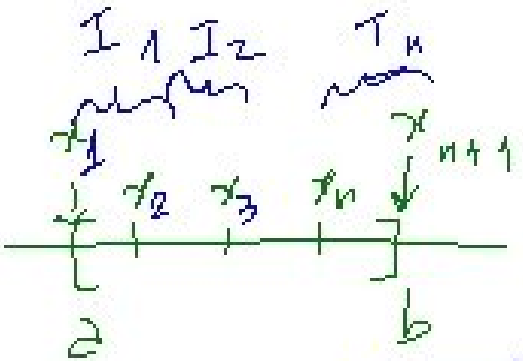
f es continua $\forall x \in K$ (Teo de Cont. Uniforme) $\Rightarrow$ f es UNIF. CONTINUA en $K = [a,b]$

Por la proposición anterior, f es UNIF-CONTINUA en $B \subset [a,b]$, por ejemplo en $B = (a,b)$

$B \neq \emptyset$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Def. Partición de $[a,b]$



π_n es " " "

en n subintervalos si

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

$x_1 = a$, $x_{n+1} = b$

con subintervalos $I_1 = [x_1, x_2]$

$I_2 = [x_2, x_3]$

$I_i = [x_i, x_{i+1}]$

$I_n = [x_n, x_{n+1}]$

NOTAC.

$\Delta x_i = \text{long } I_i = x_{i+1} - x_i$

("incremento en x_i")

$$\sum_{i=1}^{n} \text{long}(I_i) = \text{long}([a,b]) = b-a \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a}$$

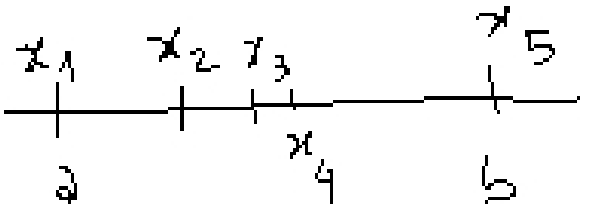
(Si fueran todos con = longitud $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ $\forall i = 1,2,\dots,n$)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Def. Se llama "calibre" δ_n de una partición π_n (en n subintervalos de $[a,b]$) al δ_n que es el $>$ de los incrementos Δx_i

o sea δ_n es la $>$ de las longitudes de los n subintervalos de π_n

Ejemplo:



π con 4 subintervalos

δ "calibre de π"

Obs. Si los n subint. son de = longitud
$\Rightarrow$ entonces $\delta_n = \frac{b-a}{n}$

Si no, entonces $\delta_n > \frac{b-a}{n}$

Oscilación de una función real (acotada) en una partición π_n de $[a,b]$ en n subintervalos

$I_1 = [x_1, x_1 + \Delta x_1]$

$I_2 = [x_2, x_2 + \Delta x_2]$

$\vdots$

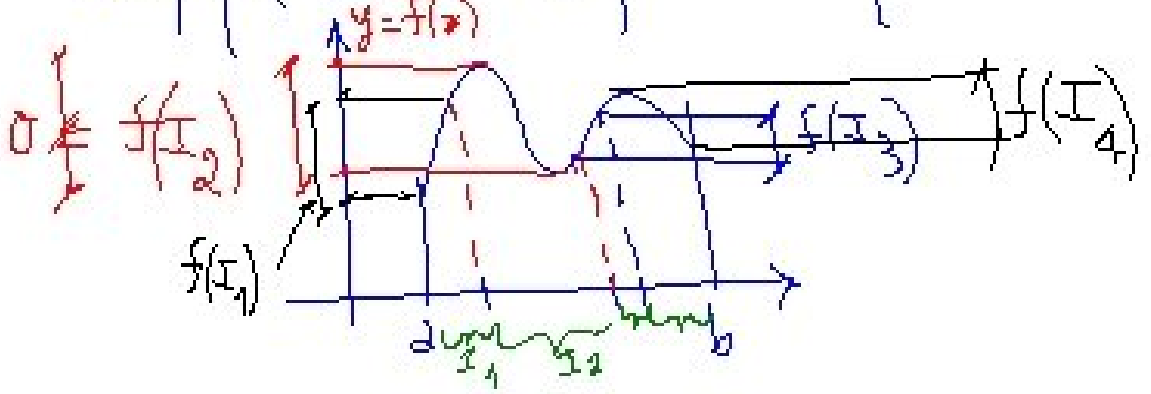
$I_n = [x_n, x_n + \Delta x_n]$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada

$\alpha \leq f(x) \leq \beta \quad \forall x \in [a,b]$

Def: σ_n es la mayor de las diferencias

$$\sup\{f(x) : x \in I_i\} - \inf\{f(x) : x \in I_i\}$$



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

COROLARIO 2 del Teorema de Heine-Cantor de Continuidad Uniforme

Corolario 2 del teor. de cont. uniforme

Si f es CONTINUA $\forall x \in [a,b]$
Si π_n es una partición de $[a,b]$, con calibre δ_n. Si $\delta_n \to 0$
entonces la oscilación σ_n de f en la partición π_n cumple $\sigma_n \to 0$

Corolario 2 del Teorema de Heine-Cantor de continuidad uniforme

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Corolario 2 del teor. de cont uniforme

f continua en $[a,b]$

π_n partición de $[a,b]$ con calibre δ_n

Si $\delta_n \to 0$ entonces la oscilación de f en π_n cumple $\sigma_n \to 0$

Teo cont. uniforme: f CONT en $[a,b]$ ($[a,b]$ compacto) $\Rightarrow$ f es UNIF CONT. en $[a,b]$

Dem.

Def. de cont. unif: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q si $\begin{cases} x \le z \in [a,b] \\ z - x < \delta \end{cases}$ entonces

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon \quad (*)$$

hip $\delta_n \to 0^+$; $\forall \varepsilon^* > 0 \ \exists N$ t.q $0 < \delta_n < \varepsilon^* \ \forall n > N$

en particular vale para $\varepsilon^* = \delta$

Si $x, z \in I$ mismo i subint de $\pi_n \Rightarrow |x - z| \le \delta_n < \delta \quad \forall n > N \Rightarrow$ vale $(*)$

Conclusión hasta ahora, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ t.q. $\forall n > N$

$\forall x, z \in$ al mismo subintervalo I_i de π_n

se cumple $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ (⊗)

(⊗) $\Rightarrow$ $f(z) - \varepsilon < f(x) < f(z) + \varepsilon \quad \forall (x, z) \in I_i$

$f(z) + \varepsilon$ es cota superior de $f(x) \ \forall x \in I_i$

$\sup\{f(x) : x \in I_i\} \leq f(z) + \varepsilon$ (supremo es la menor de las cotas superiores)

$\sup_i f$

$\forall z \in I_i$

$\sup_i f - \varepsilon \leq f(z) \quad \forall z \in I_i$

$\sup_i f - \varepsilon$ es cota inferior de $f(z) \quad \forall z \in I_i$

$\Rightarrow \inf\{f(z) : z \in I_i\} \geq \sup_i f - \varepsilon$

(porque ínfimo es la mayor de las cotas inferiores)

Inclusión hasta ahora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tal que $\forall n > N$

si I_i es un subintervalo de π_n

entonces $\inf_i f \geq \sup_i f - \varepsilon$

o sea $\varepsilon \geq \sup_i f - \inf_i f$ (#)

Por def de oscilación de f en π_n ,

ω_n es la mayor de las diferencias $\sup_i f - \inf_i f$ para cada subintervalo I_i de π_n

(#) $\omega_n \leq \varepsilon$;

Hemos obtenido que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.q. $|\omega_n| \leq \varepsilon$ $\forall n > N$

$\omega_n \to 0$

$\Rightarrow \omega_n \to 0$ como se quería probar.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

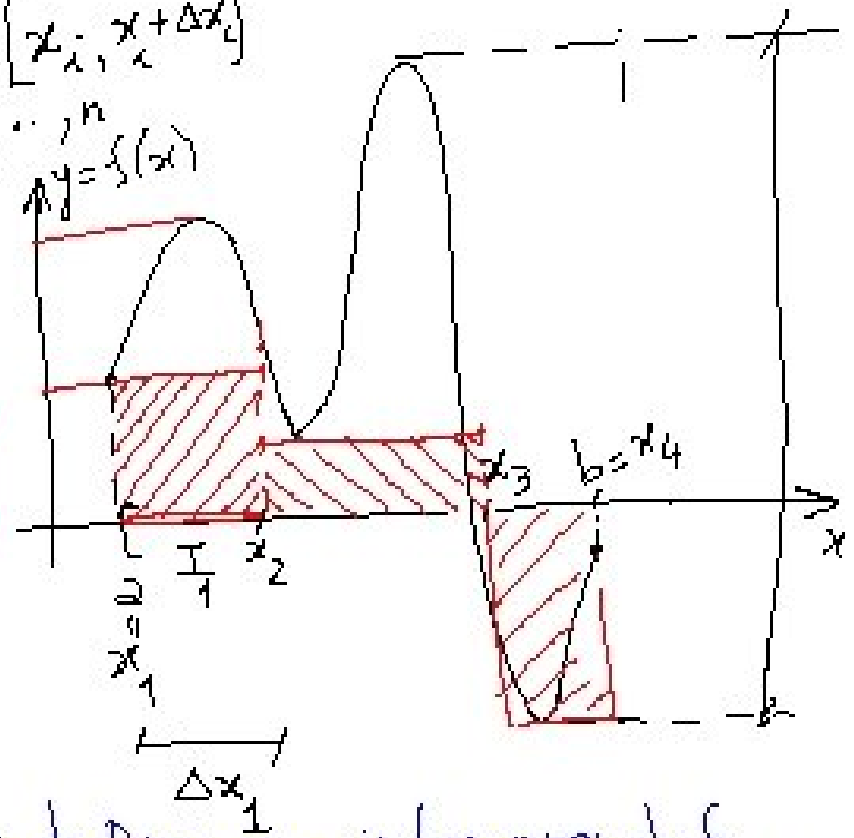
Derechos reservados 2003

CLASE 29 del año 2003

SUMA de RIEMANN INFERIOR

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada (continua o no)

Sea Π_n partición de $[a,b]$ en n subintervalos $I_i = [x_i, x_i + \Delta x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$



Def "SUMA de RIEMANN INFERIOR de f en Π_n a

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_i f \right) \cdot \Delta x_i$$

$\inf_1 f$

"$\inf \{ f(x) : x \in I_i \}$

Def $\sup \{$ sumas de Riemann inferiores de f en todas las particiones de $[a,b]$ $\}$ se llama "Integral inferior de f en $[a,b]$" $\underline{I}_a^b f$

SUMA de RIEMANN SUPERIOR

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada (continua o no)

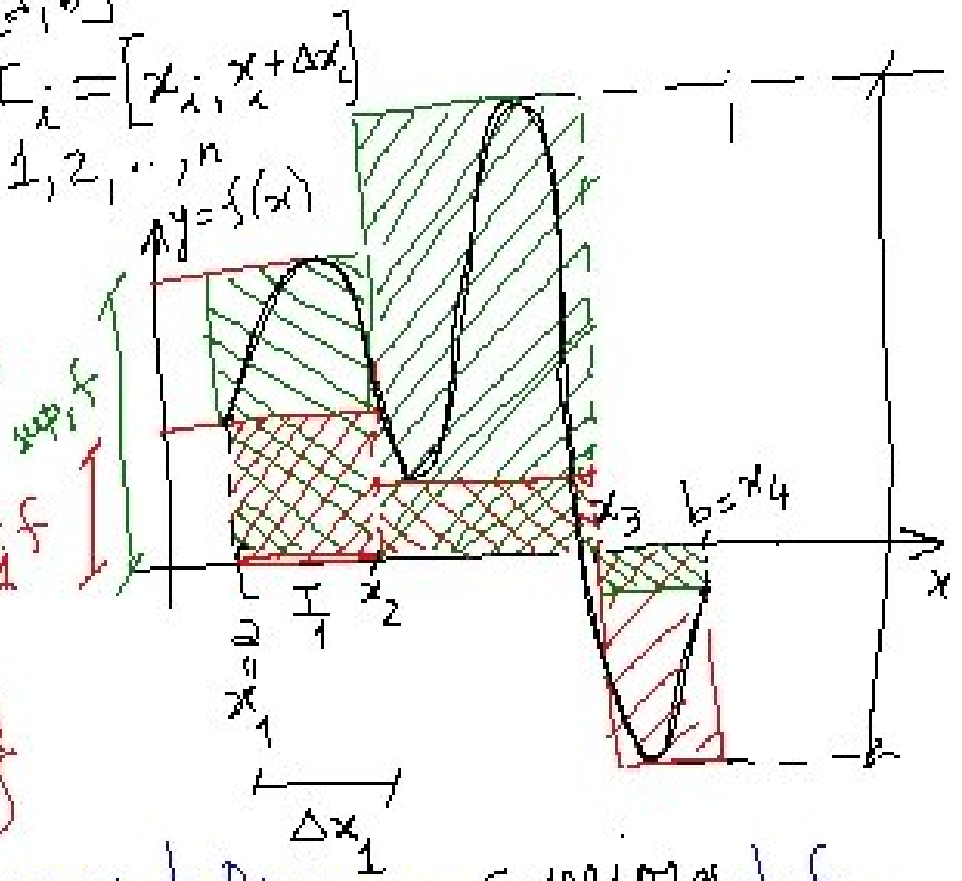
Sea π_n partición de $[a,b]$ en n subintervalos $I_i = [x_i, x_i + \Delta x_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$

Def "SUMA de RIEMANN SUPERIOR de f en π_n a

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f) \cdot \Delta x_i$$

$\sup_i f$: $\sup\{ f(x) : x \in I_i \}$

$\inf_1 f$



Obs $\overline{S}_n \geq \underline{S}_n$

Def $\inf$ { sumas de Riemann superiores de f en todas las particiones de $[a,b]$ } se llama "Integral superior de f en $[a,b]$" $\overline{I}_a^b(f)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

SUMA de RIEMANN INTERMEDIA

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada (con $\cdot$ o no)

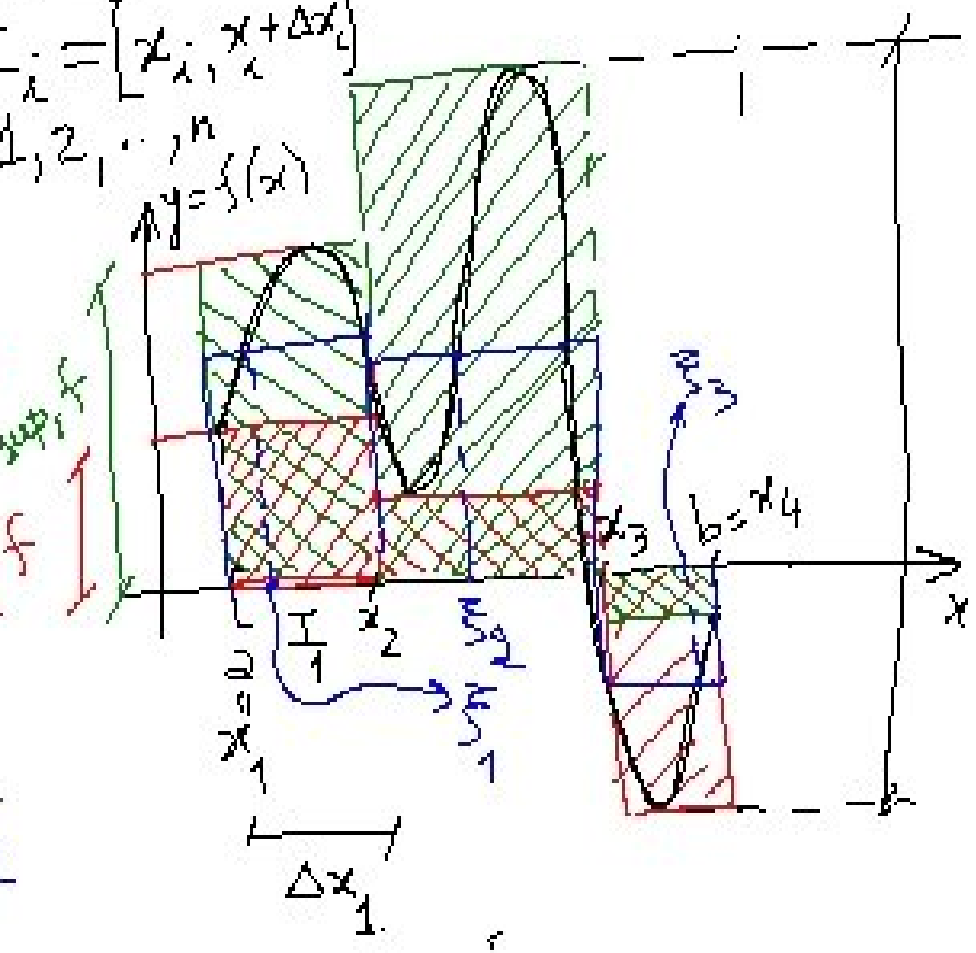
Sea Π_n partición de $[a,b]$ en n subintervalos $I_i = [x_i, x_i + \Delta x_i]$

$i = 1, 2, \cdots, n$

Def. "SUMA de RIEMANN INTERMEDIA" de f en Π_n a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

con $\xi_i \in I_i$



Obs) $\overline{S}_n \geq S_n \geq \underline{S}_n$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Proposición $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

Si Π_n y Π_m son dos particiones en $[a,b]$

Sean $\underline{S}_n$, $\underline{S}_m$, $\overline{S}_n$, $\overline{S}_m$

sumas de Riemann inf y sup respectos a c/u de las 2 particiones dadas.

Entonces $\underline{S}_n \le \overline{S}_m$; $\underline{S}_m \le \overline{S}_n$

(o sea: cualquier suma de Riem inferior de f es $\le$ que " " " superior de f en $[a,b]$, aunque correspondan a particiones diferentes del (mismo) $[a,b]$).

Consecuencia $\forall$ particiones π_n y π_m de $[a,b]$

$\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

se cumple $\underline{S_n} \le \underline{\int_a^b}(f) \le \overline{\int_a^b}(f) \le \overline{S_m}$

$\underline{\int_a^b}(f) = \sup\{\underline{S_n}\}$ por def

$\overline{\int_a^b}(f) = \inf\{\overline{S_m}\}$ por def

En efecto: $\overline{S_m} \ge$ toda suma inferior de Riemann

$\Rightarrow \overline{S_m} \ge$ cota sup del conjunto de las S R inferiores

$\Rightarrow \overline{S_m} \ge \sup\{\underline{S_n}\} = \underline{I}$

$\overline{S_m} \ge \sup\{\underline{S_n}\} = \underline{I} \Rightarrow \underline{I}$ es cota inferior del conj. de las S R superiores

$\underline{I} \le \inf\{\overline{S_m}\} = \overline{I} \Rightarrow \underline{I} \le \overline{I}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Prop 05 $\forall$ partición Π_n de $[a,b]$
$\forall f$ acotada en $[a,b]$

$$0 \leq \overline{S}_n - \underline{S}_n \leq \sigma_n (b-a)$$

donde σ_n es la oscilación de f en Π_n.

Dem

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f)\, \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\inf_i f) \cdot \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f - \inf_i f) \cdot \Delta x_i$$

$(\sup_i f - \inf_i f) \geq 0$, $\leq \sigma_n$ por definición de oscilación de f en Π_n, $\Delta x_i \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{S}_n - \underline{S}_n \geq 0 \\ \overline{S}_n - \underline{S}_n \leq \sigma_n \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sigma_n (b-a) \end{cases}$$

Teorema (Convergencia de sumas de Riemann)

si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada

Si existen particiones Π_n tales que

la oscilación o_n de f en Π_n cumple

$$o_n \to 0$$

entonces

$$\underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f) = \ell \in \mathbb{R}$$

y además $\overline{S}_n \to \ell$

$\underline{S}_n \to \ell$

y cualquier suma de Riemann integrada S_n también cumple $S_n \to \ell$

(correspondientes a las particiones Π_n de la hipótesis)

Interpreta: $\exists$ un número real ℓ tal que

es aprox por defecto y por exceso

por las sumas de Riemann inf. y sup respectivam

ℓ "área neta con signo" abajo del gráfico

de f"

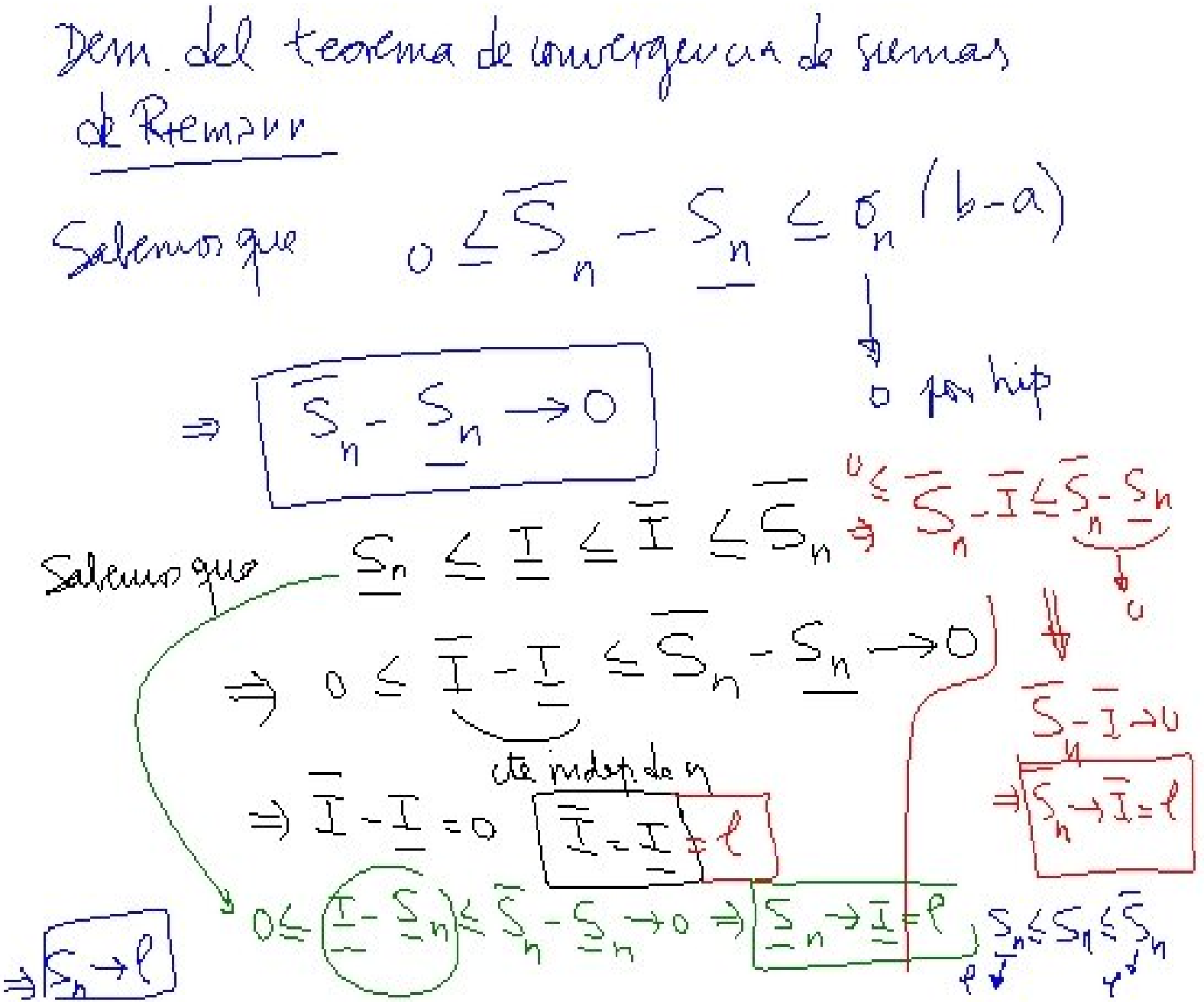
ℓ se llama Integral de Riemann de f en $[a,b]$

$$\ell = \underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

"NOTACION"

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i}_{S_n}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY


Dem. del teorema de convergencia de sumas de Riemann
Sabemos que $0 \le \overline{S}_n - \underline{S}_n \le \sigma_n (b-a)$
$\sigma_n \to 0$ por hip
$\Rightarrow \overline{S}_n - \underline{S}_n \to 0$
Sabemos que $\underline{S}_n \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_n$
$\Rightarrow 0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \overline{S}_n - \underline{S}_n \to 0$
$\Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0$
cte indep de n
$\overline{I} - \underline{I} \ne \ell$
$0 \le \underline{I} - \underline{S}_n \le \overline{S}_n - \underline{S}_n \to 0$
$\Rightarrow \underline{S}_n \to \underline{I} = \rho$
$\Rightarrow S_n \to \ell$
$0 \le \overline{S}_n - \overline{I} \le \overline{S}_n - \underline{S}_n$
$\overline{S}_n - \overline{I} \to 0$
$\Rightarrow \overline{S}_n \to \overline{I} = \ell$
$\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$
$\rho \quad \rho \quad \ell$

Teorema de convergencia de sumas de Riemann para funciones continuas

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

Entonces las integrales I inferior, $\overline{I}$ superior de f en $[a,b]$ cumplen $\underline{I} = \overline{I}$ (por def eso significa que f es integrable Riemann).

Además, llamando $I = \int_a^b f(x)dx$ al valor de $\underline{I} = \overline{I}$;

llamando S_n a la suma de Riemann inferior, superior o intermedia de f en la partición Π_n de $[a,b]$ con S_n cualquiera, se cumple:

Si $S_n \to 0$ entonces $S_n \to I = \int_a^b f(x)dx$

(Por ejemplo si Π_n es la partición de $[a,b]$ en n subintervalos de = longitud y $S_n = \frac{b-a}{n}$)

Dem

f continua en $[a,b]$, $\delta_n \to 0$ $\Rightarrow$ (Corolario del Teo de continuidad uniforme) $\Rightarrow$ oscilación σ_n de f en π_n cumple $\sigma_n \to 0$

Teor. de conv. de sumas de Riemann (1ª versión)

$\exists \pi_n$ particiones tales que $\sigma_n \to 0$ $\Rightarrow$ $\underline{I} = \overline{I} = I \in \mathbb{R}$, $S_n \to I$

Aplicación: Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx = I$

estimándolo por exceso con $\overline{S}_n$

por defecto con $\underline{S}_n$

$\underline{S}_n \leq I \leq \overline{S}_n$

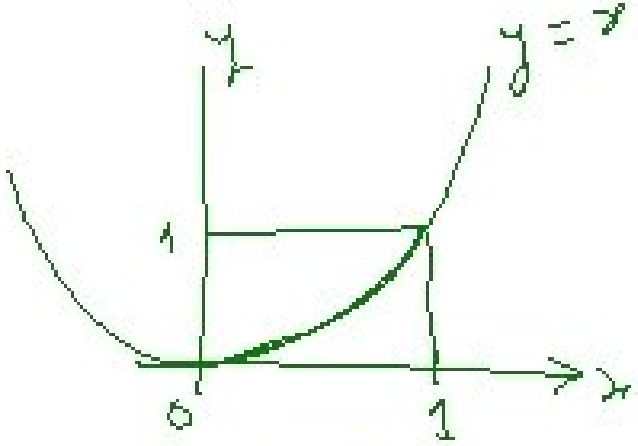
Error $\leq \overline{S}_n - \underline{S}_n$

Sigue ejemplo

Estimar por exceso y por defecto el valor (real) de

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

y dar una cota para el error de estimación.



$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\inf_i f)(\Delta x_i)$$

$x_{i+1} - x_i$

f continua $\Rightarrow \inf_i f = \min\{f(x) : x \in [x_i ; x_{i+1}]\}$

f creciente $\Rightarrow \inf_i f = f(x_i) = x_i^2$

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 (\Delta x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$x_1 = a = 0 ; \; x_2 = \frac{1}{n} ; \; x_3 = 2/n ; \; \ldots ; \; x_i = \frac{i-1}{n} ; \; \ldots ; \; x_{n+1} = 1 = b$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2\right)$$

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

$\underline{S_n} \leq I \leq \overline{S_n}$ $\quad \underline{S_n} \to I$ $\quad \overline{S_n} \to I$

Elijo, por ejemplo, $n=5$, $\overline{S_5} = \frac{1}{125}(1+4+9+16+25) = 0{,}44$

$$\underline{S_5} = \frac{1}{125}(0+1+4+9+16) = 0{,}24$$

$$0{,}24 \leq I \leq 0{,}44$$

0,24: estimación por defecto

0,44: estimación por exceso

Error $\leq 0{,}44 - 0{,}24 = 0{,}20$

Conclusión $I \simeq 0{,}34 \pm 0{,}10$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2\right)$$

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

$$\underline{S_n} \leq I \leq \overline{S_n} \qquad \underline{S_n} \to I \qquad \overline{S_n} \to I$$

Elijo, por ejemplo, $n = 10$, $\overline{S}_{10} = \frac{1}{1000}(1 + 4 + 9 + \ldots + 100) = 0{,}382$

$$\underline{S}_{10} = \frac{1}{1000}(0 + 1 + 4 + 9 + \ldots + 81) = 0{,}282$$

$$0{,}282 \leq I \leq 0{,}382$$

0,282: estimación por defecto

0,382: estimación por exceso

$$\text{Error} < 0{,}382 - 0{,}282 = 0{,}10$$

Conclusión: $I \approx 0{,}332 \pm 0{,}05$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$

Veremos (clases 45 a 48) Regla de Barrow
Teor. fundamental del cálculo integral

Adelanto: De la regla de Barrow en particular si $f(x) = x^p$ (p natural) si $a < b$ reales, entonces

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

NOTACIÓN que indica lo siguiente:

$$\left[G(x)\right]_{x=a}^{x=b} \overset{\text{NOTAC}}{=} G(b) - G(a)$$

Ejemplo Demostrar que existe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(7 + \frac{4}{n} j\right)^3$$

y calcularlo.

Sugerencia Considerar apropiadamente

de $\int_7^{11} x^3\,dx$ con sumas de Riemann superiores

en particiones Π_n con n subintervalos iguales

$[7,11]$ $\quad \Delta x_i = \frac{11-7}{n} = \frac{4}{n}$

$x_1 = 7$, $x_2 = 7 + \frac{4}{n}$, $x_3 = 7 + 2\cdot\frac{4}{n}$, $\ldots$, $x_i = 7 + (i-1)\frac{4}{n}$

$x_{n+1} = 11 = 7 + n\cdot\frac{4}{n}$ $\quad$ y $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f)\,\Delta x_i$

$f(x) = x^3$ es $\uparrow$ $\Rightarrow$ $f(x_{i+1})$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \left(7 + i\,\frac{4}{n}\right)^3 \cdot \frac{4}{n} = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(7 + i\,\frac{4}{n}\right)^3$$

La sucesión dada era $a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(7 + j \cdot \frac{4}{n}\right)^3$

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(7 + j \cdot \frac{4}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \overline{S}_n$$

Teo de conv. de sumas de Riemann $\overline{S}_n \longrightarrow I = \int_7^{11} x^3\,dx$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim a_n \text{ existe}}$ y es $\lim a_n = \frac{1}{4} \lim \overline{S}_n = \frac{1}{4} \cdot I$

Para calcular $\lim a_n$, tendríamos que tener el valor exacto de $I = \int_7^{11} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{x=7}^{x=11} =$ (regla de Barrow)

$= \frac{11^4}{4} - \frac{7^4}{4} = 3060$ $\boxed{I = 3060}$

$\lim a_n = \frac{I}{4} = \frac{3060}{4} = \boxed{765}$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 30 del año 2003

Definición: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

" f es integrable Riemann en $[a,b]$ " si

$$\underline{I} = \overline{I} \quad \text{donde}$$

$\underline{I} = \sup\{$sumas de Riemann inferiores $\underline{S}_n$ de f en $[a,b]\}$

$\overline{I} = \inf\{$sumas de Riemann superiores $\overline{S}_m$ de f en $[a,b]\}$

Al valor común de $\underline{I}=\overline{I}$ se le llama "integral de f en $[a,b]$" y se le denota como $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

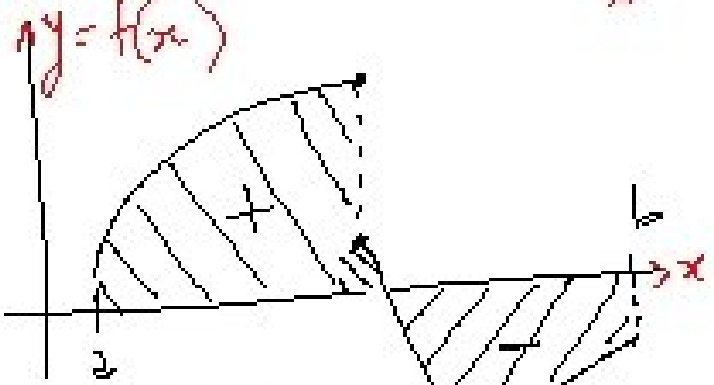
Recordar $\underline{S}_n \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_m$

$\underline{I} < \overline{I}$ f NO es integ.

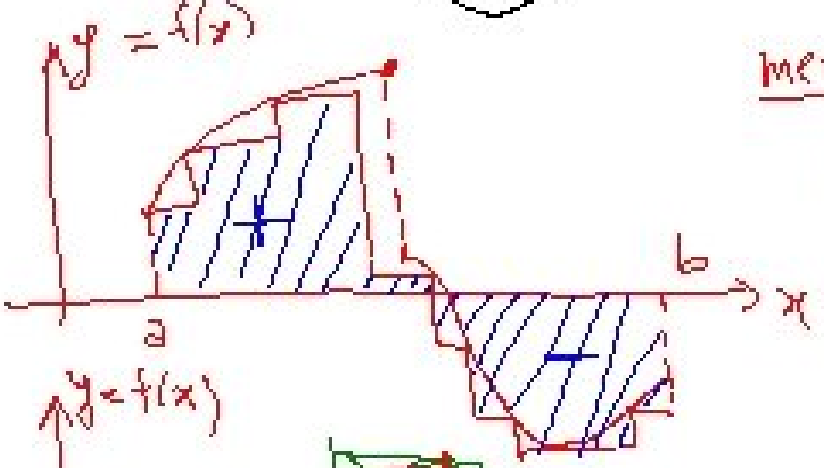
$\underline{I} = \overline{I}$ f es "

Recordar interpretación $I = \int_a^b f(x)\,dx$ es la suma algebraica de las áreas abajo de la gráfica de f donde $f \geq 0$

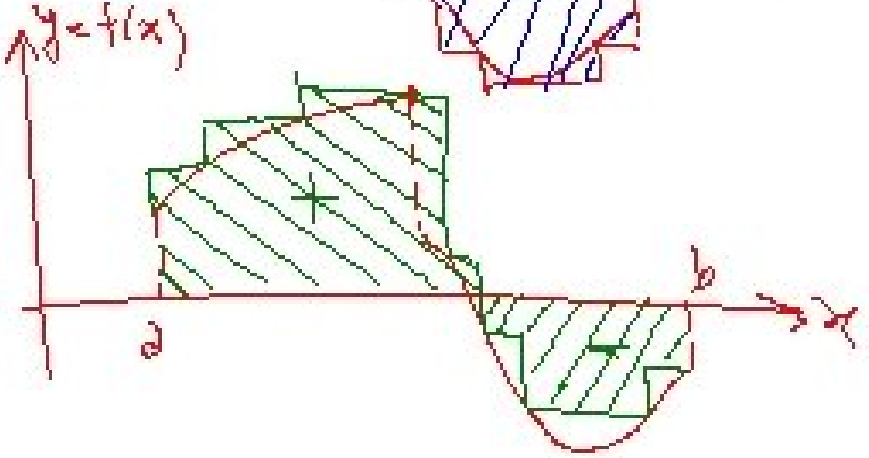
menos áreas arriba de la gráfica de f donde $f \leq 0$.



I



$\underline{S_n} \leq I$



$\overline{S_n} \geq I$

Ejemplos de func integrables Riemann :

(1) Teor. de conv. de sumas de Riemann para f CONTINUA

(ya visto) f cont. en $[a,b] \Rightarrow$ f integr de Riemann en $[a,b]$

(2) **Teor. de converg de sumas de Riemann para f. monótonas**

f MONÓTONA en $[a,b] \Rightarrow$ f es integr Riemann en $[a,b]$
(aunque no sea continua)

Dem. Recordar $\underline{S}_n \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{S}_n$

Probar que $\underline{I} = \overline{I}$

Sea π_n partición de $[a,b]$ en n subintervalos iguales

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$; $\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f) \frac{b-a}{n}$

$\underline{S}_n = \quad " \quad (\inf_i f) \quad "$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_i f - \inf_i f \right)$$

1) f monótona en $[a,b]$ $\begin{cases} \text{creciente} & f(x_i) \le f(x) \le f(x_{i+1}) \\ \text{decreciente} & \text{"} \ge \text{"} \ge \text{"} \end{cases}$ $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

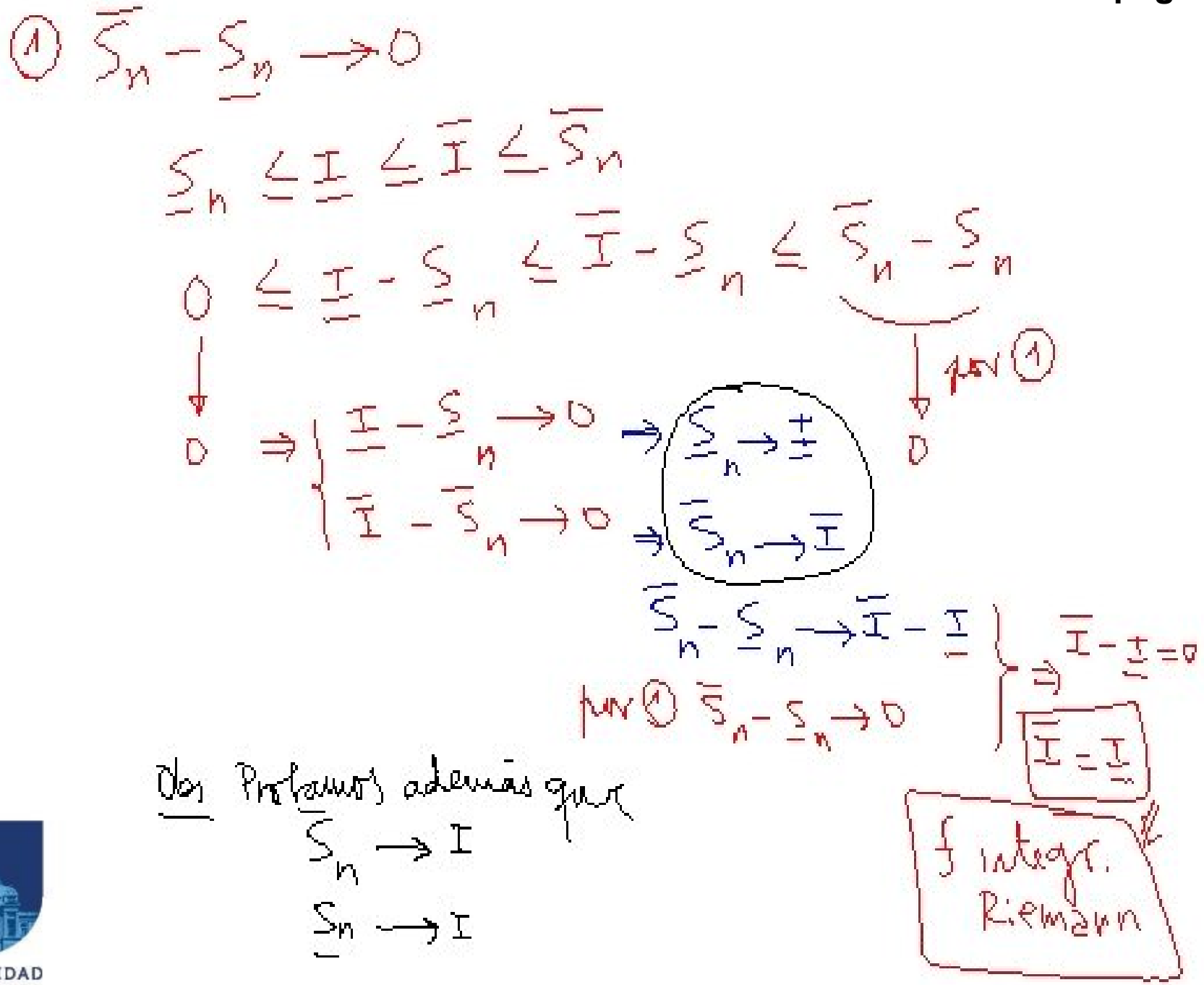
Si f es creciente en $[a,b]$: $\begin{cases} \sup_i f = f(x_{i+1}) \\ \inf_i f = f(x_i) \end{cases}$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left(-f(x_1) + f(x_2) - f(x_2) + f(x_3) \dots \right.$$

$$\left. \dots - f(x_n) + f(x_{n+1}) \right) = f(\underbrace{x_{n+1}}_{b}) - f(\underbrace{x_1}_{a})$$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a) \right) \to 0$$

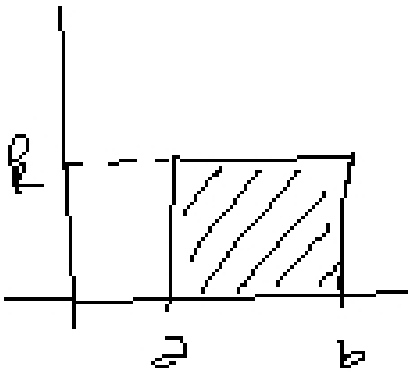

① $\overline{S}_n - \underline{S}_n \to 0$
$\underline{S}_n \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_n$
$0 \le \underline{I} - \underline{S}_n \le \overline{I} - \underline{S}_n \le \overline{S}_n - \underline{S}_n$
$0 \to 0$
por ①
$0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{I} - \underline{S}_n \to 0 \\ \overline{I} - \overline{S}_n \to 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \underline{S}_n \to \pm$
$\Rightarrow \overline{S}_n \to \overline{I}$
$\overline{S}_n - \underline{S}_n \to \overline{I} - \underline{I}$
por ① $\overline{S}_n - \underline{S}_n \to 0$
$\Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0$
$\overline{I} = \underline{I}$
f integr. Riemann
Obs Probamos además que
$\underline{S}_n \to I$
$\overline{S}_n \to I$

Funciones ctes – integral $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

En efecto

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\inf_i f)\,\Delta x_i = k \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k(b-a)$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} (\sup_i f)\,\Delta x_i = k(b-a)$$



$\sup_i f \le k$

$$\underline{S}_n = k(b-a) \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{S}_n = k(b-a)$$

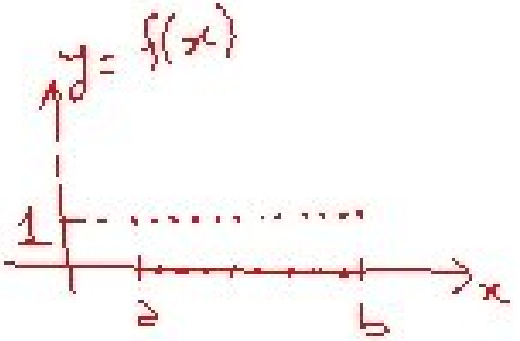
$$k(b-a) \le \underline{I} \le \overline{I} \le k(b-a)$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = k(b-a)$$

Ejemplo de función no integr. Riemann en $[a,b]$

Sea $[a,b]$ $a<b$ reales

Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional en } [a,b] \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional en } [a,b] \end{cases}$



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\inf_i f)\,\Delta x_i = 0\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\right) = 0$$

0 en cualquier subintervalo de π_n (de long >0) de $[a,b]$

Toda suma de Riemann superior es $\geq b-a$

$\overline{I} = \inf\{\text{sumas de Riemann superiores}\} \geq b-a$

Toda suma de Riemann inferior es $=0$

$\underline{I} = \sup\{\text{sumas de Riem inferiores}\} = 0$

como $b-a \neq 0$, $\overline{I} \neq \underline{I}$ $\therefore$ no es integ. Riem

Definición 1

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice que es "CONTINUA A TROZOS"

Si $\exists$ una cantidad finita de puntos en $[a,b]$

$$a=x_1<x_2<x_3<\dots<x_p<x_{p+1}=b$$

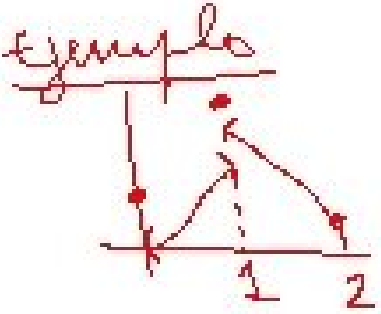
tal que

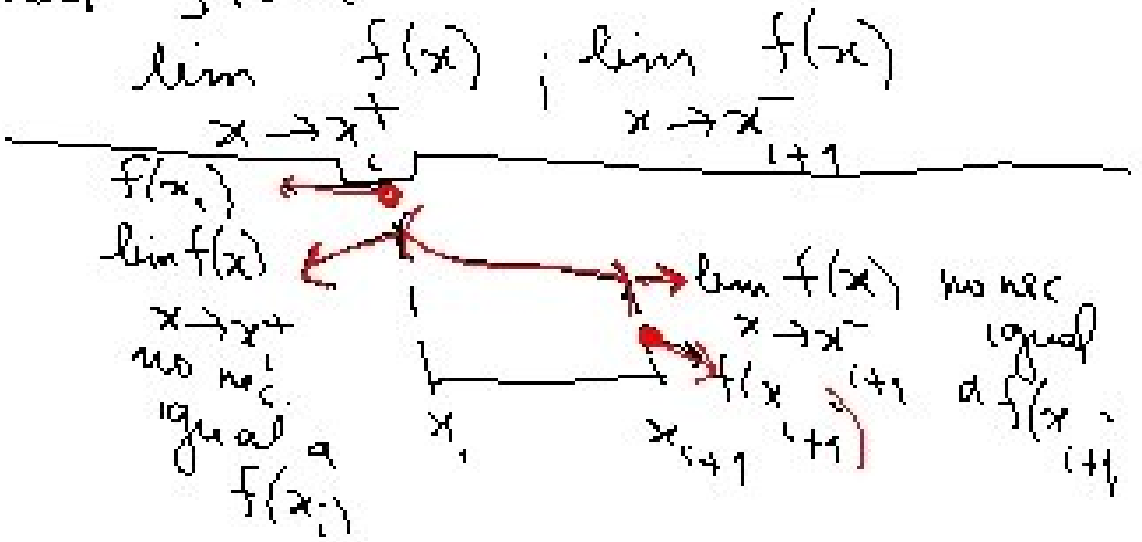
- f es CONTINUA en (x_i, x_{i+1}) "entera" para $i=1,2,\dots,p$
- $\exists$ límites laterales de $f(x)$ en cada "trozo"

es decir $\exists$ real

$$\lim_{x\to x_i^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to x_{i+1}^-} f(x)$$

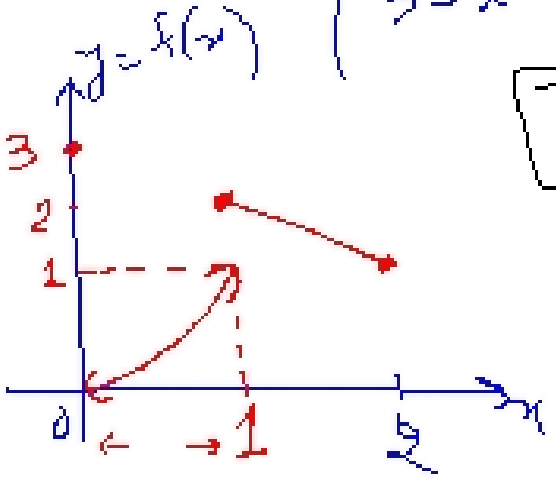
ejemplo





Ejemplo de Func. continua a trozos en $[0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Teorema Si f es continua a trozos en $[a,b]$ entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx$ es = la suma de las integrales de f en c/u de los "trozos"

(subintervalos en cuyo interior f es CONTINUA)

Ej $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (3-x)\,dx$

Definición f es función escalonada (o escalonada a trozos) en $[a,b]$

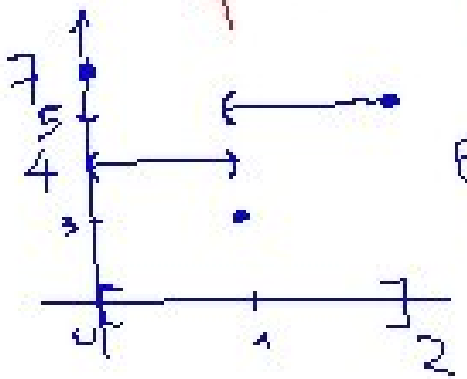
$\Leftrightarrow \exists$ una cantidad finita de puntos en $[a,b]$

$a = x_1 < x_2 < \dots < x_p < x_{p+1} = b$

tal que $f(x) = k_i$ de en cada i-ésimo

$\forall x \in (x_i, x_{i+1})$

intervalo del subintervalo



Ejemplo $f(x)$ escalonada en $[0,2]$ definida por

$$\begin{cases} 7 & \text{si } x = 0 \\ 4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 5 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Obs Toda función escalonada es CONTINUA a trozos

Corolario Toda función escalonada es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) + \dots + k_p(x_{p+1} - x_p)$

Teorema

① Aditividad de $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto del intervalo $[a,b]$

Si $a<b<c$ reales

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ integ en } [a,b] \\ f \text{ integ en } [b,c] \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integrable en } [a,c]$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

② Linealidad de $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto de $f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ integ en } [a,b] \\ g \text{ " " } [a,b] \\ \lambda \text{ real fja} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f+g$ es integ en $[a,b]$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

λf es integrable en $[a,b]$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Ejemplo

$f(x)$ en $[0,2]$ definida así $\begin{cases} 4 & \text{si } x=0 \\ x^2 & \text{si } 0<x<1 \\ 3-x & \text{si } 1\le x\le 2 \end{cases}$

$$I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$$

después veremos que $\int_a^b f(x)\,dx$ no cambia si se modifica $f(x)$ en los extremos $x=a$, $x=b$

$$I=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 (3-x)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}+$$

$$+\int_1^2 3\,dx-\int_1^2 x\,dx=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}+3(2-1)-\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}\right)$$

$$\boxed{I=11/6}$$

Dem. del teor. de aditividad de $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto al intervalo (a,b)

$a<b<c$

Por hipótesis $\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = I_a^b \text{ existe} \\ \int_b^c f(x)\,dx = I_b^c \text{ existe} \end{cases}$

Por def $I_a^b = \sup\{\underline{S}_n[a,b]\} = \inf\{\overline{S}_n[a,b]\}$

Dado $\varepsilon>0$ $\exists$ partición π_n de $[a,b]$ t.q. $I_a^b - \varepsilon < \underline{S}_n[a,b]$

idem para I_b^c; $\exists\ \pi_m$ de $[b,c]$ t.q. $I_b^c - \varepsilon < \underline{S}_m[b,c]$

por def. de supremos, $\sup\{_\} - \varepsilon$ no es cota superior del $\inf\{_\}$

$$I_a^b + I_b^c - 2\varepsilon < \underbrace{\underline{S}_n[a,b] + \underline{S}_m[b,c]}_{\text{Suma de Rem. inferior de } f \text{ en } [a,c], \text{ uniendo } \pi_n \text{ con } \pi_m} \leq \underline{S}_{n+m}[a,c]$$

Conclusión hasta ahora

Dado $\varepsilon > 0$, existe una Suma de Riemann $\underset{n+m}{S}_{[a,c]}$ de f en $[a,c]$ tal que

$$I_a^b + I_b^c - 2\varepsilon < \underset{n+m}{S}_{[a,c]} \leq \sup \left\{ \begin{array}{l} \text{sumas de Riemann} \\ \text{inferiores de } f \\ \text{en } [a,c] \end{array} \right\} = I_a^c$$

$\forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{I_a^b + I_b^c \leq I_a^c} \quad (1)$$

Idem repetir para Sum. de Riemann superiores sustituyendo $\sup$ por $\leq$ $\inf$ por $\geq$

$$I_a^b + I_b^c \geq \overline{I}_a^c \quad (2)$$

(1) (2) $\Rightarrow$

$$I_a^b + I_b^c \leq I_a^c \leq \overline{I}_a^c \leq I_a^b + I_b^c$$

siempre

luego $\underline{\underline{I}}_a^c = \overline{\overline{I}}_a^c = I_a^b + I_b^c$

$\Downarrow$

f es integ. Riemann en $[a,c]$

y además $\int_a^c f(x)\,dx = I_a^b + I_b^c$

Q.E.D

La dem del teor. de linealidad de $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto de f usa ideas similares a la dem. anterior.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 45 del año 2003

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dada

DEF "FUNCIÓN PRIMITIVA o ANTIDERIVADA $F(x)$ de $f(x)$" (si existe), es una función $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivada y tal que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Ejemplos

Tabla de primitivas

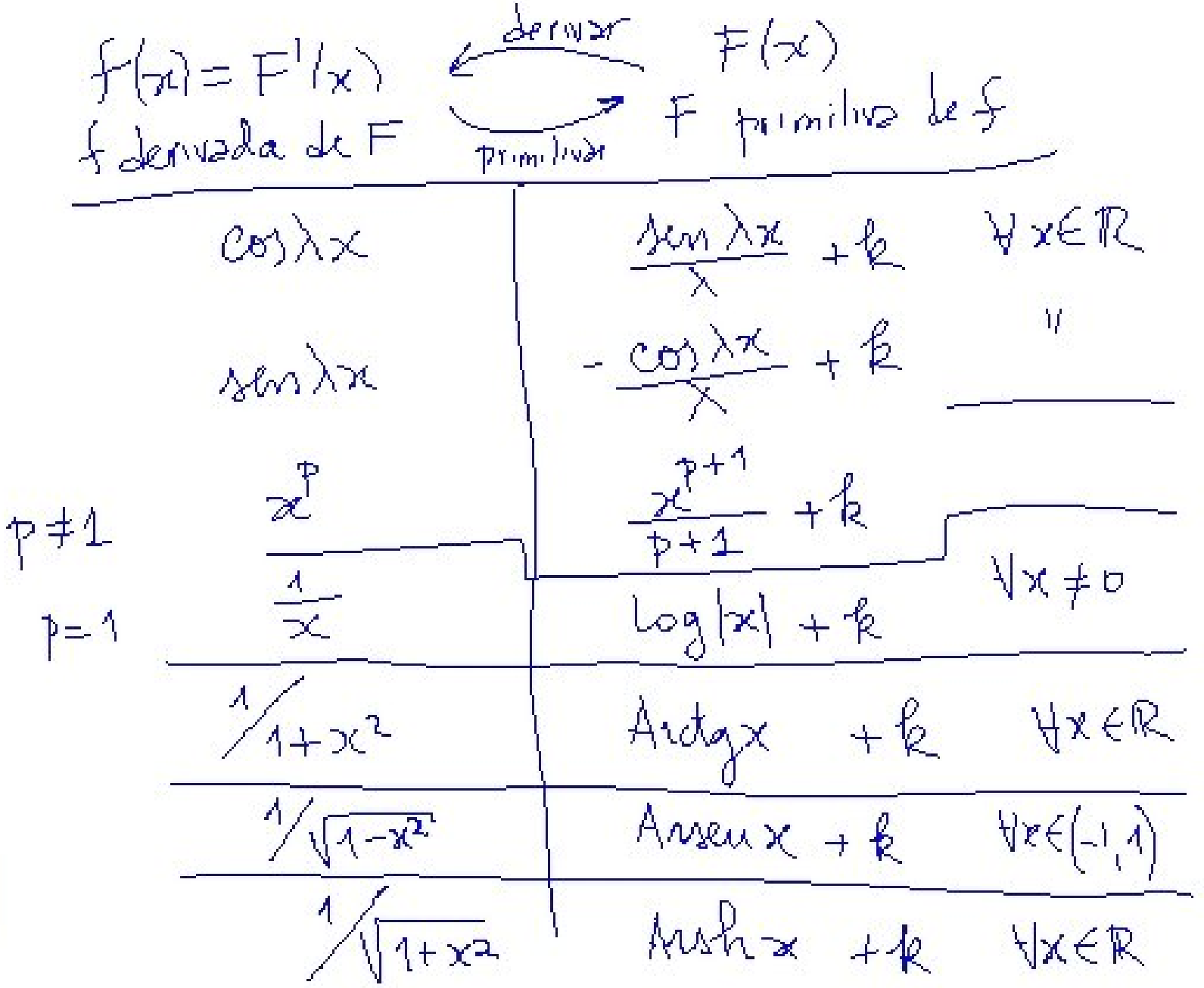
$f(x) = F'(x)$

f derivada de F

$F(x)$

F primitiva de f

e^x	$e^x + k$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} + k$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + k$	"
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + k$	"


f(x) = F'(x)
f derivada de F
derivar
primitivar
F(x)
F primitiva de f
cos λx
sen λx / λ + k
∀ x ∈ ℝ
sen λx
-cos λx / λ + k
=
x^p
x^{p+1} / (p+1) + k
p ≠ -1
1/x
p = -1
log|x| + k
∀ x ≠ 0
1/(1+x²)
Arctg x + k
∀ x ∈ ℝ
1/√(1-x²)
Arsen x + k
∀ x ∈ (-1,1)
1/√(1+x²)
Arsh x + k
∀ x ∈ ℝ

Propiedades de la Primitivación

① Linealidad

F_1 es primitiva de f_1
F_2 " " " f_2
$\Rightarrow$ (F_1+F_2 es primitiva de f_1+f_2)
(λF_1 es primitiva de λf_1 ($\forall \lambda$ real fijo))

Dem inmediata

$$(F_1+F_2)' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$$

$$(\lambda F_1)' = \lambda (F_1)' = \lambda f_1$$

② Si $F_1(x)$ es primitiva de $f_1(x)$
entonces $F_1(x-q)$ es primitiva de $f_1(x-q)$

Dem $\frac{d}{dx}\left(F_1(x-q)\right) = \frac{d}{du}\left(F_1(u)\right) \cdot \frac{du}{dx}$ donde $u = x-q$

$f_1(u) = f_1(x-q)$

Ejemplo

Hallar primitiva $F(x)$ de

$$f(x) = 7(x-3)^2 - 2x^4 + 5$$

Sabemos que primitiva de x^p es $\frac{x^{p+1}}{p+1} + k$

$$F(x) = 7\frac{(x-3)^3}{3} - 2\frac{x^5}{5} + 5x + k$$

k constante arbitraria

Ejemplo

Hallar primitiva $F(x)$ de

$$f(x) = 7(x-3)^2 - 2x^4 + 5$$

Sabemos que primitiva de x^p es $\frac{x^{p+1}}{p+1} + k$

$$F(x) = 7\frac{(x-3)^3}{3} - 2\frac{x^5}{5} + 5x + k$$

↘ de ambi

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPOSICIÓN

1) Si F_1 es una primitiva de $f(x)$ entonces $F_2(x) \overset{\text{def}}{=} F_1(x) + k$, (donde k cte real arbitraria) también es primitiva de $f(x)$

Dem $F_2' = (F_1 + k)' = F_1' = f$

2) Si F_1 y F_2 son primitivas de una misma $f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ entonces $F_2(x) = F_1(x) + k$ donde k es una cte real

(Obs. 1) y 2) $\Rightarrow$ Si $\exists$ alguna primitiva F_1 de f dada, entonces $\exists$ infinitas primitivas de f, y todas las primitivas de f son $F_1 + k$ con k cte real arbitraria

Dem de 2: $\text{hip} \begin{cases} F_1' = f \\ F_2' = f \end{cases} \Rightarrow (F_2 - F_1)' = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Hay que probar que $F_2 - F_1 = k$ de $\forall x \in (a,b)$

Usar el siguiente

COROLARIO del TEOR. del VALOR MEDIO del CÁLC. DIFERENC
(Teor. de Lagrange)

Si $G(x)$ es una función derivable $\forall x \in (a,b)$
y tal que $G'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$
entonces $G(x) = k$ de $\forall x \in (a,b)$

Dem del corolario. Elijo $c \in (a,b)$
llamo $k = G(c)$. Probar que $\forall x \in (a,b) : G(x) = k$.
Por absurdo, suponemos que $\exists\ d \in (a,b)$
tal que $G(d) \neq k$ Teo de Lagrange: entre d y c $\exists$
un punto ξ tal que $G'(\xi) = [G(d) - G(c)]/(d-c)$

Como $G(c) = k \neq G(d)$

resulta $G'(\xi) = \dfrac{G(d) - G(c)}{d - c} \neq 0$

Encontramos $\xi \in (a,b)$ tal que

$G'(\xi) \neq 0$

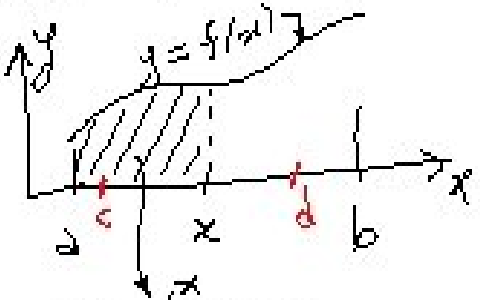
contradice hipotesis

$G'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Teorema fundamental del cálculo integral

Hipótesis Si f es CONTINUA en $[a,b]$ entonces:

Tesis (1) existen primitivas de f en (a,b) y todas ellas son $I(x)+k$, con k cte arbitraria, siendo $I(x)$ función definida como $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $\forall x\in[a,b]$



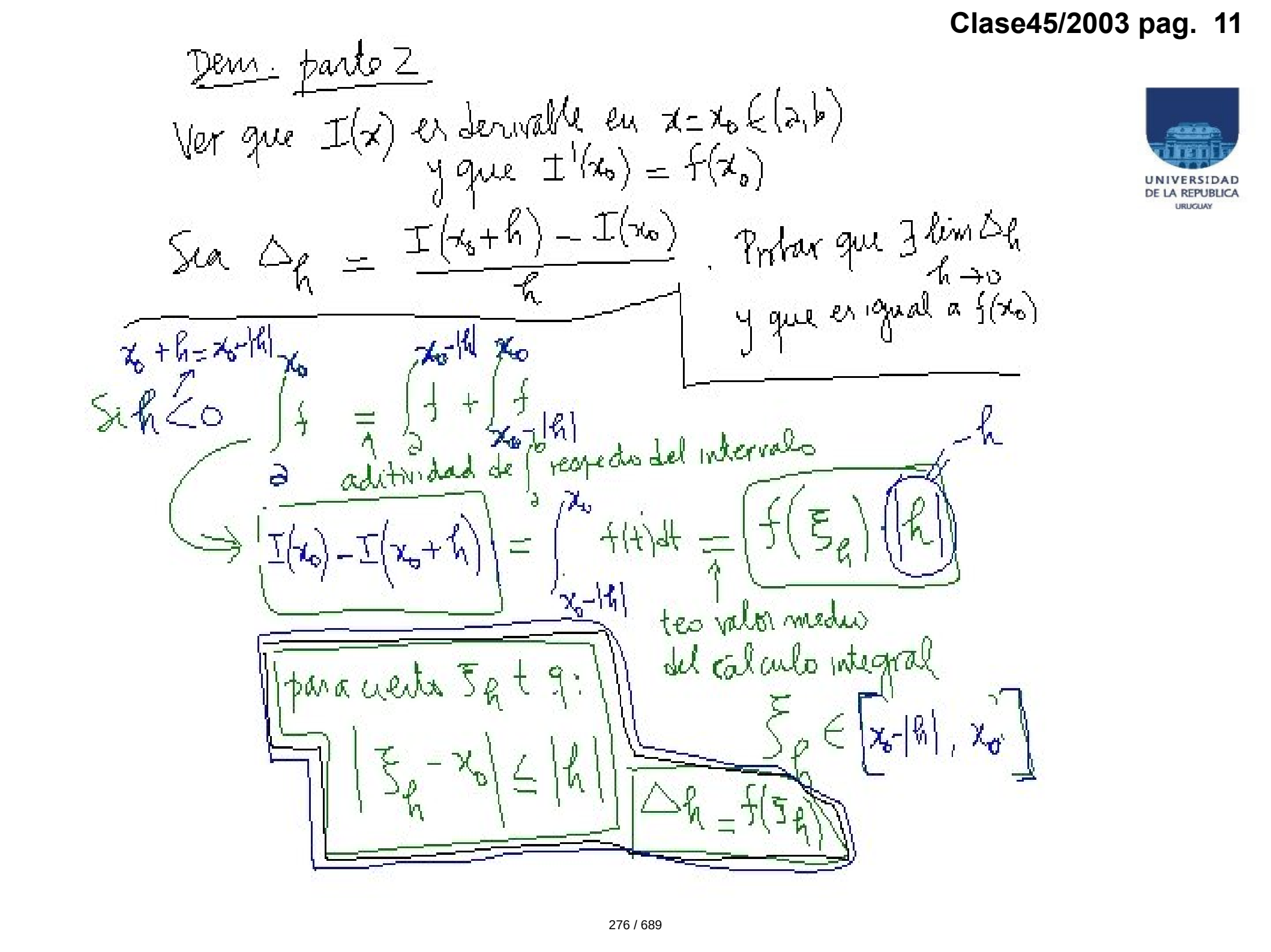
(2) $I'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$

Sean $c<d$ en (a,b)

(3) Regla de Barrow: Si $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$ en (a,b) entonces,

$$\int_c^d f(x)\,dx=\left(F(x)\Big|_{x=c}^{x=d}\right)=F(d)-F(c)$$

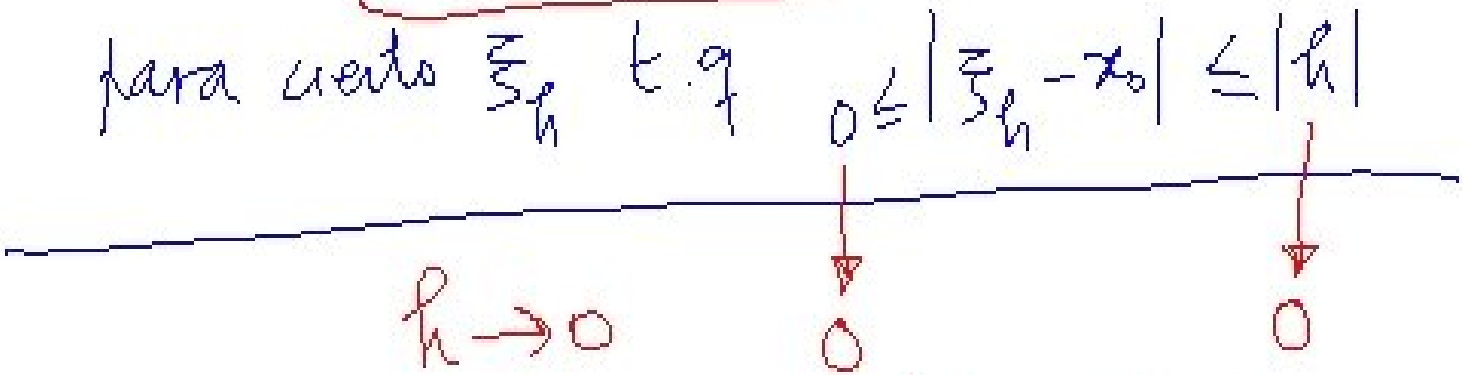
NOTACIÓN que induce


Dem. parte 2
Ver que $I(x)$ es derivable en $x = x_0 \in (a,b)$
y que $I'(x_0) = f(x_0)$
Sea $\Delta_h = \frac{I(x_0+h) - I(x_0)}{h}$. Probar que $\exists \lim_{h \to 0} \Delta_h$
y que es igual a $f(x_0)$
$x_0 + h = x_0 - |h|$
Si $h < 0$
$\int_a^{x_0} f = \int_a^{x_0-|h|} f + \int_{x_0-|h|}^{x_0} f$
aditividad de
respecto del intervalo
$I(x_0) - I(x_0+h) = \int_{x_0-|h|}^{x_0} f(t)dt = f(\xi_h)\cdot|h|$
$-h$
teo valor medio del calculo integral
$\xi_h \in [x_0-|h|, x_0]$
para cierta ξ_h tq:
$|\xi_h - x_0| \leq |h|$
$\Delta_h = f(\xi_h)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Si $h \neq 0$ $\boxed{\Delta_h = f(\xi_h)}$

para cierto ξ_h t.q. $0 \leq |\xi_h - x_0| \leq |h|$



$\Rightarrow |\xi_h - x_0| \to 0$ ($h \to 0$)

f CONTINUA, $\xi_h \to x_0$ ($h \to 0$) $\Rightarrow \boxed{f(\xi_h) \to f(x_0)}$ ($h \to 0$)

$\Delta_h \to f(x_0)$ ($h \to 0$) o sea $I'(x_0)$ existe y es $= f(x_0)$

QED

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem de parte 1)

Por (2) $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene como primitiva a $I(x)$ $\forall x \in (a,b)$

luego $f(x)$ tiene infinitas primitivas

y todas ellas son $I(x) + k$ → de real cualquiera

Dem de parte 3) (Regla de Barrow)

Teo. de aditividad respecto intervalo

$$\int_a^d f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

$a < c < d < b$

$$\int_c^d f(t)\,dt = I(d) - I(c)$$

$I(c) = F(c) + k$ $\quad$ $I(d) = F(d) + k$

$= F(d) + k - (F(c) + k)$ → cte real

A) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow I(x) = F(x) + k$ $\forall x \in (a,b)$

Por (2) $I(x)$ " " $\Rightarrow \int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c)$ QED.

Ejemplos de uso del teo. fund. del cálculo

1º) NOTACIÓN de LEIBNITZ (Para f CONTINUA en $[a,b]$)

"$F(x)$ primitiva de $f(x)$" se denota como

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Regla de Barrow dice:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}$$

2º) Cálculo de integrales

Teo. fund del cálculo: TABLA de PRIMITIVAS

" " INTEGRALES.

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{Arctg}\,x\Big|_{x=0}^{x=1} = \text{Arctg}\,1 - \text{Arctg}\,0 = \pi/4$$

Otros ejemplos

Si $p \neq -1$ $\quad \int_a^b x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\Big|_{x=1}^{x=e^2} = 2\underbrace{\log e}_{=1} - \underbrace{\log 1}_{=0} = 2$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{Arcsen}\,x\Big|_{x=0}^{x=1/2} = \text{Arcsen}\,\frac{1}{2} - \underbrace{\text{Arcsen}\,0}_{=0}$$

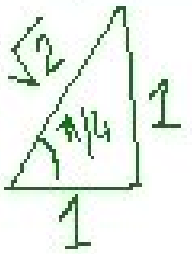
$= \pi/6$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}\,\pi/6 = 1/2$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

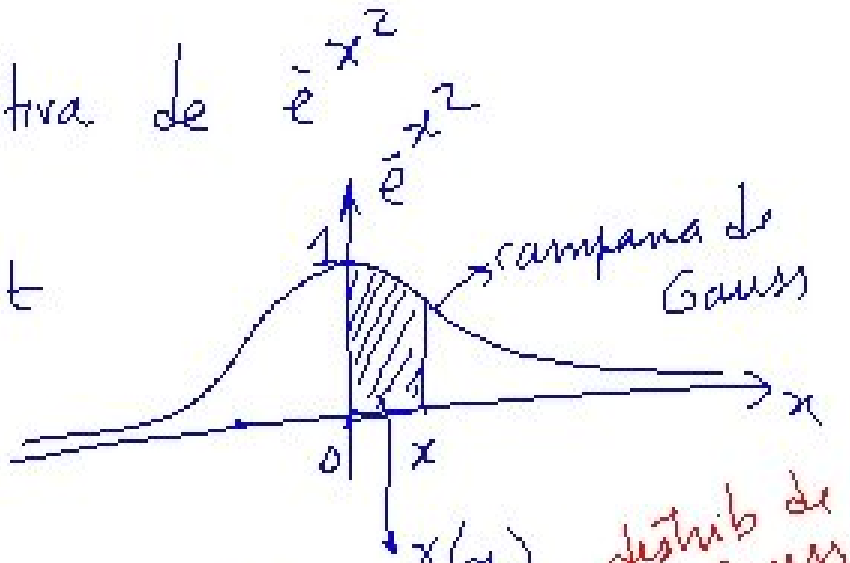


$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$e^{-x^2}dx$ primitiva de e^{-x^2}

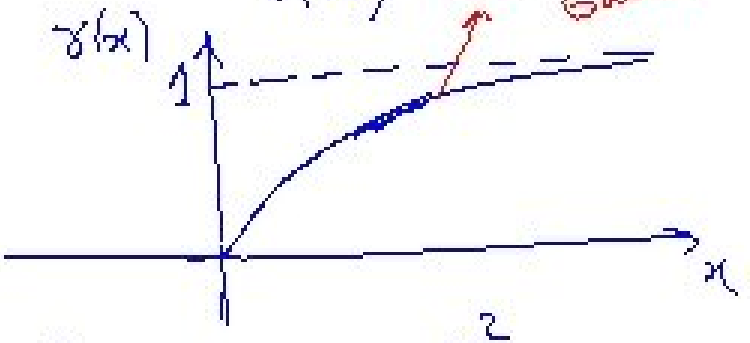
$$\gamma(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$



$\gamma(x)$ "función de distribución de Gauss"

Se puede probar que es "trascendente"

(No ∃ "fórmula" que exprese $\gamma(x)$ usando solo operaciones $+, \cdot, -, /$, exponenciales, logaritmos, trigon e hiperbólicas)



$\gamma'(x) = e^{-x^2} > 0$

γ creciente

$\gamma''(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ si $x > 0$

Cálculo de derivadas

Teo fund. cálculo (2)

Ejemplos

1) $$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t^2}\operatorname{sen} t\,dt\right) = e^{-x^2}\operatorname{sen} x$$

2) $$\frac{d}{dx}\left(\int_6^{x^3+2x^2+1}\left(e^{-t^2}\operatorname{sen} t\right)dt\right) = \frac{d}{du}\left[\int_0^u e^{-t^2}\operatorname{sen} t\,dt\right]\cdot\frac{d}{dx}u(x)$$

$u(x) = x^3+2x^2+1$

Teo derivada de fun. compuesta

$$= \left(e^{-u^2}\operatorname{sen} u\right)\cdot\left(3x^2+4x\right) = \left[e^{-(x^3+2x^2+1)^2}\operatorname{sen}\left(x^3+2x^2+1\right)\right]\left(3x^2+4x\right)$$

Teo fund del cálculo

Teorema (Corolario del teo f. de cálculo)

Si f es continua en $[a,b]$ entonces $\forall x \in (a,b)$ $(a<x<d<b)$ se cumple

$$\frac{d}{dx}\int_x^d f(t)\,dt = -f(x)$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^{10} \cos^2(3t+7)\,dt\right] = -\cos^2(3x+7)$$

Dem. f CONTINUA $\Rightarrow \exists$ primitivas, $F(x)$ de $f(x)$

Teo Fund. Cálculo parte 1

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Regla Barrow

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^d f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[F(d) - F(x)\right] = -F'(x) = -f(x)$$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 46 del año 2003

FUNCIÓN INTEGRAL o "INTEGRAL INDEFINIDA"

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable Riemann

Sean $c,d\in[a,b]$ $(a<b)$

CONVENCIÓN

Si $c<d$ $\int_c^d f(t)\,dt$ indica INTEGRAL DEFINIDA de f en el intervalo $[c,d]$

Si $c=d$ $\int_c^c f(t)\,dt$ se define $=0$.

Si $c>d$ $\int_c^d f(t)\,dt$ INDICA $-$ INTEGRAL DEFINIDA MENOS de f en el intervalo $[d,c]$

Definición Fijado $c\in[a,b]$, se llama función integral $I_c(x)$ de f, o (mal llamada) "INTEGRAL INDEFINIDA" de f a

$$I_c(x)\overset{\text{def}}{=}\int_c^x f(t)\,dt \qquad \forall x\in[a,b]$$

Observaciones

1) $\int_c^d f(t)\,dt = -\int_d^c f(t)\,dt \qquad \forall c,d \in [a,b]$

ya sea $c < d$ o $c = d$ o $d < c$

2) Si f es continua en $[a,b]$, y si $F(x)$ es una primitiva de f en (a,b), entonces

$$\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) \qquad \forall c,d \in (a,b)$$

ya sea $c < d$ o $c = d$ o $c > d$ (Regla de Barrow ya vista)

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad F'(x) = f(x)$$

(Por convención anterior)

Si f es continua

3) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)\,dt\right] = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$

ya sea $x > c$ o $x = c$ o $x < c$

pues: $I_c(x) = F(x) - F(c) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(I_c(x)) = F'(x) = f(x)$

4) f continua en $[a,b] \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^d f(t)\,dt\right] = -f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

$d \in (a,b)$ fijo

ya sea $x < d$ o $x = d$ o $x > d$

Pues

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_d^x f(t)\,dt\right] = -\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\int_d^x f(t)\,dt\right]}_{I_d(x)} = -f(x)$$

5) Sea $F(x)$ una función dada de clase C^1 en (a,b) (o sea $\exists\, F'(x)\ \forall x \in (a,b)$, y la función derivada $F'(x)$ es continua $\forall x \in (a,b)$)

Tesis

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,dt \qquad \forall x \in (a,b)$$

ya sea $x > c$, $x = c$ o $x < c$

$c \in (a,b)$ fijo

En efecto llamemos $f(t) = F'(t)$ (f es continua)

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x) - F(c) \Rightarrow \boxed{F(c) + \int_c^x F'(t)\,dt = F(x)}$$

Ejemplos Calcul

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x^3-2x}^{e^{3x}} \cos(t^2)\,dt\right] = U(x)$$

Sea c cualquier x fijo

$$U(x) = \int_{x^3-2x}^{c} \cos t^2\,dt + \int_{c}^{e^{3x}} \cos t^2\,dt$$

$$U(x) = \left(\int_{u}^{c} \cos t^2\,dt\right) \circ u(x) + \left(\int_{c}^{v} \cos t^2\,dt\right) \circ v(x)$$

$u = u(x) = x^3 - 2x$ $\qquad$ $v = v(x) = e^{3x}$

$$\frac{dU}{dx} = \left(-\cos u^2\right)\cdot\frac{du}{dx} + \left(\cos v^2\right)\cdot\frac{dv}{dx} =$$

$$= \left[-\cos(x^3-2x)^2\right]\cdot(3x^2-2) + \left[\cos e^{6x}\right]\cdot 3e^{3x}.$$

Obs

f integrable en $[\alpha,\beta]$

$\forall a,b,c \in [\alpha,\beta]$ (aunque no sea $a<b<c$) se cumple:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

(Aplicar las convenciones)

$$\int_a^b f = -\left(\int_b^a f\right)$$

Sea $F(x) = \operatorname{Arcsen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[2 \operatorname{Arcsen} x\right]$

para $-1 < x < 1$

F es de clase C^1

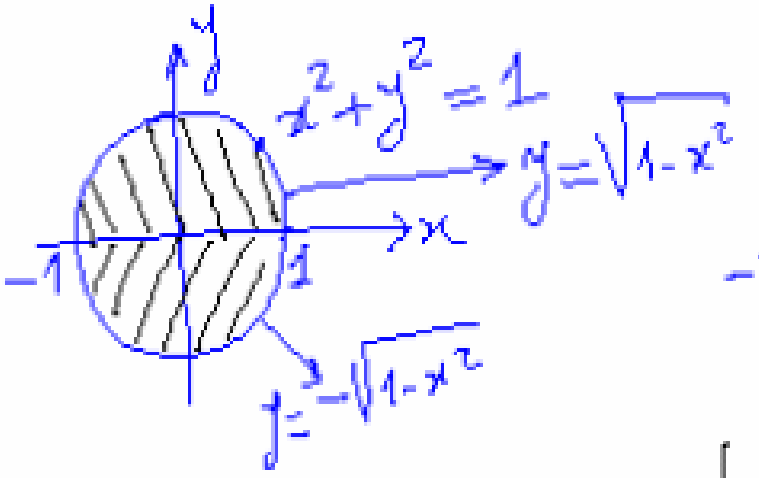
Calcular $\int_{-1}^{1} F'(x)\,dx$

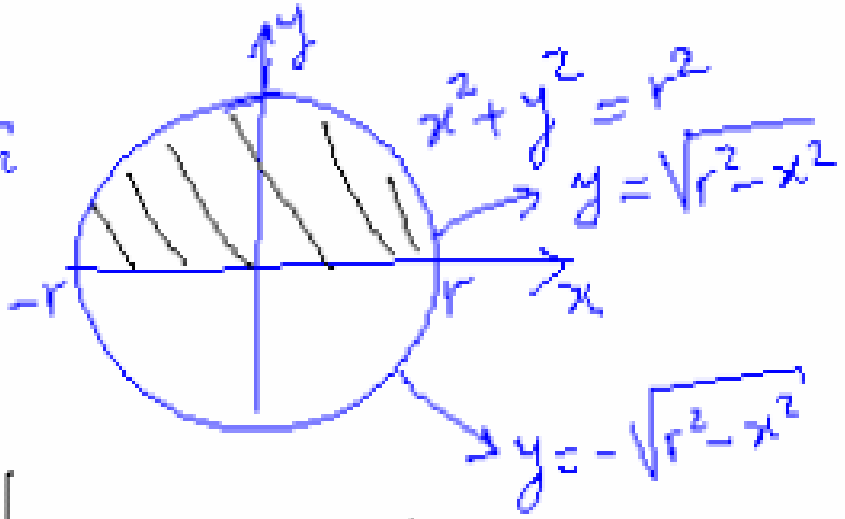
$$F'(x) = 2\sqrt{1-x^2}$$

$$F(1) - F(-1) = \underbrace{\operatorname{Arcsen} 1}_{\pi/2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[2 \underbrace{\operatorname{Arcsen} 1}_{\pi/2}\right] - \left(\underbrace{\operatorname{Arcsen}(-1)}_{-\pi/2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left[2 \underbrace{\operatorname{Arcsen}(-1)}_{-\pi/2}\right]\right).$$

$$\int_{-1}^{1} F'(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} = \pi$$





Teníamos que

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} = \pi$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} - \int_{-1}^{1} \left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \pi$$

Área círculo de radio 1

Área círculo de radio r

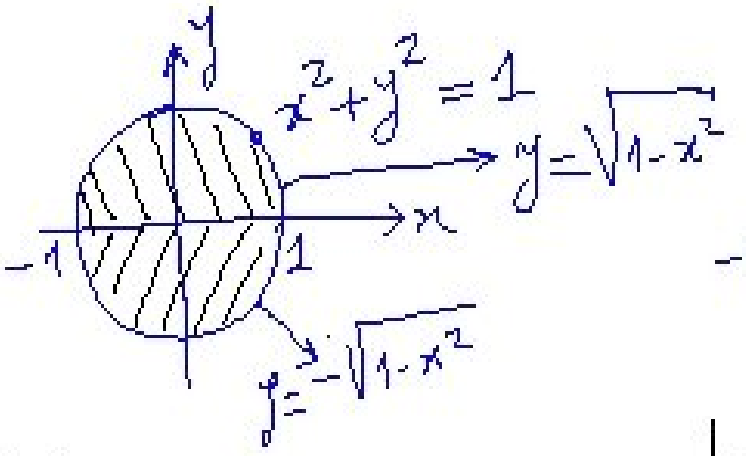
$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 2\left(F(r)-F(-r)\right)$$

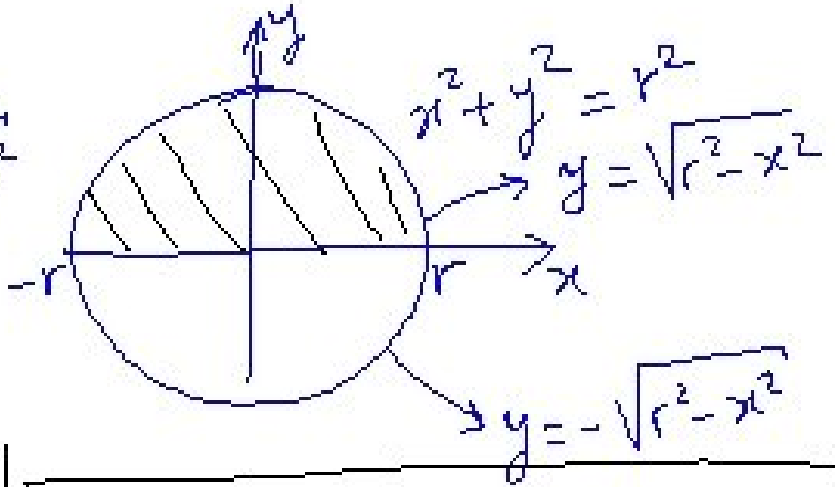
$\exists F(x)$ primitiva de $\sqrt{r^2-x^2}$

$$F'(x) = \sqrt{r^2-x^2}$$

Sea $G(t) = \frac{1}{r}F(rt) = \frac{F(x)}{r}$

$x = rt$





Teníamos que

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} = \pi$$

Área círculo de radio r

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\left[F(r)-F(-r)\right]$$

$\exists F(x)$ primitiva de $\sqrt{r^2-x^2}$

$$F'(x) = \sqrt{r^2-x^2}$$

Sea $G(t) = \frac{F(rt)}{r^2} = \frac{F(x)}{r^2}$ ($x = rt$)

$G(1) = \frac{F(r)}{r^2}$

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{r^2}\sqrt{r^2-x^2}\cdot r \quad (x = rt)$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{r^2-(rt)^2} = \frac{r}{r}\sqrt{1-t^2}$$

$G(t)$ es primitiva de $\sqrt{1-t^2}$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = G(1)-G(-1)$$

Teníamos

A_r = Área círculo de radio $r = 2\left[F(r) - F(-r)\right]$

$$G(1) = \frac{F(r)}{r^2} \qquad F(r) = r^2 G(1)$$

$$G(-1) = \frac{F(-r)}{r^2} \qquad F(-r) = r^2 G(-1)$$

$$\text{Área } A_r = 2r^2\left[G(1) - G(-1)\right]$$

Sabíamos que $\frac{\pi}{2} = G(1) - G(-1)$

$$\Rightarrow A_r = 2r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi r^2}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Teor (continuidad de la func integral (integral indef))

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann (aunque no sea continua)

entonces $I_c(x) \overset{\text{def}}{=} \int_c^x f(t)\,dt$ es CONTINUA $\forall x\in[a,b]$

c fijo $\in[a,b]$ (ya sea $x>c$, $x=c$, o $x<c$)

Dem Fijo $x_0\in[a,b]$

Probar que $I_c(x)\to I_c(x_0)$; o sea probar que

$|I_c(x)-I_c(x_0)|\to 0$?

$x\to x_0$

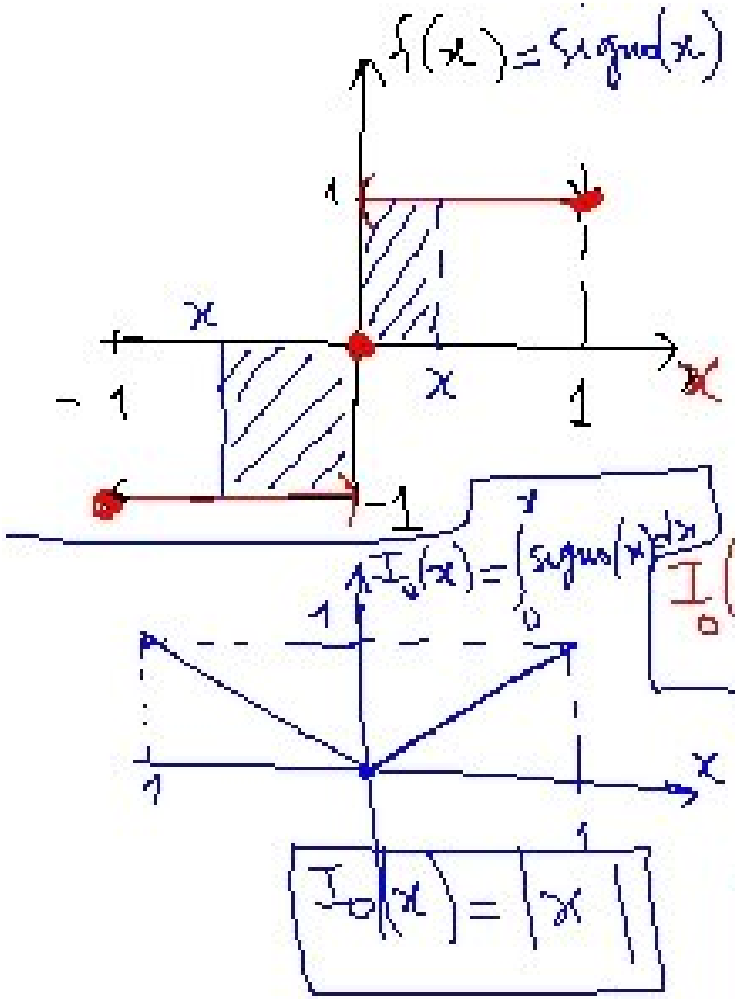
$|f|\le\beta$ cota superior de $|f|$

$$I_c(x)=\int_c^x f=\int_c^{x_0} f+\int_{x_0}^x f = I_c(x_0)+\int_{x_0}^x f$$

$$|I_c(x)-I_c(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f\,dx\right| \le \beta\cdot|x-x_0| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

Ejemplo

$f(x)$ en $[-1,1]$



$$f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encontrar la función integral

$$I_0(x) = F(x) = \int_0^x \text{signo}(x)\, dx$$

Graficarla

$I_0(x)$ continua $\forall x \in [-1,1]$

Por que es derivable $\begin{cases} \forall x \in [-1,0) \\ \forall x \in (0,1] \end{cases}$

y su derivada es signo(x)

$$I_0(x) = \int_0^x \text{signo}(t)\,dt =$$

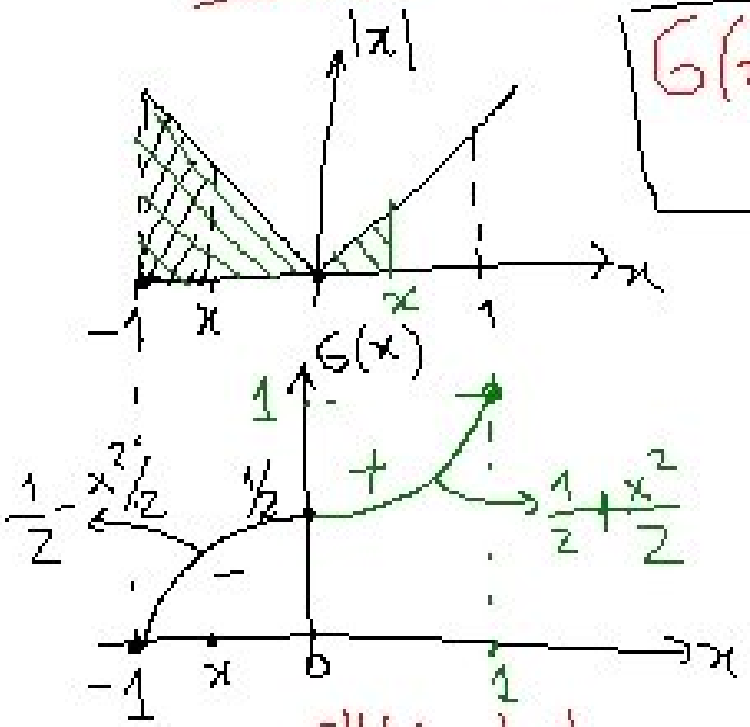
$$= \begin{cases} \text{si } x > 0 & I_0(x) = \int_0^x \underbrace{\text{signo}(t)}_{t \in (0,x]}\,dt = 1 \cdot (x-0) = x = |x| \\ & \text{signo}(t) = +1 \\ \text{si } x = 0 & I_0(x) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0 = |x| \\ \text{si } x < 0 & I_0(x) = \int_0^x \text{signo}(t)\,dt = -\int_x^0 \underbrace{\text{signo}(t)}_{-1}\,dt \\ & t \in [x,0] \end{cases}$$

$$= -\int_x^0 (-1)\,dt = -\left[(-1)(0-x)\right] = \underbrace{\forall t \in [x,0)}$$

$$= -x = |x|$$

Ejemplo Calcular y graficar la función integral

$$G(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt \qquad \forall x \in [-1, 1]$$



$|t|$ es CONTINUA, luego G está bien definida

$\Rightarrow G(x)$ es cont. y DERIVABLE

y $G'(x) = |x| \geq 0$

Si $x \leq 0$

$$G(x) = \int_{-1}^{x} (-t)\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big|_{t=-1}^{t=x} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

$$G(0) = \int_{-1}^{0} (-t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$

$$G(x) = \underbrace{\int_{-1}^{0} |t|\,dt}_{1/2} + \int_{0}^{x} t\,dt = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=x} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}}$$

$G''(x) = |x|' = \text{sign } x$

$\forall x \neq 0$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 47 del año 2003

Teorema MÉTODO de SUSTITUCIÓN

Hipótesis $u = u(x)$ de clase C^1 en un intervalo abierto U
$y = f(u)$ CONTINUA ; $a, b \in U$

Tesis) 1) $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ donde $u = u(x)$

2) $\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$

SUSTITUCIONES
$u = u(x)$
$du = u'(x)\,dx$
$x = b \quad u = u(b)$
$x = a \quad u = u(a)$

Dem
1) Sea $F(u) = \int f(u)\,du$ ($F(u)$ primitiva de $f(u)$ respecto de u)

$\frac{dF}{du}(u) = f(u)$

(i) $\int f(u)\,du$ donde $u = u(x)$ es $F(u(x))$

$\frac{d}{dx}F(u(x)) = \frac{dF}{du}(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x) = f(u(x))\cdot u'(x)$

(ii) $F(u(x))$ es primitiva de $f(u(x))\cdot u'(x)$ respecto de x

(i) y (ii) $\Rightarrow$ Tesis 1)

(i) $F(u(x))$ es $\int f(u)\,du$ donde $u = u(x)$

(ii) $F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx$

(i) (ii) $\Rightarrow$ Tesis 1)

Usando (ii) y regla de Barrow

Dem. de 2)

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Usando la definición de $F(u)$ como $\int f(u)\,du$

y la regla de Barrow

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du = F(u)\Big|_{u=u(a)}^{u=u(b)} = F(u(b)) - F(u(a))$$

Tesis 2)

Regla de SUSTITUCIÓN

1º) Reconocer en el integrando un producto

$f(u(x)) \cdot u'(x)$

$f(u(x))$: función compuesta como 1er factor

$u'(x)$: derivada de la misma $u(x)$ como segundo factor

2do) SUSTITUIR

1) $u = u(x)$

2) $\boxed{du = u'(x)\,dx}$ NO OLVIDARSE

Si hay límites de integración

3) $x = a \rightarrow u = u(a)$

4) $x = b \rightarrow u = u(b)$

3ro) INTEGRAR $f(u)$ respecto de u

4to) NO OLVIDAR - (Deshacer el cambio $u = u(x)$)

Sustituir u por $u(x)$

o por sus límites de integración $u(b)$ y $u(a)$

Ejemplo

$$\int_0^{\sqrt[6]{\pi}} (6x^5)\cos(x^6)\,dx =$$

$u = x^6$

$u'(x) = 6x^5$

1º

2º $\int_0^{\pi} (\cos u)\,du =$

3º $\operatorname{sen} u + k \Big|_0^{\pi}$

4to $\operatorname{sen}\pi + k - (\operatorname{sen} 0 + k)$

Respuesta:

$$\int_0^{\sqrt[6]{\pi}} (6x^5)\cos(x^6)\,dx = \operatorname{sen}(x^6) + k \Big|_0^{\sqrt[6]{\pi}}$$

$$= \operatorname{sen}\left(\sqrt[6]{\pi}^6\right) + k - (\operatorname{sen} 0 + k)$$

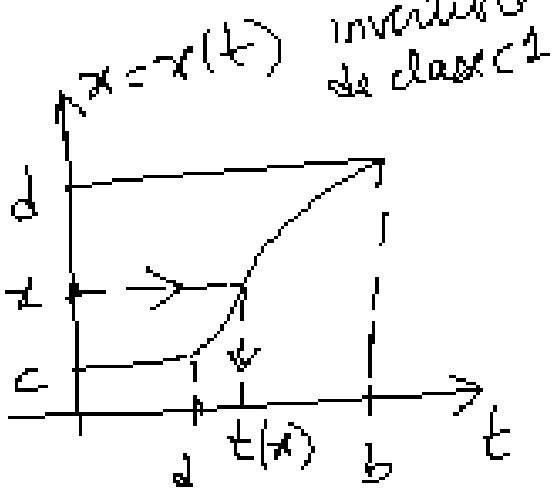
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Corolario (Método de cambio de variables)

1) $\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$ donde $t = t(x)$

f continua

$x = x(t)$ de clase C^1 inversible con inversa $t = t^{-1}(x)$



2) $\int_c^d f(x)\,dx = \int_{t(c)}^{t(d)} f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$

Dem. Es el teor. de SUSTITUCIÓN, usando $x(t)$ en vez de $u(x)$

1º Método de CAMBIO de VARIABLES

Calcular $\int f(x)\,dx$ o $\int_c^d f(x)\,dx$

f continua

(1º) Elegir cambio de variable $x = x(t)$ de clase C^1 con función inversa $t = t(x)$

(2º) SUSTITUIR $x = x(t)$

$dx = x'(t)\,dt$ NO OLVIDAR

Si hay límites de integración

$x = c \longrightarrow t = t(c)$

$x = d \longrightarrow t = t(d)$

(3º) INTEGRAR $\int f(x(t)).x'(t)\,dt$ respecto de t

(4º) Deshacer el cambio de variables, sustituir t por $t(x)$ o por los límites de integración $t(c)$ y $t(d)$

Ejemplo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

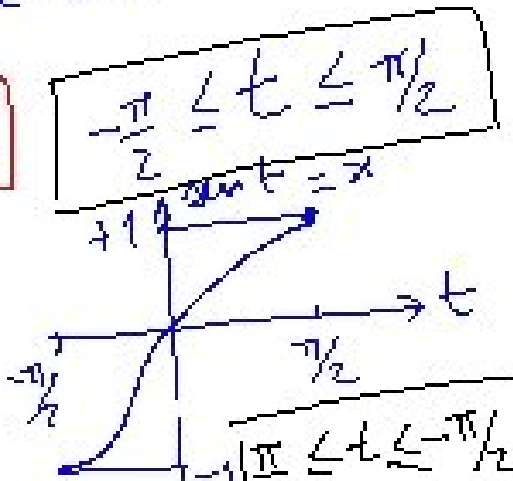
(1º) $x = \operatorname{sen} t$

$t = \operatorname{Arcsen} x$

$-1 \le x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$

$\operatorname{sen} t = x$



$-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$

$\cos t \ge 0$

(2º) $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt$

$dx = x'(t)\,dt$

$\cos t = \operatorname{sen}' t$

(3º) $\int |\cos t|\,\cos t\,dt =$

$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$

$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$= \int \cos^2 t\,dt =$

$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$

$\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + k$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Respuesta al ejemplo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left[2\operatorname{Arsen} x\right] + k$$

Observación $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$ donde $t = \operatorname{Arsen} x$

$x = \operatorname{sen} t$

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} 2t \equiv 2\operatorname{sen} t \cos t$ VER

$\operatorname{sen} 2(\operatorname{Arsen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

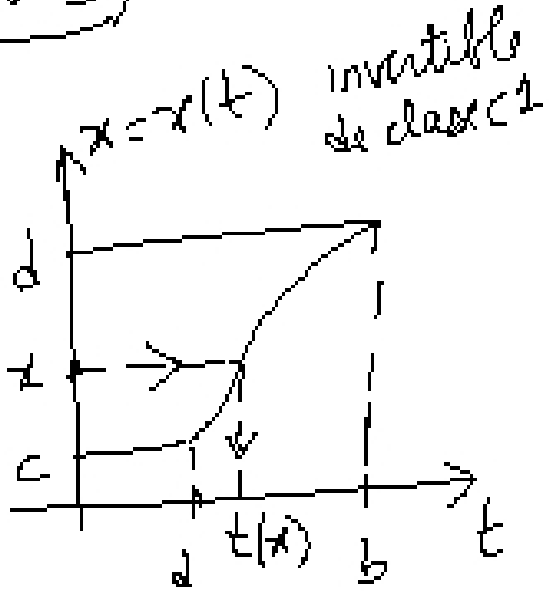
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$$

Corolario (Método de cambio de variables)

1) $\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$ donde $t = t(x)$

f continua

$x = x(t)$ de clase C^1 invertible con inversa $t = t^{-1}(x)$



2) $\int_c^d f(x)\,dx = \int_{t(c)}^{t(d)} f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$

Dem. Es el teor. de SUSTITUCIÓN, usando $x(t)$ en vez de $u(x)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

1º Método de CAMBIO de VARIABLES

Calcular $\int f(x)\,dx$ o $\int_c^d f(x)\,dx$

f continua

1º) Elegir cambio de variable $x = x(t)$ de clase C^1 con función inversa $t = t(x)$

2º) SUSTITUIR $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$ NO OLVIDAR

Si hay límites de integración $x = c \longrightarrow t = t(c)$, $x = d \longrightarrow t = t(d)$

3º) INTEGRAR $\int f(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$ respecto de t

4º) Deshacer el cambio de variables, sustituir t por $t(x)$ o por los límites de integración $t(c)$ y $t(d)$

Ejemplo

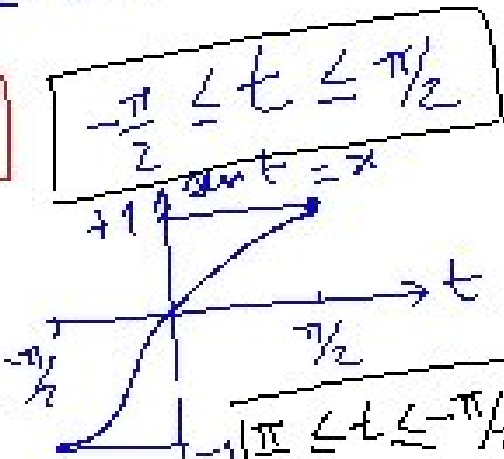
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1º) $x = \operatorname{sen} t$

$t = \operatorname{Arcsen} x$

$-1 \le x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$



$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$

$\cos t \ge 0$

2º) $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t\,dt$

$dx = x'(t)\,dt$

$\cos t = \operatorname{sen}' t$

3º) $\int |\cos t| \cos t\,dt =$

$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$

$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$= \int \cos^2 t\,dt =$

$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$

$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + k$

1º Método de CAMBIO de VARIABLES

Calcular $\int f(x)\,dx$ o $\int_c^d f(x)\,dx$

f continua

1º) Elegir cambio de variable $x = x(t)$ de clase C^1 con función inversa $t = t(x)$

2º) SUSTITUIR $x = x(t)$, $dx = x'(t)\,dt$ NO OLVIDAR

Si hay límites de integración $x = c \longrightarrow t = t(c)$, $x = d \longrightarrow t = t(d)$

3º) INTEGRAR $\int f(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$ respecto de t

4º) Deshacer el cambio de variables, sustituir t por $t(x)$ o por los límites de integración $t(c)$ y $t(d)$

Ejemplo

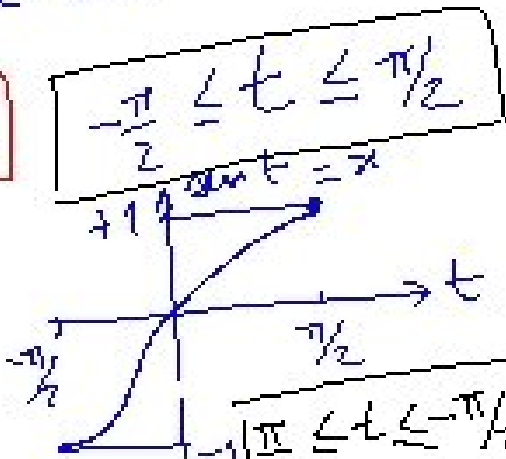
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

1º) $x = \operatorname{sen} t$

$t = \operatorname{Arcsen} x$

$-1 \le x \le 1$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$



$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi/2$

$\cos t \ge 0$

2º) $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t\,dt$

$dx = x'(t)\,dt$

$\cos t = \operatorname{sen}' t$

3º) $\int |\cos t| \cos t\,dt =$

$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$

$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$= \int \cos^2 t\,dt =$

$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$

$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + k$

Respuesta al ejemplo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left[2\operatorname{Arsen} x\right] + k$$

Observación $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$ donde $t = \operatorname{Arsen} x$

$x = \operatorname{sen} t$

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t$ VER

$\operatorname{sen} 2(\operatorname{Arsen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

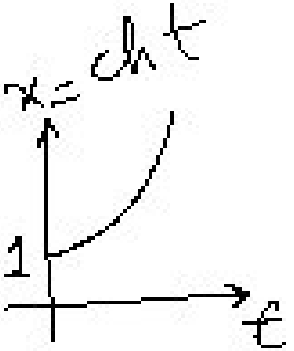
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k$$

Algunas integrales con radicales

1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsen} x + k \quad ; \quad -1 \le x \le 1$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{Arsh} x + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{Arch} x + k \quad x \ge 1$



4) $\int f\left[\sqrt{1-x^2}\right] dx$ cambio $x = \operatorname{sen} t$, $t = \operatorname{Arcsen} x$ $\quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$, $-1 \le x \le 1$

5) $\int f\left(\sqrt{1+x^2}\right) dx$ " $x = \operatorname{sh} t$, $t = \operatorname{Arg sh} x$ $\quad t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

6) $\int f\left(\sqrt{x^2-1}\right) dx$ " $x = \operatorname{ch} t$, $t = \operatorname{Arg ch} x$ $\quad t \ge 0$, $x \ge 1$

Ejemplo

$$\int \sqrt{4x^2+24x+20}\,dx =$$

$$2\int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx = 2\int \sqrt{(x+3)^2-9+5}\,dx$$

$$x^2+2ax = (x+a)^2 - a^2$$

$$= 2\int \sqrt{(x+3)^2-4}\,dx = 2\int \sqrt{\frac{1}{4}(x+3)^2-1}\cdot 2\,dx$$

$$= 4\int \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1}\,dx = \boxed{8\int \sqrt{u^2-1}\,du}$$

$$\sqrt{u^2-1}$$

$$\boxed{u = \frac{x+3}{2}}$$

$$du = \frac{1}{2}dx \qquad dx = 2\,du$$

$$\int \sqrt{4x^2+24x+20}\,dx \overset{\uparrow}{=} 8\int \sqrt{u^2-1}\,du$$

$$u = \frac{x+3}{2}$$

$$\int \sqrt{u^2-1}\,du = \int \sqrt{ch^2t-1}\cdot \underbrace{sh\,t\,dt}_{du} = (*)$$

$u = ch\,t$ $\quad$ $t \geq 0 \Rightarrow sh\,t \geq 0$

$t = \operatorname{Arg ch}\, u$ $\quad$ $u \geq 1$

$du = (ch\,t)'\,dt = sh\,t\,dt$

$$ch^2t - sh^2t = 1$$
$$ch^2t + sh^2t = ch\,2t$$
$$sh\,2t = 2\,ch\,t\,sh\,t$$
$$2sh^2t = ch\,2t - 1$$

$$(*) = \int |sh\,t|\,sh\,t\,dt = \int sh^2t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (ch\,2t - 1)\,dt = \frac{1}{4}\underbrace{sh\,2t}_{2\,sh\,t\,ch\,t} - \frac{1}{2}t + k$$

$$\int \sqrt{4x^2+24x+20}\,dx = 8\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - \frac{1}{2}t\right) + k$$

$$u = \frac{x+3}{2}$$

$$t = \operatorname{Argch}u \qquad t \geq 0$$

$$u = \operatorname{ch}t \qquad u \geq 1$$

$$\operatorname{sh}t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}$$

$$= 4\sqrt{u^2-1}\,u - 4\operatorname{Argch}u + k =$$

$$= 4\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right) - 4\operatorname{Argch}\left(\frac{x+3}{2}\right) + k =$$

$$= \sqrt{4x^2+24x+20}\left(\frac{x+3}{2}\right) - 4\operatorname{Argch}\left(\frac{x+3}{2}\right) + k$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 48 del año 2003

INTEGRACIÓN por PARTES

Teorema (" " ")

Hip) f, g de clase C^1 en un intervalo abierto U

$a, b \in U$

Tesis) 1) $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

Dem: Derivada de producto

$(fg)' = f'g + fg'$

o sea (*) $f(x)g(x)$ es una primitiva respecto de x de $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Dem de (1): (*) $f(x)g(x) = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$

$f(x)g(x) = \underbrace{\int f'(x)g(x)\,dx}_{(A)} + \int f(x)g'(x)\,dx$

Resultado (A) queda (1)

INTEGRACIÓN por PARTES

Teorema (" " ")

Hip) f, g de clase C^1 en un intervalo abierto U

$a, b \in U$

Tesis) 1) $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

Dem: Derivada de producto

$$(fg)' = f'g + fg'$$

o sea (*) $f(x)g(x)$ es una primitiva respecto de x de $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Dem de (2) : (*) Regla de Barrow

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right] dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx}_{(H)} + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Restando (H) queda (2)

Ejemplos

i) ① $\lambda \neq 0$ dx

$$\int x e^{\lambda x} dx = x \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \int \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} dx$$

$f(x)$ $\quad g'(x)$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$$

$$= \frac{x e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int e^{\lambda x} dx = \boxed{\frac{x e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} + k}$$

② $$\int \underbrace{x^3}_{f(x)} \underbrace{e^{\lambda x} dx}_{g'(x)} = x^3 \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \int x^2 \underbrace{e^{\lambda x} dx}_{g'(x)}$$

$$= \frac{x^3 e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} \left[x^2 \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \int x e^{\lambda x} dx \right] =$$

$$= \frac{x^3 e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{3x^2}{\lambda^2} e^{\lambda x} + \frac{6}{\lambda^2} \left(\frac{x}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} \right) + k$$

3) Sea n natural ≥ 0 ; λ real $\neq 0$

llame $I_n = \int x^n e^{\lambda x} dx$ - $\left(I_0 = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + k\right)$

Encontrar una relación de recurrencia que exprese I_n en función de I_{n-1} $(n \geq 1)$

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{e^{\lambda x} dx}_{g'(x)} = \frac{x^n}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \underbrace{\int x^{n-1} e^{\lambda x} dx}_{I_{n-1}}$$

$$g(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$$

$$\boxed{I_n = \frac{x^n e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} I_{n-1}}$$

$$I_1 = \frac{x e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} I_0 = \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\right) e^{\lambda x} + k$$

$$I_2 = \frac{x^2 e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} I_1 = \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) e^{\lambda x} + k$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo $\int x^n \cos \lambda x \, dx$, $\int x^n \operatorname{sen} \lambda x \, dx$

llamar

$$I_n = \int x^n \cos \lambda x \, dx$$

$$J_n = \int x^n \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$

$$I_0 = \int \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x + k$$

$$J_0 = \int \operatorname{sen} \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda x + k$$

$$I_n = \int \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{\cos \lambda x}_{g'(x)} \, dx = \frac{x^n}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x \qquad J_{n-1}$$

$$I_n = \frac{x^n}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x - \frac{n}{\lambda} J_{n-1}$$

$$J_{n-1} = \int \underbrace{x^{n-1}}_{h(x)} \underbrace{\operatorname{sen} \lambda x}_{h'(x)} \, dx =$$

$$h_1(x) = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda x$$

$$= -\frac{x^{n-1}}{\lambda} \cos \lambda x + \frac{n-1}{\lambda} \underbrace{\int x^{n-2} \cos \lambda x \, dx}_{I_{n-2}}$$

$$J_{n-1} = -\frac{x^{n-1}}{\lambda} \cos \lambda x + \frac{n-1}{\lambda} I_{n-2}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$$I_0 = \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda x + k$$

$$J_0 = -\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x + k$$

$$I_n = \frac{x^n}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda x - \frac{n}{\lambda} J_{n-1}$$

$$J_{n-1} = -\frac{x^{n-1}}{\lambda}\cos\lambda x + \frac{n-1}{\lambda} I_{n-2}$$

$$I_n = \int x^n \cos\lambda x \, dx$$

$$J_n = \int x^n \operatorname{sen}\lambda x \, dx$$

$$\int x\cos\lambda x\,dx = I_1 = \frac{x}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda x - \frac{1}{\lambda} I_0 = \frac{x}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda x + \frac{1}{\lambda^2}\cos\lambda x + k$$

$$\int x\operatorname{sen}\lambda x\,dx = J_1 = -\frac{x}{\lambda}\cos\lambda x + \frac{1}{\lambda} I_0 = -\frac{x}{\lambda}\cos\lambda x + \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{sen}\lambda x + k$$

$$\int x^2\cos\lambda x\,dx = I_2 = \frac{x^2}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda x - \frac{2}{\lambda} J_1 = \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3}\right)\operatorname{sen}\lambda x + \frac{2x}{\lambda^2}\cos\lambda x + k$$

$$\int x^2\operatorname{sen}\lambda x\,dx = J_2 = -\frac{x^2}{\lambda}\cos\lambda x + \frac{2}{\lambda} I_1 =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^3}\right)\cos\lambda x + \frac{2x}{\lambda^2}\operatorname{sen}\lambda x + k$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplos de integración por partes:

$$\textcircled{1}\quad \int (\log x)\,1\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx =$$

$f(x)=\log x \quad g'(x)=1 \quad g(x)=x$ (producto $f\cdot g'$; $f'(x)$)

$$= x\log x - \int 1\,dx = (x\log x) - x + k$$

$$\textcircled{2}\quad \int (\operatorname{Arcsen} x)\,1\,dx = x\operatorname{Arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$g'(x)=1 \quad g(x)=x$

$u = 1-x^2$

$du = -2x\,dx$

$+\frac{1}{2}du = -x\,dx$

$$= x\operatorname{Arcsen} x + \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\sqrt{u}} = \boxed{x\operatorname{Arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{1/2}}{1/2}$$

Ejercicio

② $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + k$

④ $\int \operatorname{Arctg} x \, dx = x \operatorname{Arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$

$= x \operatorname{Arctg} x - \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} =$

$u = 1 + x^2$

$du = 2x \, dx$

$\frac{1}{2} du = x \, dx$

$= x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+x^2) + k$

(5)

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx$$

$g'(x) = 1$

$g(x) = x$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \operatorname{Arcsen} x + k$$

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsen} x + k \Rightarrow I = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{Arcsen} x}{2} + C$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

(5)

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx$$

$g'(x) = 1$

$g(x) = x$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \text{Arcsen}\,x + k$$

$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \text{Arcsen}\,x + k \Rightarrow I = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\text{Arcsen}\,x}{2} + C$$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctg} x + k$$

$g'(x) = 1$

$g(x) = x$

por partes

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x \left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)' dx$$

$$\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)' \to \frac{-n\,2x}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,I_n - 2n\,I_{n+1}$$

$$\Leftarrow \quad -2n\,I_{n+1} = I_n$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n}$$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

$$I_1 = \operatorname{Arctg} x + K$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 \qquad I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x + k$$

$$I_3 = \frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 \qquad I_3 = \frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg} x + k$$

$$I_4 = \frac{1}{6}\,\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6} I_3$$

$$I_4 = \int \frac{1}{(1+x^2)^4}\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{24}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{16}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{Arctg} x + k$$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 49 del año 2003

Integrales de algunas funciones trigonométricas

$$\int f(\cos x)\cdot \operatorname{sen} x \, dx = -\int f(u)\, du$$

donde

$u = \cos x$

$u = \cos x$

$u' = -\operatorname{sen} x$

$du = -\operatorname{sen} x \, dx$

Ejemplo

$$\int \sqrt{4+\cos x}\, \operatorname{sen} x \, dx = -\int \sqrt{u}\, du = -\frac{2}{3}u^{3/2} + k =$$

$u = 4 + \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(4+\cos x)^3} + k$$

② $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx =$

$= \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int (1-u^2)\,du =$

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x\,dx$

$= -u + \frac{u^3}{3} + k = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + k$

---

③ $\int \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2n} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx =$

$= \int (1-\cos^2 x)^n \operatorname{sen} x\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int (1-u^2)^n\,du$

$u = \cos x$

→ desarrollar en u e integrar en u

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

④ $\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx$

$= \int (1-u^2)^2\,du = \int (1-2u^2+u^4)\,du =$

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x\,dx$

$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + k =$

$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + k.$

---

⑤ $\int \cos^{2n+1} x\,dx = \int \cos^{2n} x \cdot \cos x\,dx =$

$= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^n \cos x\,dx = \int (1-u^2)^n\,du$ → desarrollar en u, e integrar en u

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x\,dx$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \\ 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \end{cases}$$

$$4\operatorname{sen}^4 x = (1 - \cos 2x)^2 =$$

$$= 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x =$$

$$= 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + k$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + k$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\cos 4x}{8}\right] dx$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + k$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x \, dx \end{matrix} - \int \frac{du}{u} = -\log|u| + k$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \pi/2$$

$$= -\log|\cos x| + k$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x} \operatorname{sen} x \, dx = \quad u = \cos x$$

$$= -\int \frac{1-u^2}{u^3} du = \frac{1}{2} u^{-2} + \log|u| + k =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 x} + \log|\cos x| + k$$

$$\int tg^2 x \, dx = \int (-1+1+tg^2 x)\, dx =$$

$$= -x + \int (1+tg^2 x)\, dx = \boxed{-x + tg\, x + C}$$

$$1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = (tg\, x)'$$

INTEGRAR OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS sobre ÁNGULO MITAD (EQUIVALENTE AL)

$$\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \cos x$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2\cdot 2u^2}{(1+u^2)^2} = \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}$$

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$-\pi < x < \pi$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$du = \frac{1}{2}(1+u^2)\,dx$$

INTEGRAR OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS sobre ÁNGULO MITAD (PROPIEDAD)

$$\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \cos x$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x$$

$$2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}$$

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Resumen $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad -\pi < x < \pi$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx &= \frac{2}{1+u^2}\,du \end{aligned}}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Sean $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $Q(\cos x, \operatorname{sen} x)$ polinomios en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

$$\int \frac{P(\cos x, \operatorname{sen} x)}{Q(\cos x, \operatorname{sen} x)}\,dx = \int f(u)\,du$$

$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

donde $f(u)$ es otro cociente de polinomios en u (función racional)

Ejemplo

$$\int \frac{2}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{2}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad -\pi < x < \pi$

$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du \;;\; \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \;;\; \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$ verificar

$$= \int \frac{4}{1+2u-u^2}\,du$$

raíces $\begin{cases} u = 1+\sqrt{2} \\ u = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

$$\frac{4}{1+2u-u^2} = \frac{\sqrt{2}}{u-(1+\sqrt{2})} + \frac{-\sqrt{2}}{u-(1-\sqrt{2})}$$

"fracciones simples"

$$= \sqrt{2}\int \frac{du}{u-1-\sqrt{2}} - \sqrt{2}\int \frac{du}{u-1+\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\log\left|u-1-\sqrt{2}\right| - \sqrt{2}\log\left|u-1+\sqrt{2}\right| + C$$

$$= \sqrt{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}\right| - \sqrt{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}\right| + C$$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2003

CLASE 50 del año 2003

Integración de funciones racionales

Def Una función racional es $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cociente de polinomios en x ($\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $Q(x) \neq 0$)

Ejemplos notables

1) $$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + k = \log|x-a| + k$$

$u = x - a$
$du = dx$

2) $$\int \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^a} = \frac{u^{-a+1}}{-a+1} + k = \frac{(x-a)^{-a+1}}{-a+1} + k$$

$a \neq 1$

3) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctg} x + k$

raíces i $-i$ simples

4) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = I_n$ estudiada en clase 48 (parte 4)

$n \geq 2$ (raíces i $-i$ multiplicidad n)

5) $\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + k = \log|Q(x)| + k$

$u = Q(x)$

$du = Q'(x)\,dx$

Ejemplo $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx = \log|x^2-2x+5| + k$

6) $\int \frac{Q'(x)}{[Q(x)]^n}\,dx = \int \frac{du}{u^n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + k = \frac{[Q(x)]^{-n+1}}{-n+1} + k$

$n \geq 2$

$u = Q(x)$

$du = Q'(x)\,dx$

7) $\int \frac{1}{[Q(x)]^n}\,dx$ n natural ≥ 1

$Q(x)$ polin de 2do grado con raíces complejas conjugadas

$r + si$

$r - si$

Objetivo: reducir a los casos 3) y 4) (clase 48 parte 4)

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^n} = I_n$$

raíces i, $-i$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 10}$$ → raíces $\begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$ sigue →

$$Q(x) = 2x^2 - 4x + 10 = 2\left(x^2 - 2x + 5\right) =$$

raíces $\begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$

$$= 2\left((x-1)^2 - 1 + 5\right) = 2\left((x-1)^2 + 4\right)$$

método de completar cuadrados

$$x^2 - 2rx + r^2 = (x-r)^2$$

$$\boxed{x^2 - 2rx = (x-r)^2 - r^2}$$

En general Si $Q(x)$ es de 2do grado y tiene raíces complejas conjugadas $\begin{cases} r+si \\ r-si \end{cases}$

método de completar cuadrados

$$Q(x) = k\left((x-r)^2 + s^2\right)$$

k → coef. de x^2 en $Q(x)$

$$\int \frac{dx}{[Q(x)]^n} = \frac{1}{k^n} \int \frac{dx}{\left[(x-r)^2 + s^2\right]^n}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^n}$$

referencia

Ejemplo

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

$$\int \frac{dx}{(Q(x))^n} = \frac{1}{k^n} \int \frac{dx}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^n} = \frac{1}{k^n} \int \frac{1}{s^{2n}} \frac{dx}{\left[\frac{(x-r)^2}{s^2}+1\right]^n} =$$

sacar s^2 de factor común

referencia $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$

$$= \frac{1}{k^n} \cdot \frac{1}{s^{2n}} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-r}{s}\right)^2+1\right]^n} =$$

$u = \frac{x-r}{s}$

$$\frac{1}{k^n s^{2n}} \int \frac{s\,du}{(u^2+1)^n} = \frac{1}{k^n s^{2n}} I_n(u)$$

$du = \frac{1}{s} dx$

$dx = s\,du$

Ejemplo

$$\int \frac{dx}{2x^2-4x+10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\frac{(x-1)^2}{4}+1} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2\,du}{1+u^2} = (1/4)\,\text{Arctg}\,u + k = \boxed{(1/4)\,\text{Arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+k}$$

$u = \frac{x-1}{2}$; $du = \frac{1}{2} dx$; $dx = 2\,du$

8) $\int \frac{(\alpha x+\beta)^{P(x)}}{[Q(x)]^n}\,dx$

$Q(x)$ polin. de 2do grado con raíces complejas conjugadas

$P(x) = \alpha x + \beta$ polin. de 1er grado

$\Rightarrow Q'(x)$ es polin de 1er grado, $Q'(x) = \gamma x + \delta$ $\quad \gamma \neq 0$

$$P(x) = \alpha x + \beta = \frac{\alpha}{\gamma}\cdot \gamma x + \beta = \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x + \delta - \delta) + \beta$$

$$P(x) = \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma}}_{\text{de } c_1}(\gamma x + \delta) + \underbrace{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}_{\text{de } c_2} = \boxed{c_1 Q'(x) + c_2}$$

$$\int \frac{P(x)}{[Q(x)]^n}\,dx = c_1 \underbrace{\int \frac{Q'(x)}{[Q(x)]^n}\,dx}_{\text{ejemplos notables 5 y 6}} + c_2 \underbrace{\int \frac{1}{[Q(x)]^n}\,dx}_{\text{ejemplo notable 7)}}$$

Ejemplo $\int \frac{3x+2}{2x^2-4x+10}\,dx$

$Q(x) = 2x^2-4x+10$ raíces $\begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$, $Q'(x) = 4x-4$

$P(x) = 3x+2 = \frac{3}{4}4x+2 = \frac{3}{4}(4x-4+4)+2 =$

$P(x) = \frac{3}{4}(4x-4)+2+\frac{3}{4}\cdot 4 = \boxed{\frac{3}{4}Q'(x)+5}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{3}{4}\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}dx + 5\int \frac{dx}{Q(x)}$$

$$= \frac{3}{4}\log|Q(x)| + 5\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) + K$$

$$= \frac{3}{4}\log|2x^2-4x+10| + 5\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + K$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

PASO 1º Si grado de P $<$ grado de Q pasa 2do

Si " $\geq$ "

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{polinomio cociente integrable}} + \frac{R(x)}{Q(x)} \leftarrow \text{polinomio resto } R(x)$$

grado de R $<$ grado de Q ir a paso 2)

PASO 2do $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ grado $P <$ grado Q

Fijarse si es alguno de los ejemplos notables 1 a 8

Si no lo es. paso 3)

PASO 3ro Factorizar $Q(x)$ – Encontrar todas las raíces reales y complejas $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda\}$

$$Q(x) = k\,(x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \ldots (x-\lambda)^\ell$$

multiplicidades $a, b, c, \ldots, \ell$ de c/raíz real o compleja

Paso 4to Si $gr P < gr Q$

Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en SUMA de TODAS sus "fracciones simples" (ver definición más abajo)

Paso 5to Cada "fracción simple" es uno de los ejemplos notables 1) a 8)

Integrar cada fracción simple.

DEFINICIÓN Si $gr P < gr Q$, se llama FRACCIONES SIMPLES de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a:

1) Para cada **raíz real α** de $Q(x)$, con multiplicidad $n = 1$ una sola fracción simple $\frac{A_0}{x-\alpha}$ donde A_0 es real ("coeficiente" a determinar)

Paso 4to Si $gr P < gr Q$

Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en SUMA de TODAS sus "fracciones simples" (ver definición más abajo)

Paso 5to Cada "fracción simple" es uno de los ejemplos notables 1) a 8)

Integrar cada fracción simple.

DEFINICIÓN Si $gr P < gr Q$, se llaman FRACCIONES SIMPLES de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a:

2) Para cada raíz real α de $Q(x)$, con multiplicidad $a = 2$

dos fracciones simples $\frac{A_0}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha}$

A_0 y A_1 son constantes reales ("coeficientes") a determinar

Paso 4to Si $gr P < gr Q$

Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en SUMA de TODAS sus "fracciones simples" (ver definición más abajo)

Paso 5to Cada "fracción simple" es uno de los ejemplos notables 1) a 8)

Integrar cada fracción simple.

DEFINICIÓN Si $gr P < gr Q$, se llaman FRACCIONES SIMPLES de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a:

3) Para cada [raíz real α] de $Q(x)$, con multiplicidad $[\partial = 3]$

tres fracciones simples $\frac{A_0}{(x-\alpha)^3} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)}$

A_0, A_1 y A_2 son constantes reales ("coeficientes") a determinar

Paso 4to Si $gr P < gr Q$

Descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en SUMA de TODAS sus "fracciones simples" (ver definición más abajo)

Paso 5to Cada "fracción simple" es uno de los ejemplos notables 1) a 8)

→ Integrar cada fracción simple.

DEFINICIÓN Si $gr P < gr Q$, se llaman FRACCIONES SIMPLES de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a:

3) Para cada [raíz real α] de $Q(x)$, con multiplicidad [$a \geq 3$]

cantidad a de ... fracciones simples

$$\frac{A_0}{(x-\alpha)^a} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{a-1}} + \dots + \frac{A_{a-1}}{(x-\alpha)^1}$$

$A_0, A_1, \dots, A_{a-1}$ son constantes reales ("coeficientes a determinar")

Continuación de definición de fracciones simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (grado de $P <$ grado de Q)

(1°) Para cada pareja $\begin{cases} r+si \\ r-si \end{cases}$ de raíces complejas conjugadas ($s \neq 0$) de $Q(x)$ con multiplicidad $\boxed{n=1}$

se define una sola "fracción simple":

$$\frac{B_0 x + C_0}{(x-r)^2 + s^2}$$

donde B_0, C_0 son dos reales ("coeficientes") a determinar

Continuación de definición de fracciones simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (grado de $P <$ grado de Q)

(2') Para cada pareja $\begin{cases} r+si \\ r-si \end{cases}$ de raíces complejas conjugadas ($s \neq 0$) de $Q(x)$ con multiplicidad $\boxed{n=2}$

se definen los "fracciones simples":

$$\frac{B_0 x + C_0}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^2} + \frac{B_1 x + C_1}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^1}$$

donde B_0, C_0, B_1, C_1 son dos reales ("coeficientes") a determinar

Continuación de definición de fracciones simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (grado de $P <$ grado de Q)

(2') Para cada pareja $\begin{cases} r+si \\ r-si \end{cases}$ de raíces complejas conjugadas ($s \neq 0$) de $Q(x)$ con multiplicidad $\boxed{n=3}$

se definen tres "fracciones simples":

$$\frac{B_0 x + C_0}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^3} + \frac{B_1 x + C_1}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^2} + \frac{B_2 x + C_2}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^1}$$

donde $B_0, C_0, B_1, C_1, B_2, C_2$ son tres reales ("coeficientes") a determinar

Continuación de definición de fracciones simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (grado de $P <$ grado de Q)

(2') Para cada pareja $\begin{cases} r+si \\ r-si \end{cases}$ de raíces complejas conjugadas ($s \neq 0$) de $Q(x)$ con multiplicidad $\boxed{n \geq 3}$

se definen n cantidad n de términos "fracciones simples":

$$\frac{A_0 x + C_0}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^n} + \frac{B_1 x + C_1}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^{n-1}} + \cdots + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{\left[(x-r)^2+s^2\right]^1}$$

donde $B_0, C_0, B_1, C_1, \cdots B_{n-1}, C_{n-1}$ son números reales ("coeficientes") a determinar

Ejemplo $\int \frac{x^3-15}{x-3}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} 1x^3+0x^2+0x-15 & 1x-3 \\ \hline -1x^3+3x^2 & \boxed{1x^2+3x+9} \\ \hline 0x^3+3x^2+0x-15 & \\ -3x^2+9x & \\ \hline 0x^2+9x-15 & \\ -9x+27 & \\ \hline \boxed{0x+12}=R(x) & \end{array}$$

$\boxed{1x^2+3x+9}$ = $C(x)$

$$\frac{x^3-15}{x-3} = x^2+3x+9+\frac{12}{x-3}$$

$$\boxed{\int \frac{x^3-15}{x-3}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+9x+12\log|x-3|+k}$$

Ejemplo

$$\frac{2x+6}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \in Q(x)$$

raíces: 1 doble; $0+i$, $0-i$ simples

$$Q(x) = (x-1)^2(x-i)(x+i) = (x-1)^2(x^2+1)$$

En general: Si $(r+si)$ $(r-si)$ son raíces complejas conjugadas con multiplicidad n de $Q(x)$

los factores $\left[x-(r+si)\right]^n \left[x-(r-si)\right]^n =$

$$= \left[(x-r)^2+s^2\right]^n$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Teorema (∃ de descomp. en fracciones simples)

H) $P(x)$, $Q(x)$ polin. con grado de $P <$ grado de Q

T) ∃ coeficientes reales adecuados tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{SUMA de TODAS SUS FRACCIONES SIMPLES (según definición anterior)}$$

Dem (final de clase próxima)

¿Cómo hallar los coeficientes de las fracciones?

- Método de coef. indeterminados → serán denominador común $Q(x)$ e igualar coeficientes en el numerador a lo de $P(x)$
- Método de dar valores a x
- Método de "la tapadita"

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ejemplo: $\int \frac{2x+6}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$ $\quad Q(x)$

$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)$$

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

1) coef. indeterminados

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_0(x^2+1) + A_1(x-1)(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_0 - A_1 - 2B + C)x^2 + (A_1 + B - 2C)x + (A_0 - A_1 + C)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B &= 0 \\ A_0 - A_1 - 2B + C &= 0 \\ A_1 + B - 2C &= 2 \\ A_0 - A_1 + C &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0 &= 4 \\ A_1 &= -3 \\ C &= -1 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

método de dar valores a x:

2) $$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$x=0 \quad 6 = A_0 - A_1 + C$

$x=2 \quad 2 = A_0 + A_1 + \frac{2B}{5} + \frac{C}{5}$

$x=-1 \quad \frac{1}{2} = \frac{A_0}{4} - \frac{A_1}{2} - \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$

$x=-2 \quad \frac{2}{45} = \frac{A_0}{9} - \frac{A_1}{3} - \frac{2B}{5} + \frac{C}{5}$

$A_0 = 4$

$A_1 = -3$

$B = 3$

$C = -1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

3) Método "de la tapadita"

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\left.\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)}\right|_{x=1} = A_0 + \left(\text{tapar } (x-1)^2\right)$$

$$A_0 = \frac{2(1)+6}{1^2+1} = 4 \qquad \boxed{A_0 = 4}$$

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{2x+6-4(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-4x^2+2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-4x-2}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\begin{array}{cccc} & -4 & 2 & 2 \\ 1 & & -4 & -2 \\ & -4 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{-4x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}}$$

$$\left.\frac{-4x-2}{(x-1)(x^2+1)}\right|_{x=1} = A_1 + \left.\frac{(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\right|_{x=1}$$

$$A_1 = \frac{-4(1)-2}{1^2+1} = -3$$

$$\boxed{A_1 = -3}$$

$$\frac{-4x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{-4x-2}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{-4x-2+3(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3x-1}{(x^2+1)}$$

$B = 3$
$C = -1$

$A_0 = 4$
$A_1 = -3$
$B = 3$
$C = -1$

Conclusión

$$\frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{3x-1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2x+6}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = 4\underbrace{\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx}_{\text{ejemplo notable 2}} - \underbrace{3\int \frac{1}{x-1}\,dx}_{\text{ejemplo notable 1}} +$$

$$+ \underbrace{\int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx}_{\text{ejemplo notable 8}} = \frac{-4}{x-1} - 3\log|x-1| +$$

$$+ \frac{3}{2}\log(x^2+1) - \operatorname{Arctg} x + k$$

2

CLASES DEL 2011

01 a 07
07 complementaria (documento)
14 complementaria (documento)
15 a 25
28 a 33
36 a 38

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 01

I ARITMÉTICA REPASO

6 TEMAS

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

- CONJUNTOS DE NÚMEROS $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- AXIOMAS DE CUERPO PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE REALES
- AXIOMAS DE ORDEN PROPIEDADES DE $a < b$
- VALOR ABSOLUTO, ENTORNO $|a|$, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$
- POTENCIACIÓN, RADICACIÓN EN EL CUERPO DE LOS REALES
- AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA en $\mathbb{N}$
- AXIOMA DE COMPLETITUD (DE LOS REALES) — SUPREMO E ÍNFIMO DE UN SUBCONJUNTO DE REALES

LOS REALES SE REPRESENTAN EN LA RECTA, COMPLETANDO TODOS SUS PUNTOS

bibliografía para el curso:

"Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

Para el tema I : capítulos 1 (todo) y 8 (hasta "propiedad P13" inclusive)

$\mathbb{N}$ = Conjunto de números naturales incluido el 0
= {0,1,2,3,..., 153, 154, ...1107, 1108, 1109, ...}

operaciones con naturales:

--suma $n+m \in \mathbb{N}$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$

--producto $n \cdot m \in \mathbb{N}$ " " " $\in \mathbb{N}$

la coma significa "y", es decir "and"

propiedades de la suma y el producto

- Asociativa de la suma $(n+m)+p = n + (m+p)$
- Asociativa del producto $(n\,m)\,p = n\,(m\,p)$
- Conmutativa de la suma $n + m = m + n$
- Conmutativa del producto $n\,m = m\,n$
- Neutro de la suma $n + 0 = n$
- Neutro del producto $n\,1 = n$
- → Distributiva del prod.respecto a la suma $(n + m)\,p = np + mp$

En $\mathbb{N}$ no se puede restar siempre: si $n < m$ entonces $n-m \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ = Conjunto de números naturales incluido el 0

Relación de orden total en el conjunto de naturales

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

n mayor que m se denota $n > m$ Es lo mismo que
m menor que n que se denota $m < n$

Por definición $n>m$ si existe un natural $p \neq 0$ tal que $m+p= n$ Se denota $p= n-m$

Tricotomía Dados dos números naturales cualesquiera n, m se cumple una y solo una de las siguientes tres condiciones:

- o bien n = m (son el mismo número natural)
- o bien n > m (n es mayor que m)
- o bien n < m (n es menor que m)

Monotonía de la suma

Monotonía del producto

$n > 0$, $m > 0$ $\Rightarrow$ $n + m > 0$, $n \cdot m > 0$

$\mathbb{N}^+$ = Conjun. de naturales > 0 (positivos)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{N}$ = conjunto de naturales = {0, 1, 2, 3, ...}

$\mathbb{N}^+$ = conjunto de naturales >0 (es decir positivos)

$\mathbb{N}^+ = \{ n \in \mathbb{N} : n > 0 \}$

Los dos puntos significan "tal que"

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

= la barra larga inclinada hacia la izquierda, significa que al conjunto que está a la izquierda se le quitan todos los elementos del conjunto que está a la derecha

$\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$

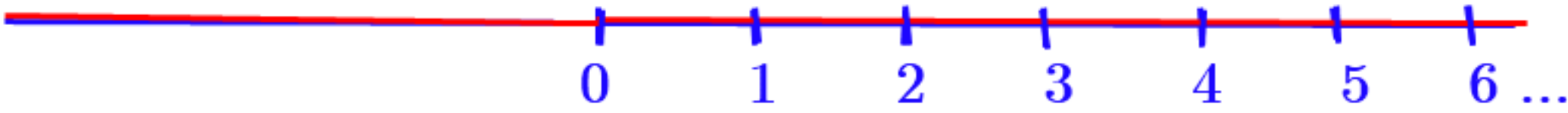
{0} indica el conjunto (no el número, sino el CONJUNTO) que tiene un único elemento siendo este elemento el número 0.

$\mathbb{N} \setminus \{7, 121\} = \{ n \in \mathbb{N} : n = 7, n = 121 \}$

$\emptyset = \{\}$ denota la conjunto "vacío" (no tiene elementos)

$\mathbb{N}$ $\simeq$ conjunto de números naturales $\simeq \{0,1,2,3,4,\ldots\}$

Representación en la recta:

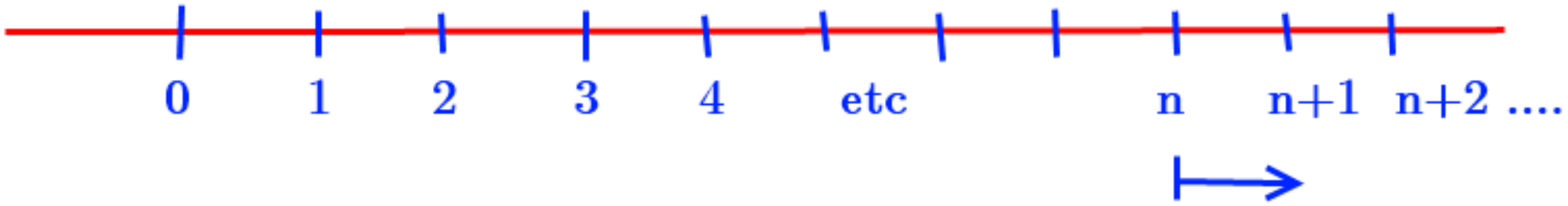


Cada número natural está representado por un punto de la recta, pero no todos los puntos de la recta representan números naturales.

Dos naturales distintos están representados por dos puntos de la recta distintos.

Si la recta es horizontal, en general se toma 1 a la derecha de 0.
Entonces $n > m$ si y solo sí el punto de la recta que representa a n está a la derecha del que representa a m.

Si la recta es vertical se toma 1 arriba de 0. Entonces $n > m$ si y solo si el punto que representa a n está arriba del que repres. a m



AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

sea P_n una propiedad que puede ser verdadera o falsa para cada natural n

Sumar 1 es trasladar el punto n de la recta hacia la derecha una unidad

Por ejemplos:

P_n es "n es par"

P_n es "$1+2+3+4+5+ \ldots +n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ "

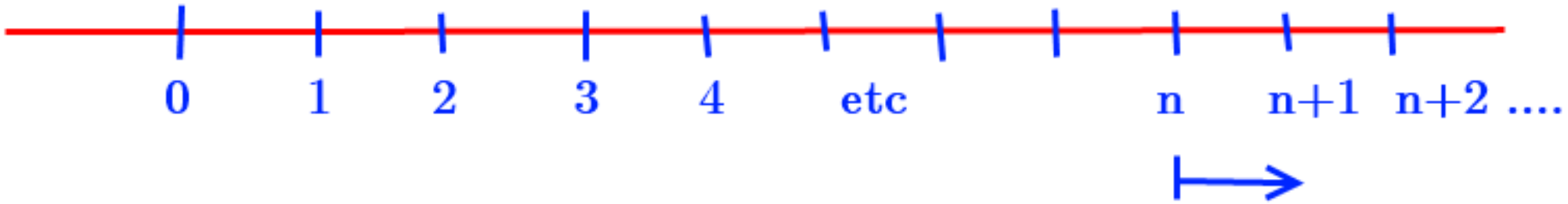
Notación: cuando n = 2 la suma de arriba indica 1+2

cuando n= 1 la suma de arriba indica 1

cuando n= 3 la suma de arriba indica 1 +2+3

cuando n= 4 la suma de arriba indica 1+2+3+4

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Si una propiedad P verifica las dos siguientes condiciones

1) P es verdadera cuando n = 1

Sumar 1 es trasladar el punto n de la recta hacia la derecha una unidad

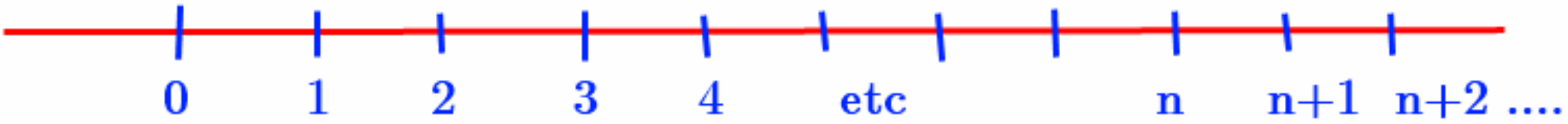
2) Se ha demostrado la siguiente proposición de "inducción":

Hipótesis: Si P es verdadera cuando n = h

Tesis: Entonces P es verdadera cuando n= h+1

entonces P es verdadera para todo natural positivo n

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Si una propiedad P verifica las dos siguientes condiciones

1) P es verdadera cuando n = 1

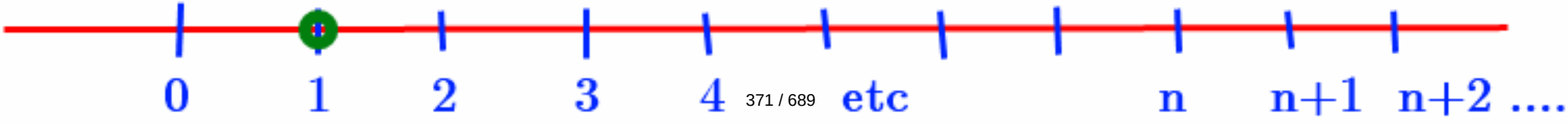
Gráficamente:
Si pintamos de verde todos los puntos n que cumplen P verdadera entonces:

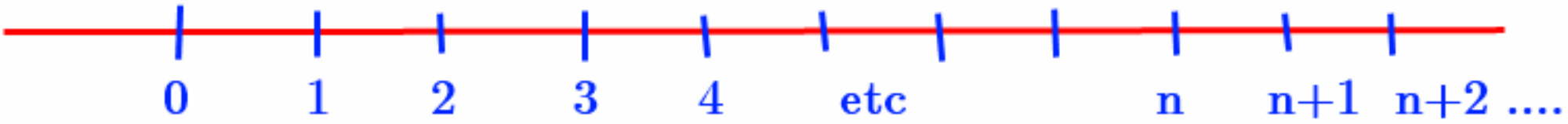
2) Se ha demostrado la siguiente proposición de "inducción":

Hipótesis: Si P es verdadera cuando n = h

Tesis: Entonces P es verdadera cuando n= h+1

entonces P es verdadera para todo natural positivo n





AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Si una propiedad P verifica las dos siguientes condiciones

1) P es verdadera cuando n = 1

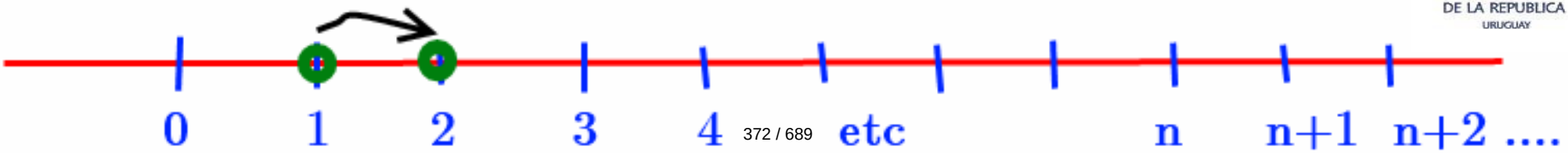
Gráficamente:
Si pintamos de verde todos los puntos n que cumplen P verdadera entonces:

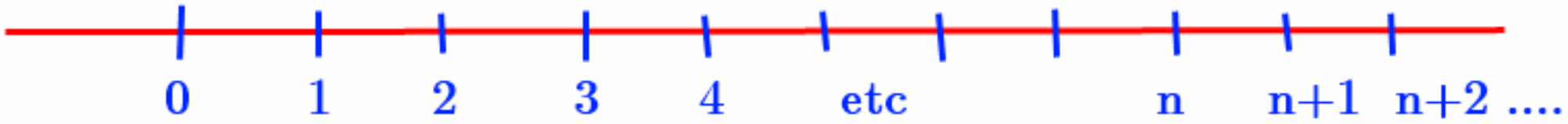
2) Se ha demostrado la siguiente proposición de "inducción":

Hipótesis: Si P es verdadera cuando n = h

Tesis: Entonces P es verdadera cuando n= h+1

entonces P es verdadera para todo natural positivo n





AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Si una propiedad P verifica las dos siguientes condiciones

1) P es verdadera cuando n = 1

Gráficamente:
Si pintamos de verde todos los puntos n que cumplen P verdadera entonces:

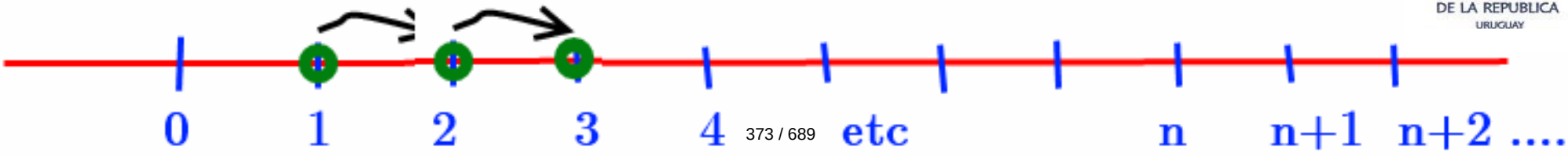
2) Se ha demostrado la siguiente proposición de "inducción":

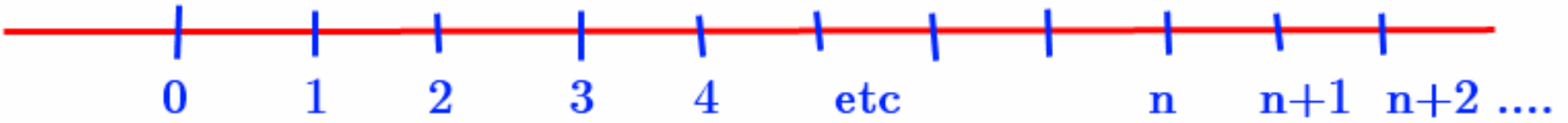
Hipótesis: Si P es verdadera cuando n = h

Tesis: Entonces P es verdadera cuando n= h+1

entonces P es verdadera para todo natural positivo n

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY





AXIOMA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Si una propiedad P verifica las dos siguientes condiciones

1) P es verdadera cuando n = 1

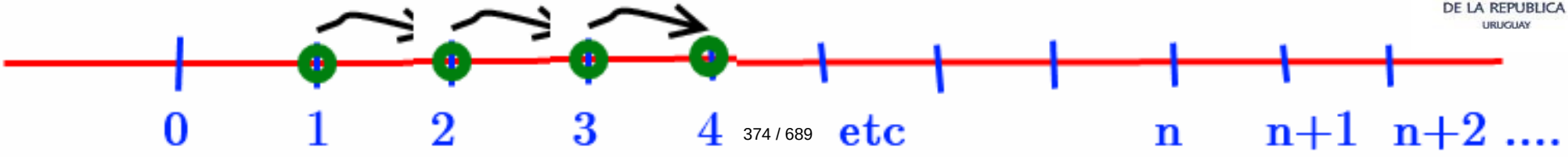
Gráficamente:
Si pintamos de verde todos los puntos n que cumplen P verdadera entonces:

2) Se ha demostrado la siguiente proposición de "inducción":

Hipótesis: Si P es verdadera cuando n = h

Tesis: Entonces P es verdadera cuando n= h+1

entonces P es verdadera para todo natural positivo n



Ejemplo de uso del axioma de inducción completa:

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostrar por inducción completa que la siguiente igualdad es verdadera para todo natural n positivo

P_n $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\,(n+1)}{2}$

El símbolo de sumatoria $\sum_{j=1}^{n} j$ significa lo siguiente:

(1) a la letra j (llamada índice de la sumatoria)

hay que darle todos los valores naturales entre 1 y n inclusive, es decir j= 1, después j=2, después j= 3, etc, hasta j= n.

(3) Todos los resultados obtenidos (uno para cada valor de j entre 1 y n inclusive) HAY QUE SUMARLOS

Demostración:

Probar (1) y (2) (las dos partes del axioma de inducción completa)

(1) Probar que P_n es cierta cuando n= 1

Es decir, probar que

¿ $\sum_{j=1}^{1} j = \frac{1\,(1+1)}{2}$? (lo pongo entre signos de interrogación porque todavía no sé si es cierto)

¿ $\sum_{j=1}^{1} j = \frac{1\,(1+1)}{2}$? $\Leftrightarrow$ ¿ 1 = 1? Sí.

Ya probé (1), es decir P_n es verdadera cuando n= 1

(2) Probar la proposición de inducción:

Hipótesis: P_n es verdadera cuando n = h

Tesis: P_n es verdadera cuando n= h+1

Dem.

Quiero probar que ¿ $\sum_{j=1}^{h+1} j = \frac{(h+1)\,[(h+1)+1]}{2}$?

o sea " " " ¿ $1+2+3+4+\ldots+h+(h+1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$? (A)

Sé por hipótesis que $\sum_{j=1}^{h} = \frac{h\,(h+1)}{2}$

o sea sé por " " $1+2+3+\quad +h = \frac{h(h+1)}{2}$ (B)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Quiero probar que

$$¿\ 1+2+3+4+\ldots+h+(h+1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2}\ ?\qquad (A)$$

Sé que

$$1+2+3+\ \ldots\ +h = \frac{h(h+1)}{2}\qquad (B)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$$1+2+3+4+\ldots+h+(h+1) = (1+2+3\ +\ \ldots h)\ +\ (h+1) =$$

uso (B):

$$= \frac{h\ (h+1)}{2}\ +\ (h+1) = \frac{h\ (h+1)\ +\ 2\ (h+1)}{2} =$$

saco denominador común 2

Saco factor común (h+1)

$$= \frac{(h+2)\ (h+1)}{2} = \frac{(h+1)\ (h+2)}{2}$$

La cadena de igualdades anterior probó que

$$1+2+3+4+\ldots+h+(h+1) = \frac{(h+1)\ (h+2)}{2}$$

Se probó (A)
LQQD.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 02

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{Z}$ = Conjunto de números enteros

$-3, -675, 0, 4, 89 \in \mathbb{Z}$

operaciones con

--suma $n+m \in \mathbb{Z}$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

--producto $n \cdot m \in \mathbb{Z}$ " " " $\in \mathbb{Z}$

propiedades de la suma y el producto

Consecuencia de la existencia de opuesto de la suma en $\mathbb{Z}$

$n, m \in \mathbb{Z}$ se define la resta

(Definición)

$n - m = n + (-m)$

- Asociativa de la suma $(n+m)+p = n + (m+p)$
- Asociativa del producto $(n\ m)\ p = n\ (m\ p)$
- Conmutativa de la suma $n + m = m + n$
- Conmutativa del producto $n\ m = m\ n$
- Neutro de la suma $n + 0 = n$
- Neutro del producto $n\ 1 = n$
- → Distributiva del prod. respecto a la suma $(n + m)\ p = np + mp$

En $\mathbb{Z}$ se puede restar siempre: si $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $n - m \exists$ en $\mathbb{Z}$

Propiedad de la resta:

$n - m = p \iff n = m + p$

Opuesto de la suma: n existe $-n$ (llamado opuesto de n) tal que

$n + (-n) = 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{Z}$ = Conjunto de los números enteros

Relación de orden en los enteros:

n mayor que m se denota $n > m$ Es lo mismo que m menor que n que se denota $m < n$ Es lo mismo que $n - m > 0$ (en particular $m<0$ si y solo si $-m>0$)

AXIOMAS DE ORDEN

- Tricotomía: $\forall\ n, m \in \mathbb{Z}$ se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:
  - $n = 0$
  - $n > 0$
  - $n < 0$ ($-n>0$)
- Monotonía de la suma: $\left.\begin{matrix} n>0 \\ m>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n+m>0$
- Monotonía del producto $\left.\begin{matrix} n>0 \\ m>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow nm>0$

$\mathbb{Z}$ = Conjunto de los números enteros

Propiedades que se pueden demostrar a partir de las enunciadas antes:

- $0\,n = n\,0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
- $\left.\begin{array}{l} n \geq m \\ p \text{ cualquiera} \end{array}\right\} \Rightarrow n + p \geq m + p$
- $\left.\begin{array}{l} n \geq m \\ p > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow np \geq mp$ (se mantiene la desigualdad)
- $\left.\begin{array}{l} n \geq m \\ p < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow n\,p \leq m\,p$ (se invierte la desigualdad)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{Q}$ = Conjunto de los números racionales (fracciones)

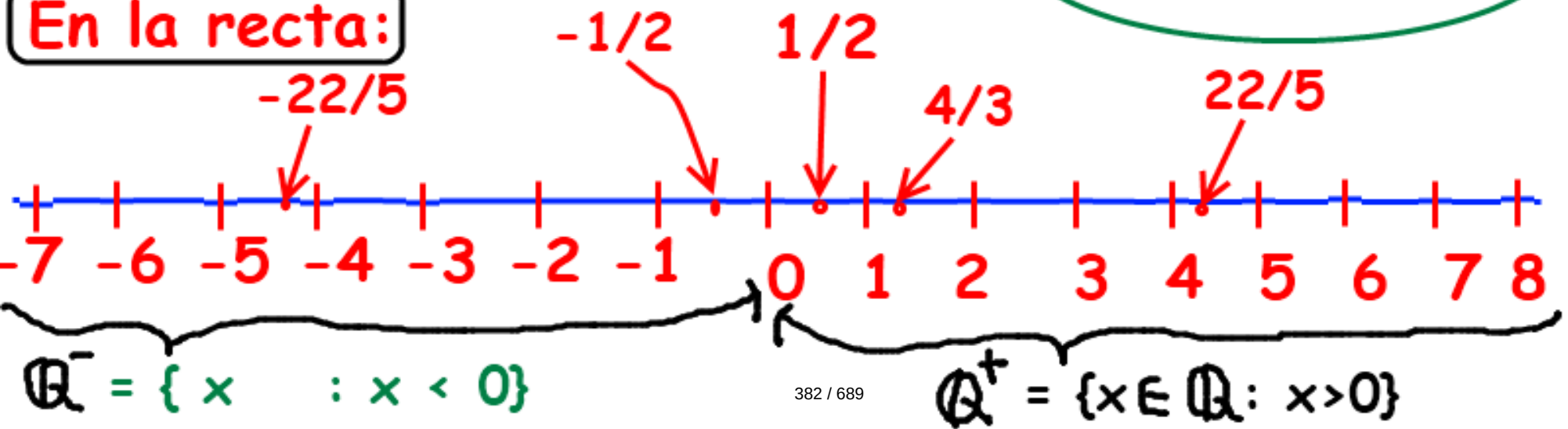
$$x \in \mathbb{Q} \iff x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$$

$\frac{1}{7}, \frac{-3}{15}, 8, 0, -3 \in \mathbb{Q}$ donde $p = \frac{p}{1}\ \forall p \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

En la recta:



$\mathbb{Q}^- = \{ x : x < 0 \}$

$\mathbb{Q}^+ = \{ x \in \mathbb{Q} : x > 0 \}$

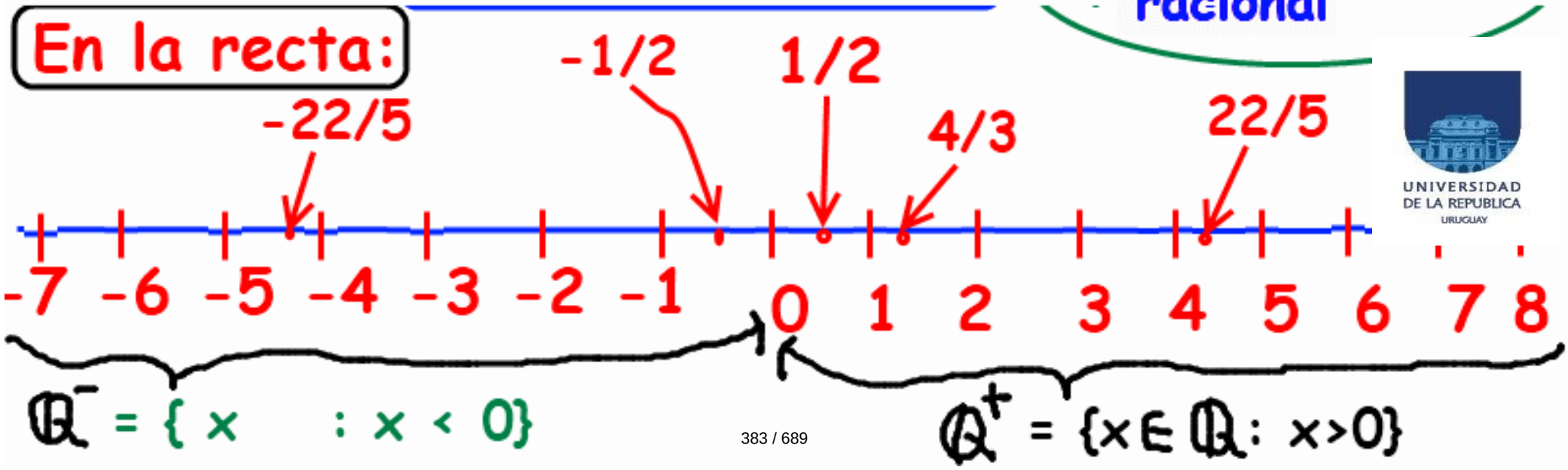
a todo racional le corresponde un punto de la recta r según la figura

A dos racionales distintos le corresponden puntos distintos

n > m si y solo si el punto n está a la derecha de m

el conjunto de todos los racionales no es completo, eso significa que NO completa todos los puntos de la recta

El conjunto es DENSO en la recta: eso significa que en todo segmento de la recta (con extremos diferentes, y por más pequeño que sea el segmento) HAY algún racional



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Operaciones con racionales (fracciones):

Suma $x + y \in \mathbb{Q}$ $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ Se define así:

Si $x = \frac{p}{q}$ $y = \frac{r}{s}$ $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$

Denominador común

Producto $x\,y \in \mathbb{Q}$ $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ Se define así:

Si $x = \frac{p}{q}$ $y = \frac{r}{s}$ $x\,y = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$

Regla del producto de fracciones

- PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO de racionales:
  SON LAS 9 PROPIEDADES QUE SE LLAMAN DE
  - "ESTRUCTURA DE CUERPO" (Ver el próximo pizarrón)
- RELACIÓN DE ORDEN $x > y$ $(y < x)$ en los racionales cumple los mismos 3 axiomas que para los enteros

TRICOTOMÍA, MONOTONÍA DE LA SUMA Y MONOTONÍA DEL PRODUCTO

AXIOMAS DE CUERPO DEFINICIÓN:

Un cuerpo es un conjunto de números (por ejemplo) donde están definidas las operaciones de SUMA y PRODUCTO y estas cumplen las siguientes propiedades:

(llamadas los 9 AXIOMAS DE CUERPO)

Asociativa de la suma $(a+b)+c = a + (b+c)$

Asociativa del producto $(ab)\ c = a\ (bc)$

Conmutativa de la suma $a+b = b+ a$

Conmutativa del producto $a\ b = b\ a$

Neutro de la suma $a + 0 = a$

Neutro del producto $a\ 1 = a$

Opuesto para la suma: para todo a existe -a (llamado opuesto de a) tal que $a + (-a) = 0$

Inverso para el producto de elemento no nulo: para todo $a \neq 0$ existe $(a)^{-1}$ (llamado inverso de a, y denotado también como 1/a) tal que $a \cdot (a)^{-1} = 1$

Distributiva $(a + b)\ c = ac + bc$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo

$\mathbb{Z}$ no es un cuerpo porque no verifica el axioma de existencia de inverso para el producto de todo elemento = 0

$\mathbb{N}$ no es un cuerpo porque no verifica los axiomas de existencia de opuesto ni el de exist. de inverso

Consecuencias de los 9 axiomas de cuerpo y de los 3 axiomas de orden en $\mathbb{R}$ (las siguientes propiedades pueden demostrarse a partir de esos 12 axiomas)

$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ para todo x

$x > y$, z cualquiera $\Rightarrow x + z > y + z$ (se mantiene la desigualdad al sumar un mismo z)

$x > y$, $z > 0$ $\Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$ (se mantiene la desigualdad al multiplicar por un mismo $z > 0$)

$x > y$, $z < 0$ $\Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (se invierte la desigualdad al multiplicar por un mismo $z < 0$)

MAS

Consecuencias de los 9 axiomas de cuerpo y de los 3 axiomas de orden en (las siguientes propiedades pueden demostrarse a partir de esos 12 axiomas)

Consecuencia de existencia de opuesto -x para la suma:

Se define la resta $x - y = x + (-y)$ para todos x e y

Se cumple (teorema) $x - y = z$ sii $x = z + y$

Consecuencia de existencia del inverso $(x)^{-1}$ para la resta de todo $x \neq 0$: se define el cociente o la división

$x/y = x \cdot (y)^{-1}$ para todo x, para todo $y \neq 0$.

(Conclusión: en todo cuerpo de números están definidas las cuatro operaciones básicas: suma, producto, resta y división con divisor ≠ 0)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

MAS

Consecuencias de los 9 axiomas de cuerpo

Se puede definir la potenciación de potencia n entera

$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ n veces, si $n \geq 1$ y x cualquiera.

En particular $0^n = 0$ si $n \geq 1$.

$x^0 = 1$ si $x \neq 0$

0^0 no se define.

significa que o bien $n > 1$ o bien $n = 1$.

significa que o bien $-n < -1$ o bien $-n = -1$

Si la potencia es entera negativa $-n \leq -1$ se define

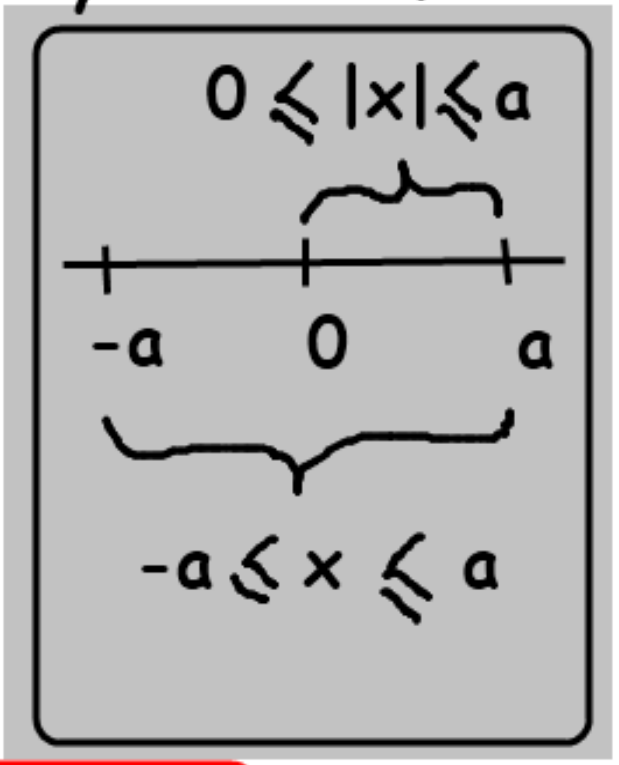
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$ para cualquier $x \neq 0$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Propiedades de la potenciación (se demuestran a partir de las propiedades de cuerpo y de la definición de potencia):

si $x \neq 0$, $y \neq 0$ — n, m, p son enteros:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$
$$x^n / x^m = x^{n-m}$$
$$x^n \cdot y^n = (xy)^n$$
$$x^n / y^n = (x/y)^n$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$



Valor absoluto: Definición $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto: $|x| \geq 0$ para todo x

$|x| = 0$ si y solo si $x = 0$; para todo x: $-|x| \leq x \leq |x|$

$a > 0$ cumple $-a \leq x \leq a$ si y solo si $|x| \leq a$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Otras propiedades del valor absoluto:

Propiedad triangular (versión clásica):

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Dem. Discutimos según el signo de x e y:

1) Si $x \geq 0$, $y \geq 0$ entonces $x+y \geq 0$ (monotonía de la suma)

Por def. de valor absoluto $\{ |x| = x,\ |y| = y,\ |x+y| = x+y$

(pues $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 0$).

Luego $|x+y| = x+y = |x| + y = |x| + |y|$

porque $x = |x|$ porque $y = |y|$

Probé que $|x+y| = |x| + |y|$ en este caso 1)

Luego vale que $|x+y| \leq |x| + |y|$ en este caso 1).

2) Si $x < 0$, $y < 0$ entonces $x+y < 0$ (probarlo a partir de la propiedad de monotonía de la suma)

2) Si $x<0$, $y<0$ entonces $x+y<0$

Por definición de valor absoluto: $|x| = -x$, $|y|=-y$

$|x+y| = -(x+y)$

(pues $x<0$, $y<0$, $x+y<0$)

$|x+y| = -(x+y) = -1(x+y) = -1x-1y = -x-y = |x|-y = |x|+(-y)$

$= |x| +(-y) = |x| +|y|$

pues $-x = |x|$

pues $-y=|y|$

La cadena de igualdades anterior prueba que

$|x+y| = |x|+|y|$ en este caso 2)

Entonces $|x+y| \leq |x| + |y|$ en este caso 2)

3) Si $x \geq 0$, $y<0$ entonces $x+y < x = |x| \leq |x| +|y|$

Además $x+y > y = -|y| = -|x|-|y|$

pues $x \geq 0$

pues $y<0$

pues $-|x| \leq 0$

pues $|y| \geq 0$

Hemos probado que $-(|x|+|y|) = -|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$

Hemos probado que $-(|x|+|y|)=-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$

Llamando $a = |x|+|y|$ se tiene

$-a \leq x+y \leq a \Rightarrow |x+y| \leq a$

Luego hemos probado que

$|x+y| \leq |x| + |y|$ en el caso 3)

4) Si $x < 0$ e $y \geq 0$, permutamos los nombres de x e y, aplicamos la conmutativa de la suma y queda el caso 3)

Hemos probado en todos los casos que

$|x+y| \leq |x| + |y|$ LQQD

Propiedad triangular (otra versión)

$|x-y| \geq |x| - |y|$

Dem. llamo $z = x-y$

$\Rightarrow x = z+y$

$|z+y| \leq |z| + |y| \Rightarrow |z+y| - |y| \leq |z| + |y| - |y| = |z|$

($z+y = x$, $z = x-y$)

$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$ LQQD

↑ versión clásica

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 03

$\mathbb{R}$ = conjunto de los números reales

$\sqrt{2}, \pi, e, \frac{21}{11}, -\frac{7}{8}, 0, -129,52 \in \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

OPERACIONES Suma y producto de reales

Verifican los 9 AXIOMAS DE CUERPO

RELACIÓN DE ORDEN $x < y$ (ó $y > x$)

Verifica los 3 AXIOMAS DE ORDEN

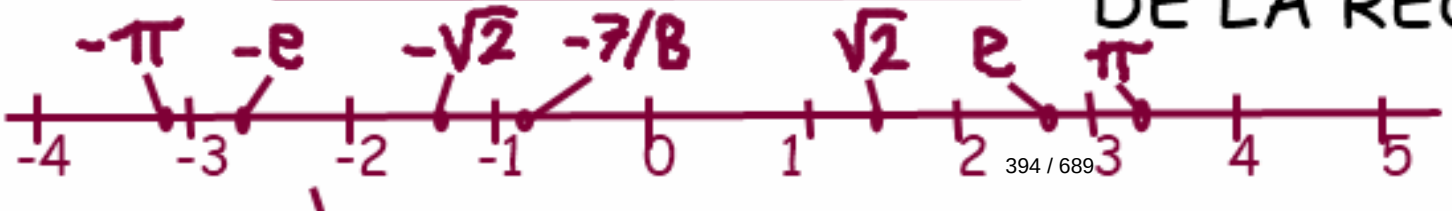
Como consecuencia los reales verifican todas las propiedades aritméticas que ya vimos

¿Para qué entonces definir los reales? Si total $\mathbb{Q}$ ya cumplía todos los 12 axiomas de cuerpo y orden.

PARA COMPLETAR TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA

Y además:

AXIOMA DE COMPLETITUD

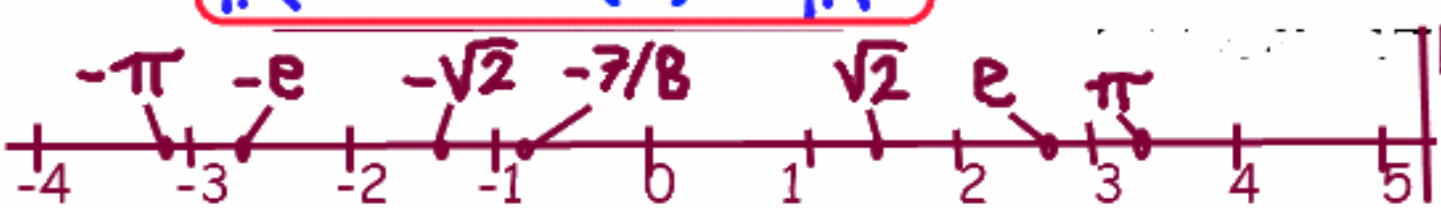


$\mathbb{R}^+ = \{ x : x > 0 \}$ conjunto de los reales positivos

$\mathbb{R}^- = \{ x : x < 0 \}$ conjunto de los reales negativos

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



$\mathbb{R}^+$ a la derecha de 0

$\mathbb{R}^-$ a la izq. de 0

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces → o bien $x \in \mathbb{Q}$ "x es racional"

→ o bien $x \notin \mathbb{Q}$ " x es irracional"

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q} \}$ = conjunto de los números reales irracionales.

TEOREMA (importante)

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es decir $\sqrt{2}$ es un irracional.

Dem. Por absurdo supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donde p, q son naturales ≥ 1.

$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$

$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ es par $\Rightarrow$ p es par (porque si fuera impar, como el producto de impares es impar, sería p^2 impar).

Teníamos { $2q^2 = p^2$ (A) ; p es par (B) }

Además p, q son naturales ≥ 1 (C)

Descomponemos p en factores primos

(B) $\Rightarrow$ $p = 2^n \cdot$ (otros factores primos impares) $= 2^n \cdot h = p$

donde $n \geq 1$ es la cantidad de veces que aparece 2 como factor primo de p; y h es el producto de los otros factores primos distintos de 2

n es natural

h es natural impar

$2^n \cdot h = p \Rightarrow p^2 = (2^n)^2 h^2 = 2^{2n} h^2$

En p^2 aparece el factor primo 2 exactamente 2n veces.

Descomponemos q en factores primos: $q = 2^m \cdot$ (otros fact.primos impares)

$q = 2^m \cdot k$

k es natural impar

donde $m \geq 0$ es la cantidad de veces que aparece 2 como factor primo de q (si q es par entonces $m \geq 1$, pero si q es impar entonces m= 0)

m es natural

(A) $\rightarrow$ $p^2 = 2q^2 = 2 \cdot (2^m)^2 k^2 = 2 \cdot 2^{2m} k^2 = 2^{2m+1} \cdot k^2$

$q = 2^m \cdot k$

En p^2 aparece el factor primo 2 exactamente 2m+1 veces

Deducimos que 2n=2m+1. El natural par 2n $\neq$ natural impar 2m+1

ABSURDO LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

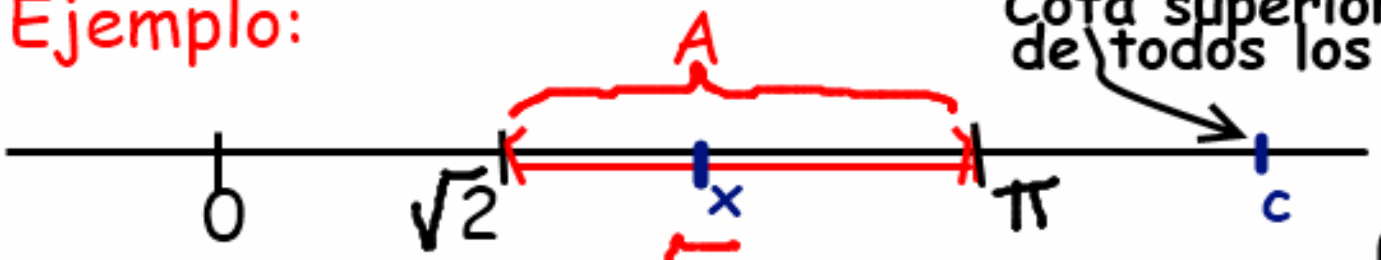
SUPREMO DE UN CONJUNTO DE REALES

Definición: Sea un conjunto A no vacío de reales (eso se simboliza $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$) El conjunto A se dice **Acotado Superiormente** si existe algún real $c \in \mathbb{R}$ (c no necesariamente pertenece a A) tal que:

$$x \leq c \quad \forall\, x \in A$$

Ese (o esos) real c se llama **"cota superior del conjunto A"**

Ejemplo:



Sea $A=\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} < x < \pi\}$

El conjunto A de este ejemplo se llama **"intervalo abierto"** de reales con **extremos** $\sqrt{2}, \pi$ y se denota: $(\sqrt{2}, \pi)$

Este conjunto A está acotado superiormente y una cota superior es c= 4.

OBSERVACIÓN: Existen infinitas cotas superiores. En particular en el ejemplo anterior, la menor de todas las cotas superiores ("cota superior mínima") es $c=\pi \approx 3,141592...$

DEFINICIÓN DE SUPREMO DE UN CONJUNTO A

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente.

Se llama **"cota superior mínima"** del conjunto A a un número real c que es la menor de las cotas superiores de A. Es decir:

- c es cota superior de A,
- Si c' es otra cota superior de A entonces $c \leq c'$

Se llama "supremo de A", y se denota supA a la cota superior mínima de A. (Es decir supA y cota superior mínima de A son sinónimos)

En el ejemplo anterior $A=(\sqrt{2}, \pi)$ $\quad supA = \pi$.

AXIOMA DE COMPLETITUD DE LOS REALES (Axioma 13)

Si A, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, es un conjunto acotado superiormente, (hipótes.)

entonces EXISTE supA (tesis)

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se puede definir como el conjunto que contiene a $\mathbb{Q}$ (entonces contiene también a $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$) que cumple los 13 axiomas siguientes: { los 9 axiomas de CUERPO / los 3 axiomas de ORDEN / el axioma de COMPLETITUD

CONSECUENCIA

(que no demostraremos): En la representación ordenada de los numeros en la recta, los reales COMPLETAN todos los puntos de la recta: es decir hay una correspondencia biunivoca entre los reales y los puntos de la recta. (la prueba usa el Axioma 13)

TEOREMA

Si A ($\phi \neq A \subset \mathbb{R}$) es un conjunto acotado de reales, entonces $\sup A$ (que existe por el Axioma de completitud), ES ÚNICO.

Dem. Sean c_1 y c_2 dos supremos de A. Hay que probar que ¿$c_1 = c_2$? (lo escribo entre signos de interrogación porque todavía no sé si es cierto, es lo que hay que probar)

Por definición de supremo de A

$c_1 = \sup A \Rightarrow$ c_1 es cota superior de A (1)

Si c' es cota superior de A entonces $c_1 \leq c'$ (2)

$c_2 = \sup A \Rightarrow$ c_2 es cota superior de A (3)

Si c' es cota superior de A entonces $c_2 \leq c'$ (4)

(2) y (3) implican que $c_1 \leq c_2$

(4) y (1) implican que $c_2 \leq c_1$

$\Rightarrow c_1 = c_2$ LQQD.

(Nota: Para probar que (2) y (3) implican que $c_1 \leq c_2$ hay que elegir $c' = c_2$

Para probar que (4) y (1) implican que $c_2 \leq c_1$ hay que elegir $c' = c_1$)

TEOREMA (muy importante)

CARACTERIZACIÓN DEL SUPREMO

Sea A un conjunto acotado superiormente, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$

Si $c = \sup A$ entonces

TESIS) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$$c - \varepsilon < x \leq c \quad (1)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Interpretación gráfica del enunciado:

Aquí hay algún(os) punto(s) de A

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ dado fijo. Hay que probar que existe $x \in A$ tal que x cumple (1). POR ABSURDO, suponemos que no existe $x \in A$ que cumpla (1). Entonces $\forall\, x \in A$ se cumple no (1). Es decir $\forall\, x \in A$

- o bien $x \leq c - \varepsilon$ (2)
- o bien $x > c$ (3)

Por hipótesis $c = \sup A$. Por def. de supremo c es cota superior de A (4)

(4) $\Rightarrow x \leq c \quad \forall x \in A$. Luego x no cumple (3) .

Todo x en A cumple o bien (2) o (3)
Todo x en A no cumple (3)

$\Rightarrow$ Todo x en A cumple (2), o sea $x \leq c - \varepsilon \quad \forall x \in A$

Todo x en A cumple (2), o sea $x \leq c - \varepsilon \quad \forall x \in A$

$\Longrightarrow$ Por definición de cota superior

$c - \varepsilon$ es una cota sup de A

Por hipótesis c= sup A. Por definición de supremo:

Si c' es cota superior de A entonces $c \leq c'$

Tomo $c' = c - \varepsilon$. Entonces he probado que $c \leq c - \varepsilon$

Pero por otro lado como $\varepsilon > 0$ tengo $c - \varepsilon < c$ → absurdo

LQQD

TEOREMA RECÍPROCO (muy importante):

Sea A un conjunto acotado superiormente $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$

Si c es una cota superior de A que cumple

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$$c - \varepsilon < x \leq c \quad (1)$$

entonces TESIS) c = sup A

Dem. Por definición de supremo hay que probar que

ⓐ c es cota superior de A

ⓑ toda otra cota superior c' cumple $c \leq c'$.

ⓐ se cumple por hipótesis. Solo falta probar ⓑ.

Hay que probar (b) toda otra cota superior c' cumple $c \leq c'$?
Como c' es cota superior de A, se cumple

$x \leq c' \quad \forall x \in A \quad (2)$

Por hipótesis: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$c - \varepsilon < x \leq c \quad (1)$

Juntando la primera mitad de (1) con (2) se obtiene:

$c - \varepsilon < x \leq c' \Rightarrow c - \varepsilon < c'$ para todo $\varepsilon > 0$

Luego $c - c' < \varepsilon$ para todo número real positivo ε.
Los únicos reales que son estrictamente menores que cualquier número positivo son el 0 y los negativos $\Rightarrow c - c' \leq 0$ $c \leq c'$ LQQD

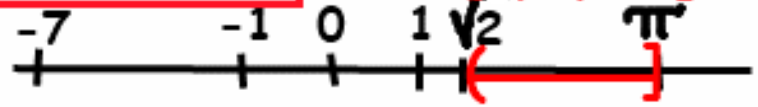
DEFINICIÓN (Conjunto de reales acotado inferiormente)
Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice que el conjunto A está acotado inferiorm. si existe un real $c \in \mathbb{R}$ tal que

$c \leq x \quad \forall x \in A$

Ese (o esos reales c se llaman cotas inferiores de A)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLO: $A = (\sqrt{2}, \pi]$ intervalo semiabierto a la izquierda de reales con extremos $\sqrt{2}$ y π.



0 es cota inferior de A. 1 también, 1/2 también, -7 también, etc
La mayor de las cotas inferiores ("cota inferior máxima") en este ejemplo es $\sqrt{2}$ Hay infinitas cotas inferiores.

DEFINICIÓN DE ÍNFIMO DE UN CONJUNTO

Sea A ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$) un conjunto acotado inferiormente. Se llama "ínfimo de A" o "cota inferior máxima" y se denota $\inf A$ a un número real c que sea la mayor de las cotas inferiores de A.

Es decir $c = \inf A$ cuando:

- c es cota inferior de A y además:
- Si c' es otra cota inferior de A entonces $c' \leq c$

TEOREMA (no es axioma, se puede demostrar)

Si A es un conjunto no vacío de reales acotado inferiormente entonces EXISTE Y ES ÚNICO $\inf A \in \mathbb{R}$

(La demostración de existencia usa el axioma de completitud de los reales: para deducir que existe supremo de un conjunto auxiliar B acotado superiormente. La demostración de unicidad es similar a la de unicidad del supremo. **EJERCICIO**: Demostrar la unicidad del ínfimo imitando la demo de unicidad del supremo.)

UNIVERSIDAD

TEOREMA

CARACTERIZACIÓN DEL ÍNFIMO

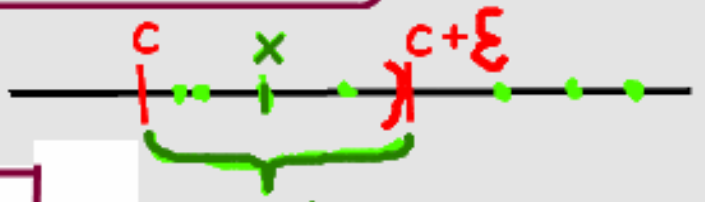
Sea A conjunto acotado inferiormente, $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$.

Sea $c = \inf A$. Entonces:

TESIS: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$$c \leqslant x < c + \varepsilon$$

Interpretación gráfica del enunciado:



Aquí hay punto(s) x del conjunto A

RECÍPROCO

Si c es cota inferior de A y cumple

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que

$$c \leqslant x < c + \varepsilon$$

entonces $c = \inf A$

Demostración EJERCICIO,
se sugiere imitar la
demostración del teorema
de caracterización del supremo, pero cambiando supremo por ínfimo, y algunas de las desigualdades, según sea necesario.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 04

RAIZ CUADRADA REAL

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN DE RAIZ CUADRADA REAL. Sea y un núm. real dado.
Se dice que el número real **x es una raiz cuadrada real de y** si $x^2 = y$.
Se denota $x = \sqrt{y}$

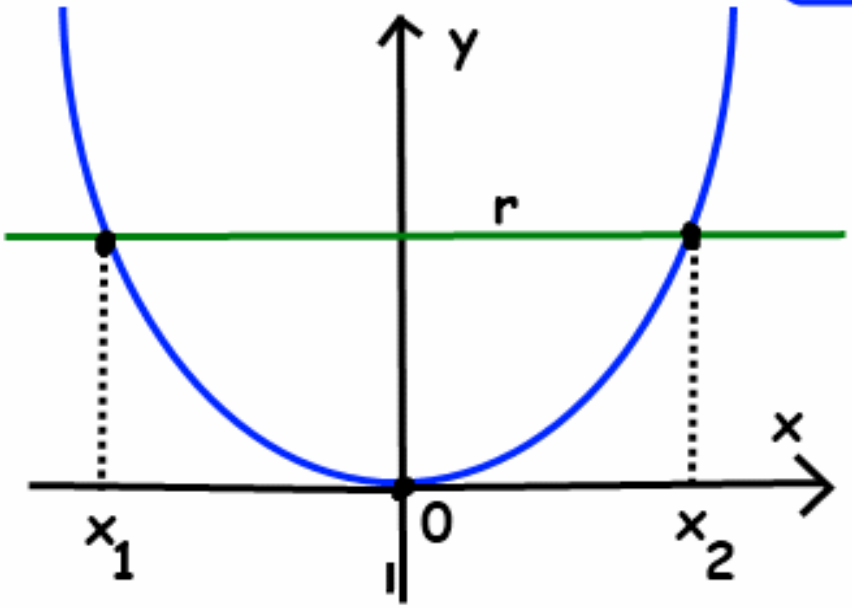
TEOREMA:

cuando y= 0, $\sqrt{y}$ es solo 0. Es decir $\sqrt{0} = 0$.
cuando y < 0 NO existe $\sqrt{y}$
cuando y >0 EXisten dos reales $+\sqrt{y}$, $-\sqrt{y}$ (uno positivo y otro neg.)

COROLARIO
si $y \geq 0$ entonces existe único real $\sqrt{y} \geq 0$.
se denota $y^{1/2} = \sqrt{y}$

Observación: Hallar las raíces cuadradas reales de y es encontrar las raíces del polinomio $x^2 - y$, con y constante real dada.

Dem. Sea y real dado cualquiera. Para hallar las raíces cuadradas reales de y, si existe alguna, hay que encontrar la incógnita x que verifica $x^2 = y$ (con y fijo dado). Los puntos del plano que tienen abscisa x, ordenada y, que cumplen $y = x^2$ están en una parábola como en la fig.



Los puntos del plano que tienen ordenada y (fija constante dada) están en la recta horizontal r de la figura.

Entonces hay que encontrar los puntos intersección parábola $\cap$ r.

- Si la constante $y < 0$, no hay intersección de la recta r con la parábola. Entonces no hay ninguna solución x. No existe raiz cuadrada real de $y<0$.
- Si la constante $y = 0$, hay una sola intersección (el origen) parábola r. Entonces hay una única solución que es $x = 0$. Luego $\sqrt{0} = 0$.
- Si la constante $y>0$, hay dos puntos de intersección parábola $\cap$ r. Como la parábola es simétrica respecto al eje vertical, las dos soluciones x_1 , x_2 son una positiva y otra negativa, una la opuesta de la otra (como números reales). LQQD.

Notaciones sobre raíz cuadrada real.

exponente 1/2

$\sqrt{y} = +\sqrt{y} \geq 0$ si $y \geq 0$

$-\sqrt{y} < 0$ si $y \geq 0$

$\sqrt{y} \nexists$ si $y < 0$

$y^{1/2} = \sqrt{y} = +\sqrt{y}$ si $y \geq 0$

$-(y^{1/2}) = -\sqrt{y}$ si $y \geq 0$

$y^{1/2} \nexists$ si $y < 0$

$y^{1/2}$ es siempre mayor o igual que CERO

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

$(x^2)^{1/2} = \sqrt{x^2} = |x|$ (VALOR ABSOLUTO DE X) $\begin{cases} = x & \text{SI } x \geq 0 \\ = -x \neq x & \text{SI } x < 0 \end{cases}$

O SEA $\sqrt{x^2} \neq x$ SI $x < 0$

Ejemplo

$(7^2)^{1/2} = \sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$

$[(-7)^2]^{1/2} = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 \neq -7$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

RAÍZ n-ÉSIMA REAL.

DEFINICIÓN DE RAÍZ n-ÉSIMA REAL. Sea y un núm. real dado. Se dice que el número real **x es una raíz n-ésima real de y** si $x^n = y$.

Se denot $x = \sqrt[n]{y}$

TEOREMA: **Si n es impar** entonces cualquiera sea y real existe un único real $\sqrt[n]{y}$. Tiene el mismo signo que y.

Si n es par cuando y= 0, $\sqrt[n]{y}$ es solo 0. Es decir $\sqrt[n]{0} = 0$.

cuando y < 0 NO existe $\sqrt[n]{y}$

cuando y >0 EXisten dos reales + $\sqrt[n]{y}$, $-\sqrt[n]{y}$ (uno positivo y otro neg.)

COROLARIO Cualquiera sea el natural $n \geq 2$, si $y \geq 0$ entonces existe único real $\sqrt[n]{y} \geq 0$.

se denota $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$

Observación: Hallar las raíces n-ésimas reales de y es encontrar las raíces del polinomio $x^n - y$, con y constante real dada.

Potenciación de exponente m/n

a se llama base

m/n exponente

Sea a real ≥ 0, Sea m/n racional (m entero, n natural ≥ 1)

DEFINICIÓN

- Si $m \geq 1$:

$$a^{m/n} \overset{\text{definición}}{=} \sqrt[n]{a^m} \overset{\text{propiedad que se demuestra}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

- Si $m = 0$ y $a > 0$

$$a^{m/n} = a^0 = 1 \quad \text{(definición)}$$

Si $m = 0$ y $a = 0$ $\quad 0^0$ no se define. No existe por convención.

Si $-m \leq -1$

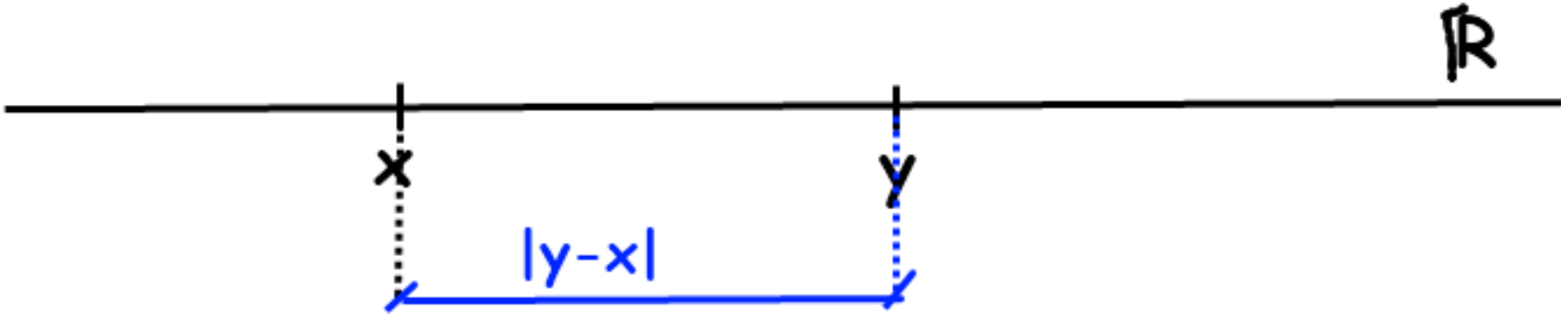
$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

OBSERVACIÓN:

$a > 0 \Rightarrow a^{m/n} > 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TOPOLOGÍA EN LA RECTA REAL



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

dist(x,y) = longitud del intervalo con extremos x e y

En lo que sigue identificamos los puntos de la recta con los reales como si fueran los mismos objetos. Cada punto un real. Cada real un punto. Dos puntos distintos : dos reales distintos

DEFINICIÓN Dados dos puntos x, y en ℝ se llama **distancia entre x e y dist(x,y),** o también longitud del intervalo con extremos x e y al número

$$\text{dist}(x,y) = |y-x|$$

donde |. | denota el valor absoluto

TEOREMA (Propiedades características de la distancia entre puntos)

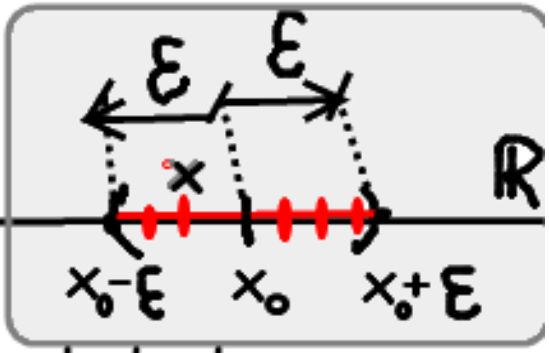
1) Positividad:
- $dist(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
- $dist(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2)Simetría: $dist(x,y) = dist(y,x) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

3)Triangular: $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$

$dist(x,y) \leq dist(x,z) + dist(z,y)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



DEFINICIÓN DE ENTORNO

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto dado. Sea $\varepsilon > 0$ un real dado.
Se llama ENTORNO DE CENTRO x_0 y radio ε (abierto)
o también VECINDAD DE CENTRO x_0 y radio ε (abierta
o también BOLA DE CENTRO x_0 y radio ε (abierta)
AL siguiente CONJUNTO DE PUNTOS en la recta $\mathbb{R}$.

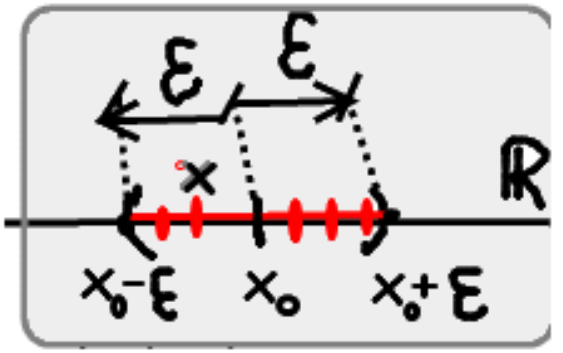
$$E_\varepsilon(x) = \{ x \in R : dist(x_0, x) < \varepsilon \}$$

Es el conjunto de todos los puntos x que distan de x_0 menos que ε (ver figura)

TEOREMA En la recta real $\mathbb{R}$:

El entorno de centro x_0 y radio $\varepsilon > 0$ es:

$$E_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon\ )$$ = intervalo abierto de extremos $x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon$



Dem.

Por definición de entorno:

$x \in E_\varepsilon(x_0)$ si y solo si $dist(x_0, x) < \varepsilon$.

Por definición de distancia:

$dist(x_0, x) = |x - x_0|$ Entonces $dist(x_0, x) < \varepsilon$ si y solo si $|x - x_0| < \varepsilon$. Por la propiedad de valor absoluto de un real u

$|u| < \varepsilon$ si y solo si $-\varepsilon < u < \varepsilon$. Entonces usando $u = x - x_0$

$|x - x_0| < \varepsilon$ si y solo si $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$.

Hasta ahora probamos que

$x \in E_\varepsilon(x) \iff -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \iff x \in (x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 - \varepsilon)$

Por definición de intervalo

sumo x_0 a los tres miembros de la desigualdad

Entonces probamos que $x \in E_\varepsilon(x)$ si y solo si $x \in (x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 - \varepsilon)$ LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 05

II NÚMEROS COMPLEJOS

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

SUBTEMAS:

- Definición de complejos, representación gráfica, operaciones módulo, argumento, conjugación. Estructura de cuerpo.
- Raiz cuadrada y raiz n-ésima compleja.
  Teor. fundamental del Álgebra (solo enunciado)
- Transformaciones de Moebius y su interpretación gráfica
- Exponencial compleja y logaritmo complejo

bibliografía para el curso:

"Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

Para el tema II: capítulo 24(todo)

DEFINICIÓN DE COMPLEJO

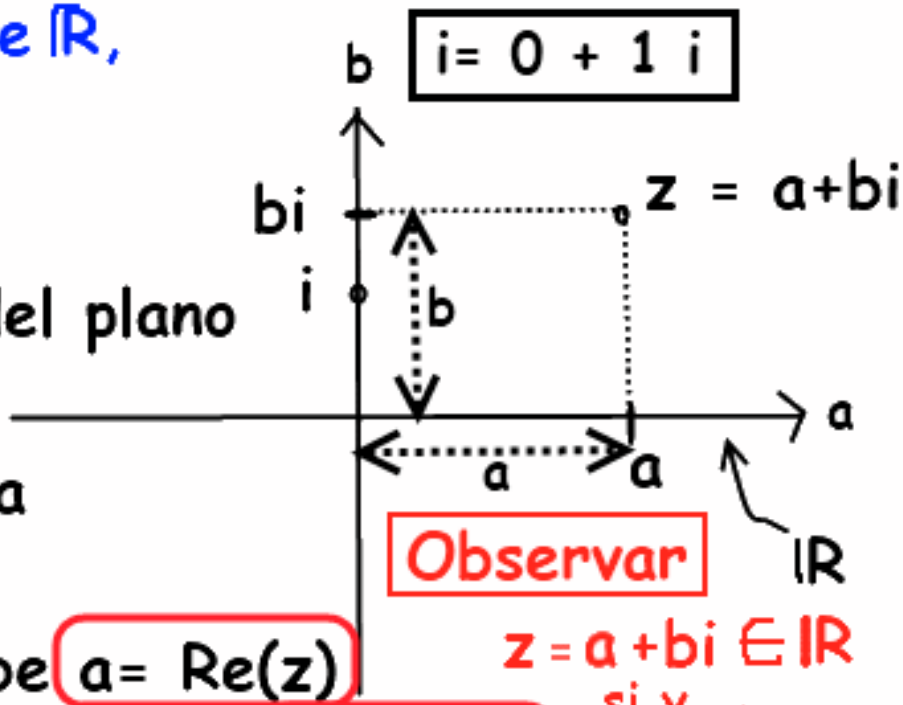
Observación previa En el cuerpo de los reales no existe raiz cuadrada de los números negativos

En particular $\nexists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$

DEFINICIÓN Sea $i \notin \mathbb{R}$ (llamada unidad imaginaria) tal que

$$i^2 = -1$$

Representamos en el plano la recta real $\mathbb{R}$ horizontal (todos con ordenada b= 0) y el punto i fuera de $\mathbb{R}$, con abscisa a= 0 y ordenada b= 1.



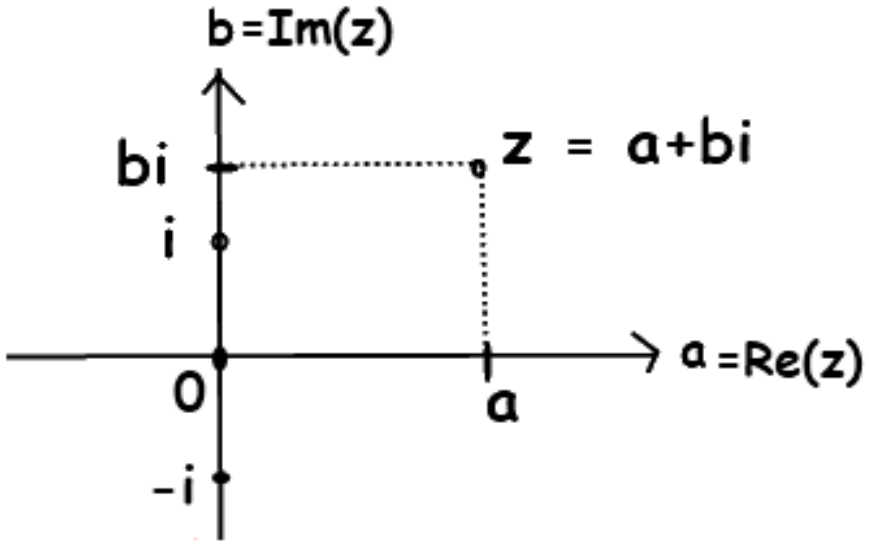
DEFINICIÓN

Un "número complejo" es un punto z del plano con abscisa (real) a cualquiera y ordenada (también real) b cualquiera

Se denota $z = a + b\,i$ $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$

a se llama parte real de z y se escribe $a = Re(z)$

b se llama parte imaginaria de z y se escribe $b = Im(z)$



Los puntos z del eje vertical a= 0 cumplen Re(z) = 0
y se llaman Imaginarios puros.
Son de la forma z= bi (b real)
El eje vertical se llama eje imaginario.

En particular el punto de ordenada -1 en el eje imaginario es $0-1i = -i$

Los puntos z del eje horizontal son Reales
Cumplen Im(z) = 0
Son de la forma z= a (a real)
El eje horizontal se llama eje real, se denota como $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ = conjunto de los números complejos = conjunto de puntos del plano

Observar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

La intersección de los ejes real e imaginario es el origen "Complejo Cero" $z= 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

MÓDULO Y ARGUMENTO

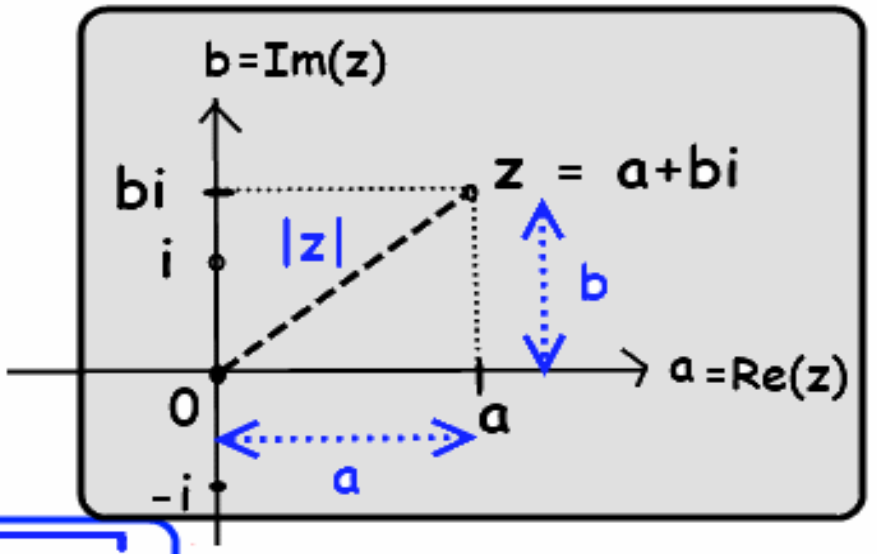
DEFINICIÓN

Módulo del complejo z es la distancia del punto z al origen 0

$|z|$ denota módulo del complejo z

$|z|$ es siempre un número real ≥ 0

$|z| = 0$ si y solo si $z = 0$



Por el teorema de Pitágoras: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Siendo

$a = Re(z)$, $b = Im(z)$

$z = a + b\,i$, $a \in R$, $b \in R$

DEFINICIÓN

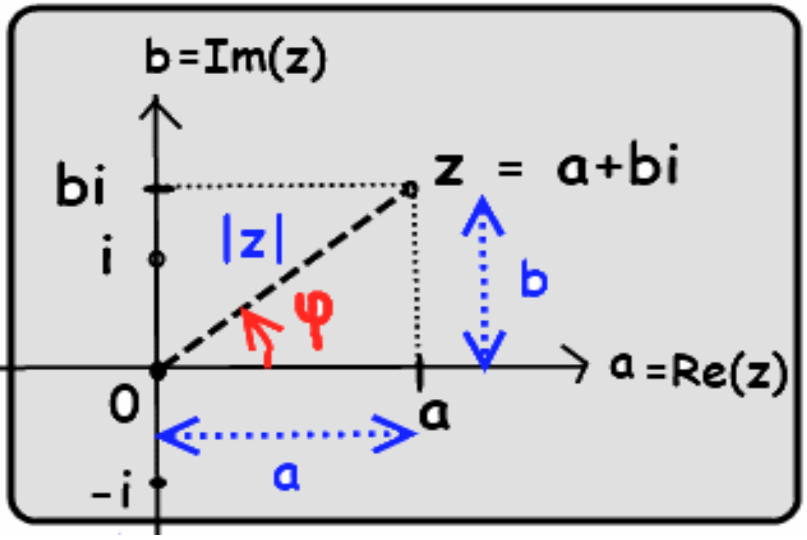
Se define solo si $z \neq 0$:

Argumento del complejo z es el ángulo φ (ver figura) medido en radianes, positivo en sentido antihorario (y negativo si es en sentido horario)

arg(z) denota el argumento del complejo z

Siempre es número real. Hay infinitos arg(z)

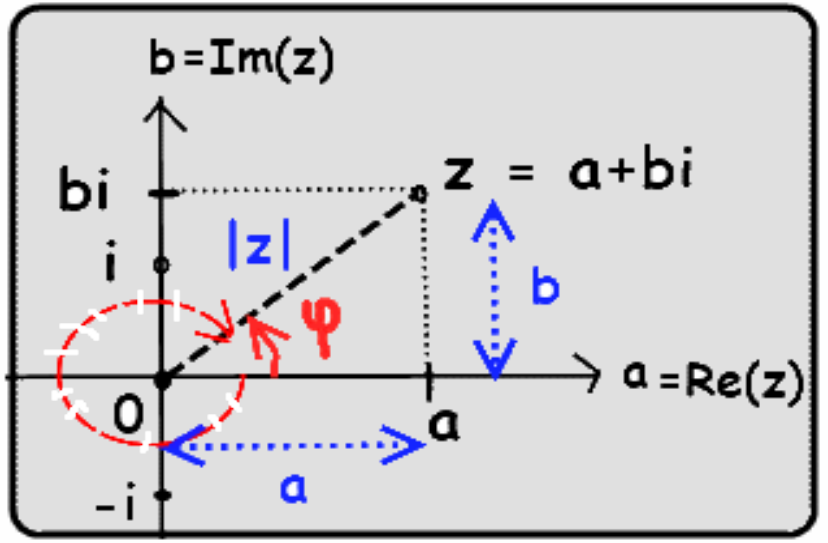
$\arg(z) = \varphi + k\,(2\pi) \quad \forall k \in Z$



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Para cada complejo $z \neq 0$ existen infinitos arg(z), pero uno solo φ_0 tal que $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$

$$\arg(z) = \varphi_0 + k\,(2\pi) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$



Ejemplo: Si $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ (45 grados) entonces b=a>0, por ejemplo z= 1+i

$\arg(z) = \pi/4 + k\,(2\pi) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$

En particular, cuando k=-1 se tiene $-\frac{7}{4}\pi$ es un arg(z)

es lo mismo girar el semieje real pos. 45 grados = $\pi/4$ (en sentido antihorario), que (45-360) grados = $-\frac{7}{4}\pi$ (en sentido horario).

CÁLCULO DEL ARGUMENTO

En el triángulo rectángulo 0az:

$\cos\varphi = a/|z| = Re(z)/|z|$

$\operatorname{sen}\varphi = b/|z| = Im(z)/|z|$

$\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{sen}\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$

$\operatorname{tg}\varphi = b/a = Im(z)/Re(z)$

¡CUIDADO! $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg}\varphi = b/a$

pero $\varphi + \pi$ NO ES arg(z)

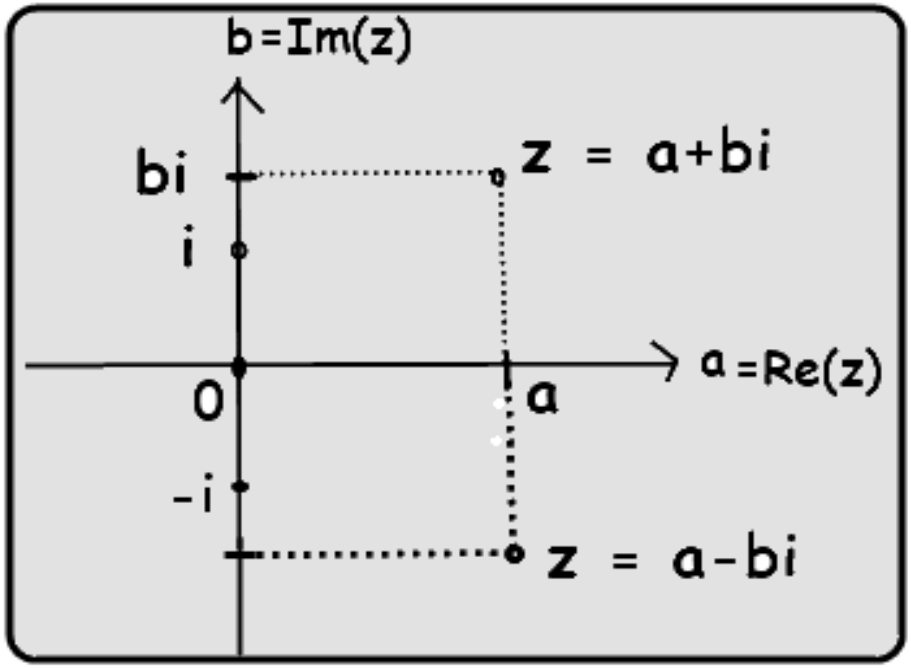
En general NO es cierto que si $\operatorname{tg}\alpha = b/a$ entonces α deba ser arg(z)

Cierto siempre: $\varphi = \text{Arctg}(b/a)$ si $a>0$, ó $\varphi = \pi + \text{Arctg}(b/a)$ si $a<0$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Conjugado de z. Si $z = a+b\,i$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ se llama conjugado de z al complejo $\overline{z} = a-bi$

Entonces $z = \overline{z}$ si y solo si $b = 0$, o sea z es real: $z=a$



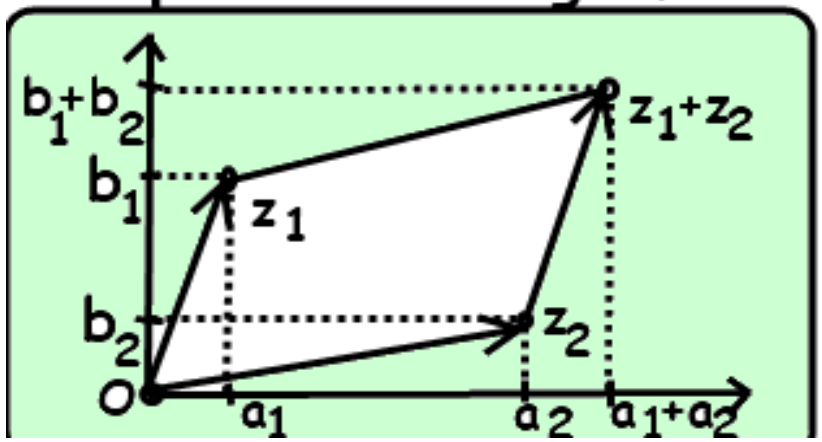
La transformación que a cada z del plano complejo $\mathbb{C}$ le hace corresponder z, es la simetría axial de eje horizontal (eje real)

OPERACIONES CON COMPLEJOS

Sean $z_1 = a_1+b_1 i$, $z_2 = a_2+b_2 i$.

SUMA: $z_1 + z_2 = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$

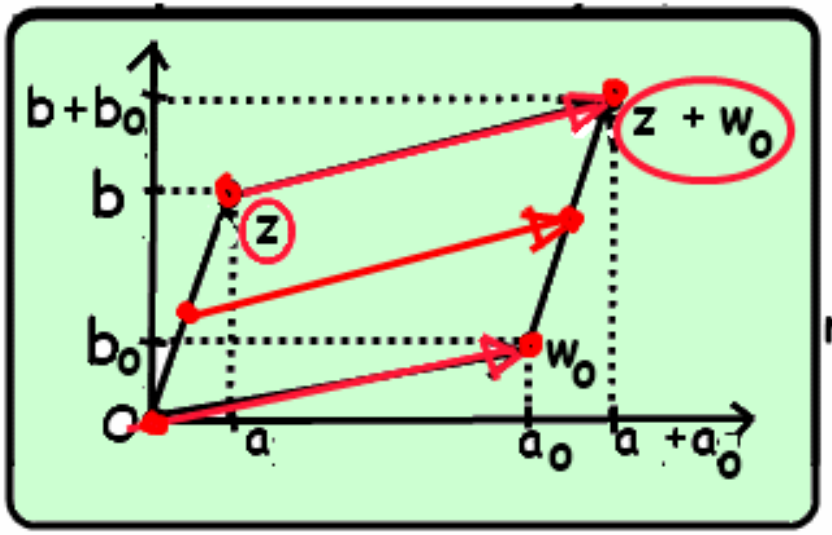
Representación gráfica de la suma de complejos (si 0, z_1, z_2 no están alineados)



Regla del paralelogramo:

z_1+z_2 es el vértice opuesto a O del paralelogramo cuyos otros tres vértices son

O, z_1 y z_2 .



Consecuencia de la regla del paralelog

Sea w_0 un complejo fijo dado

La aplicación que a cada complejo genérico z le hace corresponder $z + w_0$

$$z \longmapsto z + w_0$$

es UNA TRASLACIÓN

de los puntos z del plano con "Vector" de traslación $\overrightarrow{0w_0}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

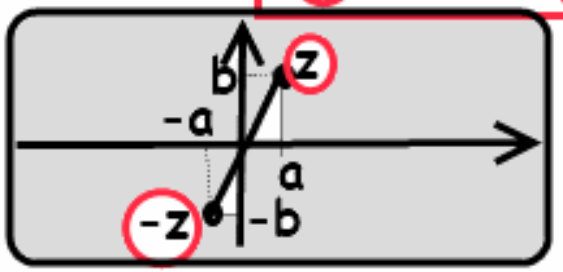
PROPIEDADES DE LA SUMA DE COMPLEJOS

Conmutativa, Asociativa, Neutro $z + 0 = 0 + z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

y Opuesto: $\forall z \in C$ existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$

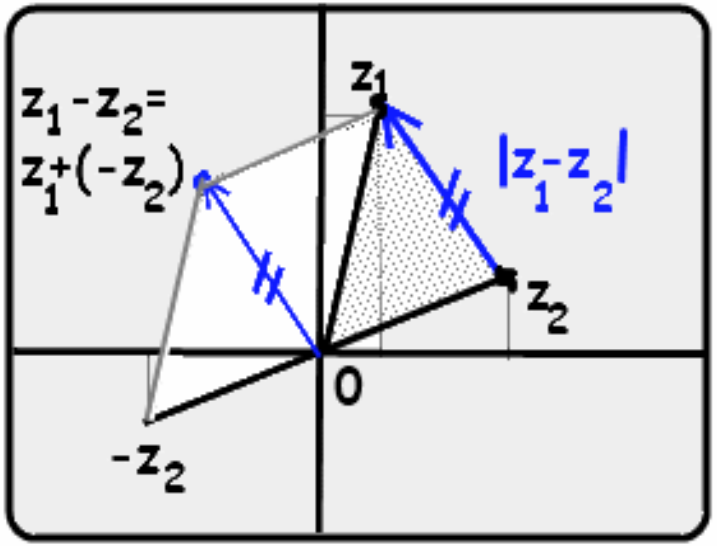
Consecuencia: Se denota $z - z = z + (-z)$ que se llama resta.

La aplicación que a cada complejo genérico z le hace corresponder su opuesto: $z \longmapsto -z$ es la SIMETRÍA CENTRAL respecto al origen 0



pues $z = a + bi$ ↘ $-z = -a - bi$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



Interpretación gráfica de la resta

$z_1 - z_2$ es el punto de la figura que se obtiene por la regla del paralelog. aplicada a los puntos 0, z_1 y $-z_2$.

El vector $\overrightarrow{0, z_1 - z_2}$ es el mismo vector que va del extremo inicial z_2 al final z_1. $\overrightarrow{z_2 z_1}$

Luego:

$|z_1 - z_2|$ = distancia en el plano entre los puntos z_1 y z_2.

Consecuencia:

TEOREMA (propiedad triangular para el módulo de complejos)

(A) Versión con resta: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(B) Versión clásica (con suma): $|z_2 + z_3| \leq |z_2| + |z_3| \quad \forall\, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Dem. (geométrica) Tesis (A): Sabemos que cada lado de un triángulo es mayor que la resta de los otros dos. En el triángulo $0, z_2, z_1$ la longitud del lado z_1, z_2 vimos que es $|z_1 - z_2|$; la longitud del lado $0z_1$ es $|z_1|$ y la del lado $0z_2$ es $|z_2|$ Luego: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ LQQD parte (A).

Tesis (B): Usemos la tesis (A) ya demostrada, llamando $z_3 = z_1 - z_2$, o sea $z_1 = z_2 + z_3 \Rightarrow |z_3| \geq |z_2 + z_3| - |z_2|$. Sumando $|z_2| \Rightarrow |z_2| + |z_3| \geq |z_2 + z_3|$ LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PRODUCTO DE COMPLEJOS. Definición

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, se define

$$z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) \quad (P)$$

Observar que si $z_1 = 0$ ó $z_2 = 0$ entonces $z_1 z_2 = 0$

Proposición: $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (A)

Si $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ → $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (B)

El módulo del producto es el producto de los módulos. El argumento del producto es la suma de los argumentos

Dem. $|z_1|^2 = a_1^2 + b_1^2$, $|z_2|^2 = a_2^2 + b_2^2$ $\Rightarrow |z_1|^2|z_2|^2 = (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$ (C)

$(P) \Rightarrow |z_1 z_2|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2$ (D)

Usando la fórmula del cuadrado de un binomio en (D) y sacando paréntesis en (C) se llega a que (D) = (C) Entonces hemos probado que

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Como son números reales no negativos, tomamos raíz cuadrada real ≥ 0 a ambos miembros de la igualdad anterior y queda probado (A)

Ahora probemos (B) que demostrar que Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ los argumentos de z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2$ respectiv. Hay ¿$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$? Para eso basta demostrar las siguientes dos igualdades ¿ $\cos \varphi_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$?, ¿ $\operatorname{sen} \varphi_3 = \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$? (E)

Teníamos que probar ¿ $\cos\varphi_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$?, ¿ $\operatorname{sen}\varphi_3 = \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$? (E) siendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ los argumentos de z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2$ respectiv.

Por las fórmulas del argumento

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_1}{|z_1|}, \quad \operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{b_1}{|z_1|} \quad (G)$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{a_2}{|z_2|}, \quad \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b_2}{|z_2|} \quad (H)$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{Re(z_1 z_2)}{|z_1 z_2|} = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{|z_1||z_2|} \quad (J)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{Im(z_1 z_2)}{|z_1 z_2|} = \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{|z_1||z_2|} \quad (K)$$

Por las fórmulas trigonométricas

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \quad (S)$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \quad (T)$$

Sustituyendo las fórmulas (G) y (H) dentro de (S) (T) queda

(S) = (J)

(T) = (K)

(verificar esas cuentas como ejercicio)

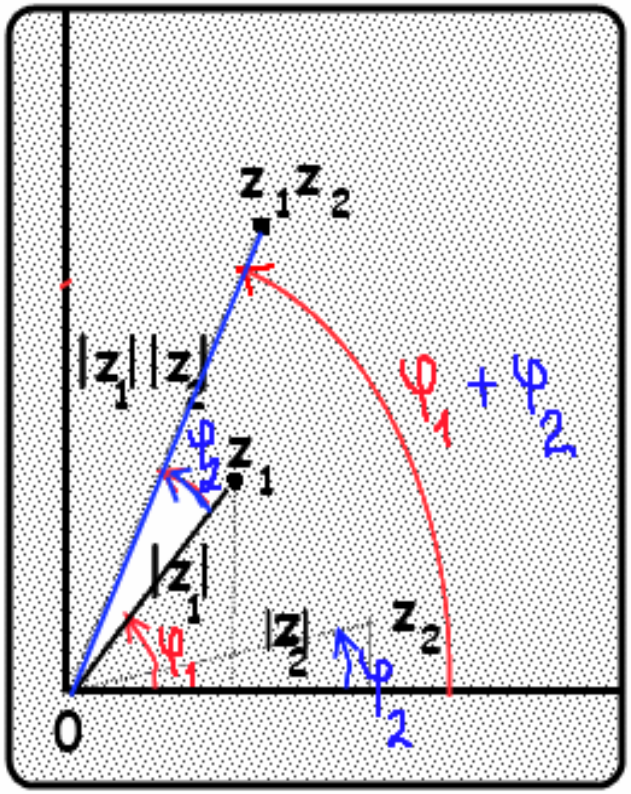
Entonces

(S) = $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_3$ = (J)

(T) = $\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sen}\varphi_3$ = (K)

y hemos probado las igualdades (E). LQQD

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO DE COMPLEJOS



El argumento del producto es la suma de los argumentos. Entonces la semirrecta

$\overrightarrow{0, z_1 z_2}$ se obtiene de la semirrecta $\overrightarrow{0\ z_1}$ mediante un **GIRO** con centro en el origen y ángulo igual a $\varphi_2 = \arg(z_2)$

El módulo del producto es el producto de los módulos. Entonces la distancia de 0 hasta $z_1 z_2$ se obtiene de la distancia de 0 hasta z_1 multiplicándola por $|z_2| = \rho$

La transformación en el plano que deja fijo al origen y multiplica todas las distancias al origen por una constante ρ se llama **HOMOTECIA de centro 0 y razón ρ**.

Concluimos que la transformación que lleva el punto genérico z_1 al punto $z_1 z_2$ (con z_2 constante) es la composición de un giro de centro en el origen y ángulo $\arg(z_2)$ compuesta con una homotecia con centro en 0 y razón $|z_2|$

SE LLAMA ROTOHOMOTECIA de centro O, ángulo $\arg(z_2)$ y razón $|z_2|$

Si $\arg(z_2) > 0$ el giro es en sentido antihorario; si $\arg(z_2) < 0$ es en sentido horario.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

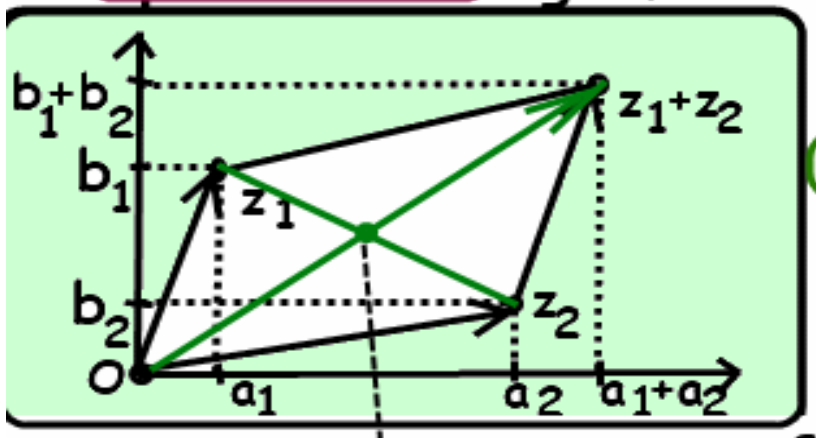
ALGUNAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

IDENTIDAD: Deja todos los puntos z fijos $z \longmapsto z = 1z = z + 0$
(es lo mismo que un giro de ángulo 0, una homotecia de razón 1, y una traslación de vector nulo)

GIRO de ángulo φ y centro 0 $\quad z \longmapsto z\, w_0$ donde w_0 es el complejo con módulo 1 y arg $w_0 = \varphi$ o sea $w_0 = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$.

HOMOTECIA de razón ρ y centro 0 $\quad z \longmapsto z\, w_0$ donde w_0 es el complejo con módulo ρ y arg $w_0 = 0$ o sea $w_0 = \rho + 0\,i = \rho$ real

TRASLACIÓN DE vector w_0 $\quad z \longmapsto z + w_0$



punto medio del segmento que une z_1 con z_2

LONGITUD DEL SEGMENTO $\overline{z_1, z_2} = |z_1 - z_2|$

PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO $\overline{z_1, z_2}$ es

$$\frac{z_1 + z_2}{2}$$

pues por la regla del paralelogramo $z_1 + z_2$ es su cuarto vértice y su centro se obtiene multiplicando por (1/2) la distancia de $z_1 + z_2$ al origen (homotecia de centro en 0 y razón 1/2)

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE COMPLEJOS (se verifican aplicando la definición del producto de complejos)

Conmutativa, Asociativa, Neutro: $z\,1 = 1\,z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

e Inverso Si $z \neq 0$ entonces existe z^{-1} (también denotado como $1/z$) tal que

$$z\,\bar{z}^{-1} = \bar{z}^{-1} z = 1$$

Distributiva respecto a la suma: $(z_1 + z_2)\,z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Como la Suma también verificaba las propiedades Conmutativa, Asociativa, Neutro y Opuesto, entonces

LOS COMPLEJOS CON LAS OPERACIONES DE SUMA Y PRODUCTO DEFINIDAS ANTES FORMAN UN CUERPO.

PROPIEDAD IMPORTANTE: $|z|^2 = z\,\bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Dem. Si $z = a + b\,i$ entonces $\bar{z} = a - b\,i$

$$z\,\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 + i(-ab + ab) = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad \text{LQQD}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTRAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

Ya vimos que SIMETRÍA AXIAL de eje REAL es $z \longmapsto \bar{z}$ (CONJUGACIÓN)

SIMETRÍA CENTRAL de centro en O es $z \longmapsto -z$ (OPOSICIÓN)

Entonces SIMETRÍA AXIAL de eje IMAGINARIO (eje vertical por O) es

$$z \longmapsto -\bar{z} = -(\bar{z}) = \overline{(-z)}$$

pues la simetría axial con eje vertical por O es la composición de la simetría axial con eje horizontal por O con la simetría central de centro en O.

Consecuencia de las propiedades de cuerpo de los complejos:

Se puede definir la división o cociente con divisor $\neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\, z_2^{-1}$$ (por definición)

Ejemplo de cálculo del cociente:

Hallar partes real e imaginaria de $z = (3-7i)/(2+8i)$.

$$z = \frac{3-7i}{2+8i} = \frac{(3-7i)(2-8i)}{(2+8i)(2-8i)} = \frac{6-56+i(-24-14)}{2^2+8^2}$$

$$z = \frac{-50-38\,i}{68} = \frac{-50}{68} + \frac{-38}{68}\,i = -\frac{25}{34} - \frac{19}{34}\,i$$

Entonces Re(z) = -25/34, Im(z) = -19/34.

Empezamos multiplicando dividendo z_1 y divisor z_2 por el conjugado $\overline{z}_2$ del divisor z_2.

Después usamos la propiedad de que $z_2\,\overline{z}_2 = |z_2|^2 = (\mathrm{Re}\ z_2)^2 + (\mathrm{Im}\ z_2)^2$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 06

En los números reales no existe la raiz cuadrada de los números negativos. En cambio, en los números complejos -1 tiene dos raíces cuadradas i , $-i$ pues ambas son soluciones de la ecuación $x^2 = -1$, es decir raíces del polinomio de segundo grado x^2+1.
En general, cualquier número real negativo $-r$ con $r > 0$, tiene en $\mathbb{C}$ dos raíces cuadradas que son $\sqrt{r}\, i$, $-\sqrt{r}\, i$ (donde $\sqrt{r}$ es la raiz cuadrada real positiva del real $r>0$). Es decir el polinomio de segundo grado $x^2 + r = 0$, con r real >0, tiene dos raíces en $\mathbb{C}$, mientras en $\mathbb{R}$ no tenía ninguna.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos (en particular con coeficientes reales) tiene exactamente n raíces complejas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, repitiendo cada una tantas veces como su multiplicidad. Además

$$P(x) = a\,(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)$$

Ojo: puede haber factores repetidos, la cantidad de veces que está repetido el factor $(x-x_j)$ es la multiplicidad de la raiz x_j.

($a \neq 0$ es el coeficiente del término de grado n en el polinomio $P(x)$ dado)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

RAIZ CUADRADA COMPLEJA

Sea w un complejo dado fijo. Se llaman raíces cuadradas complejas de w (se denotan $z=\sqrt{w}$) todos los complejos z tales que $z^2 = w$. Es decir todas las raíces del polinomio de segundo grado $z^2 - w$ (donde w es el complejo dato, fijo)

TEOREMA

Si $w = 0$, entonces $\sqrt{0} = 0$ (única raíz cuadrada de cero es cero)

Si $w \neq 0$, entonces existen exactamente dos raíces cuadradas complejas distintas, una la opuesta de la otra (en el plano complejo)

$\sqrt{w} \Rightarrow z_1 = a + bi$

$z_2 = -z_1 = -a - bi$

Dem. Si $w = 0$, la ecuación $z^2 = w$, o sea $z \cdot z = 0$. Esta se verifica si y solo si $z = 0$. Luego la única raiz cuadrada de cero es cero.

Si $w \neq 0$, sea φ un arg(w). La ecuación $z^2 = w$ es $z \cdot z = w$. Por la propiedad del producto en módulos y argumentos $z \cdot z = w \Rightarrow |z||z| = |w|$ real $>0 \Rightarrow |z|$ real >0

$\arg(z) + \arg(z) = \arg(w) = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (A)

Entonces $|z| = +\sqrt{|w|}$ real positivo (raíz cuadrada real >0 porque $|z|$ es real >0)

(A) $\Rightarrow \arg(z) = \varphi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si k es par (por ejemplo 0) un arg(z) es $\varphi/2$

En ese caso se obtiene z_1 de modulo $+\sqrt{|w|}$ y argumento $= \varphi/2$.

Si k es impar (por ejem. 1) un $\arg(z) = \varphi/2 + \pi$. En ese caso se obtiene $z_2 = -z_1$ LQQD

EJEMPLO Encontrar las dos raíces cuadradas complejas de $w = 1 + \sqrt{3}\cdot i$

$z = a+bi$, $z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$ si y solo si $z^2 = 1+\sqrt{3}\cdot i$; $(a+bi)^2 = 1+\sqrt{3}\cdot i$,

$a^2 - b^2 + 2ab\cdot i = 1+\sqrt{3}\cdot i \Rightarrow a^2 - b^2 = 1$, $2ab = \sqrt{3}$, a, b reales

$a^2 - b^2 = 1$, $b^2 = 3/(2a)^2 \Rightarrow a^2 - 3/(4a^2) = 1$,

$4(a^2)^2 - 3 = 4a^2$, $4(a^2)^2 - 4a^2 - 3 = 0$

$$a^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 < 0 \text{ no sirve porque } a^2 > 0 \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} +\sqrt{3}/\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{2} \end{cases} \text{ (raíces reales pos)}$$

$2ab = \sqrt{3}$ Si $a = +\sqrt{3}/\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}/2$

Si $a = -\sqrt{3}/\sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}/2$

Entonces las dos raíces cuadradas pedidas son:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

Se obtuvo $z_2 = -z_1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

RAIZ CÚBICA COMPLEJA

Sea w un complejo dado fijo. Se llaman raíces cúbicas complejas de w (se denotan $z=\sqrt[3]{w}$) todos los complejos z tales que $z^3 = w$. Es decir todas las raíces del polinomio de tercer grado $z^3 - w$ (donde w es el complejo dato, fijo)

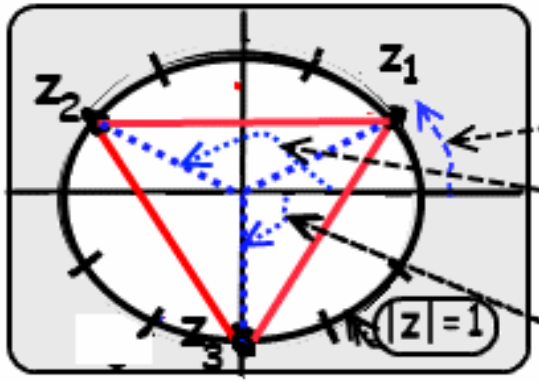
TEOREMA

Si $w = 0$, entonces $\sqrt[3]{0} = 0$ (única raíz cúbica de cero es cero)

Si $w \neq 0$, entonces existen exactamente tres raíces cúbicas complejas distintas que son en el plano los tres vértices de un triángulo equilátero con centro en el origen.

Dem. Este teorema es parte de uno más general que veremos luego, sobre la raíz n-ésima, para cualquier n natural mayor o igual a dos.

EJEMPLO: Hallar (dibujar en el plano complejo) las tres raíces cúbicas complejas de i.



$\arg(z_1) = (\pi/6) + 2h\pi$

$\arg(z_2) = (5\pi/6) + 2h\pi$

$\arg(z_3) = (9\pi/6) + 2h\pi$

$z = \sqrt[3]{i}$ si y solo si $z^3 = i \Rightarrow |z|^3 = |i| = 1$

$3\arg(z) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad |z| = 1$.

Discutiendo tres casos: si $k = 3h$ (múltiplo de 3), o si $k = 3h+1$, o si $k = 3h+2$, $h \in \mathbb{Z}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

RAIZ n-ÉSIMA COMPLEJA

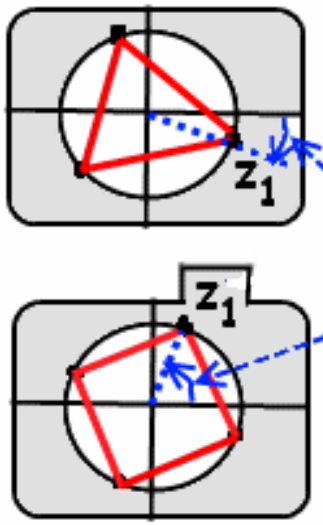
Sea n natural ≥ 2.

Sea w un complejo dado fijo. Se llaman raíces n-ésimas complejas de w (se denotan $z=\sqrt[n]{w}$) todos los complejos z tales que $z^n = w$. Es decir todas las raíces del polinomio de grado n $z^n - w$ (donde w es el complejo dato, fijo)

TEOREMA (importante)

Si $w = 0$, entonces $\sqrt[n]{0} = 0$ (única raíz n-ésima de cero es cero)

Si $w \neq 0$, entonces existen exactamente n raíces n-ésimas complejas distintas que son en el plano los n vértices de un polígono regular con n lados y con centro en el origen.



En particular si $w \neq 0$ y si φ es un arg(w), entonces $\sqrt[3]{w}$ son los tres vértices de un triángulo equilátero todos con $|z| = +\sqrt[3]{|w|}$ (raiz cúbica real positiva) y el primero z_1 con $\arg(z_1) = \varphi/3 + 2h\pi$ $\forall h \in Z$

$\sqrt[4]{w}$ son los cuatro vértices de un cuadrado, todos con $|z| = +\sqrt[4]{|w|}$ (raiz cuarta real positiva) y el primero z_1 con $\arg(z_1) = \varphi/4 + 2h\pi$ $\forall h \in Z$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem. del Teorema de la Raiz n-ésima:

1er. caso) $w = 0$ $z = \sqrt[n]{w}$ si y solo si $z^n = w$, o sea el producto n veces de z por si mismo da 0: $z \cdot z \cdot z \cdot \ldots z \cdot z \cdot z = 0$. Esto se cumple si y solo si $z = 0$ Hemos probado que $z = \sqrt[n]{0}$ si y solo si $z = 0$, o sea $\sqrt[n]{0} = 0$.

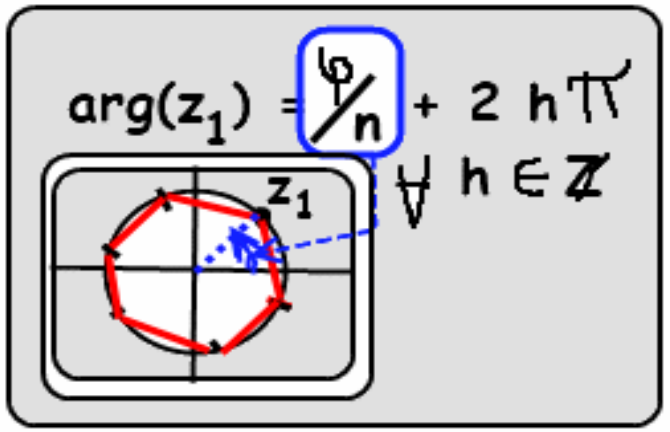
2do. caso) $w \neq 0$ Sea φ un $\arg(w)$.

$z = \sqrt[n]{w}$ si y solo si $z^n = w$, o sea el producto n veces de z por si mismo da w: $z \cdot z \cdot z \cdot \ldots z \cdot z \cdot z = w$ A. Aplicando la regla del producto de los módulos y la suma de los argumentos, A se cumple si y solo si

$$|z|^n = |w| \qquad B$$

$$n \cdot \arg(z) = \arg(w) = \varphi + 2m\pi \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \qquad C$$

$B \Rightarrow |z| = +\sqrt[n]{|w|}$ raiz n-ésima real positiva.



Entonces todas las raíces n-ésimas complejas de w tienen el mismo módulo, o sea son algunos puntos de una misma circunf de centro del origen con radio $+\sqrt[n]{|w|}$.

$C \Rightarrow \arg(z) = \frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} \cdot 2\pi \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$

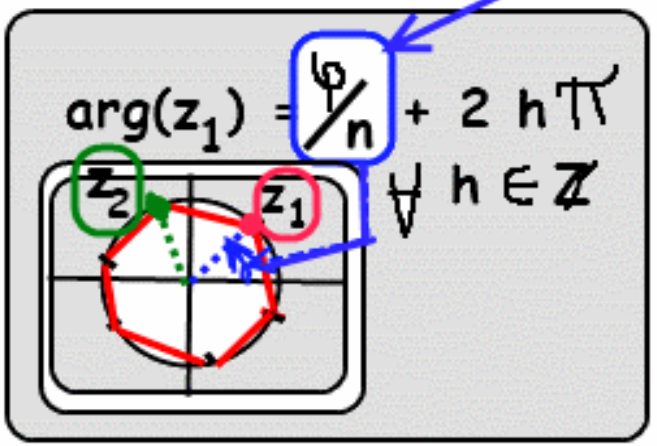
(Sigue)

Teníamos $C \Rightarrow \boxed{\arg(z) = \frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} \cdot 2\pi \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}}$ D

Entonces dando todos valores enteros arbitrarios a m se obtienen los argumentos de todas las raíces n-ésimas de w. Veamos que son exactamente n puntos diferentes:

1ero z_1 se obtiene eligiendo $m = hn \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}$ (m múltiplo de n, es decir el resto de la división entera de m sobre n da 0, por ejemplo $m = 0,\ m = n,\ m = 2n, \ldots$. Queda

$$\arg(z_1) = \frac{\varphi}{n} + \cdot 2h\pi \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}$$



2do. z_2 se obtiene eligiendo $m = hn + 1 \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}$ en D

(m múltiplo de n más 1, es decir el resto de la división entera de m sobre n da 1, por ejemplo $m = 1,\ m = n + 1,\ m = 2n + 1, \ldots,$ $m = -n + 1, -2n + 1, \ldots$

$$\arg(z_2) = \frac{\varphi}{n} + \cdot 2h\pi + \frac{2\pi}{n} \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}$$

Entonces z_2 se obtiene de z_1 rotándolo alrededor del origen este ángulo

$$\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2\pi}{n}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Teníamos $C \rightarrow \boxed{\arg(z) = \frac{\varphi}{n} + \frac{m}{n} \cdot 2\pi \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}}$ D

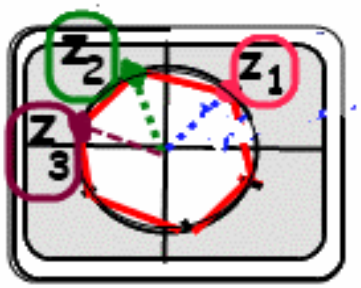
$$\boxed{\arg(z_2)} = \frac{\varphi}{n} + \cdot 2h\pi + \frac{2\pi}{n} \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}$$

en D

3ro. $\boxed{z_3 \text{ se obtiene eligiendo } m = hn + 2 \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}}$ (m múltiplo de n más 2, es decir el resto de la división entera de m sobre n da 2, por ejemplo $m = 2,\ m = n+2,\ m = 2n+2, \ldots, m = -n+2, -2n+2, \ldots$
Queda

$$\boxed{\arg(z_3) = \frac{\varphi}{n} + \cdot 2h\pi + \frac{4\pi}{n} \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}} \quad \boxed{\arg z_3} = \boxed{\arg(z_2)} + \frac{2\pi}{n}.$$

Entonces z_3 se obtiene de z_2 rotándolo alrededor del origen en sentido antihorario el ángulo $\frac{2\pi}{n} = \frac{360}{n}$grados.

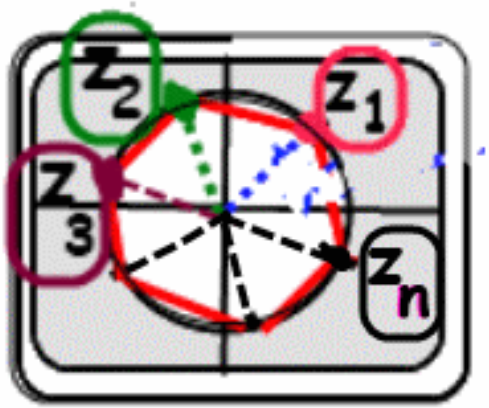


Repitiendo el mismo argumento
para $z_4, z_5, \ldots, z_n$
eligiendo respectivamente
$m = hn + 3,\ m = mh + 4, \ldots, m = nh + (n-1)$
es decir el resto de la división entera
de m sobre n da respectivamente
3, 4 . . . , n-1
(no puede ser mayor el resto que el divisor n)
se obtienen exactamente
n complejos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots, z_n$

se obtienen exactamente
n complejos distintos
$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots, z_n$
Además

$$\arg(z_{i+1}) = \arg(z_i) + \frac{2\pi}{n}$$

Entonces cada raíz n-ésima compleja de w
se obtiene de la anterior rotándola
alrededor del origen en sentido antihorario
el ángulo $\frac{2\pi}{n} = \frac{360}{n}$grados.
Por lo tanto las n raices n-ésimas
complejas de w son los vértices
de un polígono regular de n lados
centrado en el origen (ver figura). LQQD



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 07

TRANSFORMACIONES DE MOEBIUS

Definición: Una transformación de Moebius es la que lleva cada complejo $z \in \mathbb{C}$ en $w(z) = (az + b)/(cz + d)$, donde a,b,c, d son complejos fijos dados cualesquiera, tales que c y d no son ambos nulos (uno puede ser cero, pero entonces el otro es , o pueden ser ambos c y d distintos de cero).

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Casos particulares:

Nota: si $c \neq 0$, entonces el complejo $z = -d/c$ no tiene ningún correspondiente w(z).

si $c = 0$, entonces todo complejo z tiene algún correspondiente que es $(az + b)/d$.

si $a = 0$ y $c = 0$, entonces todos los complejos tienen el mismo correspondiente $w(z) = b/d$ constante (la transformación es constante)

Ejemplos:

$z \mapsto iz$ $(a = i, b = 0, c = 0, d = 1)$ Giro de ángulo /2 (antihor)

$z \mapsto z + 2+3i$ $(a = 1, b = 2+3i, c = 0, d = 1)$ Traslación de vector $2 + 3i$, o sea traslada 2 horizontal más 3 vertical.

$z \mapsto iz + 2+3i$ $(a=i, b=2+3i, c=0, d=1)$ Giro compuesto con trasl.

Otro ejemplo de transformación de Moebius:

LA INVERSIÓN a cada $z \neq 0$ le hace corresponder $1/z$

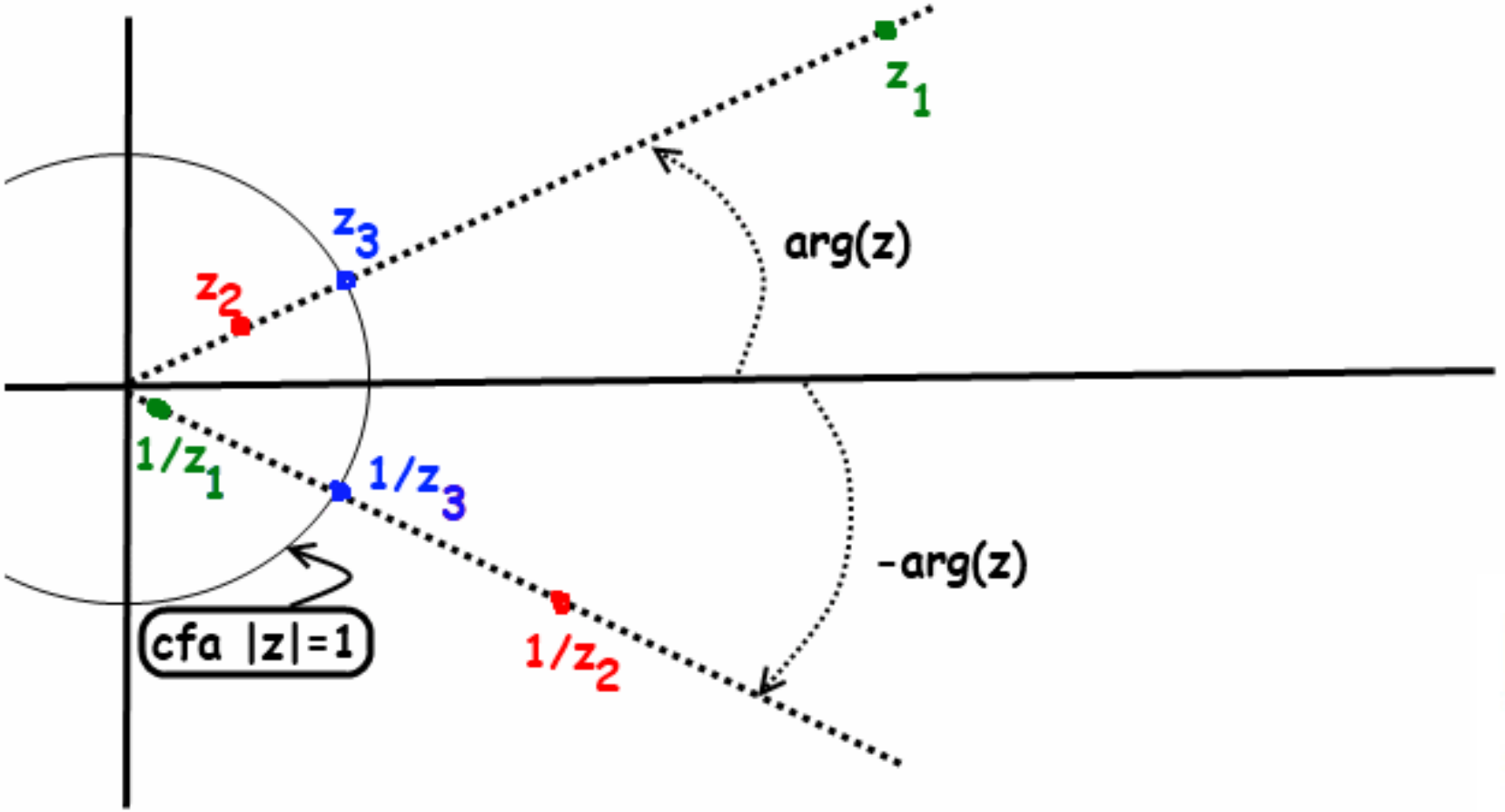
$w(z) = 1/z = (0z + 1)(1z + 0)$

$|1/z| = 1/|z|$ Si $|z| < 1$ entonces $|1/z| > 1$ Punto z_2 en la figura

Si $|z| > 1$ entonces $|1/z| < 1$ Punto z_1 en la figura

Si $|z| = 1$ entonces $|1/z| = 1$ Punto z_3 en la figura

$\arg(1/z) = \arg(1) - \arg(z) = 0 - \arg(z) = -\arg(z)$.



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA: La composición de transformaciones de Moebius es también una transformación de Moebius.

Demostración:

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

$$f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

$$(f_1 \circ f_2)(z) = f_1(f_2(z)) = \frac{a_1 \cdot f_2(z) + b_1}{c_1 \cdot f_2(z) + d_1}$$

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1 \cdot \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \cdot \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \qquad A$$

Multiplicando arriba y abajo en A por $c_2 z + d_2$:

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1 \cdot (a_2 z + b_2) + b_1 \cdot (c_2 z + d_2)}{c_1 \cdot (a_2 z + b_2) + d_1 \cdot (c_2 z + d_2)} \qquad B$$

Sacando los paréntesis en B se encuentra números complejos a_3, b_3, c_3, d_3 tales que $(f_1 \circ f_2)(z) = \dfrac{a_3 z + b_3 z}{c_1 z) + d_3 z}$ $LQQD$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA DE INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE TODA TRANSF. DE MOEBIUS

Sea $f(z)= (az+ b)/(cz+d)$ una transformación de Moebius con $a \neq 0$

Si $c = 0$, entonces $f(z) = (a/d)\, z + (b/d)$ es la composición de una rotohomotecia con una traslación

Si $c \neq 0$, entonces f(z) es la composición de una traslación con una inversión con una rotohomotecia con otra traslación.

Demostración:

1er. caso: $c = 0$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d}$$

$$f(z) = (a/d)z + (b/d) \quad (E)$$

Definimos las siguientes dos transformaciones

$g_1(z) = (a/d)z = w_1$ Rotohomotecia de centro O con razón $|a/d|$ y ángulo de giro $arg(a/d)$.

$g_2(w_1) = w_1 + (b/d)$ Traslación de vector b/d

Calculemos la composición en este orden:

$$(g_2 \circ g_1)(z) = g_2(g_1(z)) = g_1(z) + (b/d)$$

$$(g_2 \circ g_1)(z) = g_1(z) + (b/d) = (a/d)z + (b/d) \quad (G)$$

Juntando las igualdades E y G se deduce:

$$f(z) = (g_2 \circ g_1)(z)$$

Es decir, la transformación de Moebius dada $f(z)$ es la composición de una rotohomotecia g_2 con una traslación g_1.

Continuación de la demostración del teorema de intepret. geométrica de las transformaciones de Moebius

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

2do. caso: $c \neq 0$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Verificar haciendo cuentas:

$$\frac{az+b}{cz+d} = (a/c) + \frac{(b/c) - (da/c^2)}{z + (d/c)}$$

Entonces

$$f(z) = (a/c) + \frac{(b/c) - (da/c^2)}{z + (d/c)} \quad (A)$$

Definamos las siguientes transformaciones:

$g_1(z) = z + (d/c) = w_1$ Traslación de vector d/c

$g_2(w_1) = \frac{1}{w_1} = w_2$ Inversión en el plano complejo

$g_3(w_2) = [(b/c) - (da/c^2)] \cdot w_2 = w_3$ Rotohomotecia

$g_4(w_3) = (a/c) + w_3 = w_4$ Traslación de vector a/c

Calculemos la siguiente composición de transformaciones:

(B) $(g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(z) = g_4(g_3(g_2(g_1(z)))) =$

$= (a/c) + (g_3(g_2(g_1(z)))) = (a/c) + [(b/c) - (da/c^2)] \cdot g_2(g_1(z)) =$

$= (a/c) + [(b/c) - (da/c^2)] \cdot \frac{1}{g_1(z)} =$

$= (a/c) + \frac{(b/c) - (da/c^2)}{g_1(z)} =$

$= (a/c) + \frac{(b/c) - (da/c^2)}{z + (d/c)}$

Entonces por (B) se obtiene

$$(g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(z) = (a/c) + \frac{(b/c) - (da/c^2)}{z + (d/c)}$$

Usando (A), se deduce:

$$f(z) = (g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(z)$$

Entonces la transformación de Moebius $f(z)$ es la composición de la traslación g_1 con la inversión g_2 con la rotohomotecia g_3 con la traslación g_4. *LQQD*

EXPONENCIAL COMPLEJA

Sea $z = a + b\,i$ donde $a = Re(z)$, $b = Im(z)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Si $b = 0$: $e^z = e^{a+0i} = e^a$ (exponencial real) $\forall\, a \in \mathbb{R}$

En particular si $a=0$, $b=0$, $z=0$, $e^z = e^0 = 1$.

Si $a = 0$: $e^z = e^{0+bi} = e^{bi} =$ (por definición) $= \cos b + i \operatorname{sen} b$.

O sea

$$e^{bi} = \cos b + i \operatorname{sen} b \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

En general, se define:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = \text{(por definición) } e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

OJO solo si a y b son reales:

$$a = Re(z)$$
$$b = Im(z)$$

$$e^z = e^{Re(z)}(\cos(Im(z)) + i \operatorname{sen}(Im(z)))$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

MAS PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL COMPLEJA

1 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Cuidado que otras propiedades conocidas de la exponencial real NO son verdaderas para la exponencial compleja.

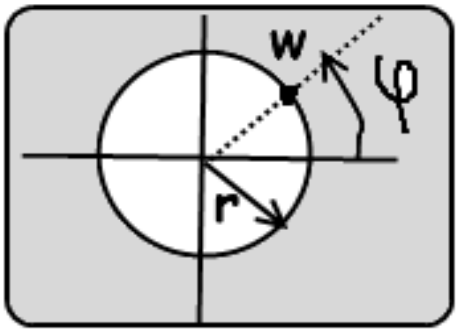
2 Todo complejo $w \neq 0$ se puede escribir como

$$w = |w|\, e^{i\varphi} \quad \text{donde } \varphi \text{ es un argumento de } w$$

3 La circunferencia $\{w \in \mathbb{C}: |w| = r\}$ en el plano complejo con centro en 0 y radio un número real $r > 0$ es el lugar geométrico de los puntos complejos w tales que

$$w = r\, e^{i\varphi}$$

para todo ángulo φ real (en radianes) donde φ es argumento de cada punto w.



La dem. de 3 es inmediata consecuencia de 2. Así que vamos a probar 2
Demostrar la propiedad 1 como ejercicio

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostración de la propiedad (2). Tenemos que probar:

(2) Todo complejo $w \neq 0$ se puede escribir como

$$\text{¿}w = |w|\, e^{i\varphi}\text{ ?}\quad \text{donde } \varphi \text{ es un argumento de } w$$

Lo ponemos entre signos de interrogación porque es el objetivo, lo que hay que probar, lo tenemos presente, pero no podemos usar esa afirmación en el proceso lógico de la demostración.

Sea $w = h + i\,k$ donde $h, k \in \mathbb{R}$ son $h = \mathrm{Re}(w)$, $k = \mathrm{Im}(w)$

Entonces φ es un argumento de w si y solo si $\cos\varphi = h/|w|$, y $\operatorname{sen}\varphi = k/|w|$

Multiplicando las igualdades anteriores por $|w|$ (que es distinto de cero) se tiene: $h = |w|\cos\varphi$, $k = |w|\operatorname{sen}\varphi$.

Entonces

$$w = h + i\,k = |w|\cos\varphi + i\,|w|\operatorname{sen}\varphi = |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \quad (A)$$

Usando la definición de $e^{i\varphi}$ donde φ es cualquier real:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi \quad (B)$$

Sustituyendo (B) en (A):

$$w = |w|\, e^{i\varphi}$$

LQQD.

LOGARITMO COMPLEJO

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN Dado un complejo $w \neq 0$ se define

Log(w) a TODOS los complejos z tales que $e^z = w$

Nota No se define ~~Log(0)~~ pues e^z nunca da cero, ya que $|e^z| = e^a > 0$ siendo $a = Re(z)$.

TEOREMA (importante)

Log(w) tiene infinitos valores que son todos los complejos z de la forma $z = \text{Log}(w) = L|w| + i(\varphi + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

donde $L|w|$ es el LOGARITMO REAL del número real $|w|>0$

es UN argumento de w

Importante Para cada entero k que se elija se tiene un complejo z diferente. Todos son Log(w). Por lo tanto hay infinitos complejos Log(w).

Dem. Sabemos que $w = |w| e^{i\varphi}$, donde φ es un argumento de w.

Como $|w|$ es real positivo, por definición de $L|w|$ real, se cumple $e^{L|w|} = |w|$

Luego $w = |w| e^{i\varphi} = e^{L|w|} e^{i\varphi} = e^{L|w|+i\varphi} = e^{z_0}$ donde $z_0 = L|w| + i\varphi$ (A)

Como todos los argumentos de w son $\varphi + 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$ en vez de φ podríamos haber usado $\varphi + 2k\pi$ obteniéndose entonces $w = e^z$ con

(A) $z = L|w| + i(\varphi + 2k\pi) \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Entonces esos z son soluciones de la ecuación $e^z = w$ (con w fijo dado). Por lo tanto esos z son Log(w). (Faltaría demostrar que esas son todas las soluciones). LQQD

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

1 Al igual que en los números reales, en los complejos se cumple la siguiente identidad

$$e^{\text{Log}(w)} = w \quad \text{para todo } w \text{ complejo} \neq 0$$

En efecto, por definición del logaritmo complejo

$z = \text{Log}(w)$ si y solo si $e^z = w$

Entonces $w = e^z = e^{\text{Log}(w)}$. LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

2 A diferencia de lo que sucede en los números reales, en los complejos

$\text{Log}(e^z)$ NO es siempre igual a z

En efecto, por ejemplo si $z = 0$ $e^z = e^0 = 1$

Pero Log (1) complejo es $L|1| + i(\varphi + 2k\pi)$ para todo $k \in Z$

donde φ es un argumento de $1 = 1+0i$, por ejemplo $\varphi = 0$.

Además el logaritmo real $L|1| = L1 = 0$.

Entonces $\text{Log}(e^0) = \text{Log}(1) = 0 + i(0 + 2k\pi)$ para todo $k \in Z$

No es cumple que $\text{Log}(e^0)$ sea siempre igual a 0 pues

toma infinitos valores: $\text{Log}(e^0) = 2k\pi$ para todo $k \in Z$.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Universidad de la República

Montevideo, Uruguay

16 de agosto de 2011.

CLASE 7 complementaria.

Algunos ejemplos en el cuerpo de los complejos..

Práctico 2 Ejercicio 2 del año 2011

Determinar todos los $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

a) $(x+iy)^2 = (x-iy)^2$. Esta ecuación es equivalente a la siguiente, después de desarrollar el cuadrado del binomio de cada lado de la igualdad:

$x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - 2ixy + (-i)^2y^2$

Recordando que $i^2 = -1$, $\quad (-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$, se tiene la siguiente ecuación, equivalente a la dada:

$$x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - 2ixy - y^2$$

Pasando todos los términos de la derecha de la igualdad, con signos opuestos al miembro de la izquierda, y simplificando los que quedan sumados y restados:

$$4ixy = 0$$

Un producto de números reales o complejos da 0 si y solo si por lo menos uno de los factores es 0:

Como $4i \neq 0$, se obtiene

$$4ixy = 0 \text{ si y solo si } xy = 0$$

Análogamente $xy = 0$ se cumple si y solo si, o bien $x = 0$, o bien $y = 0$, o bien ambos son 0.

Respuesta analítica:

Los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que verifican la ecuación dada son los del siguiente conjunto S:

$$S = \{x, y \in \mathbb{R} : x = 0,\ y \text{ real cualquiera }\} \bigcup \{x, y \in \mathbb{R} : y = 0,\ x \text{ real cualquiera }\}$$

Ahora veamos la representación gráfica de ese conjunto S para dar una respuesta geométrica. Tenemos

$$S = \{x, y \in \mathbb{R} : x = 0,\ y \text{ real cualquiera }\} \bigcup \{x, y \in \mathbb{R} : y = 0,\ x \text{ real cualquiera }\}$$

El primer conjunto en el plano x, y (de la unión S de dos conjuntos que está arriba) es el eje de las y (es el conjunto de puntos que cumplen abscisa $x = 0$, con ordenada y real cualquiera.

El segundo conjunto es el eje de las x (es el conjunto de puntos que cumplen ordenada $y = 0$ con abscisa x real cualquiera.

Entonces, gráficamente la solución S en el plano de coordenadas x, y, es el conjunto de todos los puntos que están en el eje de las x unión con el conjunto de todos los puntos que están en el eje de las y. Entonces, concluimos:

Respuesta geométrica:

Las soluciones son todos los puntos del conjunto S que es el conjunto unión de los dos ejes coordenados.

Práctico 2 Ejercicio 2 del año 2011

Determinar todos los $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$.

Lo primero sería calcular cuál es el número complejo S igual al resultado de la suma siguiente, que tiene exactamente 101 sumandos:

$$S = \sum_{k=0}^{100} i^k = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^k + i^{k+1} + \ldots + i^{100}.$$

S es un número complejo que desconocemos todavía, y queremos encontrar, pues la ecuación dada es

$$S = x + iy.$$

Una vez encontrado el número complejo S, las incógnitas desconocidas x e y serán $x = Re(S)$, $y = Im(S)$.

Sabemos que S es el resultado de la suma de la derecha en la siguiente igualdad

$$S = \sum_{k=0}^{100} i^k = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^k + i^{k+1} + \ldots + i^{100}.$$

Esta suma se llama suma geométrica de razón i, porque cada sumando es igual al anterior multiplicado por i. Hay un procedimiento que se ve en el liceo para sumar cualquier suma geométrica con razón $r \neq 0$, $r \neq 1$. Aplquemos ese procedimiento a este caso en que la razón r es el número complejo i.

Multiplicamos la suma S que queremos encontrar por el número complejo i (por la razón de la suma geométrica):

$$iS = i\ (i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{k-1} + i^k + i^{k+1} + \ldots + i^{99} + i^{100})$$

$$iS = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + \ldots + i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + \ldots + i^{100} + i^{101}. \qquad (A)$$

Por otro lado tenía:

$$S = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + \ldots + i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + \ldots + i^{100}. \qquad (B)$$

Restando miembro a miembro la igualdad (A) menos la igualdad (B) obtengo:

$$iS - S = -i^0 + i^{101}$$

Recordemos que $i^0 = 1$ pues $w^0 = 1$ por convención, para cualquier número real o complejo $w \neq 0$. Además $101 = 100 + 1 = 4 \cdot 25 + 1$. Entonces queda:

$$(i-1)S = -1 + i^{(4\cdot 25)+1} = -1 + i^{4\cdot 25} \cdot i^1 = -1 + (i^4)^{25} \cdot i. \qquad (C)$$

Observemos que $i^2 = -1$, entonces $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2) \cdot (i^2) = (-1) \cdot (-1) = 1$. Entonces $i^4 = 1$; luego: $(i^4)^{25} = 1^{25} = 1$. Por lo tanto en la igualdad (C) queda:

$$(i-1)S = -1 + 1 \cdot i = -1 + i = i - 1.$$

Entonces

$$S = \frac{i-1}{i-1} = 1 \text{ (porque cualquier número no nulo dividido él mismo, da 1).}$$

Hemos demostrado que $S = 1$, o sea el resultado de toda aquella suma con 101 sumandos da 1. La ecuación que teníamos que resolver era

$$S = x + iy$$

Entonces es $1 = x + iy$. Se cumple si y solo si $x = 1$ e $y = 0$. La solución es entonces

$$x = 1 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Enseñanzas generales obtenidas de este ejercicio:

1) Para sumar una serie geométrica de razón $r \neq 0$, $r \neq 1$.
Llamo S a la suma que no conozco, escribo la suma desarrollada

$$S = \sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots ar^k + ar^{k+1} + \ldots ar^{n-1} + ar^n. \qquad (D)$$

O sea, escribiendo explícitamente el sumando que está antes de ar^k, que en realidad antes estaba incluido en los puntitos suspensivos:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{k-1} + ar^k + ar^{k+1} + \ldots ar^{n-1} + ar^n.$$

Multiplico esa igualdad en ambos miembros por r, y luego resto ambas igualdades, hasta obtener:

$$(1-r)S = a - ar^{n+1}$$

Luego

$$S = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Esta última es la fórmula de cálculo de la suma geométrica S con razón $r \neq 0$, $r \neq 1$ dada por la igualdad (D), en que el primer sumando es a, el último sumando es ar^n, en total hay $n+1$ sumandos, y cada sumando es igual al anterior multiplicado por r.

2) Potencias i^n de la unidad imaginaria i, con exponente n natural.

Por convención $i^0 = 1$. ¿Cómo calcular i^n, es decir el resultado de multiplicar i por sí mismo n veces, cuando n es un natural $n \geq 1$? Primero calculamos i^0, i^1, i^2, i^3, i^4:

$$i^0 = 1 \text{ (por convención)} \ , \quad i^1 = i \text{ (una sola vez el número } i)$$

$$i^2 = -1 \text{ (por la definición de producto de complejos y}$$

porque siempre hay que recordar que la unidad imaginaria i es una raiz cuadrada de -1, ya que por eso se definen los números complejos. Si i es una raiz cuadrada de -1 entonces $i^2 = -1$.

$$i^3 = i \cdot i \cdot i = (i^2) \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \quad i^3 = -i$$

$$i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2) \cdot (i^2) = (-1) \cdot (-1) = +1, \quad i^4 = 1$$

Ahora i^n cuando n es un natural igual o mayor que 5. Dividimos el entero n entre 4, y hallamos un cociente c entero más un resto ρ. Siempre el resto de dividir entre 4, es un número entero ρ que puede ser 0 ó 1 ó 2 ó 3. El resto da 0 si y solo si n era divisible entre 4.

•1er. caso) El resto ρ de dividir el exponente natural n entre 4, da $\rho = 0$, es decir n es múltiplo de 4. Entonces $n = 4c$ donde c es un natural (cociente de dividir n entre 4). Entonces $i^n = i^{4c} = i \cdot i \cdot i \cdot \ldots \cdot i$ ($4c$ veces multiplicado i por sí mismo). Agrupo los factores, que son todos i, de a cuatro, y tengo:

$$i^n = i^{4c} = (i^4) \cdot (i^4) \cdot \ldots \cdot (i^4) \text{ (} c \text{ veces multiplicado } i^4 \text{ por sí mismo)}$$

Como ya vimos que $i^4 = 1$, queda $i^n = i^{4c} = (1) \cdot (1) \ldots (1) = 1$.

Conclusión en este 1er caso: cuando el exponente n es múltiplo de 4 queda $i^n = 1$.

• 2do. caso) El resto ρ de dividir el exponente natural n entre 4, da $\rho = 1$. Entonces $n = 4c+1$ (donde c es la parte entera de dividir n entre 4). Queda $i^n = i^{4c+1} = i \cdot i \cdot \ldots i \cdot i$ ($4c+1$ veces multiplicado i por sí mismo). Agrupando los primeros $4c$ factores, que son todos i, queda:

$$i^n = i^{4c+1} = (i)^{4c} \cdot i = (+1) \cdot i = i$$

Conclusión en este 2do caso: cuando el resto de dividir el exponente n entre 4 da $\rho = 1$, queda $i^n = i$.

• 3er caso) El resto ρ de dividir el exponente natural n entre 4, da $\rho = 2$. Entonces $n = 4c+2$ (donde c es la parte entera de dividir n entre 4). Queda $i^n = i^{4c+2} = i \cdot i \cdot \ldots i \cdot i \cdot i$ ($4c + 2$ veces multiplicado i por sí mismo). Agrupando los primeros $4c$ factores, que son todos i, queda:

$$i^n = i^{4c+2} = (i)^{4c} \cdot i^2 = (+1) \cdot i^2 = (+1) \cdot (-1) = -1$$

Conclusión en este 3er. caso: cuando el resto de dividir el exponente n entre 4 da $\rho = 2$, queda $i^n = -1$.

• 4to. caso) El resto ρ de dividir el exponente natural n entre 4, da $\rho = 3$. Entonces $n = 4c+3$ (donde c es la parte entera de dividir n entre 4). Queda $i^n = i^{4c+3} = i \cdot i \cdot \ldots i \cdot i \cdot i \cdot i$ ($4c + 3$ veces multiplicado i por sí mismo). Agrupando los primeros $4c$ factores, que son todos i, queda:

$$i^n = i^{4c+3} = (i)^{4c} \cdot i^3 = (+1) \cdot i^3 = (+1) \cdot (-i) = -i$$

Conclusión en este 4to. caso: cuando el resto de dividir el exponente n entre 4 da $\rho = 3$, queda $i^n = -i$.

Ejercicio 7 del práctico 2 del 2011.

Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = \overline{z}$.

Pasando a "coordenadas polares" (es decir, buscando al principio el módulo y el argumento de cada solución z):

$$|z^3| = |\overline{z}| \qquad (A)$$

$$\text{si } z \neq 0: \quad arg(z^3) = arg(\overline{z}). \qquad (B)$$

Nota: la última igualdad significa que el Conjunto de todos los argumentos de z^3 debe ser igual al Conjunto de todos los argumentos de $\overline{z}$.

Recordemos que el módulo de un producto es el producto de los módulos, y que el módulo de $\overline{z}$ es igual al módulo de z. Entonces (A) es equivalente a la siguiente igualdad (C):

$$|z|^3 = |z|, \qquad |z|^3 - |z| = 0, \qquad |z|(|z|^2 - 1) = 0, \qquad |z|(|z|+1)(|z|-1) = 0 \quad \|z| \text{ real } \geq 0. \qquad (C)$$

Las soluciones de (C) son dos (no olvidarse que $|z|$ debe ser ≥ 0:

$$|z| = 0, \quad \text{ó} \quad |z| = 1$$

.

•1er. caso) Si $|z| = 0$, entonces $z = 0$. Esta es una solución de la ecuación dada $z^3 = \overline{z}$ pues $0^3 = \overline{0}$, ya que $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ y $\overline{0} = \overline{0 + 0i} = 0 - 0i = 0$.

Ya obtuve una solución, que es $z = 0$. Me piden todas las soluciones. Así que pasemos al segundo caso, a ver si en él encontramos soluciones:

• 2do. caso) Si $|z| = 1$, entonces $z \neq 0$. Entonces puedo aplicar (B). Elijo un argumento y un solo de z y lo llamo φ. Entonces, UN argumento de $\overline{z}$ es $-\varphi$ (ya que al cambiar el signo a la parte imaginaria de $z = a + ib$, dejando igual su parte real, para obtener $\overline{z} = a - bi$, el árgumento φ cambia de signo).

Entonces, la igualdad (B) entre conjuntos es equivalente a la siguiente:

$$arg(z^3) = -\varphi + 2k\pi \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (D)$$

Ahora recuerdo que el argumento del producto es la suma de los argumentos:

$$arg(z^3) = 3 \cdot arg(z), \qquad \text{en particular para } Arg(z) = \varphi:$$

un argumento (no todos) de z^3 es

$$Arg(z^3) = 3 \cdot \varphi \qquad (E)$$

Juntando (D) con (E), resulta:

$$3 \cdot \varphi = -\varphi + 2k\pi \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cdot \varphi = 2k\pi \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = k\pi/2 \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Entonces cuando le doy a k los valores $k = 0$, ó $k = 1$, ó $k = 2$ ó $k = 3$, obtengo todas las soluciones. Para los demás valores enteros de k se vuelven a repetir esas cuatro soluciones, pues son las que se obtienen sumando un múltiplo entero de 2π a la solución obtenida para $k = 0$ ó para $k = 1$, ó para $k = 3$ ó para $k = 4$. Entonces el argumento φ de cada z solución es:

$$\varphi = 0 \quad \text{ó} \quad \varphi = \pi/2 \quad \text{ó} \quad \varphi = \pi \quad \text{ó} \quad \varphi = 3\pi/2$$

• Si $Arg(z) = \varphi = 0$, como en este caso teníamos $|z| = 1$, obtenemos la solución:

$$z = |z|\cos\varphi + i\ |z|\text{sen}\varphi = 1\cos 0 + i\ 1\text{sen}0 = 1$$

Deducimos entonces que otra solución es $z = 1$.

• Si $Arg(z) = \varphi = \pi/2$, como en este caso teníamos $|z| = 1$, obtenemos la solución:

$$z = |z|\cos\varphi + i\ |z|\text{sen}\varphi = 1\cos(\pi/2) + i\ 1\text{sen}(\pi/2) = i$$

Deducimos que otra solución es $z = i$.

• Si $Arg(z) = \varphi = \pi$, como en este caso teníamos $|z| = 1$, obtenemos la solución:

$$z = |z|\cos\varphi + i\ |z|\text{sen}\varphi = 1\cos\pi + i\ 1\text{sen}\pi = -1$$

Deducimos que otra solución es $z = -1$

• Si $Arg(z) = \varphi = 3\pi/2$, como en este caso teníamos $|z| = 1$, obtenemos la solución:

$$z = |z|\cos\varphi + i\ |z|\text{sen}\varphi = 1\cos(3\pi/2) + i\ 1\text{sen}(3\pi/2) = -i$$

Deducimos que otra solución es $z = -i$.

Conclusión: Las soluciones de la ecuación dada $z^3 = \overline{z}$ son cinco:

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = i, \quad z = -1, \quad z = -i.$$

Ejercicio 5 del práctico 2 del año 2011.

Encontrar el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la siguiente condición, y bosquejarlos en el plano complejo:

$$c) \qquad |z-i| = |z+i|$$

Este ejercicio está propuesto para resolver geométricamente, y no analíticamente. Se pretende usar las propiedades geométricas e interpretación gráfica de la resta de complejos y del módulo de complejos. De todas formas primero veremos cómo queda si uno quisiera, a ciegas (lo cual no es recomendable cuando es posible visualizarlo geométricamente), resolve este ejercicio analíticamente. Después veremos la solución geométrica.

Método analítico:

El módulo de un complejo es siempre real ≥ 0, por lo tanto la ecuación dada c) es equivalente a la siguiente ecuación (I):

$$|z-i|^2 = |z+i|^2 \qquad (I)$$

Llamemos $x = Re(z), \quad y = Im(z)$. Entonces

$$z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad z-i = x+(y-1)i, \quad z+i = x+(y+1)i,$$

$$|z-i|^2 = x^2+(y-1)^2, \qquad |z+i|^2 = x^2+(y+1)^2$$

La ecuación (I) es equivalente, entonces, a la siguiente ecuación (II):

$$x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \qquad (II)$$

A su vez (II) es equivalente a la siguiente (III):

$$y \text{ real tal que } \quad (y-1)^2 = (y+1)^2, \qquad x \text{ real cualquiera} \qquad (III)$$

Entonces ahora tenemos que encontrar todos los reales y que cumplen $(y-1)^2 = (y+1)^2$. Tomando raíz cuadrada real (recordar que para todo real r se cumple $\sqrt{r^2} = |r|$ (valor absoluto de r, que no es necesariamente igual a r), tenemos:

$$y \text{ real tal que } |y-1| = |y+1|$$

Discutiendo en estos tres casos

$$1) y-1 \geq 0; \quad 2) y+1 \leq 0; \qquad 3) y-1 < 0 \text{ e } y+1 > 0$$

se verifica que no hay ningún y real que verifique $|y-1| = |y+1|$ en el caso 1), ni en el caso 2). En cambio en el caso 3) hay uno solo que es $y = 0$.

Respuesta: Las soluciones z de la ecuación $|z-i| = |z+i|$ son todos los complejos $z = x + iy$ con $y = 0$ constante, y x real cualquiera. En el plano complejo, son todos los complejos de la recta horizontal con ordenada $y = 0$. Esto es el eje de las x.

Método geométrico:

Al ver la interpretación gráfica de la resta de dos complejos, vimos que la resta de dos complejos $z_1 - z_2$ corresponde al vector que une el origen con el punto $z_1 - z_2$, que es el mismo vector que el que une el punto z_1 con z_2 (el mismo vector, signifca que están representados por segmentos de recta con igual longitud, igual dirección y sentido, pero uno paralelo al otro).

Entonces el módulo del complejo $z_1 - z_2$ es la longitud de ese vector (distancia de $z_1 - z_2$ al origen, que es igual a la distancia entre los puntos z_1 y z_2.

En general tenemos

$$\text{dist}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Por lo tanto en este ejercicio:

$|z - i| = \text{dist}(z, i)$ es la distancia entre el punto z (que desconozco) y el punto i.

$|z + i| = |z - (-i)| = \text{dist}(z, -i)$ es la distancia entre el mismo punto z de arriba (que desconozco) y el punto $-i$

Entonces, la ecuación $|z-i| = |z+i|$ se cumple si y solo si el punto z (que desconozco) equidista de los dos puntos i e $-i$. Dibujo los dos puntos i e $-i$ en el plano complejo. Tengo que encontrar el lugar de todos los puntos del plano que equidistan de esos dos puntos fijos i e $-i$. En cuarto de liceo se ve que ese lugar geométrico es la recta mediatriz del segmento con extremos i e $-i$. (La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, el punto medio del segmento)

Concluyo que el lugar de los z es la recta horizontal que pasa por el punto medio entre $i = 0 + 1i$ (que tiene ordenada 1 y abscisa 0), y el punto $-i = 0 - 1i$ (que tiene ordenada -1 y abscisa 0). Este punto medio es el origen. Entonces:

Respuesta: Las soluciones de la ecuación $|z - i| = |z + i|$ son todos los z que están en la recta horizontal que pasa por el origen (es decir, en el eje de las abscisas), o sea son todos los complejos de la forma $z = x + i0$ donde x es un real cualquiera.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Universidad de la República

Montevideo, Uruguay

01 de setiembre de 2011.

CLASE 14 complementaria.

Sobre sucesiones y conjuntos en la recta real.

Sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes. Recordemos la siguiente definición:

Definición de sucesión de Cauchy

a_n es una sucesión de Cauchy cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que si $n > N$ y si $m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Definición de sucesión convergente a_n es convergente cuando existe un número real L (llamado límite de a_n) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon$.

Vimos y demostramos que en la recta real toda sucesión de Cauchy es convergente y recíprocamente, toda sucesión convergente es de Cauchy. (Al final de este complemento damos otra demostración de esa equivalencia) Para cualquier sucesión de reales ser de Cauchy es lo mismo que ser convergente, o sea que tener algún límite real.

Conjuntos completos, cerrados, compactos y abiertos en la recta real

Definición 1. Conjunto completo. Un conjunto no vacío A de reales se dice que es *completo* (el conjunto) cuando toda sucesión a_n que verifique las siguientes condiciones:

$a_n \in A \ \ \forall\, n \geq 1$ natural

a_n es una sucesión de Cauchy

satisface que

existe real $L = \lim a_n$ y L **es un elemento del conjunto** A.

Ya vimos que toda sucesión de Cauchy tiene límite real L, entonces la condición que importa verificar en esta definición, para que un conjunto A sea completo, es que el límite $L \in A$, cualquiera sea la sucesión de Cauchy cuyos términos pertenezcan a A. Si todos los términos a_n de la sucesión de Cauchy están en A entonces su límite L también está en A.

Por favor notar que el adjetivo *completo* se aplica al conjunto, y no a sus sucesiones. Se usan todas las sucesiones posibles formadas con elementos de A y que sean convergentes, para decidir si el conjunto A es completo o no lo es. Lo es cuando los límites de todas esas

sucesiones pertenecen al conjunto A, y no lo es cuando alguna de esas sucesiones tiene un límite fuera del conjunto A.

En particular si el conjunto A es toda la recta real $A = \mathbb{R}$, la recta real $\mathbb{R}$ es un conjunto completo, porque toda sucesión de Cauchy es convergente, y por definición de ser convergente $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$.

Definición 2. Conjunto cerrado. Un conjunto no vacío A se dice que es *cerrado* si toda sucesión a_n que verifique:
$a_n \in A \ \ \forall\ n \geq 1$ natural
a_n es convergente (es decir existe un real $L = \lim a_n$)
satisface que
$\lim a_n = L$ **es un elemento de** A**.**

Como toda sucesión de reales es de Cauchy si y solo si es convergente, entonces comparando la definición 1 con la definición 2, vemos que son la misma: un conjunto A es completo si y solo si es cerrado. Los adjetivos *completo* y *cerrado* (cuando se aplica a conjuntos de reales) significan lo mismo, son sinónimos.

¿Por qué entonces dar dos definiciones de la mismo? Simplemente porque en la teoría matemática topológica, existen otros *espacios,* además del conjunto de reales, muy diferentes de $\mathbb{R}$, que son llamados en general *espacios topológicos* (por ejemplo ciertos espacios vectoriales de dimensión infinita, mientras que la recta real es un espacio vectorial de dimensión 1), para los cuales hay sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Entonces en esos otros espacios topológicos un subconjunto puede ser cerrado sin ser completo.

Sin embargo, en este curso, como solo trabajaremos en la recta real $\mathbb{R}$, son sinónimos los adjetivos *completo* y *cerrado* aplicados a cualquier conjunto A no vacío de reales. Y puede por lo tanto usarse indistintamente la definición 1 ó la 2: ambas significan lo mismo, definen el mismo concepto.

Ejemplos de conjuntos de reales completos o cerrados:

Ejemplo 1.
Sea el intervalo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ donde $a < b$, llamados extremos del intervalo $[a, b]$ son reales fijos. El intervalo $[a, b]$ es cerrado o completo: para probarlo tomemos cualquier sucesión a_n que cumpla:
$a_n \in [a, b] \ \ \forall\ n \geq 1$, es decir $a \leq a_n \leq b$ para todo $n \geq 1$
y tal que existe el real $L = \lim a_n$. Hay que probar que $L \in [a, b]$.
Siendo $a \leq a_n \leq b$, por la monotonía del límite se cumple $\lim a \leq \lim a_n \leq b$ Como a y b son reales fijos (constantes), entonces obtenemos $\lim a = a,\ \lim b = b$. Luego de la monotonía del límite deducimos que $a \leq \lim a_n \leq b$, de donde $a \leq L \leq b$. Esto implica que $L \in [a, b]$. LQQD (esta sigla significa "Lo que queríamos demostrar").

Ejemplo 2. Sea el intervalo $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ que contiene a su extremo izquierdo a, pero no contiene a su extremo derecho b. Probemos que no es cerrado (no completo). Para eso alcanza con encontrar una sucesión particular a_n que cumpla que
$a_n \in [a, b) \ \ \forall\ n \geq 1$

a_n sea convergente, es decir exista $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$

pero $L \notin [a, b)$

Elegimos la sucesión $a_n = b - [(b-a)/n]$ para todo natural $n \geq 1$. Es fácil verificar que $a_n < b$ y que $a_n \geq a$ para todo $n \geq 1$ (se puede verificar gráficamente marcando los primeros dos o tres términos de la sucesión dentro del intervalo $[a, b)$, y luego demostrar en general para todo n que la sucesión a_n es monótona creciente y acotada superiormente por b). Entonces $a_n \in [a, b)$ para todo $n \geq 1$.

Además $\lim a_n = \lim(\, b - [(b-a)/n]\,) = b - 0 = b$, entonces la sucesión es convergente, pero su límite es $b \notin [a, b)$. Así probamos que el intervalo $[a, b)$ no es cerrado o completo.

Ejemplo 3. La semirrecta $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$ donde b es un real fijo, es un conjunto cerrado o completo, pues toda sucesión $a_n \in (-\infty, b]$ que sea convergente, verifica $a_n \leq b$. Entonces por la monotonía del límite tenemos $\lim a_n \leq \lim b$. Pero b es un real fijo (una constante), entonces $\lim b = b$ y deducimos que $\lim a_n \leq b$. Luego $\lim a_n = L \in (-\infty, b]$. Hemos probado que toda sucesión a_n convergente de términos en la semirrecta $(-\infty, b]$ tiene su límite que también pertenece a la semirrecta $(-\infty, b]$. Entonces esta semirrecta es cerrada o completa.

Ejemplo 4. La semirrecta $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ no es cerrada (no es completa.) Para probarlo hay que construir una sucesión que sea convergente, y que tenga todos sus términos a_n pertenecientes a la semirrecta $(-\infty, b)$, pero que su límite no pertenezca a esa semirrecta. Por ejemplo la sucesión $a_n = b - (1/n)$ para todo $n \geq 1$ natural, satisface esas condiciones, pues $a_n \in (-\infty, b) \ \ \forall\ n \geq 1$, pero $\lim a_n = b \notin (-\infty, b)$.

Definición 3. Conjunto compacto . Sea un conjunto A no vacío de reales. Se dice que es *compacto* si es cerrado y acotado (acotado significa acotado superiormente e inferiormente a la vez). Por ejemplo el intervalo $[a, b]$ es compacto. Pero el intervalo $[a, b)$ no es compacto porque si bien es acotado, no es cerrado. Y el intervalo $(-\infty, b]$ (la semirrecta también se dice que es un intervalo), no es compacto porque si bien es cerrado, no es acotado (tiene cota superior, pero no tiene cota inferior, entonces no es acotado).

Definición 4. Conjunto abierto. Un conjunto A no vacío de reales se dice que es abierto, si para todo $x_0 \in A$ existe algún entorno E de centro en x_0 y radio adecuado δ de modo que $E \subset A$. Dicho de otra forma, todo punto del conjunto A está inmerso en una vecindad suya E, toda contenida en A. Por ejemplo

el intervalo $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ es abierto.

el intervalo $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ no es abierto, pues el punto $a \in [a, b)$ pero para ese punto a no existe ningún entorno E con centro en a de modo que $E \subset [a, b)$. En efecto, todo entorno E de a contiene un semientorno izquierdo (a la izquierda de a) que está fuera del intervalo $[a, b)$. Entonces E no puede estar contenido en A.

Así vemos que el intervalo $[a, b)$ no es ni cerrado ni abierto. En matemática cerrado y abierto no son opuestos (no son adjetivos antagónicos).

Además el conjunto A formado por todos los reales es cerrado (porque es completo que es lo mismo), y es abierto también, a la vez.

Por convención el conjunto vacío también se dice que es abierto y es cerrado a la vez.

También por convención el conjunto vacío se dice que es compacto.

Las definiciones 2 y 4 de cerrado y abierto, parece que no tienen nada que ver entre sí. Sin embargo, el siguiente teorema relaciona los conceptos de abierto y cerrado para conjuntos:

Teorema *A es un conjunto cerrado si y solo si su complemento* $A^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x \notin A\}$ *es abierto.*

Este teorema es la base de la topología (una rama de la matemática).

Por ejemplo, vimos que el intervalo $[a, b]$ es cerrado. Entonces su complemento, formado por la unión de las semirrectas $(-\infty, a)$ con $(b, +\infty)$ es abierto.

La semirrecta $(-\infty, b)$ es abierta. Entonces su complemento, que es la semirrecta $[b, +\infty)$ es cerrada.

Otros teoremas importantes de la teoría topológica son los siguientes:

La unión de dos conjuntos abiertos es abierta, de dos conjuntos cerrados es cerrada, de dos conjuntos compactos es compacta.

La intersección de dos conjuntos abiertos es abierta, de dos conjuntos cerrados es cerrada, de dos conjuntos compactos es compacta.

En la recta real, los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son toda la recta real, y el conjunto vacío.

Demostración del teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones de reales por el método de las cumbres

Definición 5. Puntos cumbre de una sucesión. Sea a_n una sucesión de reales. Decimos que el término a_m de la sucesion es un *punto cumbre* si $a_m \geq a_n \ \ \forall \ n > m$. Significa que no aparecerán después del término m-ésimo que es a_m, otros términos de la sucesión que sean mayores estrictamente que a_m. Significa que $a_m = \sup\{a_n : \ n \geq m\}$.

Dada una sucesión a_n pueden ocurrir tres situaciones:

Caso 1: La sucesión no tiene puntos cumbres. Por ejemplo $a_n = 2 - 1/n$. Es monótona creciente estrictamente, entonces ningún punto es cumbre. Otro ejemplo $a_n = 2 - 1/n$ si n es par, $a_n = 4 - 1/n$ si n es impar. No es monótona creciente, porque después del término $a_n \geq 3$ que aparece en el instante n impar, aparece un término $a_n \leq 2$ en el instante n par. Sin embargo ningún punto es punto cumbre, pues $a_n < a_{n+2}$ para todo natural $n \geq 1$.

Caso 2: La sucesión tiene puntos cumbres, pero solo aparecen en una cantidad finita de instantes n. Por ejemplo a_n definida así $a_1 = 5, \ a_2 = 1, \ a_3 = 3, \ a_4 = 0, \ a_n = 2 - 1/n$ si $n \geq 5$. En esta sucesión los únicos puntos cumbres son a_1 y a_3.

Caso 3: La sucesión tiene puntos cumbres en infinitos instantes n: más precisamente, hay infinitos instantes n_i tales que a_{n_i} son puntos cumbres. Por ejemplo $a_n = 1/n$. Todos los puntos son puntos cumbre porque la sucesión es decreciente. Otro ejemplo

no decreciente en que hay infinitos puntos cumbres es $a_n = 1 + 1/n$ si n es impar y $a_n = 4 + 1/n$ si n es par. Todos los a_n que aparecen en los instantes n pares, son puntos cumbre. Los que aparecen en los instantes n impares no lo son.

Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones de reales.
Si a_n es una sucesión acotada de reales, entonces existe alguna subsucesión $b_j = a_{n_j}$ de ella, que es convergente.

Demostración usando el método de las cumbres.
Discutimos según la sucesión dada a_n pertenezca al caso 1, 2 ó 3, descriptos antes.

1er. caso: a_n no tiene puntos cumbres. Entonces tomamos $n_1 = 1$ y usamos que a_1 no es punto cumbre. Por definición de punto cumbre, a_1 no es mayor o igual que a_n para todo $n > 1$. Entonces existe $n_2 > 1$ tal que $a_1 < a_{n_2}$.

(A) Obtuvimos $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2}$.

a_{n_2} tampoco es punto cumbre. Entonces por definición de punto cumbre, a_{n_2} no es mayor o igual que a_n para todo $n > n_2$. Es decir, existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_2} < a_{n_3}$.

Obtuvimos $n_3 > n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} < a_{n_3}$.

Por inducción completa, probemos la siguiente proposición:

Hipótesis de inducción: tenemos $n_i > n_{i-1} > \ldots > n_1$ tales que $a_{n_{i-1}} < a_{n_i}$. Tesis de inducción a probar: existe $n_{i+1} > n_i > \ldots > n_1$ tal que $a_{n_i} < a_{n_{i+1}}$.

Demostración de la proposición de inducción completa: Como a_{n_i} no es punto cumbre, a_{n_i} no es mayor o igual que a_n para todo $n > n_i$. Entonces existe $n_{i+1} > n_i$ tal que $a_{n_i} < a_{n_{i+1}}$. Esto prueba la tesis de inducción.

Entonces por inducción completa, para todo natural i tenemos n_i tal que cumple $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < n_{i+1} < \ldots$

$a_{n_i} < a_{n_{i+1}}$ (B)

La subsucesión $b_i = a_{n_i}$ es monótona creciente por (B), y es acotada, porque toda la sucesión a_n era acotada. Ya sabemos que las sucesiones monótonas acotadas, son convergentes. Entonces la subsucesión b_i que encontramos es convergente, probando el teorema de Bolzano Weierstrass en el 1er. caso.

2do. caso: a_n presenta puntos cumbres solo en una cantidad finita de instantes. Sea a_{n_0} el último de los puntos cumbres (el que aparece en el instante n_0 más tarde posible, después del cual no hay más puntos cumbre). Denotemos $n_1 = 1 + n_0$. El término a_{n_1} es el que aparece en el instante siguiente, y no es punto cumbre. Entonces por definición de punto cumbre a_{n_1} no es mayor o igual que a_n para todo $n > n_1$. Esto significa que existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2}$.

(A) Obtuvimos $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2}$. Ahora la prueba sigue exactamente, sin ningún cambio, desde la afirmación (A) en el primer caso, hasta concluir que existe una subsucesión $b_i = a_{n_i}$ convergente, probando el teorema de Bolzano-Weierstrass en el 2do. caso.

3er. caso: a_n presenta puntos cumbres en infinitos instantes $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_i < n_{i+1} < \ldots$ siendo a_{n_i} el $i-$ésimo punto cumbre de la sucesión a_n. Por definición de punto

cumbre $a_{n_i} \geq a_n$ para todo $n > n_i$. En particular para $n = n_{i+1}$ se cumple $a_{n_i} \geq a_{n_{i+1}}$. Consideremos la subsucesión $b_i = a_{n_i}$. Por construcción quedó $b_i \geq b_{i+1}$. Entonces es una subsucesión monótona decreciente. Como es una subsucesión de a_n y toda la sucesión a_n es acotada, por hipótesis, resulta que la subsucesión b_i es acotada. Ya demostramos que las sucesiones de reales monótonas y acotadas son convergentes. Entonces encontramos una subsucesión convergente, probando el teorema de Bolzano-Weierstrass en el 3er. caso. LQQD

Demostración del siguiente Teorema de Completitud, usando el Teorema de Bolzano Weierstrass para sucesiones de reales:

Teorema de Completitud para sucesiones de reales.
Toda sucesión de Cauchy de reales es convergente y recíprocamente.

Directo del Teorema de Completitud
Hipótesis: a_n es convergente **Tesis a probar:** a_n es una sucesión de Cauchy.

Dem. del Directo: Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera pero fijo).
a_n es convergente $\Rightarrow$ $\exists\ L \in \mathbb{R}$ $L = \lim a_n$ $\Rightarrow$ (por definición de límite):
$\forall\ \epsilon' > 0\ \exists\ N \geq 1$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon'$.
Sabemos que vale lo anterior para todo $\epsilon' > 0$. Entonces en particular vale cuando $\epsilon' = \epsilon/2$.
Si tomamos $n > N$ y $m > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon' = \epsilon/2, \quad |a_m - L| < \epsilon' = \epsilon/2 \qquad (I)$
Por separado, aplicando la propiedad triangular del valor absoluto, tenemos:
$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L| \qquad (II)$
Juntando (II) con (I) obtenemos:
Si $n > N$ y $m > N$ entonces $|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$
Hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$ y si $m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$. Esta es la definición de que a_n es una sucesión de Cauchy. LQQD el Directo.

Antes de probar el Recíproco del Teorema de Completitud, probemos el siguiente Lema:

Lema *Si a_n es una sucesión de Cauchy, entonces a_n es acotada.*

Dem. del lema Por definición de sucesión de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$ y si $m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$.
Sabemos que eso es cierto para todo $\epsilon > 0$. Entonces en particular es cierto cuando $\epsilon = 1$. Deducimos que si $n > N$, tomando $m = N+1$ se cumple $|a_n - a_{N+1}| < 1 \quad \forall\ n > N$
Entonces $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1 \quad \forall\ n > N \qquad (P)$
Observar que en la afirmación (P) el número natural N está fijo, y por lo tanto el número real a_{N+1} está fijo. En cambio el número natural n es variable mayor que N, y por lo tanto el número real a_n es variable tomando todos los valores de la sucesión dada que aparezcan después del instante N.

Por separado, tomamos $M_1 = \max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N\}$. Ese número M_1 existe, porque es el mayor de los elementos de un conjunto que tiene una cantidad finita de elementos. Análogamente, tomamos $M_2 = \min\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N\}$. Ese número M_2 existe porque es el menor de los elementos de un conjunto que tiene una cantidad finita de elementos.

Tenemos $M_2 \leq a_n \leq M_1 \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots, N \qquad$ (Q)

La afirmación (P) acota algunos términos de la sucesión a_n, precisamente los que aparecen después del instante N. La afirmación (Q) acota los demás términos de la sucesión a_n, precisamente los que aparecieron antes o hasta el instante N inclusive. Entonces el mayor real entre M_1 y $a_{N+1} + 1$, acota superiormente a todos los términos de a_n a la vez, y el menor real entre M_2 y $a_{N+1} - 1$, acota inferiormente a todos los términos de a_n a la vez. Hemos probado que la sucesión a_n está acotada (superiormente e inferiormente). LQQD el Lema.

Recíproco del Teorema de Completitud

Hipótesis: a_n es una sucesión de Cauchy.

Tesis a probar: a_n es convergente, es decir existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \lim a_n$.

Dem. del Recíproco: Sea $\epsilon > 0$ cualquiera pero fijo.

Por hipótesis a_n es una sucesión de Cauchy. Por el Lema es una sucesión acotada. Por el teorema de Bolzano Weierstrass existe una subsucesión $b_i = a_{n_i}$ que es convergente. Por definición de convergencia de una sucesión, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \lim b_i$. Por definición de límite de la sucesión b_i:

Para todo $\epsilon' > 0$ existe N' tal que si $i > N'$ entonces $|b_i - L| < \epsilon'$.

Como sabemos que lo anterior vale para todo $\epsilon' > 0$, en particular vale para $\epsilon' = \epsilon/2$:

Existe N' tal que si $i > N'$ entonces $|b_i - L| < \epsilon/2$.

Siendo $b_i = a_{n_i}$, y $n_i \geq i$ (como en toda subsucesión), obtenemos lo siguiente:

Si $i > N'$ entonces $|a_{n_i} - L| < \epsilon/2 \qquad$ **(V)** $\qquad$ Además $n_i \geq i \qquad$ **(VI)**

Por hipótesis a_n es una sucesión de Cauchy. Por definición de sucesión de Cauchy, para todo $\epsilon'' > 0$ existe N tal que si $n > N$ y si $m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon''$.

Como sabemos lo anterior para todo $\epsilon'' > 0$, en particular vale para $\epsilon'' = \epsilon/2$:

Existe N tal que si $n > N$ y si $m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \epsilon/2$. **(VII)**

Elegimos y dejamos fijo un número natural i que sea a la vez mayor que N' y que N. Al tener fijo i tenemos fijo n_i y tenemos fijo a_{n_i}. Usando la afirmación (VI) se cumple $n_i \geq i > N$. Resulta $n_i > N$. Usando la afirmación (VII) con $m = n_i$ deducimos que

si $n > N$ entonces $|a_n - a_{n_i}| < \epsilon/2 \qquad$ **(VIII)**

Por separado usamos la propiedad triangular:

$|a_n - L| = |(a_n - a_{n_i}) + (a_{n_i} - L)| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - L| \quad \Rightarrow$

$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - L| \qquad$ **(IX)**

Ahora juntamos la desigualdad (IX) con (VIII) y con (V):

Si $n > N$ entonces $|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - L| < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$

Hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon$. Esto es la definición de $\lim a_n = L$. LQQD el recíproco del teorema de completitud.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 15

IV FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

SUBTEMAS

- Definición de función, dominio, codominio, gráfica y ejemplos Imagen y preimagen. Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o biunívoca. Función inversa
- Límite. Definición. Propiedades, ejemplo. Teorema del pasaje (o límite de funciones por sucesiones).

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

bibliografía para el curso:

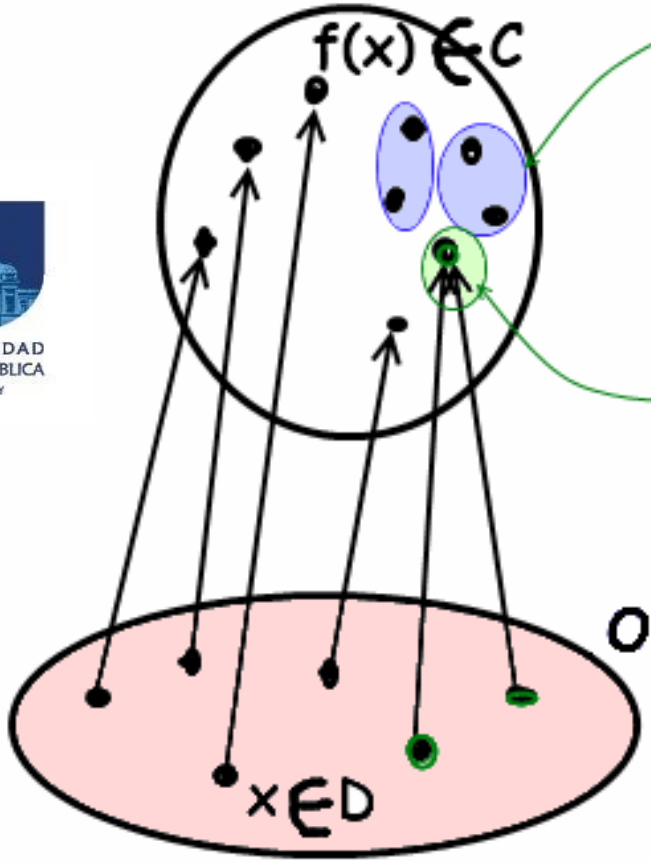
"Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

Para el tema IV : Capítulos 3, 4 y 5.

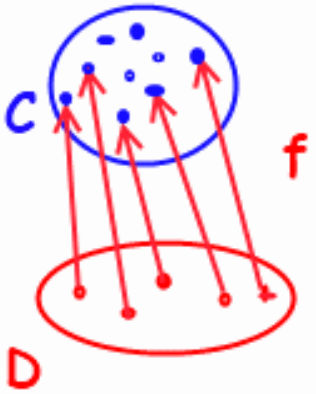
Dados un conjunto D no vacío, llamado Dominio
un conjunto C no vacío llamado Codominio
se llama FUNCIÓN $f: D \longmapsto C$ (función f del Dominio D al codominio C)
a una transformación que asigna a cada elemento $x \in D$
un y uno solo elemento de C, que se denota como f(x)



Puede haber elementos en el codominio C que no sean correspondientes de ningún elemento del dominio.

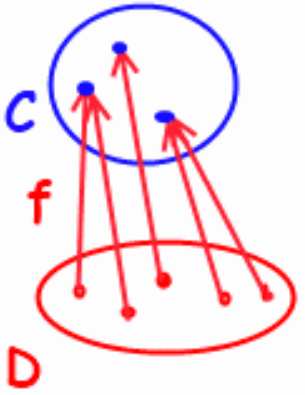
Puede haber algún o algunos elementos en el codominio C que sean correspondientes de más de un x en el dominio D

Observar que a todos y cada uno de los elementos x en el dominio D le corresponde un y uno solo elemento del codominio C



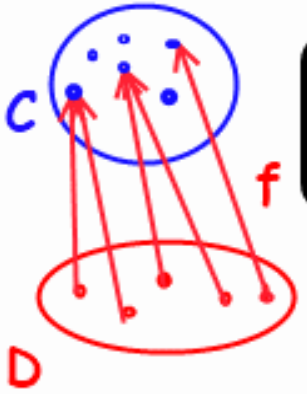
INYECTIVA

A elementos distintos en el dominio D le corresponden elementos distintos en el codominio C

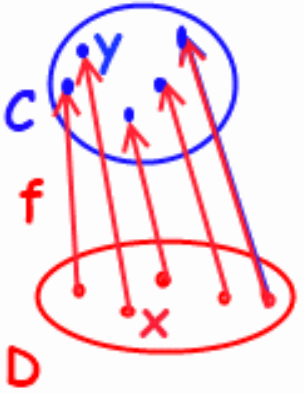


SOBREYECTIVA

Todo elemento del codominio C es correspondiente de por lo menos un elemento del dominio D



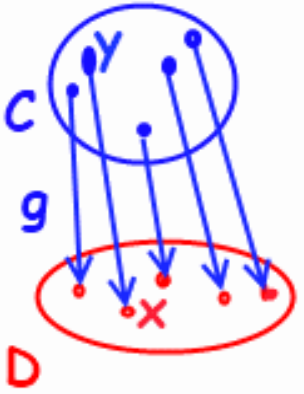
NI INYECTIVA
NI SOBREYECTIVA



INYECTIVA Y SOBREYECTIVA =

BIYECTIVA = BIUNÍVOCA
(por definición)

Una función f: D ⟼ C
es Biyectiva o Biunívoca
si y solo si
es invertible: Existe otra función
g: C ⟼ D tal que
$g(f(x)) = x \quad f(g(y)) = y$



Cuando f es biyectiva
Existe g: C ⟼ D
"función inversa de f"
que es la que cumple

$g(f(x)) = x$
$f(g(y)) = y$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL Cuando el dominio y el codominio son conjuntos de reales (no tienen porqué ser el conjunto de todos los reals)

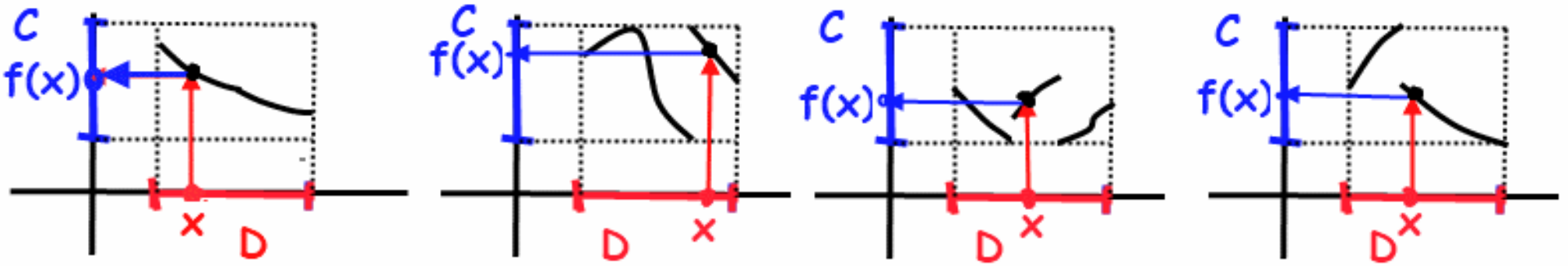
En ese caso el dominio se dibuja en un eje horizontal y el codominio en un eje vertical

GRÁFICA de la función: es el conjunto de puntos (x,y) del plano tales que:

$x \in D$ $y \in C$, y además $y = f(x)$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

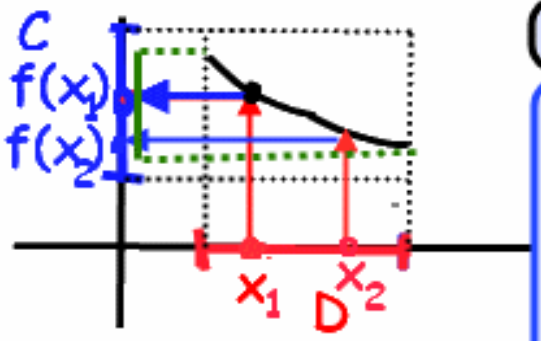
la función NO tiene por qué estar dada mediante una Fórmula



Ejemplos de gráficas de funciones(arriba hay 4 ejemplos). OBSERVAR:

Siempre a cada punto $x \in D$ le corresponde un único $y = f(x)$ en el codominio C y además, le corresponde un único punto (x,y) marcado en negro, en la gráfica de la función, siendo $y = f(x)$, la ordenada del punto (x,y) es y=f(x) siendo x la abscisa

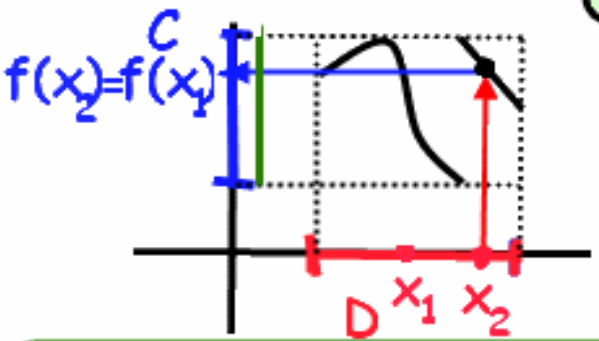
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



En verde el conjunto recorrido o imagen de la función

INYECTIVA

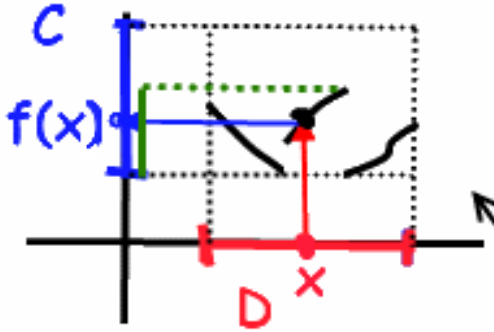
A puntos distintos x_i en el dominio D le corresponden puntos distintos $f(x_i)$ en el codominio C



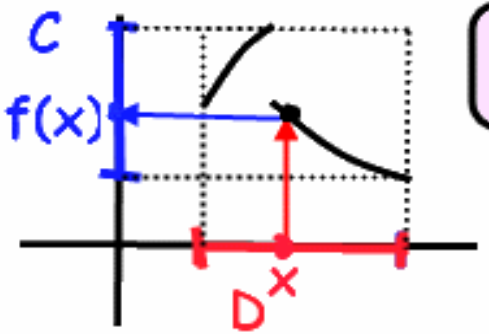
SOBREYECTIVA

Todo punto y del codominio C tiene por lo menos un x en el dominio D del cual es correspondiente.

Sobreyectiva: el conjunto recorrido o imagen es todo el codominio



Ni INYECTIVA ni SOBREYECTIVA

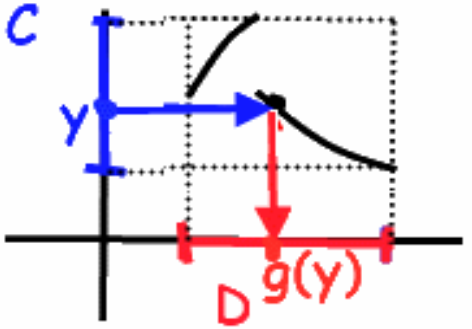


BIUNÍVOCA O BIYECTIVA: Es

inyectiva y sobreyectiva a la vez.

⇕

Para cada $y \in C$ existe y es único $x \in D$ tal que $f(x) = y$



Este x (para cada $y \in C$) lo denotamos

$$x = g(y)$$

$$g: C \longmapsto D$$

es una función, que se llama función inversa de f

Se cumple: f biunívoca si y solo si existe su función inversa g

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in D$$

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in C$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

En resumen: Dar una función f es dar TRES OBJETOS:

1) El conjunto D no vacío Dominio de la función
2) El conjunto C no vacío Codominio de la función
3) La ley o método que a cada elemento $x \in D$ le hace corresponder uno y uno solo de los elementos $y = f(x)$ del conjunto C

En particular Función Real de Variable Real es cuando $D \subset \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$.

La ley de asignación de las funciones reales de variable real pueden ser:

- Dadas por algún método o regla que NO sea una fórmula ni conjunto de fórmulas. Por ejemplo[1], dando su gráfica. Se pasa de cada $x \in D$ a su correspondiente $y = f(x) \in C$, gráficamente siguiendo las flechas de la figura

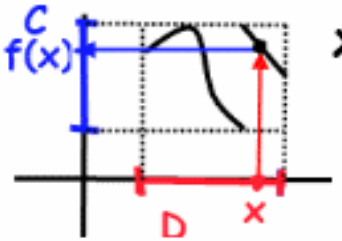


Figura Ejemplo[1]

- Dada por una o más fórmulas Ejemplo[2] $y = x^7 + e^{-2x} + 1/(|x|+1)$

Convención: si se da la o las fórmulas y no se dice cuál es el dominio D ni el codominio C, entonces D es el conjunto de todos los reales donde la fórmula tiene sentido y da un único resultado, y el codominio C es el conjunto de todos los reales.

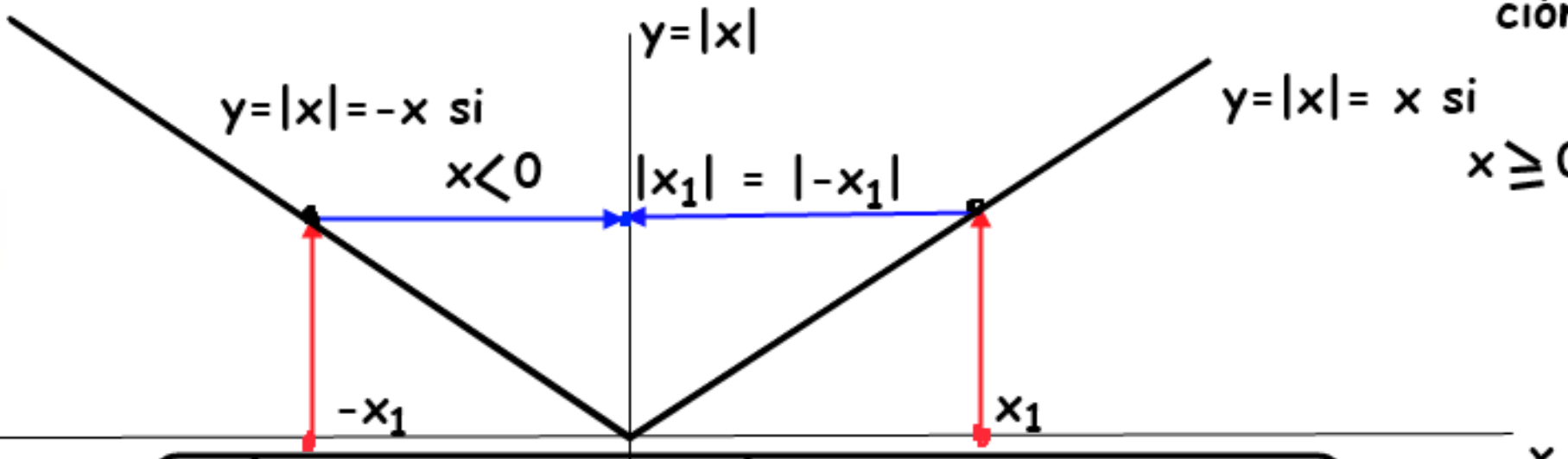
En el ejemplo[2]: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, x \neq -1\}$, $C = \mathbb{R}$

Ejemplo 3 $f(x) = |x|$

Si no se dice explícitamente cuál es el conjunto D dominio, es el de todos los x reales donde la fórmula tiene sentido y da un real f(x).

Entonces, en este ejemplo es $D = \mathbb{R}$

Como no se dice nada cuál es el conjunto C codominio, es $C = \mathbb{R}$ por convención.



GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $f(x) = |x|$ es $y=|x|$

En este ejemplo: $f(x) = |x|$ $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ no es inyectiva

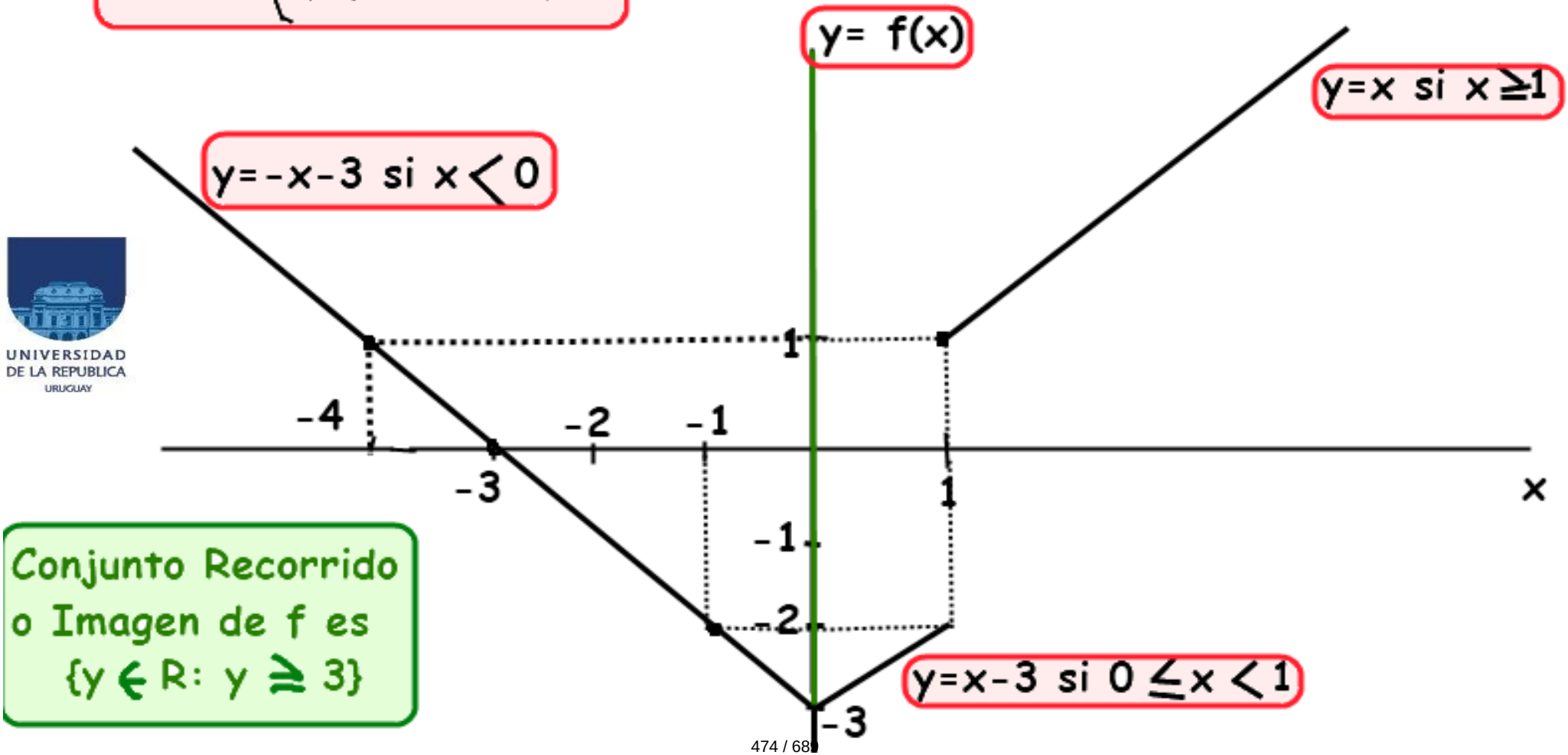
Pero si tomáramos como dominio el conjunto de los reales positivos, sería inyectiva.

$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ no es sobreyectiva pero si tomáramos como codominio el conjunto de los reales mayores o iguales que cero, sería sobreyectiva

Conjunto Recorrido o Imagen de $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$

Ejemplo 4 Cuando la función real de variable real está dada por fórmula(s) puede darse por ejemplo, partiendo el conjunto dominio D de reales, en "pedazos" (subconjuntos) dos a dos disjuntos, y dar una fórmula en cada uno de esos pedazos. Ejemplo: Sea $f: R \longmapsto R$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} =|x| & \text{si } x \geq 1 \\ =|x|-3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



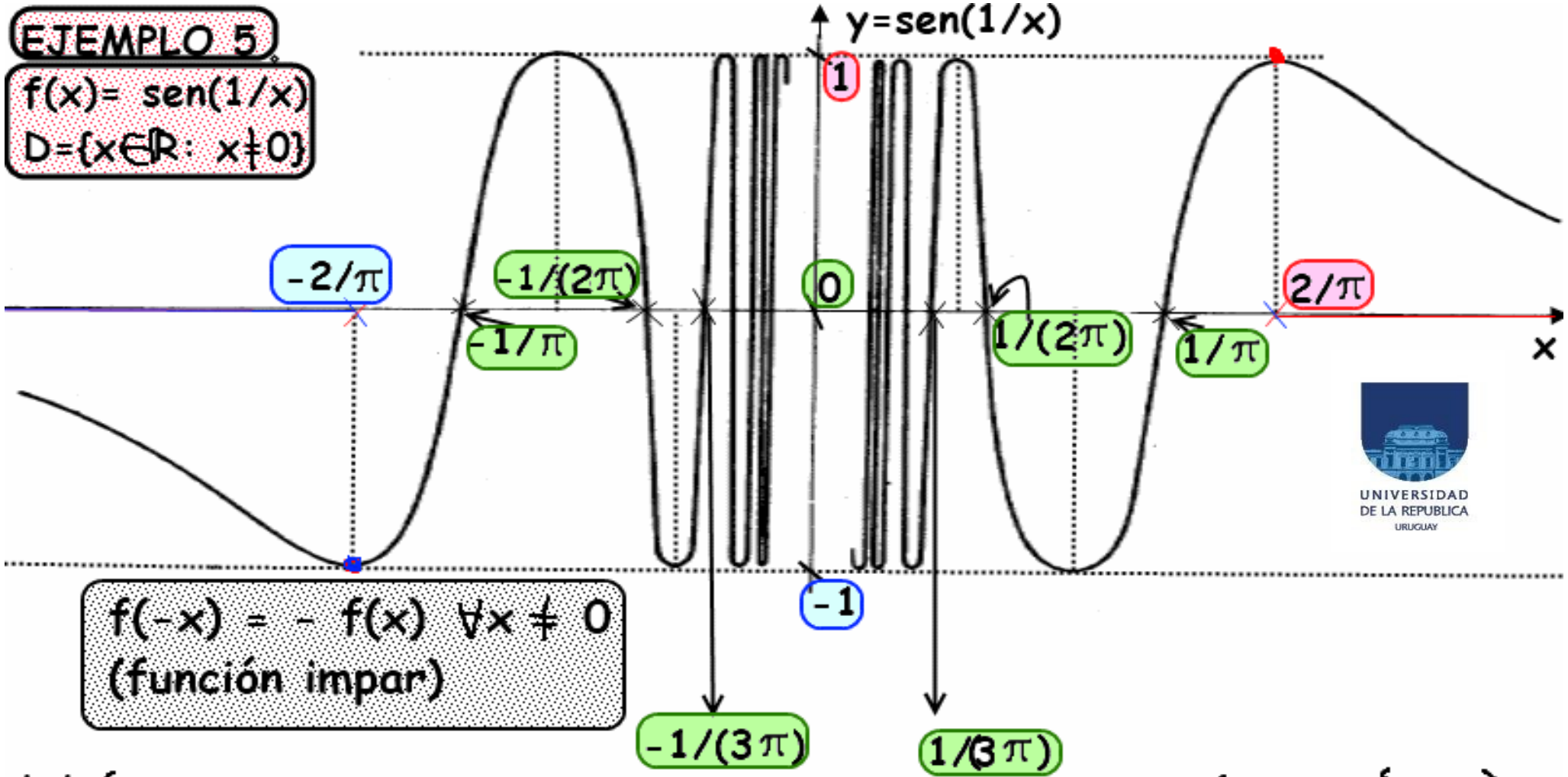
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Conjunto Recorrido o Imagen de f es $\{y \in R: y \geq 3\}$

EJEMPLO 5

$f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$



$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \neq 0$

(función impar)

$|y| \leq 1$, pues $y = \operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen}(u)$ donde $u = 1/x$, $\quad -1 \leq \operatorname{sen} u \leq 1 \Rightarrow$

La ordenada y de cada punto de la gráfica está comprendida entre 1 y -1

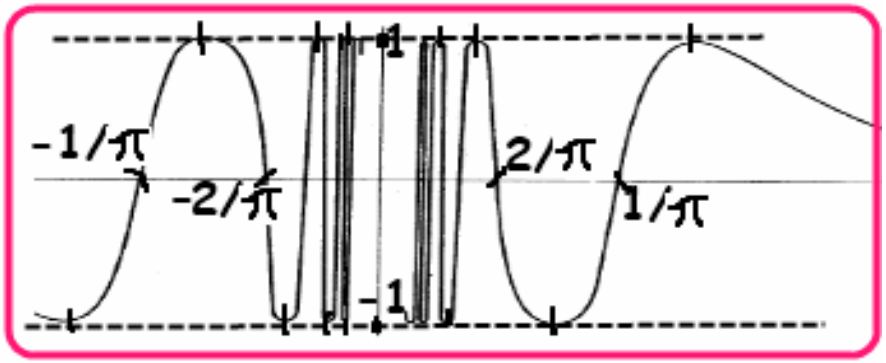
$y=1$ $\quad \operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen} u = 1 \Leftarrow 1/x = u = \pi/2 \Leftrightarrow x = 2/\pi$

$y=-1$ $\quad \operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen} u = -1 \Leftarrow 1/x = u = -\pi/2 \Leftrightarrow x = -2/\pi$

$y=0$ $\quad \operatorname{sen}(1/x) = \operatorname{sen} u = 0 \quad 1/x = u = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ $(k=0) \quad x = 1/\pi \,,\ 1/(2\pi)$

$x = 1/(3\pi), \ \ldots, \ 1/(k\pi), \ \ldots, \ x = -1/\pi \,,\ -1/(2\pi), \ -1/(3\pi), \ \ldots,$

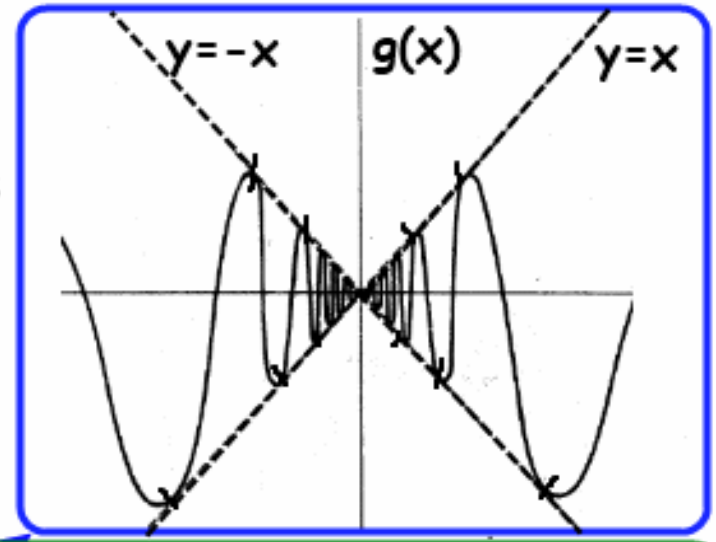
Ejemplo 5 (Conclusión) $y = f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ tiene dominio $D=\{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$ Cuando x se acerca a 0, (sin llegar a ser 0), y=f(x) oscila entre -1 y 1, anulándose infinitas veces para $x = 1/k\pi$ (para todo k entero)



EJEMPLO 6 $y = g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$

tiene dominio $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\}$

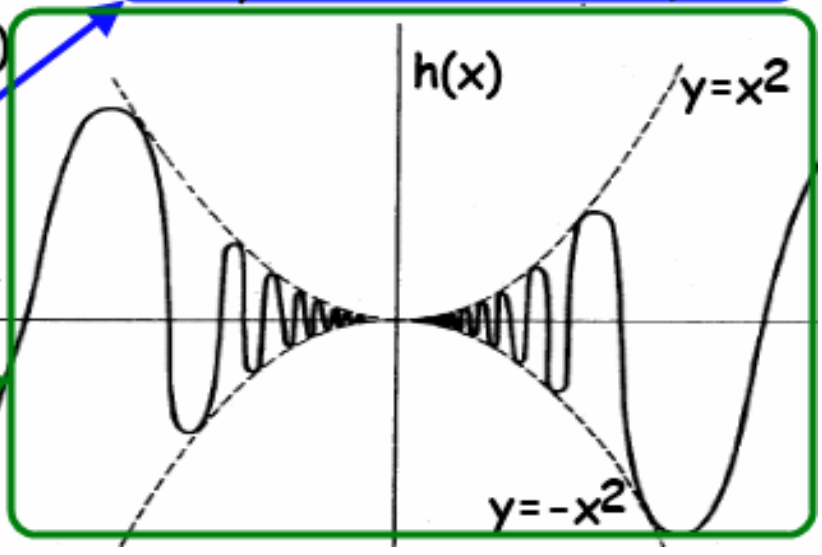
- Cuando $\operatorname{sen}(1/x) = 1$, entonces $y = x$ Los puntos (x,y) de la gráfica de g(x) donde $f(x) = \operatorname{sen}(1/x) = 1$ (en el ejemplo 5) están contenidos en la recta $y = x$
- Cuando $\operatorname{sen}(1/x) = -1$, entonces $y = -x$. Los puntos (x,y) de la gráfica de g(x) donde $f(x) = \operatorname{sen}(1/x) = -1$ (en el ejemplo 5) están contenidos en la recta $y = -x$



Cuando x se acerca a 0 (sin llegar a 0) $y = g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ oscila entre las rectas $y=x$ e $y=-x$, anulándose infinitas veces.

EJEMPLO 7 $y = h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

ídem ejemplo 6 pero entre las parábolas $y = x^2$ e $y = x^2$.



Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

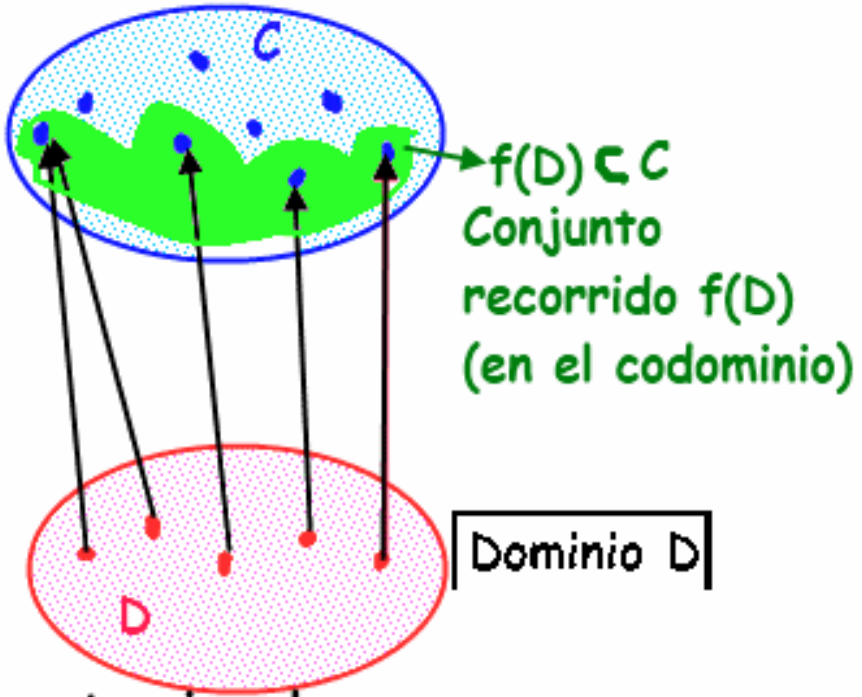
Derechos reservados 2011

CLASE 16

CONJUNTO RECORRIDO O IMAGEN f(D)

Si $f: D \to C$, el conjunto recorrido o imagen de f es:

$f(D) = \{ y \in C: \quad y = f(x) \text{ para algún } x \in D\}$ Observar que $f(D) \subset C$



$f(D) \subset C$
Conjunto recorrido f(D) (en el codominio)

Dominio D

En este ejemplo
$f(D) \subsetneq C$
f no es sobreyectiva

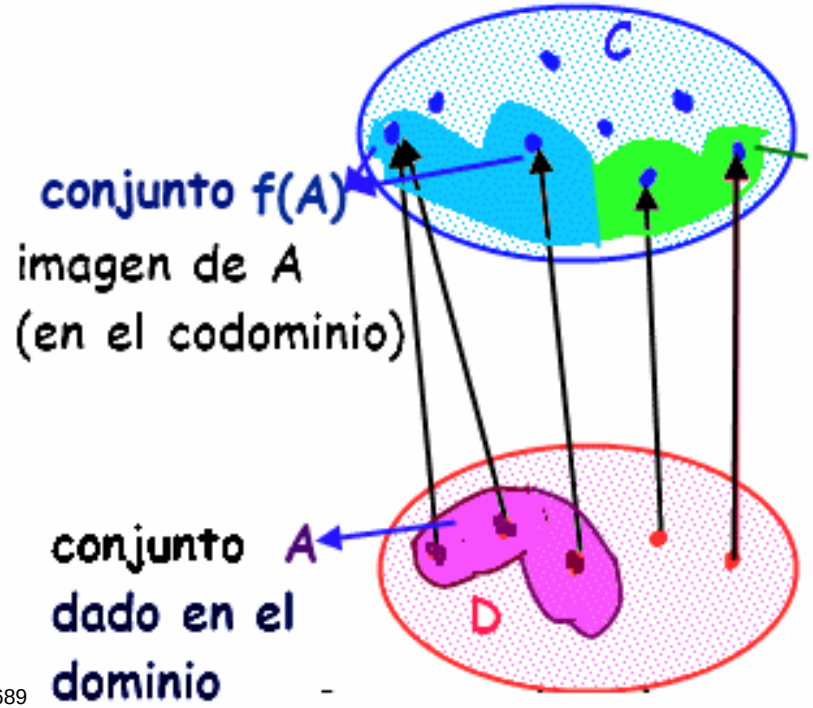
$f: D \to C$ es sobreyectiva si y solo si $f(D) = C$

CONJUNTO IMAGEN DE A f(A)

Sea $\emptyset \neq A \subset D$
(A dado, no vacío, subconjunto del dominio)
El conjunto imagen por f de A es

$f(A) = \{ y \in C: \quad y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$

Observar que $f(A) \subset f(D) \subset C$

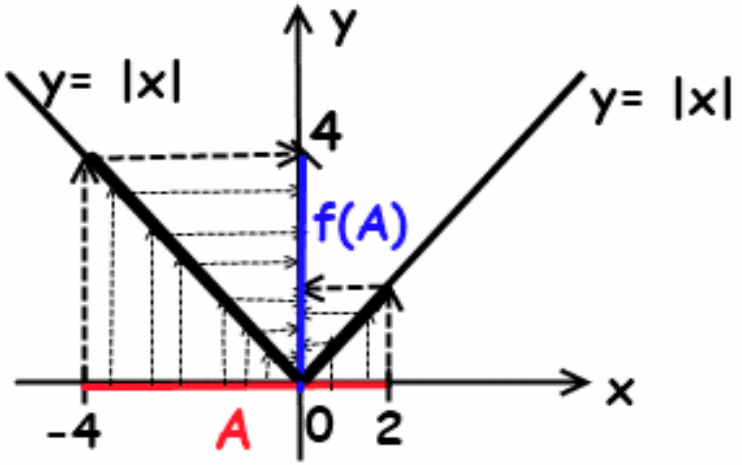


conjunto f(A) imagen de A (en el codominio)

conjunto A dado en el dominio

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLO Hallar el **conjunto imagen f(A)** siendo **f(x) = |x|**, **$A = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 2\}$**



Por definición del conjunto imagen f(A):

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}: y = |x|,\ x \in A\}$$

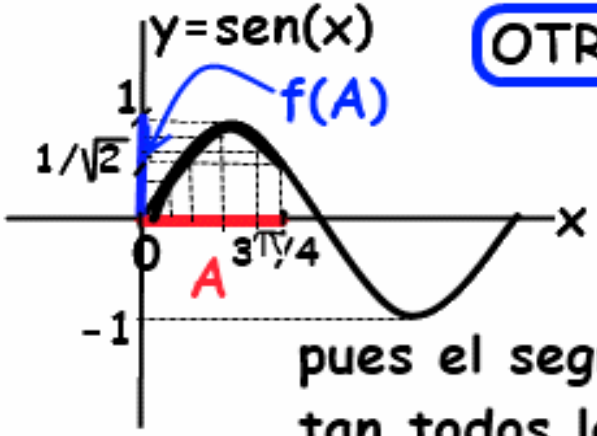
f(A) es el conjunto de los y en el eje vertical
que son ordenadas de puntos (x,y) de
la gráfica de y= f(x)=|x|
que tienen como abscisas $x \in A$.

En cualquier ejemplo de función f real de variable real:

f(A) es la proyección sobre el eje vertical de las y
de los puntos de la gráfica de la función f
que se proyectan sobre el conjunto A en el eje horizontal de las x

En este ejemplo resulta $f(A) = \{ y \in \mathbb{R}: 0 \leq y \leq 4\}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



OTRO EJEMPLO: Hallar el **conjunto imagen f(A)**
siendo f(x) = sen x **$A = \{ x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 3\pi/4\}$**

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}: 0 \leq y \leq 1\}$$

pues el segmento vertical entre y= 0 e y= 1 es donde se proyectan todos los puntos de la gráfica que tienen abscisa x en A.

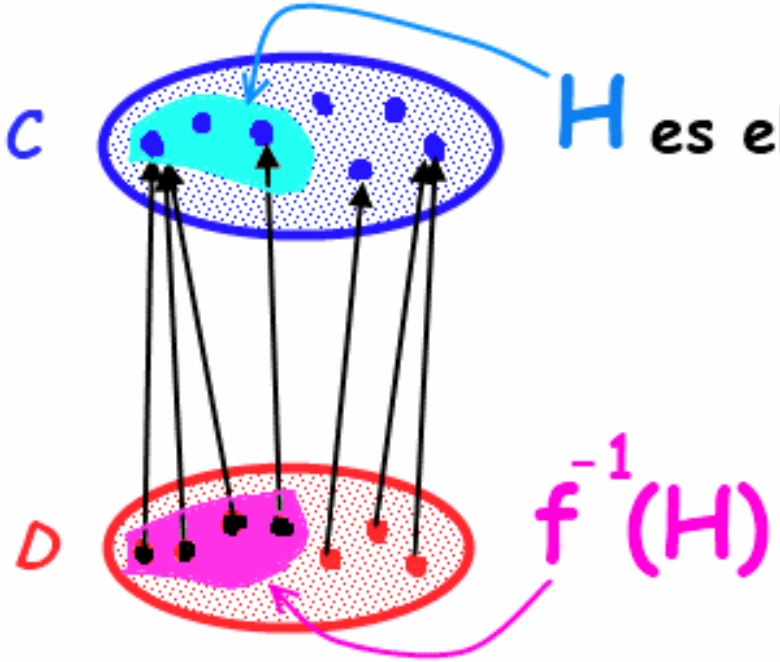
CONJUNTO PREIMAGEN DE H

Sea $\emptyset \neq H \subset C$ (H subconjunto dado, no vacío del codominio)

Se llama **CONJUNTO PREIMAGEN DE H** (se simboliza $f^{-1}(H)$, todo junto, pero no debe interpretarse como función inversa aplicada a nada, pues f puede no tener función inversa)

al conjunto de todos los elementos x del Dominio tales que $f(x) \in H$

$$f^{-1}(H) = \{x \in D : f(x) \in H\}$$

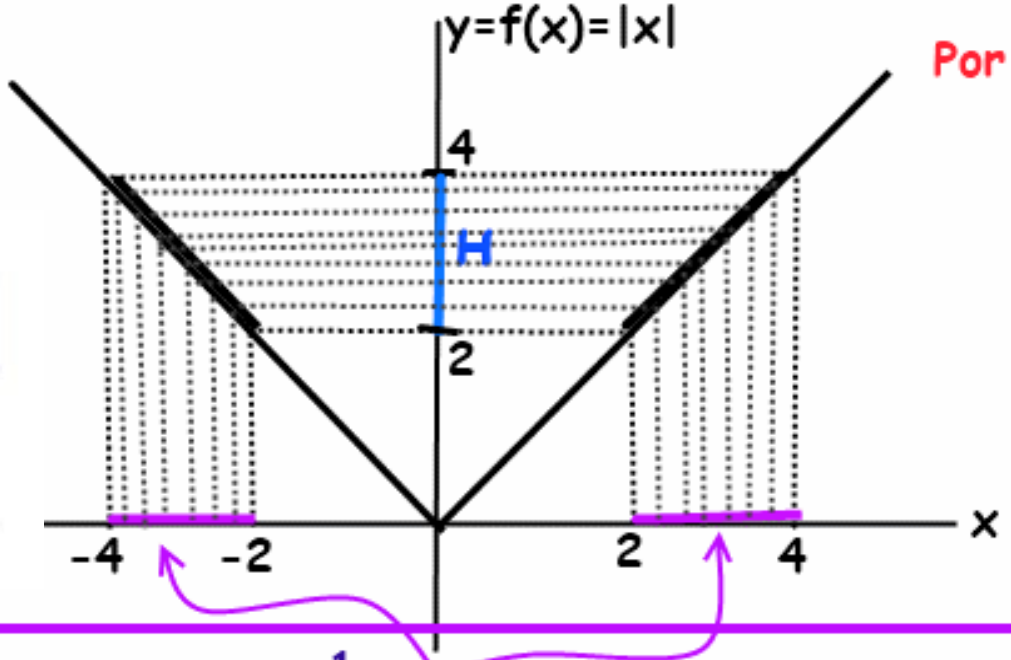


H es el conjunto dado, no vacío del codominio C

$f^{-1}(H)$ es el conjunto de todos los elementos del dominio D que después de aplicarle la función f caen en H

EJEMPLO: Hallar el conjunto preimagen $f^{-1}(H)$ siendo $f(x) = |x|$

$H = \{ y \in \mathbb{R} : 2 \leq y \leq 4 \}$



Por definición de conjunto PREIMAGEN:

$f^{-1}(H)$ es el conjunto de las abscisas x tales que aplicándole f queda algún punto f(x) del conjunto H dado

Entonces, gráficamente, el conjunto preimagen de H es el conjunto $f^{-1}(H)$ donde se proyecta en el eje de las abscisas x, la parte de la gráfica que proyectada sobre el eje de las ordenadas y cae en H

$f^{-1}(H) = \{ x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4 \text{ ó } -4 \leq x \leq -2 \}$

conjunto preimagen

OBSERVACIÓN: Si $A = \{ x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq -2 \}$ entonces $f(A) = H$, pero $f^{-1}(H)$ no es A en este ejemplo

PREGUNTA Si uno tiene un conjunto A no vacío contenido en el dominio, encuentra el conjunto $H = f(A)$ (imagen de A) en el codominio, y después encuentra la preimagen $f^{-1}(H) = f^{-1}(f(A))$ ¿se recupera el mismo conjunto A? La respuesta es NO siempre, a veces se recupera el mismo conjunto A, pero otras veces se obtiene un conjunto DISTINTO DE A, MAS GRANDE QUE A

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS IMÁGENES Y PREIMÁGENES

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos del dominio

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3) Si f es inyectiva entonces $f^{-1}(f(A)) = A$

Sean H y K dos subconjuntos no vacíos del codominio

1') $H \subset K \Rightarrow f^{-1}(H) \subset f^{-1}(K)$

2') $f(f^{-1}(H)) \subset H$

3') Si f es sobreyectiva entonces $f(f^{-1}(H)) = H$

Dem. de 2) (recordar que el símbolo $\supset$ significa que el conjunto a la derecha está contenido propiamente o coincide con el de la izq.)

Llamemos $W = f(A)$ (en el codominio, conjunto imagen de A)

Por definición de conjunto imagen de A: $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) = W$ (1)

Por definición de conjunto preimagen de W:

$f(x) \in W \Leftrightarrow x \in f^{-1}(W)$ (2)

Juntando (1) y (2):

$x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(W)$ (3)

(3) dice que todo punto x del conjunto A es también un punto del conjunto $f^{-1}(W)$.

Entonces $A \subset f^{-1}(W)$ Siendo $W = f(A)$: $A \subset f^{-1}(f(A))$ LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 17

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Consideramos: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

El dominio de f es el intervalo cerrado [a,b].

$x_0 \in [a, b]$ $\quad x_0 \neq a \quad x_0 \neq b$

El punto x está en el intervalo abierto

$L \in \mathbb{R}$ En particular definimos "límite" L SOLO cuando L ES UN REAL

Definición: Decimos que f(x) tiende a L cuando x tiende a x_0 o que el límite de f(x) es L cuando x tiende a x_0

y denotamos: $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L$ ó también $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

cuando:

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ \text{ tal que}$$

$$(*) \qquad 0 \neq |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

OBSERVACIONES SOBRE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que:

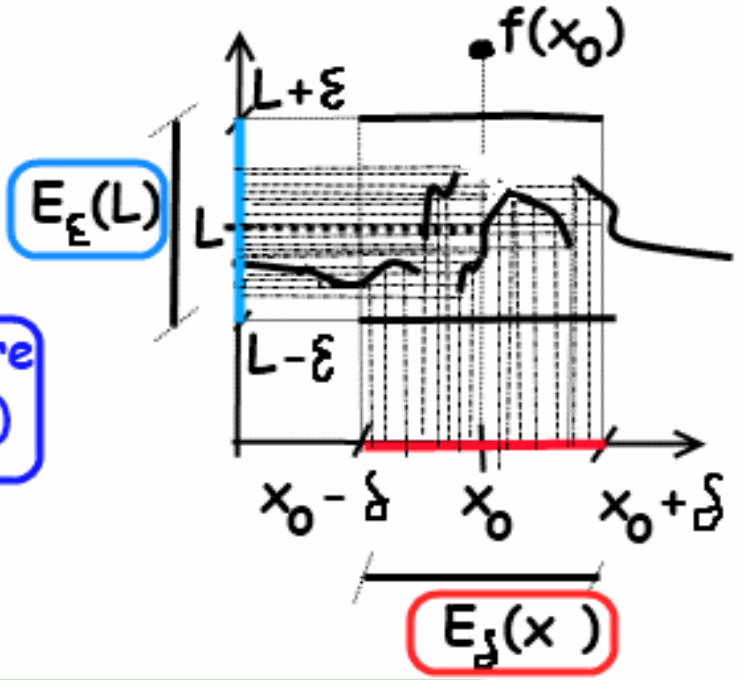
$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad$ tal que

(*) $\quad 0 \neq |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$

no interesa $x = x_0$, entonces

no interesa cuánto vale $f(x_0)$

$f(x)$ puede ser siempre muy distinto de $f(x_0)$



La sentencia (*) significa
que cualquiera sea $x \neq x_0$
en el entorno $E_\delta(x_0)$ del dominio
su correspondiente $f(x)$ cae
en el entorno $E_\varepsilon(L)$ del codominio

$x \in E_\delta(x) \Rightarrow f(x) \in E_\varepsilon(L)$

NEGACIÓN DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ ó $\nexists$ en $\mathbb{R}$ el $\lim_{x \to x_0} f(x)$

significa que

$\exists\ \epsilon > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$ se cumple:

[No (*)]:

$\exists\ x$ tal que: $\quad 0 \neq |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| \geq \epsilon$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLO Sea $f(x) = \begin{cases} \text{sen } (1/x) \text{ cuando } x \neq 0 \\ 0 \text{ cuando } x = 0 \end{cases}$

Demostrar que no existe real $L = \lim_{x \to 0} f(x)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostración:

Sea L un real cualquiera dado fijo.

Probar que $f(x)_{x \to 0} \not\to L$.

Probar que vale la negación de definición de límite L, es decir,

probar que la respuesta a la siguiente pregunta es SI.

Pregunta @:

¿$\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se cumple:

$\exists x$ tal que

$0 \neq |x-0| < \delta$, $|f(x)-L| \geq \epsilon$?

Vamos a demostrar que Sí a la pregunta @, tomando $\epsilon = 1$. El problema es que no podemos darle un valor concreto a δ, pues debemos probar el resultado para todo $\delta > 0$. Vamos a elegir uno o dos valores de x adecuados para cada $\delta > 0$ genérico que sea.

Elijamos $\epsilon = 1$

Tomemos $\delta > 0$ genérico (fijo).

Construimos ahora un número natural $k \geq 1$ auxiliar:

$k > 1/(2 \cdot \pi \cdot \delta)$,

por ejemplo

$k = 1 + \text{parte entera}(1/(2 \cdot \pi \cdot \delta))$

Sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA

Teníamos $\epsilon = 1$

Para cada $\delta > 0$ (genérico) el natural k auxiliar tal que

$k > 1/(2 \cdot \pi \cdot \delta)$

Tomemos los dos reales siguientes, observando que ninguno es cero:

$$x_1 = \frac{1}{(\pi/2) + 2k\pi}, \qquad x_2 = \frac{1}{(3\pi/2) + 2k\pi}.$$

Verifiquemos que $1/|x_1| > 1/\delta$:

$$\frac{1}{|x_1|} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi > 2k\pi > 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \delta} \cdot \pi = \frac{1}{\delta}$$

Entonces tenemos $1/|x_1| > 1/\delta > 0$, de donde $|x_1| < \delta$.

Deducimos que $|x_1 - 0| < \delta$. A1

Análogamente verificamos que

$|x_2 - 0| < \delta$. A2

Ahora calculemos $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

Como $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$ tenemos: B

$$f(x_1) = \text{sen}(1/x_1) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = +1$$

$$f(x_2) = \text{sen}(1/x_2) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$$

Entonces:

$$|f(x_1) - L| = |1 - L|$$
$$|f(x_2) - L| = |-1 - L| = |L + 1|$$

Propiedad triangular:

$$|(1 - L) + (L + 1)| \leq |1 - L| + |L + 1|$$

Entonces

$$|f(x_1) - L| + |f(x_2) - L| = |1 - L| + |L + 1|$$
$$|f(x_1) - L| + |f(x_2) - L| \geq |(1 - L) + (L + 1)|$$
$$|f(x_1) - L| + |f(x_2) - L| \geq 2$$

La suma de esos dos números es ≥ 2

$\Rightarrow$ Alguno de esos dos números $|f(x_1) - L|$ ó $|f(x_2) - L|$ (ó ambos) es ≥ 1. A3

sigue

Teníamos $\epsilon = 1$

Para cada $\delta > 0$ (genérico) construimos dos reales x_1, x_2 tales que

$|x_1 - 0| < \delta$ A1

$|x_2 - 0| < \delta$ A2

$x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$ B

Alguno de estos dos números $|f(x_1) - L|$ ó $|f(x_2) - L|$ (ó ambos) es $\geq 1 = \varepsilon$ A3

Nuestro objetivo ya dijimos que es:

probar que la respuesta a la siguiente pregunta es SI.

Pregunta @:

¿$\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se cumple:

$\exists x$ tal que

$0 \neq |x-0| < \delta$, $|f(x) - L| \geq \epsilon$?

Efectivamente, ya probamos que existe un $\varepsilon > 0$ precisamente $\varepsilon = 1$, tal que $\forall \delta > 0$ existen dos números reales x (precisamente x_1 y x_2 que construí) tales que

ambos cumplen $0 \neq |x - 0| < \delta$

(pues demostré A1, A2 y B)

y por lo menos uno de ellos, x cumple

$|f(x) - L| \geq \varepsilon$

(pues demostré A3)

Lo anterior prueba que la respuesta a la pregunta @ es SÍ.

LQQD.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPIEDADES DE LÍMITE DE FUNCIONES

(recordar que se dice que existe el límite solo cuando es real)

Unicidad del límite:

Si existe un real $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces es ÚNICO.

Límite de la suma de funciones:

si existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ y es igual a $\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Límite de función constante k:

Si $f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$ entonces, cualquiera sea $x_0 \in [a,b]$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$

Límite de producto de funciones:

si existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$ y es igual a $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

Límite del cociente de funciones

si existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$, y si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

entonces existe

$\lim_{x \to x_0} (f(x) / g(x))$ y es igual a $\lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTRA PROPIEDAD DE LÍMITE DE FUNCIONES

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, y si $|g(x)| \leqslant k \quad \forall x$ en un entorno de x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\ g(x)) = 0$$

(Por hipót. g es "acotada" en un entorno aunque no tenga límite)

Dem.

(Cuidado que este teorema es falso si el límite de f(x) es distinto de 0)

Sea dado $\epsilon > 0$ (genérico, pero fijo).
Sabemos por hipótesis que
$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
Usando la definición de límite,
sabemos que
Para todo $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - 0| < \epsilon_1 \quad (B)$$

Como ya sé, por hipótesis, que lo anterior
es cierto para todo $\epsilon_1 > 0$,
sé que es cierto en particular si elijo

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2k}$$

Existe $\delta_1 > 0$ tal que vale (B)
Usando (B) y usando la hipótesis $|g(x)| \leq k$ para todo x en un entorno $E_{\delta_2}(x_0)$ de x_0,
deduzco que existe $\delta > 0$
(menor que δ_1 y que δ_2) tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta < \delta_1,\ \delta_2 \ \Rightarrow$$

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq$$

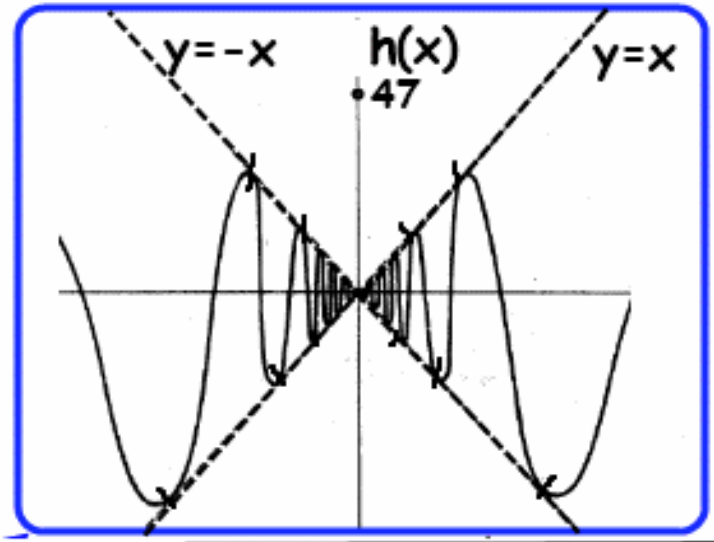
$$\leq \epsilon_1 \cdot |g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2k} \cdot k = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$0 \neq |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) \cdot g(x) - 0| < \epsilon$$

Esta es la definición de $\lim$ (f(x) g(x))= 0 LQQD

Ejemplo: Sea $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $h(x) = 47$ si $x = 0$

Probar que $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$



Usaremos esta propiedad:

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, y si $|g(x)| \leq k$ $\forall x$ en un entorno de x_0

entonces

$\lim_{x \to x_0} (f(x)\ g(x)) = 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Para calcular $\lim_{x \to 0} h(x)$ no importa el valor h(0).

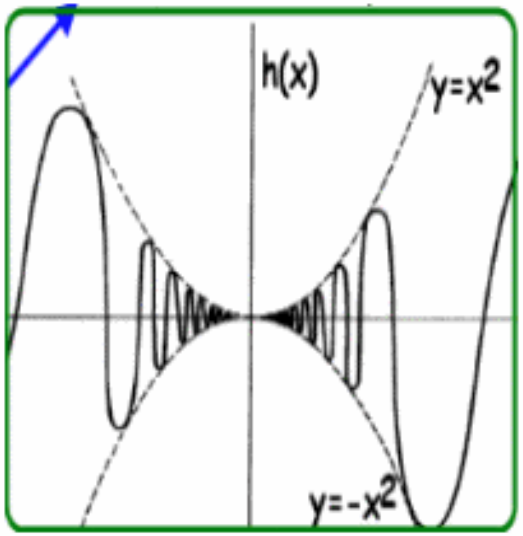
Para $x \neq 0$ $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x) = f(x)\ g(x)$

siendo $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Entonces

$\lim f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$, $|g(x)| = |\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1 = k$

Usando la propiedad de arriba, se deduce que

$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ LQQD



OTRO EJEMPLO

Análogo al anterior

$h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

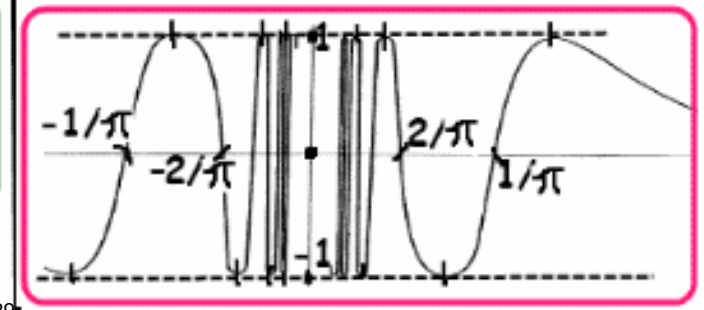
$h(x) = 91$ si $x = 0$

$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$

OTRO EJEMPLO $h(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$h(x) = 0$ si $x = 0$

Ya probamos que no existe $\lim_{x \to 0} h(x)$



No importa cuál sea el valor de h(0)

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 18

TEOREMA DEL SANDWICH

Sean tres funciones f, g y h con el mismo dominio D= [a,b]
Sea x_0 un punto del dominio = [a,b] que no coincide con a ni con b.

Hipótesis: Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in [a,b]$
si existen (reales) y son iguales $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$
entonces

Tesis: Existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$ y también es igual a L

(Popularmente: "Si los límites de los dos panes existen y son iguales, entonces el límite del jamón también existe y también es igual a ellos").

Dem.

Sea dado $\epsilon > 0$ (cualquiera, pero fijo)
Elijo un real $\rho > 0$ auxiliar tal que $0 < \rho \leq \epsilon$
Por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$
Por definición de límite:
$\forall \ \epsilon_1 > 0 \ \exists \ \delta_1 > 0$ tal que
$0 \neq |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_1$. Como sé que lo anterior vale $\forall \ \epsilon_1 > 0$, en particular sé que vale cuando $\epsilon_1 = \rho$.

Deduzco que $\exists \ \delta_1 > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \rho \Rightarrow -\rho < f(x) - L < \rho \quad (A)$$

(sigue)

Teníamos: dado $\epsilon > 0$, un real auxiliar $0 < \rho \leq \epsilon$

Hasta ahora probamos que

$\exists \ \delta_1 > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \rho \ \Rightarrow \ -\rho < f(x) - L < \rho \quad (A)$$

Análogamente, usando $h(x)$ en vez de $f(x)$ deduzco que $\exists \ \delta_2 > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |h(x) - L| < \rho \ \Rightarrow \ -\rho < h(x) - L < \rho \quad (B)$$

Tomo $\delta > 0$ igual al menor de los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$.

Uso (A) y (B): $0 \neq |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ 0 \neq |x - x_0| < \delta_1, \quad \delta_2 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\rho < f(x) - L, \qquad h(x) - L < \rho \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L - \rho < f(x), \qquad h(x) < L + \rho \quad (C)$$

Uso la hipótesis $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ junto con (C):

$$L - \rho < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \rho$$

Hemos construido $\delta > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ L - \rho < g(x) < L + \rho \ \Rightarrow \ |g(x) - L| < \rho \leq \epsilon$$

Todo lo anterior vale para cualquier $\epsilon > 0$ que se haya fijado al principio. Hemos probado que $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta$ tal que $0 \neq |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - L| < \epsilon$ Por definición de límite, lo anterior significa que $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

LEY DE CONSERVACIÓN DE SIGNO (para funciones no necesariamente continuas)

Hipótesis: Existe real $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, $L \neq 0$

Tesis: Existe un entorno $E_\delta(x)$ tal que para todo $x \neq x$ en $E_\delta(x_0)$ el signo de $f(x)$ es el mismo que el signo de L.

(Nota importante: El signo de $f(x_0)$ puede ser cualquiera, no tiene nada que ver en general, con el signo de L)

Dem

Por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$. Construyo el número real auxiliar $\rho = |L|/2 > 0$

Aplico la definición de límite:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que}$$
$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ si } x \neq x_0 \text{ y si } |x - x_0| < \delta$$

Como lo anterior sé que vale para todo $\epsilon > 0$, en particular vale para $\epsilon = \rho$.

Deduzco que $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \rho = |L|/2 \text{ si } x \neq x_0 \text{ y si } x \in E_\delta(x_0)$$
$$\Rightarrow \quad -|L|/2 < f(x) - L < |L|/2 \text{ para todo } x \neq x_0 \text{ en } E_\delta(x_0) \quad (i).$$

(sigue)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Hasta ahora probamos que

$\exists\ \delta > 0$ tal que

$-|L|/2 < f(x) - L < |L|/2$ para todo $x \neq x_0$ en $E_\delta(x_0)$ (i).

Como por hipótesis L ≠ 0, solo hay dos casos L >0, ó L< 0.

1er. caso) Si $L > 0$, $|L| = L$ junto con (i):

$f(x) - L > -|L|/2 = -L/2 \ \Rightarrow\ f(x) > L - L/2 = L/2 > 0$

para todo $x \neq x_0$ en $E_\delta(x_0)$. Entonces ya demostré en el 1er. caso que signo de $f(x)$ = signo de L (pues ambos son positivos).

2do. caso) Si $L < 0$, $|L| = -L$ junto con (i):

$f(x) - L < |L|/2 = -L/2 \ \Rightarrow\ f(x) < L - L/2 = L/2 < 0$

para todo $x \neq x_0$ en $E_\delta(x_0)$. Entonces ya demostré en el 2do. caso que signo de $f(x)$ = signo de L (pues ambos son negativos). LQQD

MONOTONÍA DEL LÍMITE DE FUNCIONES

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Si $x_0 \in (a,b)$ y si existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

Entonces $L_1 \leq L_2$

Dem. Por hipótesis existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

Sea $\varepsilon > 0$ (cualquiera). Por definición de límite de función:

existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que

$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$ (I)

$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon$ (II)

Elijo $\delta > 0$ igual al menor entre δ_1 y δ_2

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_1, \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L_1 < \varepsilon$ por (I)

$-\varepsilon < g(x) - L_2 < \varepsilon$ por (II)

por hipótesis

$L_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < L_2 + \varepsilon \Rightarrow L_1 - \varepsilon < L_2 + \varepsilon$

$\Rightarrow L_1 - L_2 < 2\varepsilon$ (III) Pero $\varepsilon > 0$ era arbitrario. Entonces $L_1 - L_2$ es un número real menor que cualquier número real positivo 2ε

$\Rightarrow L_1 - L_2 \leq 0 \Rightarrow L_1 \leq L_2$ LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 19

TEOREMA DEL PASAJE (para funciones no necesariam. continuas)

(pasaje ida y vuelta de límite de funciones a límite de sucesiones)

(A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si

(B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$

y tal que $\lim a_n = x_0$

se cumple que

$$\lim f(a_n) = L$$

(OBSERVAR QUE $f(a_n)$ es otra sucesión de reales, por lo tanto el lím $f(a_n)$ se define cuando el índice natural n de la sucesión tiende a + infinito.)

EJEMPLO: Ya sabemos que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) - 4 = 0 - 4 = -4 = L$

Tomemos la sucesión $a_n = 1/n^5$ Se cumple $a_n \neq 0 = x_0$

$\lim a_n = 0 = x_0$

Entonces, aplicando el directo del teorema del pasaje (A) $\Rightarrow$ (B) deducimos que la sucesión $b_n = (1/n^5)^2 \operatorname{sen}(n^5) - 4$ tiende a -4.

TEOREMA DEL PASAJE

(A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si

(B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$

se cumple que $\lim f(a_n) = L$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem. del directo (A)⇒(B)

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera, pero fijo).

Por hipótesis (A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Usando la definición de límite de función:

$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad (C)$$

Fijo ese número $\delta > 0$ que existe por la definición anterior (y que depende del $\epsilon > 0$ fijado de antemano).

Tomemos una sucesión de reales $a_n \neq x_0$ tal que $\lim a_n = x_0$. Usando la definición de límite de sucesión:

$\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists\ N \geq 1$ tal que $n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - x_0| < \varepsilon_1$ (D)

Sé que lo anterior vale para todo $\varepsilon_1 > 0$. luego en particular vale para $\varepsilon_1 = \delta$.

(D) Deduzco que $\exists\ N \geq 1$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - x_0| < \delta \qquad (E)$$

Además sé que $a_n \neq x_0$. Entonces sé que

$$|a_n - x_0| \neq 0 \qquad (G).$$

Junto (E) con (G) y luego aplico (C) en el caso $x = a_n$ Deduzco que $\exists\ N \geq 1$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad 0 \leq |a_n - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - L| < \epsilon$$

En resumen, he probado que cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que $n > N \quad \Rightarrow \quad |f(a_n) - L| < \epsilon$. La anterior es la definición de límite L de la sucesión $f(a_n)$. Entonces he probado (B). LQQD

TEOREMA DEL PASAJE

(A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si

(B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$

se cumple que $\lim f(a_n) = L$

Dem. del recíproco (B) $\Rightarrow$ (A)

Hipótesis: (B). Tesis a probar: (A)

Demostración por absurdo. Para demostrar la tesis (A) suponemos "No (A)" y usando la hipótesis (B) llegar a una contradicción.

No (A) es que $f(x)_{x \to 0} \not\to L$.

Negamos la definición de límite de función igual a L,

$\exists \epsilon$ tal que $\forall \delta > 0$

$|f(x) - L| \geq \epsilon$ para algún x tal que $0 \neq |x - x_0| < \delta$. (M)

Ese $\epsilon > 0$ que existe, lo dejamos fijo

$\forall \delta > 0$ vale (M), en particular es cierta para $\delta = 1/n$, donde $n \geq 1$ es cualquier natural

$\Rightarrow$ para cada uno de esos valores de δ (es decir para cada natural $n \geq 1$) existe un real $x = a_n$ (lo llamo a_n) tal que

$0 \neq |a_n - x_0| < \delta = 1/n, \quad |f(a_n) - L| \geq \epsilon$ (Z)

Lo anterior vale para cualquier $n \geq 1$ que se tome.

Entonces:

$\forall\, n \geq 1$ se cumple $|f(a_n) - L| \geq \epsilon$ (N)

sigue

Habíamos probado que la sucesión a_n construida cumple Z → $0 \neq |a_n - x_0| < \delta = 1/n, \quad |f(a_n) - L| \geq \epsilon$ Z

y que cumple N → $\forall\, n \geq 1$ se cumple $|f(a_n) - L| \geq \epsilon$ N

$\epsilon > 0$ lo habíamos dejado FIJO

Continuación de la demostración del recíproco del teorema del pasaje:

Estamos tratando de demostrar que (B) $\Rightarrow$ (A) siendo

Hip) (B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$ se cumple que $\lim f(a_n) = L$

Tesis) (A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Estábamos probando por absurdo a partir de suponer "No (A)".(No Tesis)

Habíamos obtenido las afirmaciones Z y N

Z $\Rightarrow$

Como $0 \neq |a_n - x_0| < \delta = 1/n$ y $\lim 0 = 0, \quad \lim(1/n) = 0$ por el teorema del sandwich (para sucesiones) se deduce:

$$\lim |a_n - x_0| = 0$$

Luego $\lim a_n - x_0 = 0$, $\lim a_n = x_0$ (P)

Además $0 \neq |a_n - x_0| \Rightarrow a_n \neq x_0$ (Q)

Junto (P), (Q) y aplico la hipótesis (B):

$\lim f(a_n) = L$

Por definición de límite L de la sucesión $f(a_n)$, sé que para todo $\epsilon > 0$, (y entonces en particular lo sé para el $\epsilon > 0$ fijado antes), existe $N > 0$ tal que

$\forall n > N$ se cumple $|f(a_n) - L| < \epsilon$ (S)

Las sentencias (N) y (S) se contradicen entre sí.

Absurdo. LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ya probamos: **TEOREMA DEL PASAJE**

(A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si

(B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$

se cumple que $\lim f(a_n) = L$

COROLARIO 1 un método para demostrar que no existe lim f(x).

Si encuentro una sucesión de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$ y no existe $\lim f(a_n)$

entonces no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Dem.
Si existiera $\lim_{x \to x_0} f(x)$ aplicaría el teorema del pasaje (A) $\not\Rightarrow$ (B) y obtendría que lim $f(a_n) = L$ contradiciendo la hipótesis de este Corolario de que no existe lím $f(a_n)$ LQQD

EJEMPLO

Sea la función f(x) =parte entera de (1/x) si $x \neq 0$
f(x) = 0 si x= 0
Demostrar que no existe el límite de f(x) cuando $x \to 0$

Tomo la sucesión $a_n = 1/n$. Cumple
$a_n = 0$ para todo n 1, $\lim a_n = 0$,

$f(a_n)$ = parte entera de $(1/a_n)$ =(parte entera de n)= n
La sucesión $b_n = f(a_n) = n$ no tiene límite (porque $b_n = n$ es una sucesion no acotada)
Por el corolario 1, no existe el límite de f(x) cuando $x \to 0$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Ya probamos: **TEOREMA DEL PASAJE**

(A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si

(B) para toda sucesión a_n de reales tal que $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ y tal que $\lim a_n = x_0$

se cumple que $\lim f(a_n) = L$

COROLARIO 2 Otro método para demostrar que no existe $\lim f(x)$.

Si encuentro dos suces. de reales a_n y b_n tales que:

$a_n \neq x_0$, $b_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$

$\lim a_n = \lim b_n = x_0$

y $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$

entonces no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Dem. Si existiera $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ entonces aplicando el teorema del pasaje (A)$\Rightarrow$(B) obtendría para las dos sucesiones a_n y b_n que $\lim f(a_n) = L = \lim f(b_n)$ contradiciendo la hipótesis de este corolario de que $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$ LQQD

EJEMPLO Sea la función G(x)= parte entera de $1/x$, si $x \neq 0$

Sea $f(x) = (-1)^{G(x)}$ si $x \neq 0$

$f(x) = 0$ si $x = 0$. Demostrar que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

Tomo las sucesiones $a_n = 1/(2n)$, $b_n = 1/(2n+1)$.

Cumplen $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$, $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$

$G(a_n)$ = parte entera de $(1/a_n)$ = parte entera de $2n$

$G(a_n) = 2n$, $G(b_n) = 2n+1$, $f(a_n) = (-1)^{2n} = +1$

ídem $f(b_n) = (-1)^{2n+1} = -1$

$\lim f(a_n) = +1$ $\lim f(b_n) = -1$

Aplicando el Corolario 2 $\Rightarrow \nexists \lim f(x)$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 20

Ⓥ CONTINUIDAD

- Continuidad de funciones. Acotación. Ley de conservación del signo. Ejemplo. Teorema del pasaje para func. continuas.
- Teoremas de Bolzano y Darboux para funciones continuas en intervalos compactos. Enunciados y demostraciones
- Teorema de Weierstrass para funciones continuas en intervalos compactos. Enunciados y demostraciones
- Continuidad uniforme. Definición. Ejemplos. Teorema de Heine-Cantor.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

bibliografía para el curso:

"Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

PARA EL TEMA Ⓥ Capítulos 6, 7 y 8

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO x_0

1) Sea $f:[a,b] \to R$, y sea $x \in (a,b)$

Decimos que $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ cuando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Aplicando la definición de límite, la definición anterior es equivalente a esta otra:

Decimos que $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ cuando $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tal que

$$0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Observ: Cuando $x = x_0$ se cumple $f(x) = f(x_0)$.

Entonces $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

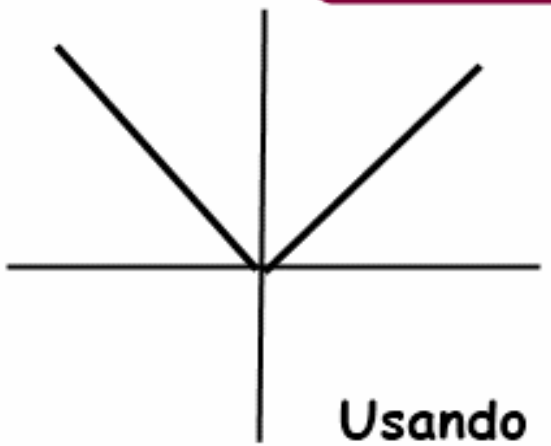
Por lo tanto la sentencia (*) sigue valiendo aunque $0 = |x - x_0|$

3) Usando la observación anterior, la definición 2) y la 1) son equivalentes a esta otra: Decimos que $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ cuando $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLO Demostrar aplicando la definición de continuidad que la función $f(x)= |x|$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$



Sea $\varepsilon > 0$ (cualquiera, pero fijo)

Elijo $\delta = \varepsilon$

Voy a probar que

(*) ¿ $|x-x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

(Definición de continuidad de f en el punto x)

Usando la propiedad triangular:

$|x| = |(x-x_0)+x_0| \leq |x-x_0|+|x_0|$ (i)

$|x_0| = |(x_0-x)+x| \leq |x_0-x|+|x|$ (ii)

Siendo $|x-x_0| < \delta = \varepsilon$, (i) y (ii) $\Rightarrow$

$|x| < \varepsilon + |x_0|$ $\quad$ $|x_0| < \varepsilon + |x|$

$|x|-|x_0| < \varepsilon$ (iii),

$|x_0|-|x| < \varepsilon$ (iv)

Multiplico (iv) por -1 $\longrightarrow$ $|x|-|x_0| > -\varepsilon$ (v)

(iii) y (v) $\Rightarrow$ $-\varepsilon < |x|-|x_0| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $-\varepsilon < f(x)- f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow$

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Hemos probado que si $|x-x_0| < \delta = \varepsilon$ entonces

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ la función dada $f(x)=|x|$

$f(x)$ es continua en x_0 , cualquiera sea $x_0 \in \mathbb{R}$. LQQD

Por definición de continuidad Decimos que $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ cuando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

La negación de la definición de continuidad

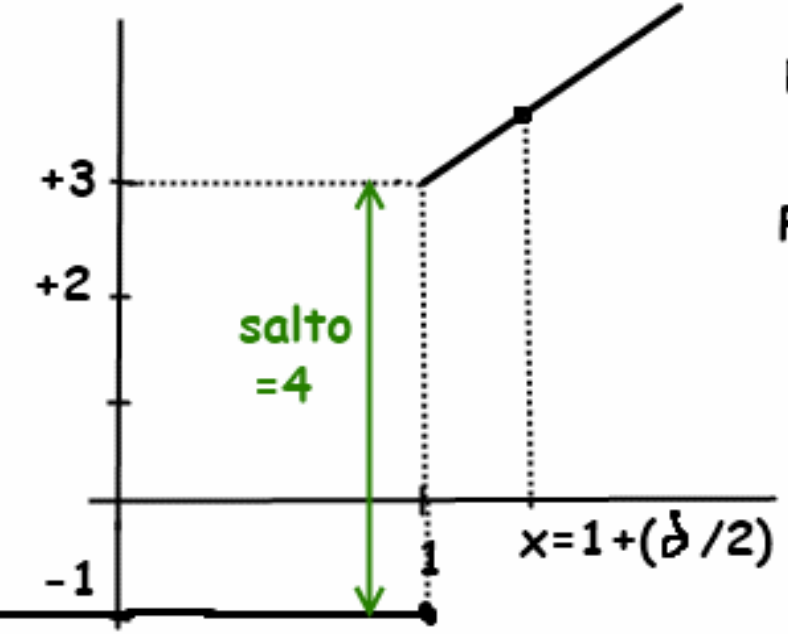
$f(x)$ no es continua (discontinua) en el punto $x = x_0$ cuando

$\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ hay algún x cumple $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Cuando existe un máximo que cumple lo anterior, se llama **Salto** de disconitinuidad de $f(x)$ en el punto x .

EJEMPLO Sea $f(x) = x+2$ si $x > 1$
$f(x) = -1$ si $x \leq 1$.

Demostrar, aplicando la negación de la definición de continuidad, que $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.



Elijo $\varepsilon = 4$. Vamos a probar que ¿$\forall \delta > 0$ hay algún x que cumple $|x-1| < \delta$, $|f(x)-f(1)| \geq \varepsilon$?

Para cada $\delta > 0$ elijo $x = 1 + (\delta/2)$. Se cumple:

$|x-1| = |1+(\delta/2)-1| = \delta/2 < \delta$ o sea $|x-1| < \delta$ (I)

$f(x) = f(1+(\delta/2)) = 1+(\delta/2)+2 = 3 + (\delta/2)$

$f(1) = -1$

$|f(x)-f(1)| = |3 +(\delta/2)-(-1)| = 4 +(\delta/2) \geq 4 = \varepsilon$

o sea $|f(x)-f(1)| \geq \varepsilon = 4$ (II)

(I) y (II) prueban lo que queríamos demostrar

Por definición de continuidad → Sea $f:[a,b]\to R$, y sea $x \in (a,b)$

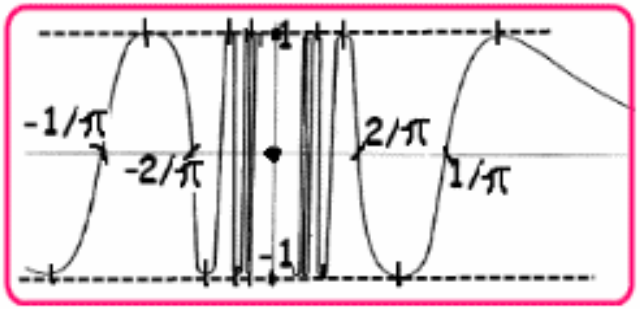
Decimos que $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

La negación de la definición de continuidad es $f(x)$ es discontinua en el punto x_0 cuando

ó bien $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$

ó bien $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ pero es DISTINTO de $f(x_0)$

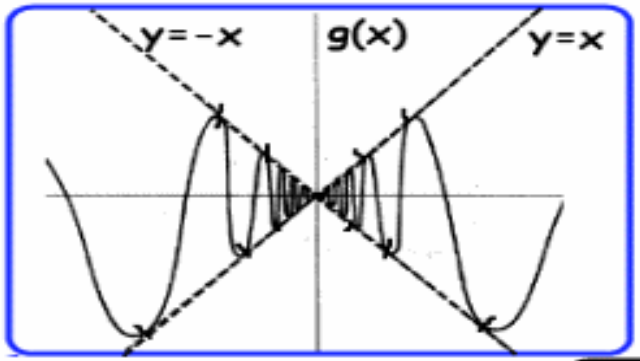
EJEMPLO:



Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(x) = 0$ si $x = 0$.

Probar que f no es continua en $x_0 = 0$

Ya vimos que $\nexists \lim_{x\to 0} \text{sen}(1/x)$ Luego, por la negación de la definición de continuidad, $f(x)$ es discontinua en el punto $x_0 = 0$



OTRO EJEMPLO Sea $f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$f(x) = 5$ si $x = 0$

Probar que f es discontinua en $x_0 = 0$

Ya vimos que $\exists \lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(1/x) = 0$

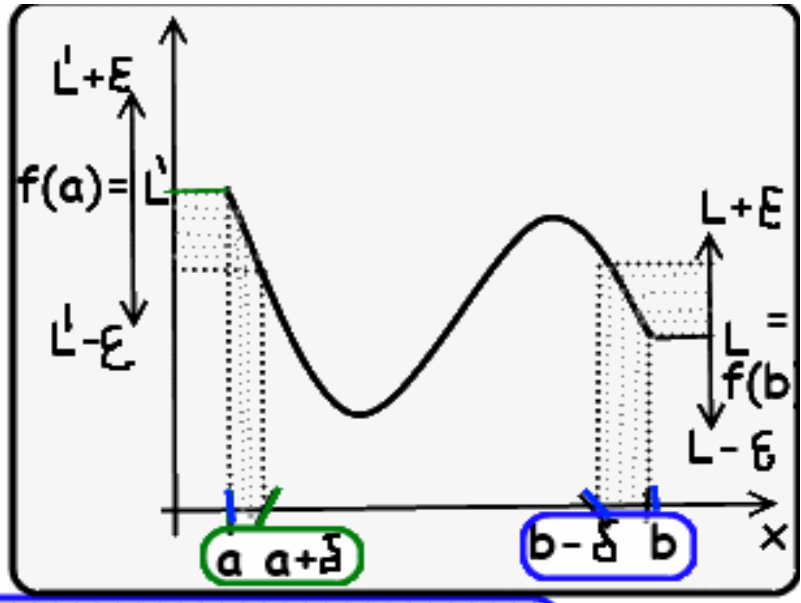
Pero en este ejemplo $f(0) = 5 \neq 0$ Luego, por la negación de la definición de continuidad, $f(x)$ es discontinua en $x_0 = 0$

OTRO EJEMPLO Sea $f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$ si $x = 0$, $f(x) = 0$ si $x = 0$. Entonces $\exists \lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(1/x) = 0 = f(0)$. Por la definición de continuidad f es Continua en $x_0 = 0$.

Sea $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$

DEFINICIÓN

f se dice continua en el intervalo abierto (a,b) si es continua en x_0 para todo $x_0 \in (a,b)$.



LÍMITE LATERAL cuando $x \to b^-$

Se dice que $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$, límite de f cuando x tiende a b por la izquierda, cuando

$\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$b - \delta < x < b \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

CONTINUIDAD DE f EN EL EXTREMO DERECHO b DEL INTERVALO [a,b]

Se dice que f es continua en el extremo derecho b del intervalo [a,b] cuando existe el límite de f cuando x tiende a b por la izquierda y es igual a f(b).

Equivalentemente $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$b - \delta < x < b \implies |f(x) - f(b)| < \varepsilon$

LÍMITE LATERAL cuando $x \to a^+$

Se dice que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L'$, límite de f cuando x tiende a a por la derecha, cuando

$\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \implies |f(x) - L'| < \varepsilon$

CONTINUIDAD DE f EN EL EXTREMO IZQUIERDO a DEL INTERVALO [a,b]

Se dice que f es continua en el extremo izquierdo a del intervalo [a,b] cuando existe el límite de f cuando x tiende a a por la derecha y es igual a f(a).

Equivalentemente $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN: SE DICE QUE $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ ES CONTINUA EN EL INTERVALO CERRADO [a,b] SI ES CONTINUA EN x_0 para todo $x_0 \in [a,b]$.

PROPIEDADES ARITMÉTICAS DE LA CONTINUIDAD

La suma de funciones continuas es continua

El producto de funciones continuas es continua

El producto de una función continua por una constante es continua

El cociente $f(x)/g(x)$ de funciones continuas es continua en todos los puntos donde $g(x) \neq 0$

CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

TEOREMA La composición de funciones continuas es continua

Dem. Veremos una demostración más adelante como corolario del teorema del pasaje para funciones continuas.

CONSERVACIÓN DEL SIGNO (para funciones continuas)

Si $f(x)$ es continua en x_0 y si $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno $E_\delta(x_0)$ del punto x_0 tal que SIGNO DE $f(x)$ = SIGNO DE $f(x_0)$ para todo $x \in E_\delta(x_0)$

Dem. Por la definición de continuidad $L = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Por la ley de conservación de signo ya demostrada para cualquier función cuando existe ese límite L y es distinto de cero, entonces SIGNO de $f(x)$ = SIGNO de L para todo $x \neq x_0$ en un entorno $E_\delta(x_0)$. En este caso $L = f(x_0)$. Entonces deducimos que SIGNO DE $f(x)$ = SIGNO de $f(x_0)$ $\forall x \in E_\delta(x_0)$ (incluso para $x = x_0$). LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 21

Sea f(x) una función definida para todo x real.

DEFINICIÓN f es Continua si lo es en x_0 para todo x_0 real.

Equivalentemente:

$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (δ depende de x_0 y de ε) tal que

[Hip) $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Tesis)] (*)

Cualquier número $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ que cumpla lo anterior se llama MÓDULO DE CONTINUIDAD de f

EJEMPLO: Hallar módulo de continuidad de la función $f(x) = x^2$.

OBJETIVO FINAL: Encontrar $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ que cumpla (*) es el objetivo final. (Cuando lo alcancemos habremos terminado

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

¡¡ LA ESTRATEGIA !! para alcanzar el objetivo final, será la siguiente:

2do. paso OBJETIVO INTERMEDIO Probar que se cumple la proposición (* Demostrar que Hip) $\Rightarrow$ Tesis

1er. paso USAR RECURSO ESENCIAL para alcanzar el objetivo intermedio: Si necesito, puedo suponer ADEMÁS DE Hip), todo lo que se me ocurra o lo que me resulte conveniente sobre $\delta > 0$ para conseguir el objetivo intermedio, es decir para demostrar que Hip) $\Rightarrow$ Tesis) en la propos (*).

3er. paso Solo después de alcanzado el objetivo intermedio del 2do. paso). Escribir la lista de todas las condiciones que supuse sobre δ

4to. paso (final) Encontrar algún $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ que cumpla TODAS las condiciones de la lista anterior.

EJEMPLO: Hallar módulo de continuidad de la función $f(x)= x^2$.

OBJETIVO FINAL: Encontrar $\delta = \delta(x_0,\varepsilon)>0$ que cumpla (*)

Hip) $|x-x_0| < \delta$ $\Longrightarrow$ Tesis) $|x^2 -x_0^2| < \varepsilon$ (*)

1er. y 2do. pasos de la ESTRATEGIA

Objetivo intermedio Probar la proposición usando la Hip) y lo que quiera además SUPONER sobre $\delta > 0$

$x^2 -x_0^2 = (x-x_0)(x+x_0)$ $\Longrightarrow$ $|x^2 -x_0^2| = |x-x_0|\,|x+x_0| \leq |x-x_0|\,(|x| +|x_0|)$ (A)

Hip) $|x-x_0|<\delta \Rightarrow -\delta < x-x_0 < \delta \Rightarrow x < x_0+\delta \leq |x_0+\delta| \leq |x_0| +|\delta| \Rightarrow$

$x \leq |x_0| +|\delta| \Rightarrow |x| \leq |x_0| +|\delta|$ (B)

Uso la hipótesis y (B) en la desigualdad (A)

$|x^2 -x_0^2| \leq |x-x_0|\cdot(|x| +|x_0|) \leq \delta\,(|x| +|x_0|) \leq \delta\cdot(|x|+\delta+|x_0|)$

Supongo $\delta \leq 1$. (ya supuse $\delta>0$ al usar que $|\delta| = \delta$ en

$|x^2 -x_0^2| \leq \delta\cdot(|x|+\delta+|x_0|) = \delta(2|x_0| + \delta) \leq \delta(2|x_0| + 1)$

Probé que $|x^2 -x_0^2| \leq \delta(2|x_0| + 1)$ (C)

Tengo que probar la tesis $|x^2 -x_0^2| < \varepsilon$ (Tesis de la proposición)

Supongo (además de lo que ya supuse $0 < \delta \leq 1$) que $\delta(2|x_0| + 1) < \varepsilon$ (D)

(C) y (D) implican la tesis $|x^2 -x_0^2| < \varepsilon$ Ya cumplí el objetivo intermedio de probar (*).

3er. paso: Lista de todas los supuestos hechos sobre $\delta>0$ { $0 < \delta \leq 1$ (E) $\delta(2|x_0| + 1) < \varepsilon$ (D)

sigue

EJEMPLO: Hallar módulo de continuidad de la función $f(x)= x^2$.

OBJETIVO FINAL: Encontrar $\delta = \delta(x_0,\varepsilon)>0$ que cumpla (*)

Hip) $|x-x_0| < \delta$ $\Longrightarrow$ Tesis) $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ (*)

Habíamos terminado los 1er. 2do. y 3er. paso de la ESTRATEGIA demostrando la proposición (*) (Objetivo intermedio) bajo una serie de supuestos que inventamos sobre $\delta > 0$ y haciendo en el 3er. paso la lista de todos esos supuestos sobre δ que eran:

$0 < \delta \leq 1$ (E) $\quad \delta(2 |x_0| + 1) < \varepsilon$ (D)

4to paso (final) Encontrar $\delta > 0$ que cumpla TODOS los supuestos de la lista.

Encontrar algún $\delta > 0$ (no necesito todos sino solo alguno) que cumpla (E) y (D)

¿ $0 < \delta \leq 1$ y $\delta(2 |x_0| + 1) < \varepsilon$? $\Longleftarrow$ ¿ $0 < \delta \leq 1$ y $\delta < \varepsilon / (2 |x_0| + 1)$

$\Longleftarrow$ $0 < \delta < \varepsilon / (2 |x_0| + 1)$ y $0 < \delta \leq 1$ (H)

Llamo (r) al mínimo (el menor) de los números reales positivos $1 \; , \; \varepsilon / (2 |x_0| + 1)$

Elijo

$$\delta = r/2 = (1/2) \text{ mín } \{ 1, \varepsilon / (2 |x_0| + 1) \} > 0$$

Este valor de $\delta > 0$ implica que se cumpla (H) y eso implica que se cumplan (E) y (D).

Entonces hemos cumplido el objetivo final: Para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ que cumple la proposición (*). Por definición este $\delta > 0$ es UN módulo de continuidad de $f(x)= x^2$. LQQD.

EJERCICIO Demostrar que la función exponencia e^x es continua

Dem Sea $x_0 \in R$, sea $\varepsilon > 0$ (cualesquiera pero fijos)

OBJETIVO: Encontrar $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ tal que pueda demostrar que:

[Hip) $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ Tesis) $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$] (*)

OBJETIVO FINAL: Encontrar $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ que cumpla (*)
es el objetivo final. (Cuando lo alcancemos habremos terminado de demostrar que e^x es continua.)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

LA ESTRATEGIA para alcanzar el objetivo final, será la siguiente:

2do. paso OBJETIVO INTERMEDIO Probar que se cumple la proposición (*) Demostrar que Hip) $\Rightarrow$ Tesis

1er. paso USAR RECURSO ESENCIAL para alcanzar el objetivo intermedio: Si necesito, puedo suponer ADEMÁS DE Hip), todo lo que se me ocurra o lo que me resulte conveniente sobre $\delta > 0$ para conseguir el objetivo intermedio, es decir para demostrar que Hip) $\Rightarrow$ Tesis) en la propos (*).

3er. paso Solo después de alcanzado el objetivo intermedio del 2do. paso). Escribir la lista de todas las condiciones que supuse sobre δ

4to. paso (final) Encontrar algún $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ que cumpla TODAS las condiciones de la lista anterior. Si no puedo encontrar ninguno, puede suceder que lo que quiero probar sea falso, o que sea cierto, pero que esta estrategia no funcione, y deba inventar alguna otra.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJERCICIO Demostrar que la función exponencia e^x es continua

Dem Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, sea $\varepsilon > 0$ (cualesquiera pero fijos)

OBJETIVO FINAL: Encontrar $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ tal que pueda demostrar que:

[Hip) $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ Tesis) $|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$] (*)

OBJETIVO INTERMEDIO: probar (*)

1er.y 2do. paso: Probar (*) suponiendo lo que me sea útil sobre $\delta > 0$.

Probar la Tesis) de (*) Quiero acotar por arriba $|e^x - e^{x_0}|$. Entonces vamos primero a estudiar la función $e^x - e^{x_0}$. Sé por hipótesis que $|x - x_0| < \delta$, o sea:

$$-\delta < x - x_0 < \delta \qquad (A)$$

Entonces voy a tratar de que aparezca la expresión $x - x_0$:

$$e^x - e^{x_0} = e^{x-x_0+x_0} - e^{x_0} = e^{x-x_0}e^{x_0} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1) \qquad (B)$$

Sé que $e^{x_0} > 0$. Sé que la función exponencial es estrictamente creciente, es decir $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$. Además sé por (A) que $x - x_0 < \delta$. De (B) obtengo:

$$e^x - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1) < e^{x_0}(e^{\delta} - 1) > 0 \quad \text{(uso que } \delta > 0, \quad e^{\delta} > e^0 = 1).$$

Si un número real u es menor que $H > 0$ entonces $|u| < H$. Ya probé que $e^x - e^{x_0} < e^{x_0}(e^{\delta} - 1) > 0$. Entonces llamando

$u = e^x - e^{x_0}$, $H = e^{x_0}(e^{\delta} - 1)$ obtengo:

$$|e^x - e^{x_0}| < H \qquad (C)$$

• sigue

Llamando $H = e^{x_0}(e^\delta - 1)$ obtuve

$|e^x - e^{x_0}| < H$ C

Quiero probar la Tesis, ¿$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon$? Ya probé C. Puedo suponer lo que se me ocurra para δ. Entonces supongo que δcumple

$H \leq \epsilon$ E $e^{x_0}(e^\delta - 1) \leq \epsilon$ E

Junto C con E y deduzco

$$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon$$

Terminé de demostrar la proposición (*) (objetivo intermedio alcanzado)

3er. paso) Lista de

Todas las condiciones que usé sobre δ para demostrar la proposición (*) fueron:

G $\delta > 0$

H $H(x_0, \delta) \leq \epsilon$, siendo $H(x_0, \delta) = e^{x_0}(e^\delta - 1)$

4to paso (final) ¿Existe algún $\delta > 0$ que cumpla G y H? Equivalentemente,

¿Existe $\delta > 0$, $e^{x_0}(e^\delta - 1) \leq \epsilon$? $\Leftarrow$ ¿Existe $\delta > 0$, $e^\delta - 1 \leq e^{-x_0} \cdot \epsilon$?

$\Leftarrow$ ¿Existe $\delta > 0$, $e^\delta \leq 1 + \epsilon \cdot e^{-x_0}$?

$\Leftarrow$ ¿Existe δ tal $0 < \delta \leq \log(1 + \epsilon \cdot e^{-x_0})$ J?

Sí, porque $1 + \epsilon \cdot e^{-x_0} > 1$, entonces $\log(1 + \epsilon \cdot e^{-x_0}) > 0$. Luego existen infinitos números reales δ que cumplen J. Por ejemplo elijo

$$\delta = \log(1 + \epsilon \cdot e^{-x_0})$$ LQQD

Otra forma de demostrar más directamente que la función e^x es continua, es usar el TEOREMA de CONTINUIDAD DE FUNCIONES INVERTIBLES MONOTONAS EN INTERVALOS. Antes de enunciar y demostrar este Teorema general, definimos:

DEFINICIÓN:

Un intervalo de reales, es

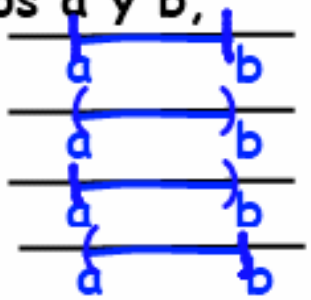
o bien (acotado) el intervalo es un segmento de la recta con extremos a y b,

que se denota $[a,b]$ (cerrado) $= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

ó (a,b) (abierto) $= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

ó $[a,b)$ $= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

ó $(a,b]$ $= \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$



o bien (acotado inferiormente pero no superiormente) es una semirrecta con extremo a, que se denota $[a,+\infty)$ (cerrada) $= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$

$(a,+\infty)$ (abierta) $= \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$

o bien (acotado superiormente pero no inferiormente) es una semirrecta con extremo b, que se denota $(-\infty, b]$ (cerrada) $= \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$

$(-\infty, b)$ (abierta) $= \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

o bien (no acotado ni superiormente ni inferiormente): el intervalo es toda la recta real Se denota $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

No es un intervalo por ejemplo la unión de dos o más intervalos disjuntos que no tengan extremos $[-1,2] \cup (3, \sqrt{11}]$ en común:

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

FUNCIONES MONÓTONAS

(Para funciones con dominio y codominio subconjuntos de reales)

Una función $f: D \mapsto C$ se dice que es **monótona creciente** cuando

$x_1 < x_2$ en el dominio D $\Longrightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ en el codominio C

Una función $f: D \mapsto C$ se dice que es **monótona decreciente** cuando

$x_1 < x_2$ en el dominio D $\Longrightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ en el codominio C

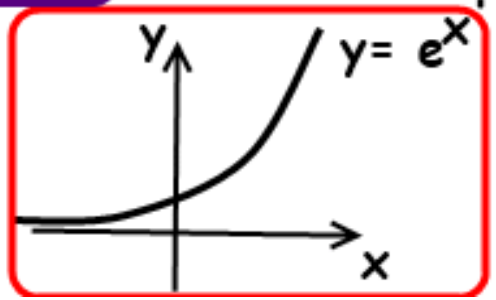
Una función $f: D \mapsto C$ se dice que es **monótona creciente estrictamente**

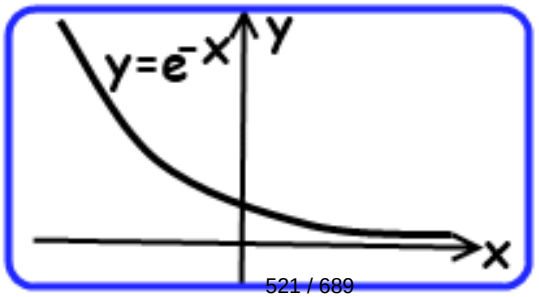
cuando $x_1 < x_2$ en el dominio D $\Longrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ en el codominio C

Una función $f: D \mapsto C$ se dice que es **monótona decreciente estrictamente**

cuando $x_1 < x_2$ en el dominio D $\Longrightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$ en el codominio C

EJEMPLO La exponencial $f(x) = e^x$ es monótona creciente estricta





$g(x) = e^{-x}$ es monótona decreciente estricta

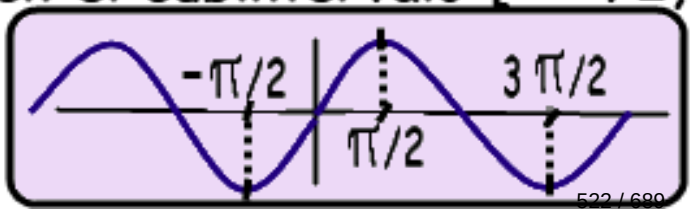
TEOREMA DE CONTINUIDAD DE FUNC. BIUNÍVOCAS MONÓTONAS EN INTERVALOS

Sea f una función biyectiva con dominio y codominio sendos intervalos de reales.

Entonces f es monótona si y solo si f es continua.

Ejemplo: la función exponencial $f(x) = e^x$, con dominio en R y codominio en la semirrecta $(0, +\infty)$, es biyectiva (y su función inversa es el logaritmo neperiano real).
La función e^x es monótona creciente, es decir $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$
Luego, aplicando el teorema anterior, e^x es continua.

Contraejemplo: Existen funciones continuas que no son monótonas ni biyectivas: por ejemplo $f(x) = \text{sen}(x)$ con dominio en R y codominio en el intervalo $[-1, 1]$. Es sobreyectiva, pero no es inyectiva. Es monótona creciente por ejemplo en el subintervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ pero es monótona decreciente en el subintervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$.



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 22

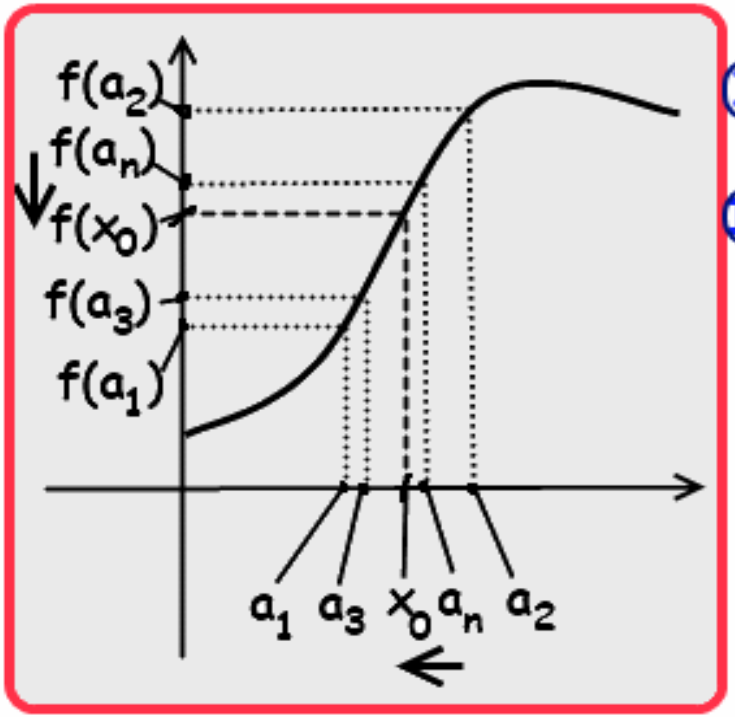
TEOREMA DEL PASAJE (para funciones continuas)

(Pasaje ida y vuelta de límite de sucesiones a continuidad de f)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ Sea $x_0 \in [a,b]$ Entonces:

(A) $f(x)$ es continua en x_0 si y solo si

(B) Para toda sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$ se cumple $\lim f(a_n) = f(x_0)$



Dem. Por definición de continuidad:

(I) $f(x)$ es continua en $x_0 \iff L = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por el teorema del pasaje para límite de funciones

(II) $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall$ sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $a_n \neq x_0$ y tal que $a_n \to x_0$ se cumple $\lim f(a_n) = L$

Juntando (I) con (II) deducimos

$f(x)$ es continua en $x_0 \iff$

$\forall$ sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $a_n \to x_0$ (incluso si para algun(os) valor(es) de n es $a_n = x_0$) se cumple $\lim f(a_n) = f(x_0)$ LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA DEL PASAJE (para funciones continuas)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ Sea $x_0 \in [a,b]$ Entonces:

(A) $f(x)$ es continua en x_0 si y solo si

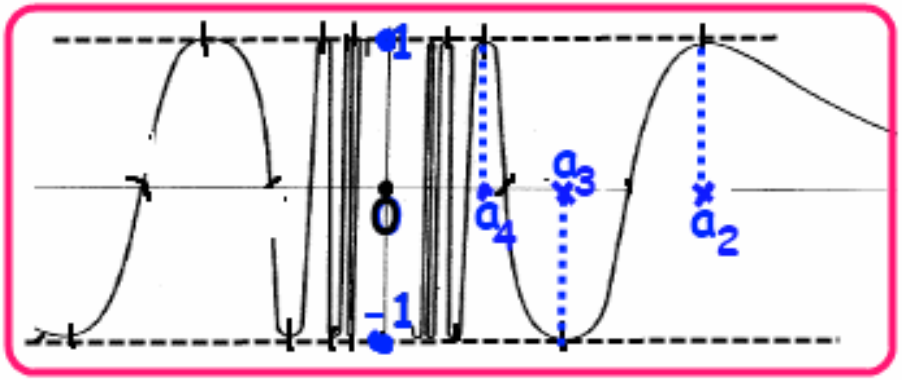
(B) Para toda sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$ se cumple $\lim f(a_n) = f(x_0)$

COROLARIO (Condición suficiente para discontinuidad de una función)

Si existe una sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$ pero $\lim f(a_n)$ no existe entonces $f(x)$ NO es continua en x_0

EJEMPLO

Sea la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$



sea la sucesión $a_n = 1 / [(\pi/2) + 2n\pi]$ definida para todo n natural

Se cumple $\lim a_n = 0$

$f(a_n) = \text{sen}(1/a_n) = \text{sen}[(\pi/2) + 2n\pi] = (-1)^n$

Entonces, no existe $\lim f(a_n)$ pues no existe $\lim (-1)^n$. Usando el corolario concluimos que $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

TEOREMA DEL PASAJE (para funciones continuas)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ Sea $x_o \in [a,b]$ Entonces:

(A) $f(x)$ es continua en x_o si y solo si

(B) Para toda sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_o$ se cumple $\lim f(a_n) = f(x_o)$

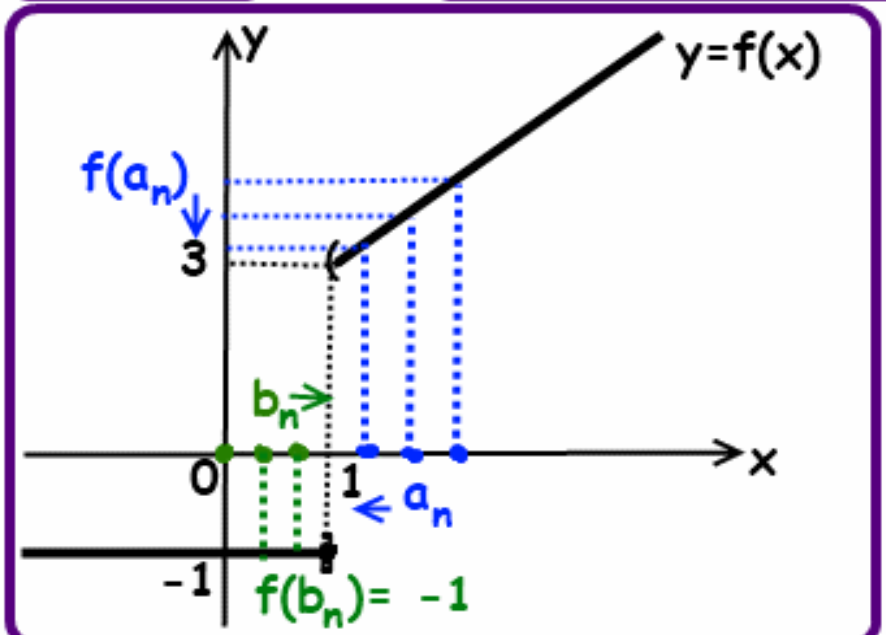
COROLARIO (Otra condición suficiente para la discontinuidad de una función)

Si existen dos sucesiones $a_n, b_n \in [a,b]$ tales que $\lim a_n = x_o$, $\lim b_n = x_o$, $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$

entonces $f(x)$ NO es continua en x_o

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLO: Sea $f(x) = x+2$ si $x > 1$, $f(x) = -1$ si $x \leq 1$.



Consideramos en el eje de las x las siguientes dos sucesiones: $a_n = 1+(1/n)$ $b_n = 1-(1/n)$

Se cumple $\lim a_n = \lim [1+(1/n)] = 1 = x_o$

$\lim b_n = \lim [1-(1/n)] = 1 = x_o$

$\lim f(a_n) = \lim a_n+2 = \lim 1+(1/n) +2 = 3$

$\lim f(b_n) = \lim (-1) = -1$

Entonces $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$ porque $3 = -1$

Aplicando el corolario deducimos que $f(x)$ NO es continua en $x = 1$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA DEL PASAJE (para funciones continuas)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ Sea $x_0 \in [a,b]$ Entonces:

(A) $f(x)$ es continua en x_0 si y solo si

(B) Para toda sucesión $a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$ se cumple $\lim f(a_n) = f(x_0)$

EJEMPLO de aplicación del teorema del pasaje para calcular el límite de una sucesión

Sea la sucesión $b_n = e^{3+(1/n)} - \text{sen}[\pi(3+(1/n))/2]$. Hallar $\lim b_n$.

Consideremos la función $f(x) = e^x - \text{sen}[\pi x/2]$ y la sucesión $a_n = 3+(1/n)$

Tenemos $b_n = f(a_n)$

$f(x)$ es continua porque es la suma de dos funciones continuas: $e^x + (-\text{sen}[\pi x/2])$

$\lim a_n = \lim [3 + (1/n)] = 3 = x_0$.

Usando el teorema del pasaje

$\lim b_n = \lim f(a_n) = f(x_0) = f(3) = e^3 - \text{sen}[3\pi/2] = e^3 + 1$.

$\lim b_n = e^3 + 1$

CONTRAEJEMPLO El procedimiento anterior para calcular el límite de una sucesión no puede aplicarse si la función $f(x)$ no es continua Por ejemplo sea $f(x) = 1 \ \forall x > 0$, $f(x) = -1 \ \forall x \leq 0$

Sean la sucesiones $a_n = 1/n$ y $b_n = f(a_n) = 1$ Tenemos $\lim a_n = 0 = x_0$

$f(x_0) = f(0) = -1$, $\lim b_n = \lim 1 = 1$ Entonces $\lim f(a_n) \neq f(x_0)$ en este ejemplo

TEOREMA DE CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA (importante)

Hipótesis

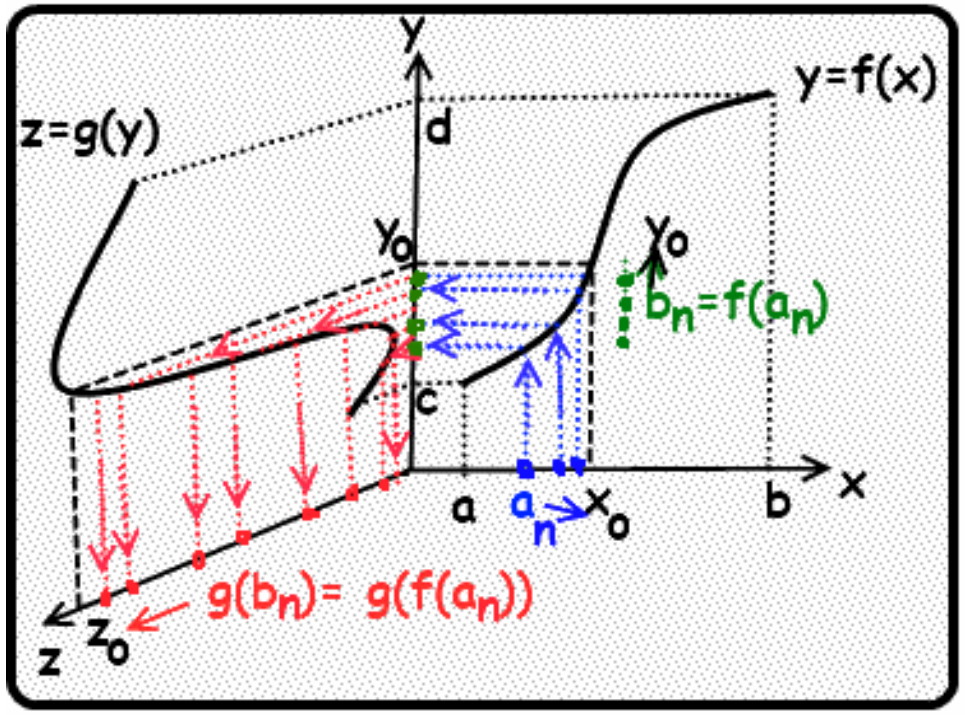
Sea $f:[a,b] \mapsto [c,d]$ una función CONTINUA

Sea $g:[c,d] \mapsto \mathbb{R}$ otra función CONTINUA

Tesis Entonces la función compuesta $g \circ f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

ES CONTINUA.



Dem. Fijemos $x_0 \in [a,b]$.

Denotamos $y_0 = f(x_0) \in [c,d]$ (A).

Por Hip) f es continua en x_0.

Por el teorema del pasaje aplicado a $f(x)$

$\forall\ a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$
se cumple $\lim f(a_n) = f(x_0) = y_0$ (B)

Denotamos $b_n = f(a_n) \in [c,d]$ (C)

Por Hip) g es continua en y_0.

Por el teorema del pasaje aplicado a $g(y)$

$\forall\ b_n \in [c,d]$ tal que $\lim b_n = y_0$
se cumple $\lim g(b_n) = g(y_0)$ (D)

Juntando (A), (B), (C), (D) deducimos

$\forall\ a_n \in [a,b]$ tal que $\lim a_n = x_0$
se cumple $\lim g(f(a_n)) = g(f(x_0))$, es decir
$\lim (g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(x_0)$ (E)

Por el teorema del pasaje (E) $\Rightarrow$ $(g \circ f)(x)$ es continua en $x = x_0$

Como x_0 era cualquier punto en $[a,b]$ concluimos que

$g \circ f$ es continua. LQQD.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 23

TEOREMA DE BOLZANO (para funciones)

¡Muy importante!

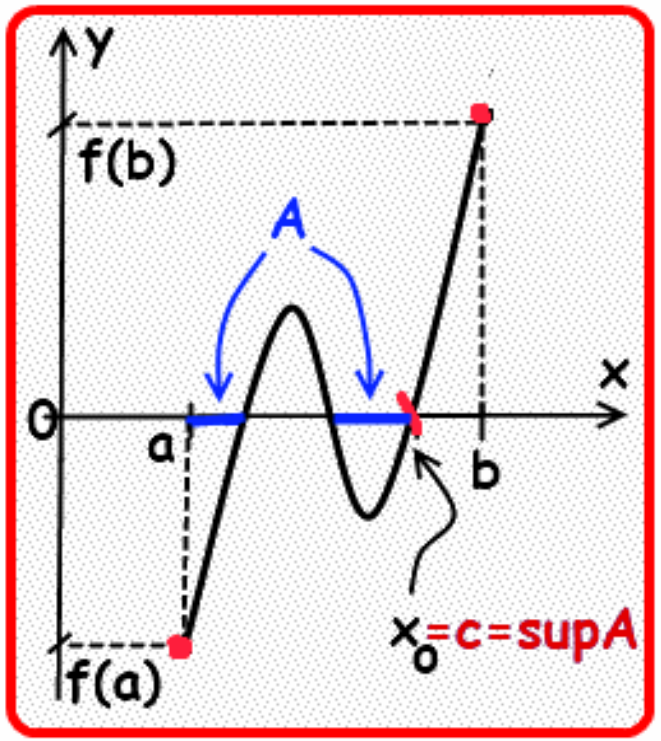
Hipótesis) Sea $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función **CONTINUA**

Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$

Tesis) entonces existe $x_0 \in (a,b)$ raíz de f(x), es decir tal que

$f(x_0) = 0$

(Nota: la raíz no es necesariamente única)



Dem. Sea $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$.

Hip): $f(a) < 0 \Rightarrow a \in A$ (V)

$\Rightarrow A \neq \emptyset$.

$A \subset [a,b] \Rightarrow x \leq b \ \forall \ x \in A \Rightarrow$

b es una cota superior de A (U)

Entonces A es acotado superiormente.

Por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ (para todo conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ que sea acotado superiormente) existe

$c = \sup A \in \mathbb{R}$ (supremo de A)

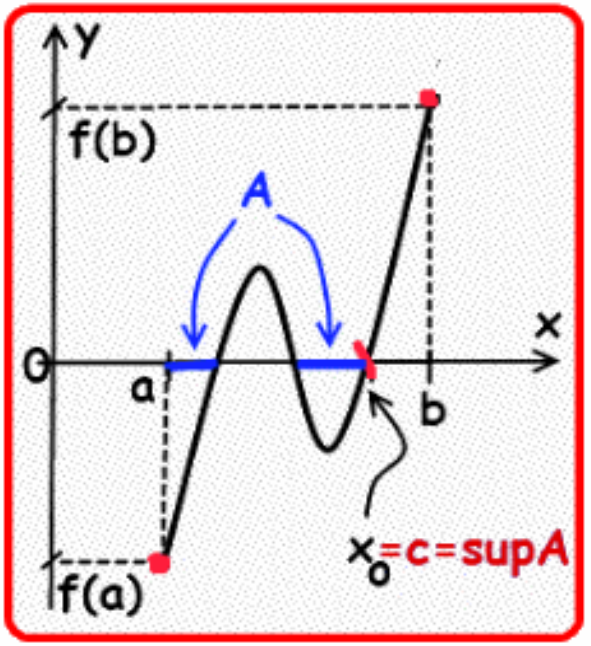
Por definición de supremo de A:

$x \leq c \ \forall \ x \in A$ (I)

Si c' es otra cota superior de A entonces $c \leq c'$ (II)

sigue

TEOREMA DE BOLZANO



Continuación de la demostración Teníamos que

$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ $\quad a \in A \quad (V)$

b es una cota superior de A (U) $\quad c = \sup A \in \mathbb{R}$

Por definición de sup A se cumplen (I) y (II)

$x \le c \ \ \forall\, x \in A$ (I)

Si c' es otra cota superior de A entonces $c \le c'$ (II)

(U) $\Rightarrow$ b es una cota superior de A, (II) $\Rightarrow$ $c \le b$ (B)

(V) $\Rightarrow$ $a \in A$, (I) $\Rightarrow$ $a \le c$ (A)

(A) (B) $\Rightarrow$ $c \in [a,b]$ (C)

LEMA D $\quad ¿f(c) = 0?$ (D)

Demostración del Lema D

Por absurdo, supongamos que $f(c) \neq 0$ (E)

1er.paso Probar que existe $x_1 \in A$ tal que signo de $f(x_1)$ = signo de $f(c) \neq 0$.

Hip) f continua. Por ley de conservación del signo (E) $\Rightarrow$

signo de $f(x)$ = signo de $f(c) \neq 0$ (G)

para todo x en un entorno de c

Entonces en particular se cumple (G) $\forall\ x \in (c-\epsilon, c]$ (H)

Por construcción $c = \sup A$.

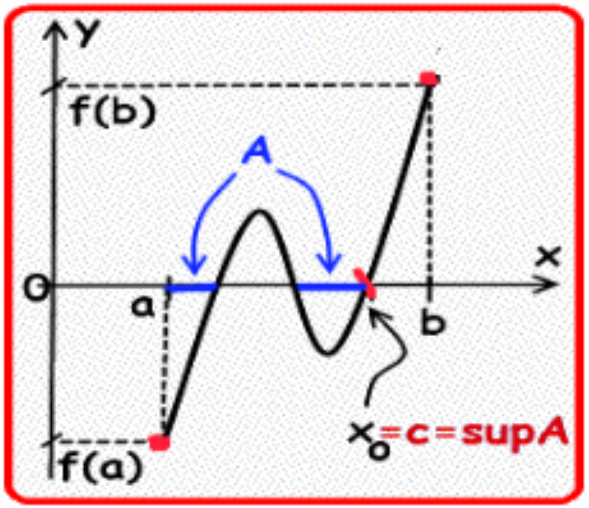
Por el teorema de caracterización del supremo,

$\forall\ \epsilon > 0$ existe $x_1 \in A$ tal que $x_1 \in (c-\epsilon, c]$. (J)

Juntando (J), (H) y (G):

Existe $x_1 \in A$ tal que signo de $f(x_1)$ = signo de $f(c) \neq 0$ (K)

sigue



TEOREMA DE BOLZANO

Continuación de la demostración Teníamos que

$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ $\quad c = \sup A \in \mathbb{R}$

$x \leq c \ \forall x \in A \quad (I)$ $\quad c \in [a,b] \quad (C)$

LEMA D $\quad ¿f(c) = 0?$ (D)

Estábamos demostrando el Lema D

Por absurdo supusimos que f(c) ≠0. En el **1er.paso** demostramos (K)

Existe $x_1 \in A$ tal que signo de $f(x_1) =$ signo de $f(c) \neq 0$ (K)

2do.paso Deducir que f(c) <0. (H)

Por construcción $f(x_1) < 0 \ \ \forall \ x_1 \in A$. Junto con (K) implica:

Signo de $f(c) < 0$ (H)

3er.paso (último para dem. el Lema D): Probar que f(c) < 0 implica una contradicción.

Hip) $f(b) > 0$. Por (C) $a \leq c \leq b$.

Junto con (H) implica

$a \leq c < b$.

Entonces existen x_2 y $c + \epsilon$ tales que

$c < x_2 < c + \epsilon < b \quad (M)$

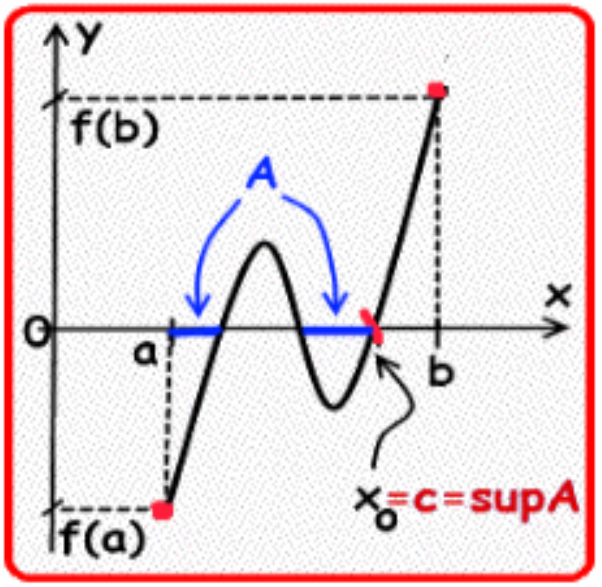
Ley de conserv.signo y (H) → Signo de $f(x_2)$ = Signo de $f(c) < 0$.

Entonces $f(x_2) < 0$ y por definición del conjunto A $\quad x_2 \in A$

He encontrado $x_2 \in A$ que cumple (M), es decir $c < x_2 \quad (N)$

Pero por (I) $x_2 \leq c$, contradiciendo (N). LQQD el Lema D.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



TEOREMA DE BOLZANO

Continuación de la demostración

Teníamos que

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$

$$c = \sup A \in \mathbb{R}$$

$$c \in [a,b] \quad (C)$$

Habíamos demostrado el LEMA D

$$f(c) = 0$$

Llamando $x_0 = c$ hemos encontrado una raíz $x_0 \in [a,b]$ de la función f. LQQD Teorema de Bolzano.

TEOREMA DE BOLZANO-DARBOUX (para funciones)

Hipótesis Sea $f:[a,b] \mapsto R$ una función **CONTINUA**

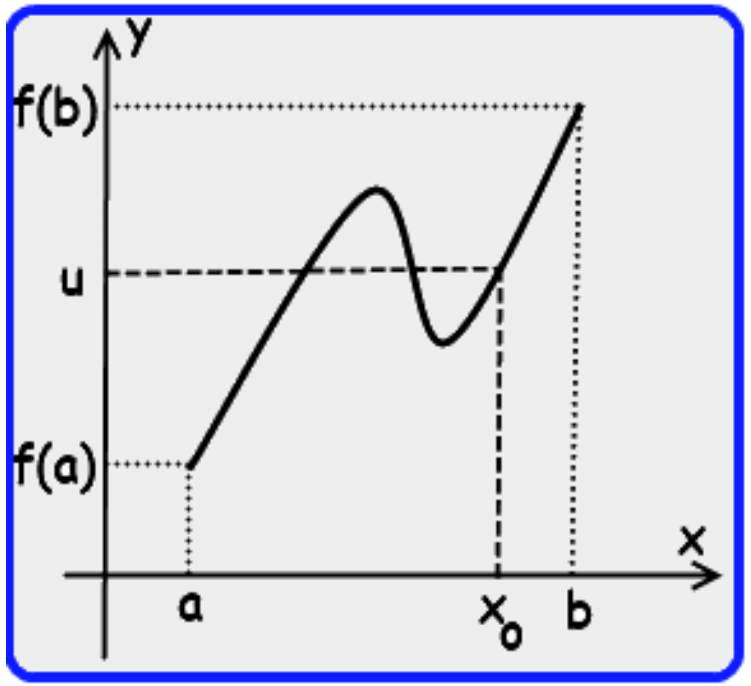
Si $f(a) < f(b)$

Si u es un número real dado tal que $f(a) < u < f(b)$

Tesis Entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = u$

"Las funciones continuas toman todos los valores intermedios u entre f(a) y f(b)."

Nota: La solucion $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = u$ no es necesariamente única.



Dem. Sea $g(x) = f(x) - u$ (u es la constante dada)

g es continua porque f es continua.

$g(a) = f(a)-u < 0$ porque por Hip $f(a) < u$

$g(b) = f(b)-u > 0$ porque por Hip $f(b) > u$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Entonces g cumple todas las hipótesis del Teorema de Bolzano que demostramos antes.

Luego, cumple su tesis: existe una raíz $x_0 \in [a,b]$ de la función g. Es decir $g(x_0) = 0$

Siendo $g(x_0) = f(x_0) - u$ concluimos que $f(x_0) = u$

LQQD.

LÍMITE CUANDO $x \to +\infty$

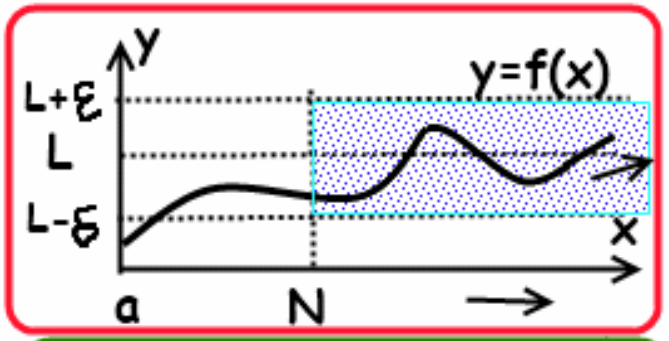
Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función (no necesariamente continua)

DEFINICIONES

Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (real) cuando

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \geq 1$ tal que

$$x > N \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

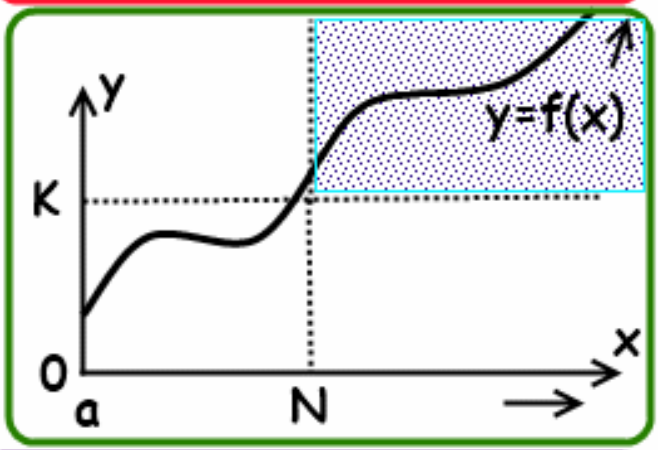


Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ cuando

(en realidad es un abuso de lenguaje, porque en este caso NO existe el límite de $f(x)$)

$\forall\ K > 0\ \exists\ N \geq 1$ tal que

$$x > N \ \Rightarrow\ f(x) > K$$

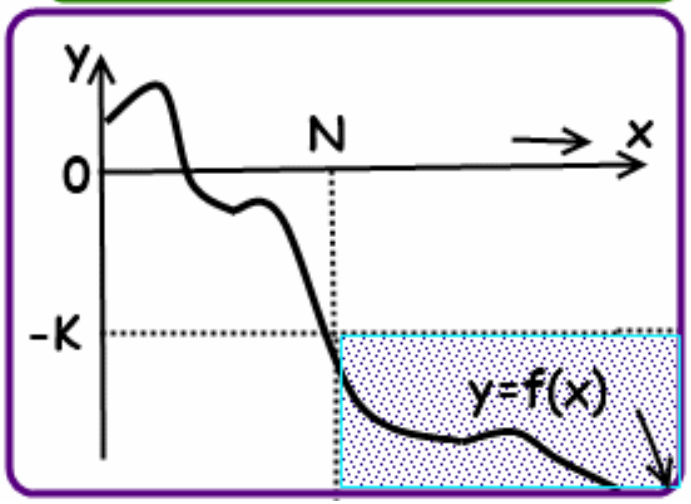


Decimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ cuando

(en realidad es un abuso de lenguaje, porque en este caso NO existe el límite de $f(x)$)

$\forall\ -K < 0\ \exists\ N \geq 1$ tal que

$$x > N \ \Rightarrow\ f(x) < -K$$



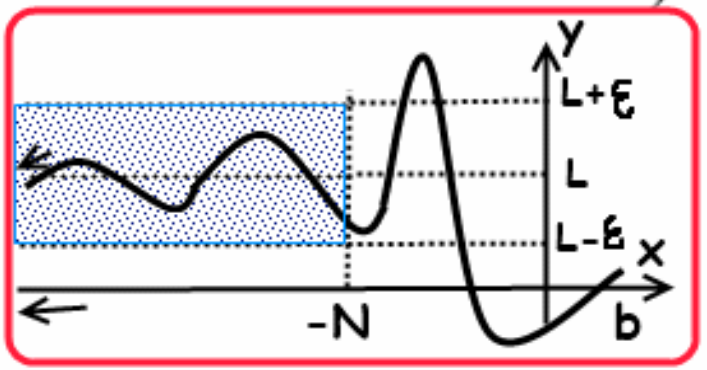
LÍMITE CUANDO $x \to -\infty$

Sea $f : (-\infty, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función (no necesariamente continua)

DEFINICIONES

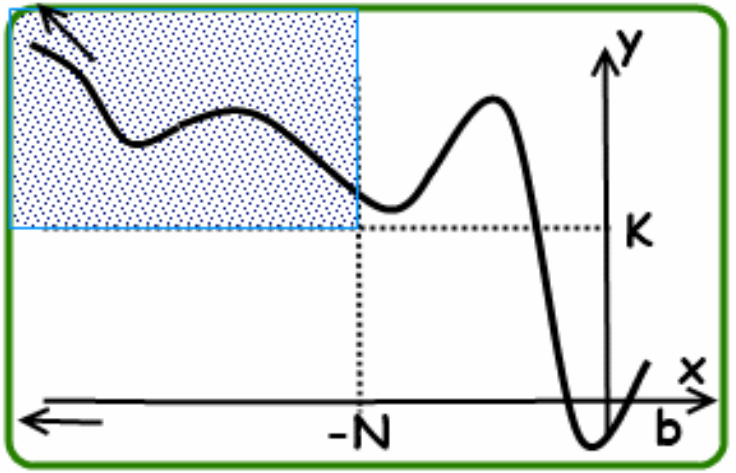
Decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ (real) cuando
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ -N \leq -1$ tal que

$$x < -N \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$



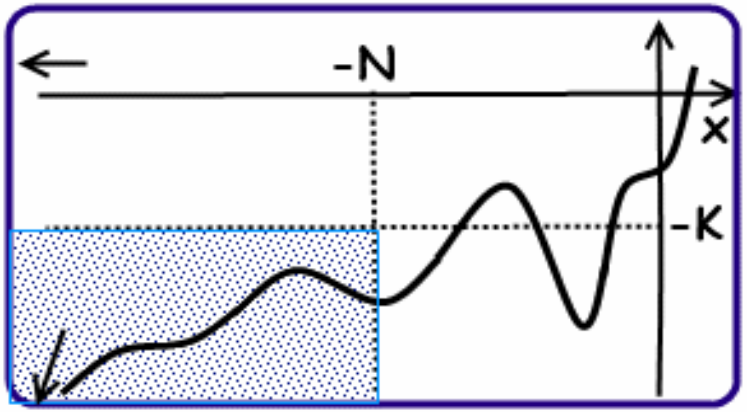
Decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ cuando
(en realidad es un abuso de lenguaje, porque en este caso NO existe el límite de $f(x)$)
$\forall\ K > 0\ \exists\ -N \leq -1$ tal que

$$x < -N \ \Rightarrow\ f(x) > K$$



Decimos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ cuando
(en realidad es un abuso de lenguaje, porque en este caso NO existe el límite de $f(x)$)
$\forall\ -K < 0\ \exists\ -N \leq -1$ tal que

$$x < -N \ \Rightarrow\ f(x) < -K$$



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPIEDADES DEL LÍMITE DE LA SUMA DE FUNCIONES

Estas propiedades valen ya sea cuando $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ó cuando $x \to +\infty$ ó cuando $x \to -\infty$
Se demuestran a partir de las definiciones.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

1) $\lim f(x) = L_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim g(x) = L_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
2) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = L_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) + g(x)] = +\infty$
3) $\lim f(x) = -\infty, \quad \lim g(x) = L_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) + g(x)] = -\infty$
4) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) + g(x)] = +\infty$
5) $\lim f(x) = -\infty, \quad \lim g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) + g(x)] = -\infty$

En cambio si $\lim f(x) = -\infty, \quad \lim g(x) = +\infty$ no se puede afirmar nada en general sobre $\lim[f(x) + g(x)]$ y hay que estudiar cada caso particular.

PROPIEDADES DEL LÍMITE DE PRODUCTO DE FUNCIONES

Estas propiedades valen ya sea cuando $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ó cuando $x \to +\infty$ ó cuando $x \to -\infty$
Se demuestran a partir de las definiciones.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

1) $\lim f(x) = L_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim g(x) = L_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$

2) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = L_2 > 0$ ó $\lim g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

3) $\lim f(x) = +\infty, \quad \lim g(x) = L_2 < 0$ ó $\lim g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

4) $\lim f(x) = -\infty, \quad \lim g(x) = L_2 > 0$ ó $\lim g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

5) $\lim f(x) = -\infty, \quad \lim g(x) = L_2 < 0$ ó $\lim g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

En cambio si $\lim f(x) = -\infty$ ó $+\infty, \quad \lim g(x) = 0$ no se puede afirmar nada en general sobre $\lim[f(x) \cdot g(x)]$ y hay que estudiar cada caso particular.

PROPIEDADES DEL LÍMITE DE [1/f(x)]

Estas propiedades valen ya sea cuando $x \to x_0 \in \mathbb{R}$
ó cuando $x \to +\infty$ ó cuando $x \to -\infty$
Se demuestran a partir de las definiciones.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

1) $\lim f(x) = L_1 \neq 0, \quad L_1 \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad \lim[1/f(x)] = 1/L_1$
2) $f(x) > 0, \quad \lim f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim[1/f(x)] = +\infty$
3) $f(x) < 0, \quad \lim f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim[1/f(x)] = -\infty$
4) $\lim f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[1/f(x)] = 0, \quad [1/f(x)] > 0$
5) $\lim f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim[1/f(x)] = 0, \quad [1/f(x)] < 0$

Recordando que f(x)/g(x) = f(x) [1/g(x)]
combinando las propiedades del límite de 1/g(x) con las propiedades del límite del producto de funciones, se obtienen las propiedades del límite del cociente de funciones.

EJEMPLO Demostrar para todo exponente $m \geq 1$ natural y para toda constante a real :

1. $\lim_{x \to +\infty} x^m = +\infty$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^m} = 0$
3. $\lim_{x \to -\infty} x^m = +\infty$ si m es par.
4. $\lim_{x \to -\infty} x^m = -\infty$ si m es impar
5. $\lim_{x \to -\infty} (a/x^m) = 0$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Aplicando las propiedades del producto de funciones, para toda potencia de exponente $m \geq 1$ natural tenemos:

$\lim_{x \to +\infty} x^m = \lim_{x \to +\infty} [x \cdot x \cdot \ldots x] = +\infty$

Entonces

$\lim_{x \to +\infty} x^m = +\infty$ ①

$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^m} = 0$ ②

Si $m \geq 1$ es par:

$\lim_{x \to -\infty} x^m = \lim_{x \to -\infty} [x^2 \cdot x^2 \cdot \ldots x^2] = +\infty$

Entonces $\lim_{x \to -\infty} x^m = +\infty$ si m es par. ③

Si $m \geq 1$ es impar:

$\lim_{x \to -\infty} x^m = \lim_{x \to -\infty} x \cdot [x^2 \cdot x^2 \cdot \ldots x^2] = -\infty$

Entonces $\lim_{x \to -\infty} x^m = -\infty$ si m es impar ④

$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ ó $-\infty$. $\Rightarrow$ $\lim_{x \to -\infty} (a/x^m) = 0$ ⑤

EJEMPLO Límite de polinomios cuando x tiende a $+\infty$. y a $-\infty$.

Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Mostrar que

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Si $n \geq 1$ es par $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.

Si $n \geq 1$ es impar $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem. $P(x) = x^n \cdot [1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}]$

Denotamos $h(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$

$P(x) = x^n \cdot h(x)$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1+0+0+\ldots+0+0 = 1$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1+0+0+\ldots+0+0 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

Si $n \geq 1$ es par $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

Si $n \geq 1$ es impar $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n \cdot h(x) = +\infty$

Si $n \geq 1$ es par

$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{n\to-\infty} x^n \cdot h(x) = +\infty$

Si $n \geq 1$ es impar

$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{n\to-\infty} x^n \cdot h(x) = -\infty$

COROLARIO DEL TEOREMA DE BOLZANO (para funciones)

Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz real.

Dem $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \qquad c_n \neq 0$ (porque el grado de P(x) es n)

Al dividir P(x) entre c_n sus raíces (si las tiene) no cambian. Entonces tomemos el polinomio $Q(x) = P(x)/c_n = x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ probemos que Q(x) tiene por lo menos una raíz real.

Vimos que $\lim_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} Q(x) = -\infty$ (porque n es impar)

Por definición de tender a $+\infty$ ó a $-\infty$

$\forall K_1 > 0 \quad \exists N_1 > 0$ tal que $x > N_1 \Rightarrow Q(x) > K_1$

$\forall -K_2 < 0 \quad \exists -N_2 < 0$ tal que $x < -N_2 \Rightarrow Q(x) < -K_2$

Entonces elijo cualquier real $b > N_1$ y cualquier real $a < -N_2$

$b > N_1 \Rightarrow Q(b) > K_1 > 0 \Rightarrow Q(b) > 0$

$a < -N_2 \Rightarrow Q(a) < -K_2 < 0 \Rightarrow Q(a) < 0$

Q(x) es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$ (porque es suma de funciones continuas, y cada $a_m x^m$ es continuo porque es producto de funciones continuas)

Entonces en particular Q(x) es una función continua para todo $x \in [a,b]$

$Q(a) < 0, \quad Q(b) > 0 \Rightarrow$ Q satisface las hipótesis del teorema de Bolzano

Entonces Q satisface la tesis del teorema de Bolzano que dice que $\exists\, x_0 \in [a,b]$ tal que $Q(x_0) = 0$. Hemos probado que Q(x) tiene por lo menos la raíz real x_0 .

LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 24

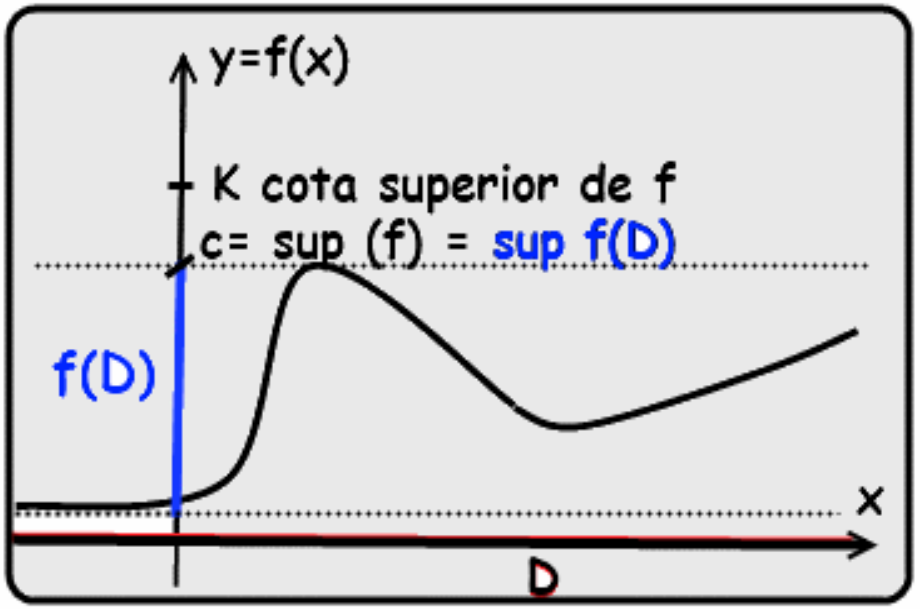
ACOTACIÓN DE FUNCIONES

Sea $f: D \mapsto \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ (función real de variable real, f no es necesariamente continua)

Consideremos el **Recorrido o Conjunto imagen f(D)** En la gráfica f(D) corresponde a un subconjunto no vacío de reales en el eje vertical de la var. dependiente y)

NOTA IMPORTANTE: Vamos a definir

ACOTACIÓN de función, SUPREMO de función, INFIMO de función, MÁXIMO de función, MÍNIMO de función SE REFIEREN SIEMPRE AL CONJUNTO RECORRIDO O IMAGEN f(D) en el eje vertical de la variable Dependiente y = f(x), independientemente de la acotación o no acotación del conjunto dominio D en el eje horizontal de la x.



DEFINICIÓN

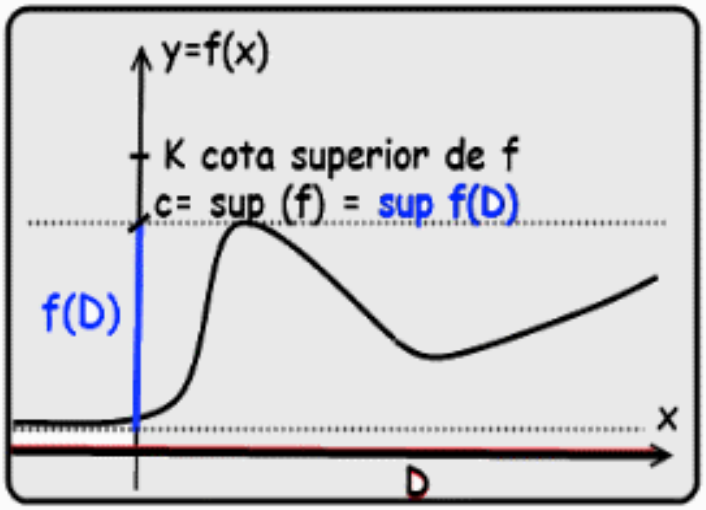
$f: D \mapsto \mathbb{R}$ es acotada superiormente si existe una constante K real tal que

$$f(x) \leq K \qquad \forall x \in D$$

K se llama "una cota superior" de f

Equivalentemente: el conjunto imagen o recorrido f(D) está acotado superiormente

Supremo de f se llama al supremo del conjunto f(D) (conj. acotado no vacío) que EXISTE por el axioma de completitud



DEFINICIÓN

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ es acotada superiormente

si existe una constante K real tal que

$f(x) \leq K \quad \forall x \in D$

K se llama "una cota superior" de f

Equivalentemente: el conjunto imagen o recorrido $f(D)$ está acotado superiormente

Se define:

sup f = supremo del conjunto imagen f(D)

$c = \sup f$

- $f(x) \leqslant c \quad \forall x \in D$
- Si c' es otra cota superior de f entonces $c \leqslant c'$

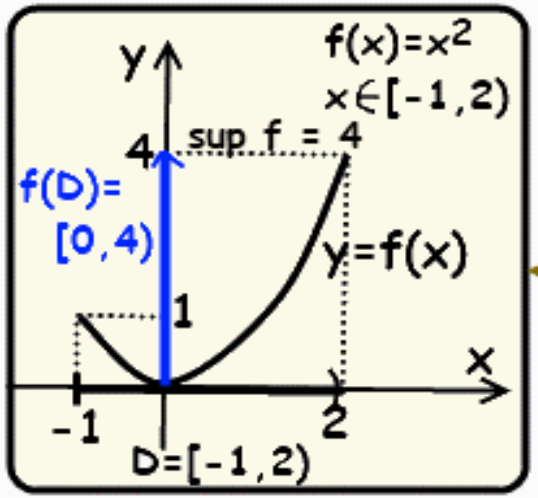
Si f es acotada superiormente,

sup f existe por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$

sup f es único (lo probamos para cualquier conjunto no vacío acotado de $\mathbb{R}$)

NOTA IMPORTANTE c= sup f no pertenece necesariamente al conjunto imagen f(D)

Puede no existir $x \in D$ tal que $f(x) = c$, como en este EJEMPLO



$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1} \qquad D = \mathbb{R}$$

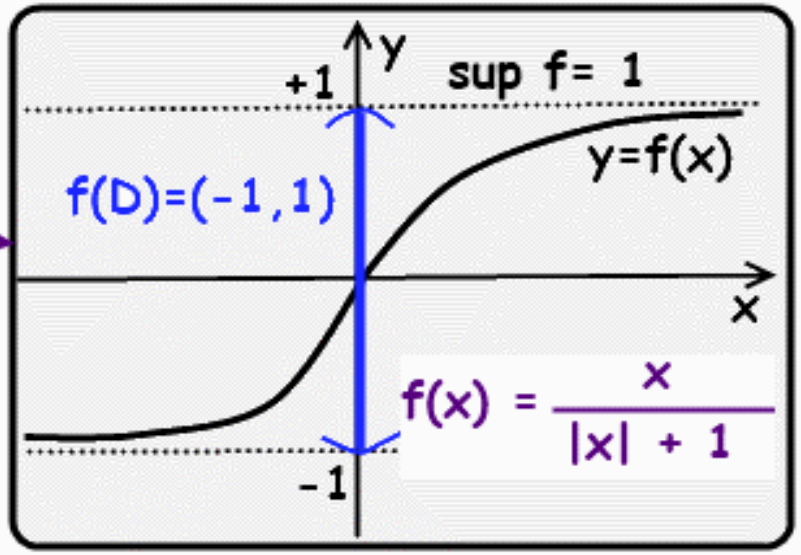
$\sup f = 1 \notin f(D)$

OTRO EJEMPLO:

$f(x) = x^2$

$\forall x \in D=[-1,2)$

$\sup f = 4 \notin f(D)$



DEFINICIÓN

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ es acotada superiormente si existe una constante K real tal que

$f(x) \leq K \quad \forall x \in D$

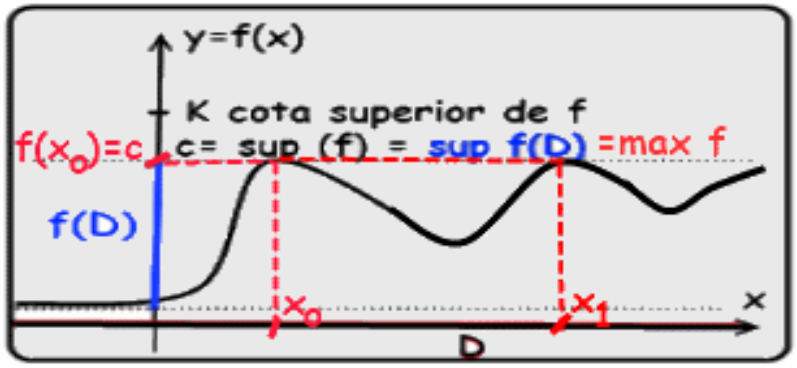
K se llama "una cota superior" de f

Se define:

$\sup f = \sup f(D)$

$c = \sup f$

- $f(x) \leqslant c \quad \forall x \in D$
- Si c' es otra cota superior de f entonces $c \leqslant c'$



DEFINICIÓN

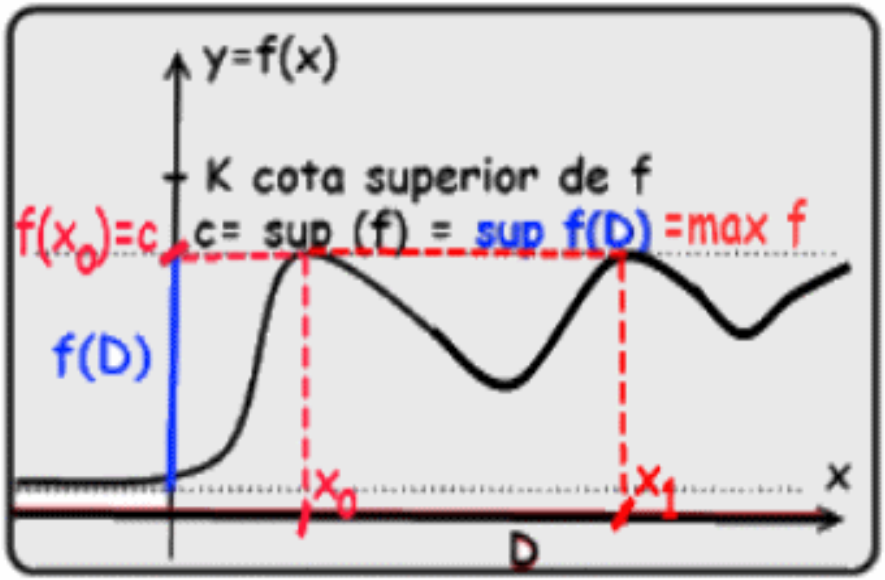
Si $f: D \mapsto \mathbb{R}$ está acotada superiormente y si $\sup f \in f(D)$ entonces $\sup f$ se llama MÁXIMO ABSOLUTO DE f EN D (en breve MAXIMO de f)

En ese caso $\sup f$ se denota $\max_{x \in D} f(x)$ ó en breve $\max f$

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ (continua ó no continua)

- f acotada superiormente $\Leftrightarrow$ $\exists$ único $\sup f$
  - $\sup f \in f(D)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ único $\max f$ = $\sup f$ (por def)
  - $\sup f \notin f(D)$ $\Rightarrow$ $\nexists \max f$
- f no acotada superiormente $\Leftrightarrow$ $\nexists \sup f$ $\Rightarrow$ $\nexists \max f$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Cuando existe max f en D, por definición se cumple $\max f = \sup f \in f(D)$. Por definición de conjunto imagen f(D) existe uno o muchos $x_i \in D$ (en el dom.) tales que $f(x_i) = \max f = \sup f$. Esos puntos x_i en el dominio se llaman LUGARES donde se alcanza el máximo de f. Puede ser uno solo o muchos. De todas formas EL MÁXIMO es ÚNICO $c = f(x_i)$



DEFINICIÓN DE MÁXIMO de f en D:

RECAPITULANDO:

1 Si f es acotada superiormente sup f= sup f(D) y si sup f $\in$ f(D) entonces sup f se llama MAXIMO (absoluto) de f en D y se denota

$\max_{x \in D} f(x)$ ó en breve max f

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTRA DEFINICIÓN EQUIVALENTE A LA 1 ES LA SIGUIENTE

2 Se dice que un número real c es el MÁXIMO (absoluto) de f en D y se denota $\max_{x \in D} f(x)$ ó en breve max f cuando existe (uno o muchos) punto $x_0 \in D$ (en el dominio, llamado(s) LUGAR(es) donde se alcanza el máximo c) tal que

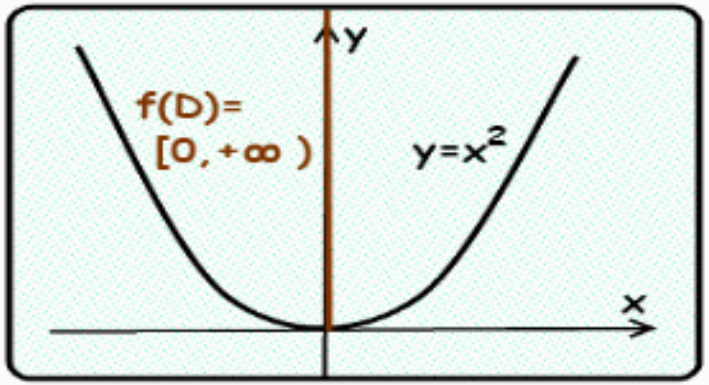
$$f(x) \leq f(x_0) = c \quad \forall x \in D$$

ESTA DEFINICIÓN de c= max f ES LA MÁS USUAL

$$\Updownarrow$$

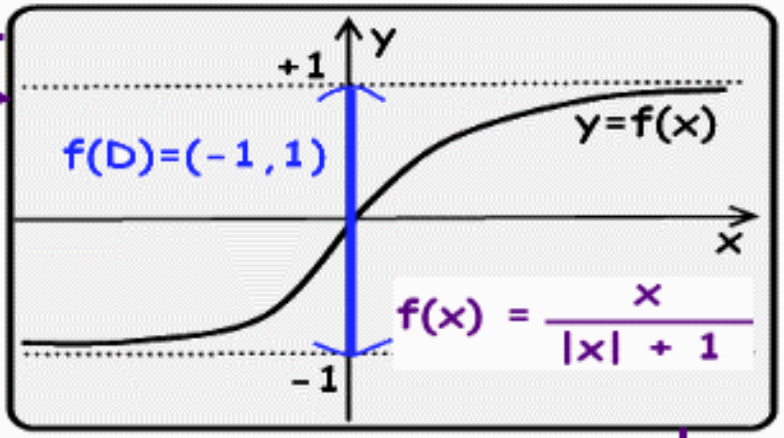
$$c = \max f$$

EJEMPLOS

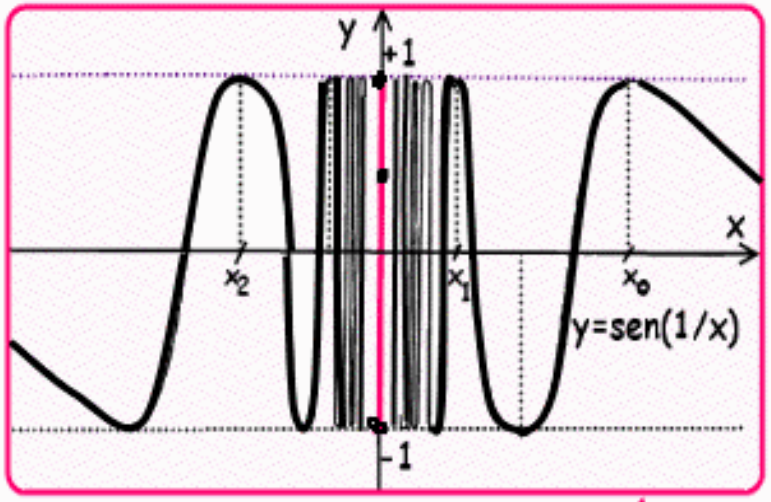


$f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}$ El conjunto imagen f(D) es
$f(D) = [0, +\infty)$ No está acotado superiormente
f no está acotada superiormente $\nexists$ sup f en D
$\nexists$ máx f en D

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$



D = $\mathbb{R}$
El conjunto imagen f(D) es (-1,1).
Está acotado superiormente.
f está acotada superiormente $\exists$ sup f en D
sup f= sup f(D)= +1 $\notin$ f(D) $\nexists$ máx f en D

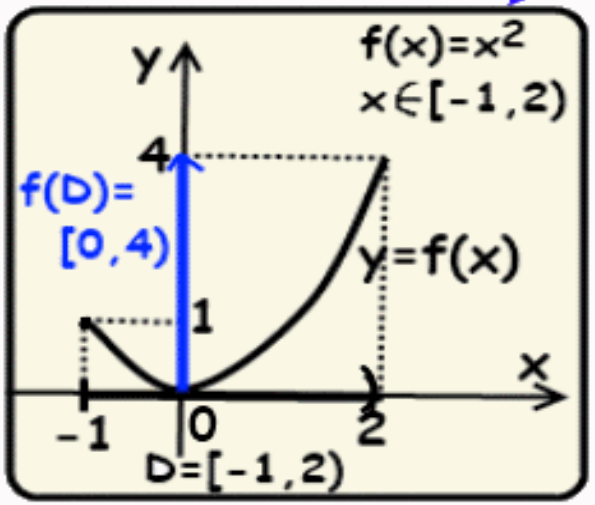


f(x)= sen(1/x) si x ≠ 0
= 1/2 si x= 0
D= $\mathbb{R}$ El conjunto imagen f(D) es [-1,1]. f es acotada super.

$\exists$ sup f en D
sup f= sup f(D)=+1 $\in$ f(D)
$\exists$ max f en D max f= sup f=1

¿Dónde se alcanzan el máximo?(Lugares del máximo)
El máximo es único , pero se alcanza en infinitos puntos x_n (del Dominio) pues si $x_n = 1 / [(\pi/2) + 2n\pi)$ para $n \in Z$
se cumple $f(x_n) = +1 = \max f$ en D.

MÁS EJEMPLOS



$f(x)= x^2$ $D= [-1,2)=\{ x\in\mathbb{R}: -1\leqslant x<2\}$

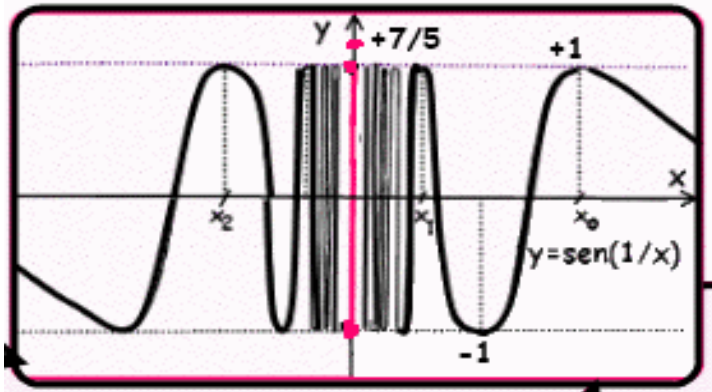
El conjunto imagen es $f(D)= [0,4)= \{ y\in\mathbb{R}: 0\leqslant y<4 \}$

f está acotada superiormente $\sup f= \sup f(D)= 4$

$\sup f \notin f(D)$

$\exists \sup f = 4$

$\nexists \max f.$



$f(x)= \operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$

$= 7/5$ si $x= 0$

$D= \mathbb{R}$ El conjunto imagen $f(D)$ es $[-1,1]\cup\{7/5\}$

f es acotada superiorm.

$\sup f = \sup f(D)= +7/5$

$7/5 = f(0)$

$\max f= \sup f= +7/5$

$f(x)= x^2$ $D= (-1,2]=\{ x\in\mathbb{R}: -1<x\leqslant 2\}$

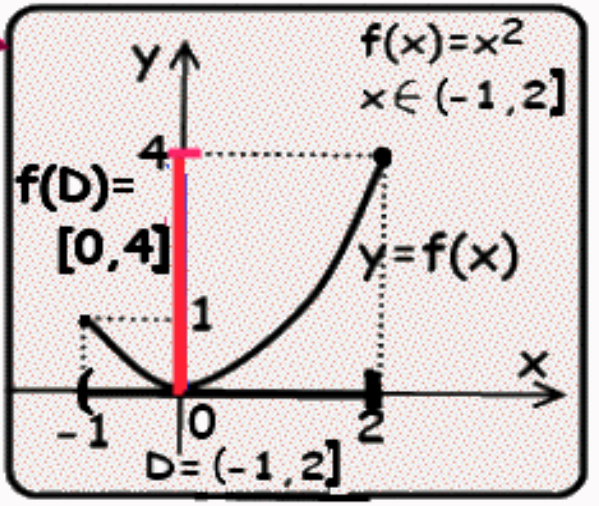
El conjunto imagen es $f(D)= [0,4]= \{ y\in\mathbb{R}: 0\leqslant y\leqslant 4 \}$

f está acotada superiormente $\sup f= \sup f(D)= 4$

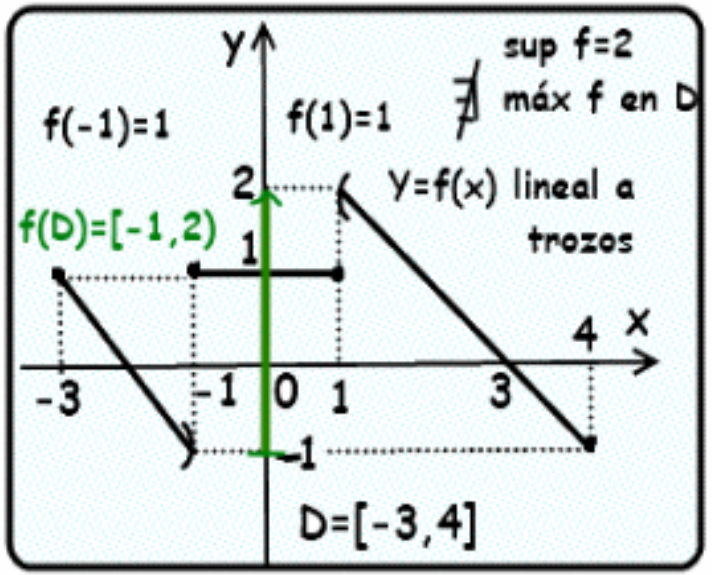
$\sup f \in f(D)$

$\exists \sup f = 4$

$\exists \max f.=4$



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



$f: D \mapsto \mathbb{R}$ $\quad D=[-3,4] = \{ x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 4 \}$

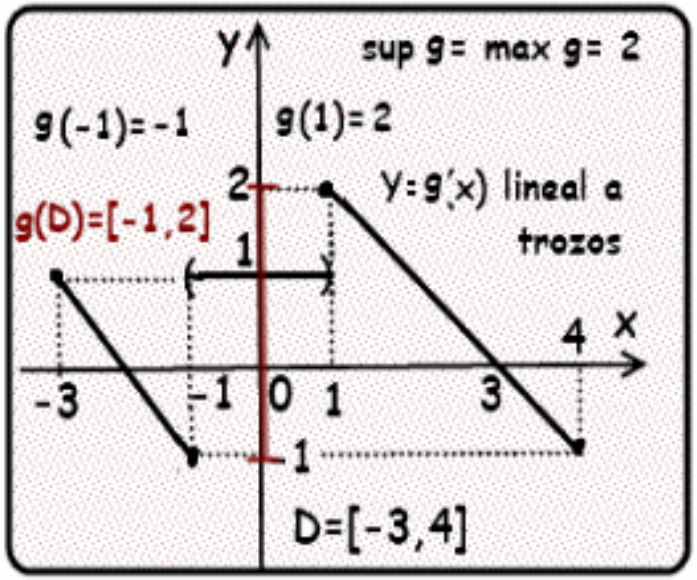
$$f(x) \begin{cases} = 3-x & \text{si } 1 < x \leqslant 4 \\ = 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ = -(2+x) & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \end{cases}$$

$f(D)=[-1,2)$ $\quad$ f es acotada superiormente

$\exists$ sup f = sup f(D) = 2

$2 \notin f(D)$ $\quad \nexists$ máx f en D

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



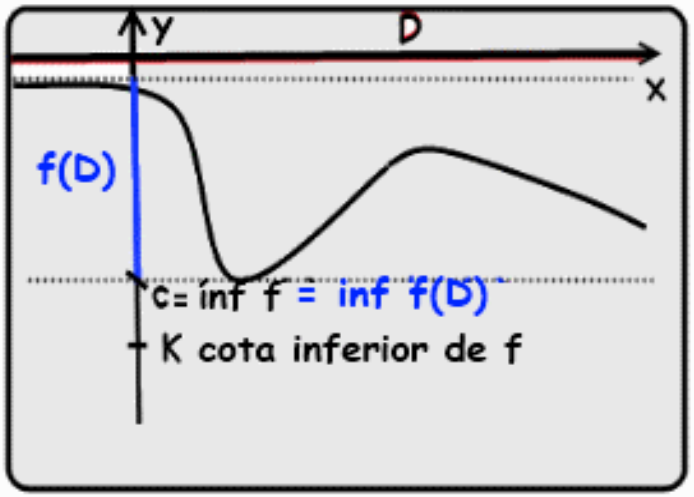
$g: D \mapsto \mathbb{R}$ $\quad D=[-3,4] = \{ x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 4 \}$

$$g(x) \begin{cases} = 3-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ = 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ = -(2+x) & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant -1 \end{cases}$$

$g(D)=[-1,2]$ $\quad$ g es acotada superiormente

$\exists$ sup g = sup g(D) = 2

$2 = g(1)$ $\quad 2 \in g(D)$ $\quad \exists$ máx g = sup g = 2



DEFINICIÓN

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ es acotada inferiormente

si existe una constante K real tal que

$f(x) \geq K \quad \forall x \in D$

K se llama "una cota inferior" de f

Equivalentemente: el conjunto imagen o recorrido f(D) está acotado inferiormente

Se define:

inf f = ínfimo del conjunto imagen f(D)

$c = \inf f$

- $f(x) \geq c \quad \forall x \in D$
- Si c' es otra cota inferior de f entonces $c \geq c'$

Si f es acotada inferiormente,

inf f existe por consecuencia del axioma de completitud de $\mathbb{R}$

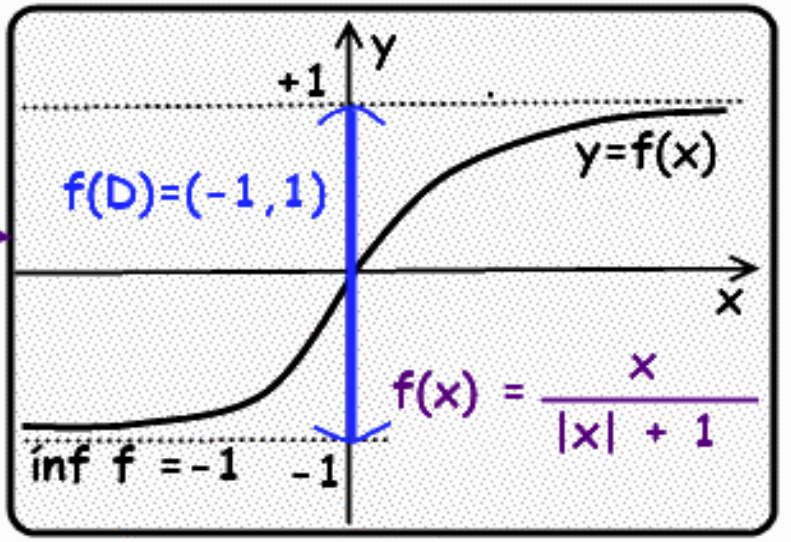
inf f es único (lo probamos para cualquier conjunto no vacío acotado de $\mathbb{R}$)

NOTA IMPORTANTE c= ínf f no pertenece necesariamente al conjunto imagen f(D)

Puede no existir $x \in D$ tal que $f(x) = c$, como en este EJEMPLO

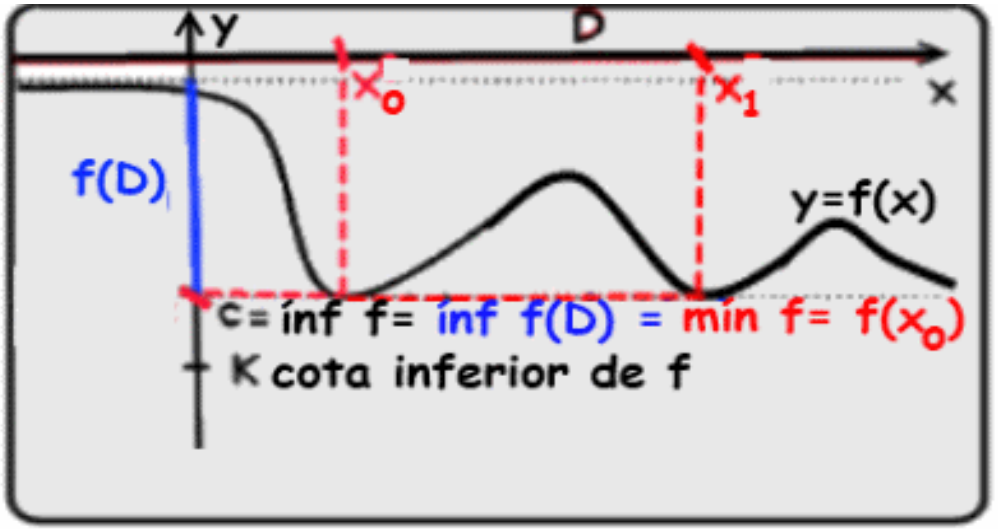
$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1} \qquad D = \mathbb{R}$$

$\inf f = -1 \notin f(D)$



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Si f es acotada inferiormente
c= inf f = inf f(D) es la mayor de las cotas inferiores de f(D)



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

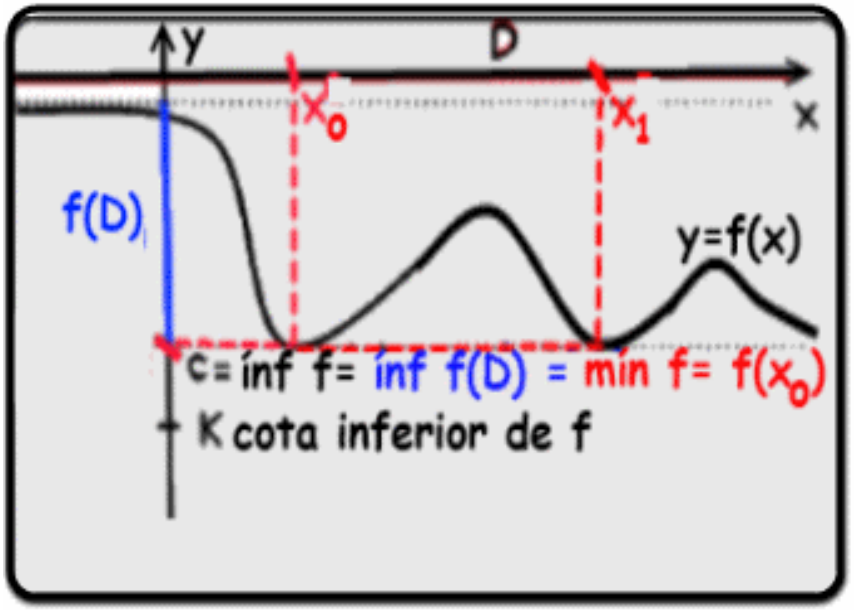
DEFINICIÓN

Si $f: D \to \mathbb{R}$ está acotada inferiormente y si $\inf f \in f(D)$ entonces $\inf f$ se llama MÍNIMO ABSOLUTO DE f EN D (en breve MÍNIMO de f)
En ese caso ínf f se denota $\min_{x \in D} f(x)$ ó en breve mín f

$f: D \to \mathbb{R}$ (continua ó no continua)

- f acotada inferiormente $\Leftrightarrow$ $\exists$ único ínf f
  - ínf f $\in$ f(D) $\Leftrightarrow$ $\exists$ único mín f = ínf f (por def)
  - ínf f $\notin$ f(D) $\Rightarrow$ $\nexists$ mín f
- f no acotada inferiormente $\Leftrightarrow$ $\nexists$ ínf f $\Rightarrow$ $\nexists$ mín f

OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Cuando existe mín f en D, por definición se cumple mín f= ínf f $\in$ f(D). Por definición de conjunto imagen f(D) existe uno o muchos $x_i \in D$ (en el dom.) tales que $f(x_i)$ = mín f = ínf f. Esos puntos x_i en el dominio se llaman LUGARES donde se alcanza el mínimo de f. Puede ser uno solo o muchos. De todas formas EL MÍNIMO es ÚNICO c= $f(x_i)$



DEFINICIÓN DE MÁXIMO de f en D:

RECAPITULANDO:

1 Si f es acotada inferiormente, ínf f= ínf f(D)
y si ínf f ∈ f(D) entonces
ínf f se llama MÍNIMO (absoluto)
de f en D y se denota

$$\min_{x\in D} f(x)$$ ó en breve mín f

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTRA DEFINICIÓN
EQUIVALENTE A LA 1 ES LA SIGUIENTE

2 Se dice que un número real c es el MÍNIMO (absoluto) de f en D y se denota $\min_{x\in D} f(x)$ ó en breve mín f cuando existe (uno o muchos) punto $x_0 \in D$ (en el dominio, llamado(s) LUGAR(es) donde se alcanza el mínimo c) tal que

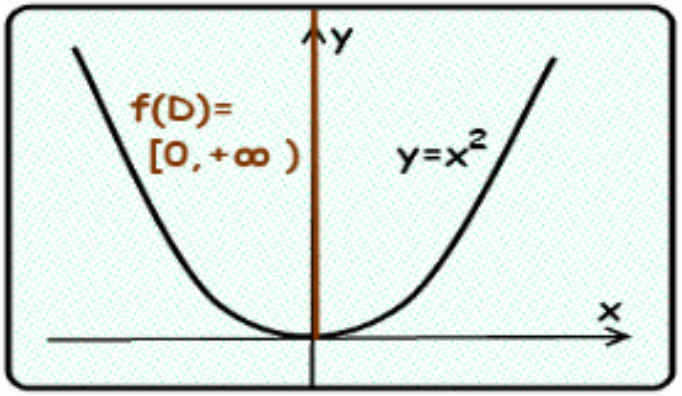
$$f(x) \geq f(x_0) = c \quad \forall x \in D$$

ESTA DEFINICIÓN de c= mín f ES LA MÁS USUAL

$$\Updownarrow$$

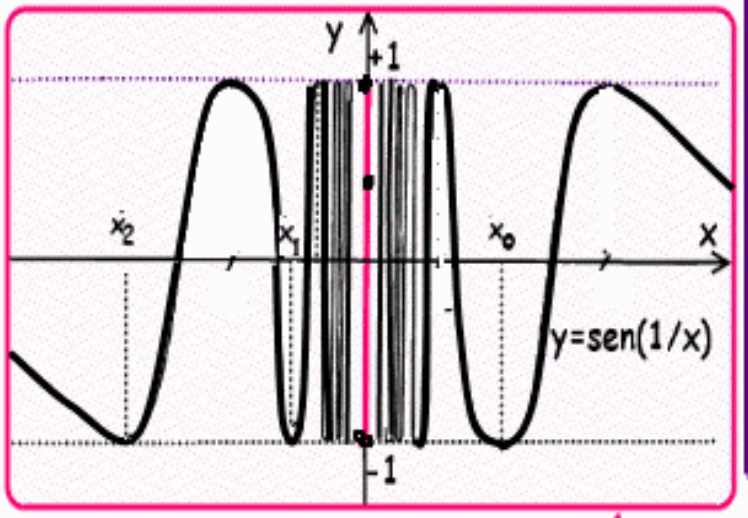
$$c = \text{mín } f$$

EJEMPLOS



$f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}$ El conjunto imagen f(D) es $f(D) = [0, +\infty)$ f está acotada inferiormente pero f no está acotada superiormente $\nexists$ sup f en D

$\exists$ inf f = máx f = f(0) = 0 $\nexists$ máx f en D



$f(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$

$D = \mathbb{R}$

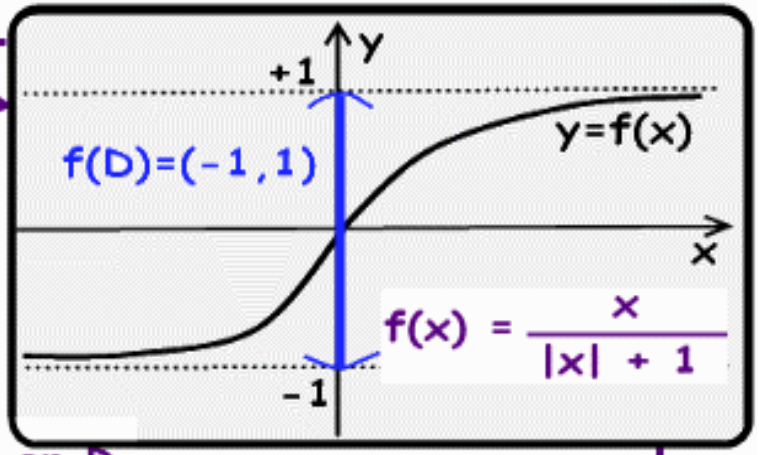
El conjunto imagen f(D) es (-1,1).

inf f = inf f(D) = -1

$-1 \notin f(D)$ $\exists$ ínf f en D

$\nexists$ mín f en D

sup f = sup f(D) = +1 $\notin$ f(D)



$\exists$ sup f en D

$\nexists$ máx f en D

$f(x) = sen(1/x)$ si $x \neq 0$

$= 1/2$ si $x = 0$

$D = \mathbb{R}$ El conjunto imagen f(D) es [-1,1]. f es acotada super. e inferiorm.

$\exists$ sup f en D y $\exists$ ínf f en D

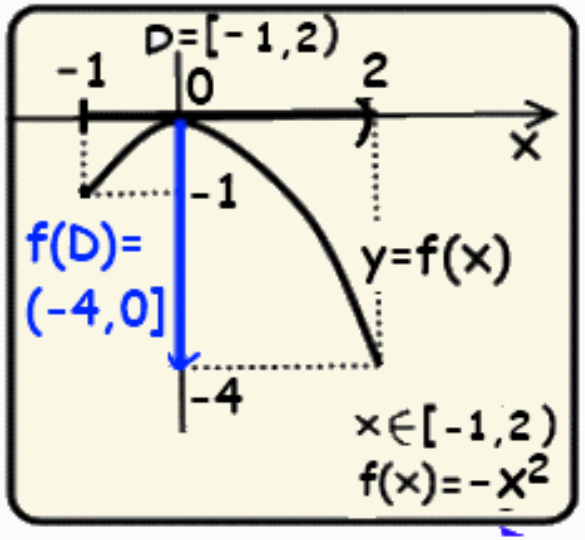
sup f = sup f(D) = +1 $\in$ f(D) ínf f = ínf f(D) = -1 $\in$ f(D)

$\exists$ max f en D | max f = sup f = 1 | $\exists$ mín f en D | mín f = ínf f = -1

¿Dónde se alcanzan el máximo? (Lugares del m imo)

El mínimo es único, pero se alcanza en infinitos puntos x_n (del Dominio) pues si $x_n = 1/[(3\pi/2) + 2n\pi)$ para $n \in Z$ se cumple $f(x_n) = -1 = \text{mín } f \text{ en } D$.

MÁS EJEMPLOS



$f(x)=-x^2$ $D=[-1,2)=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x<2\}$

El conjunto imagen es $f(D)=[0,4)=\{y\in\mathbb{R}: -4<y\leq 0\}$

f está acotada inferiormente $\inf f=\inf f(D)=-4$

$\exists\ \inf f=-4$

$\nexists\ \min f.$

$\inf f \notin f(D)$

$f(x)=-x^2$ $D=(-1,2]=\{x\in\mathbb{R}: -1<x\leq 2\}$

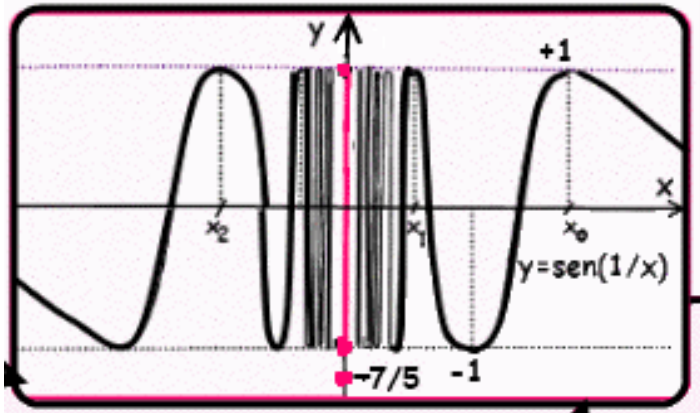
El conjunto imagen es $f(D)=[0,4]=\{y\in\mathbb{R}: -4\leq y\leq 0\}$

f está acotada eriormente ínf f= ínf f(D)=-4

$\exists\ \inf f=-4$

$\exists\ \min f=-4$

$f\in f(D)$



$f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$

$=-7/5$ si $x=0$

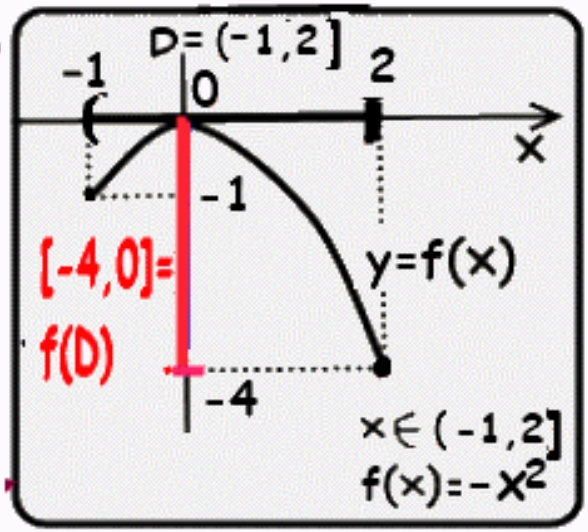
$D=\mathbb{R}$ El conjunto imagen f(D) es $[-1,1]\cup\{-7/5\}$

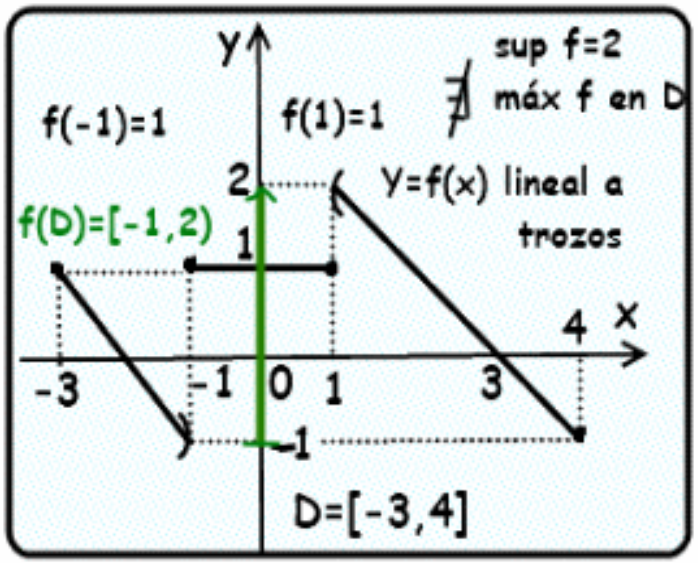
f es acotada inferiorm.

$\inf f=\inf f(D)=-7/5$

$-7/5=f(0)$

$\min f=\inf f=-7/5$





$f: D \mapsto \mathbb{R}$ $\quad D=[-3,4] = \{ x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 4 \}$

$$f(x) \begin{cases} = 3-x & \text{si } 1 < x \leqslant 4 \\ = 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ = -(2+x) & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \end{cases}$$

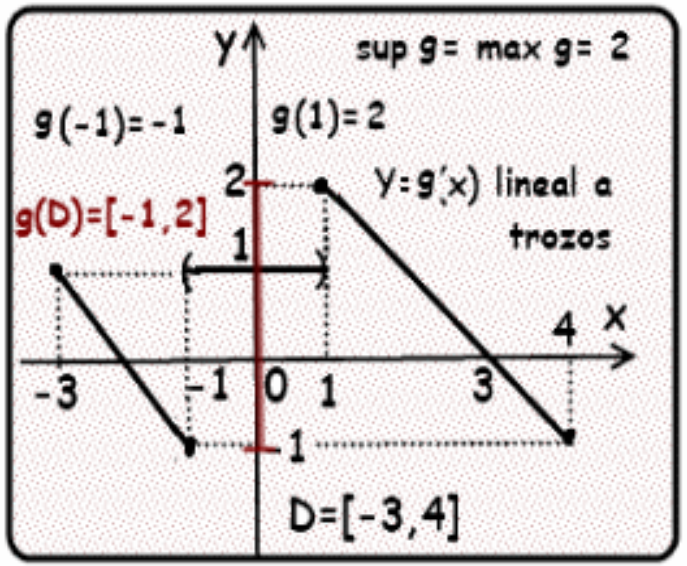
$f(D)=[-1,2)$ $\quad$ f es acotada superiormente

$\exists$ sup f = sup f(D) = 2

$2 \notin f(D)$ $\quad \nexists$ máx f en D

f es acotada inferiormente $\exists$ ínf f = -1

$-1 = f(4)$ $\quad -1 \in f(D) \Rightarrow \exists$ mín f = ínf f = -1



$g: D \mapsto \mathbb{R}$ $\quad D=[-3,4] = \{ x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 4 \}$

$$g(x) \begin{cases} = 3-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ = 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ = -(2+x) & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant -1 \end{cases}$$

$g(D)=[-1,2]$ $\quad$ g es acotada superiormente

$\exists$ sup g = sup g(D) = 2

$2 = g(1)$ $\quad 2 \in g(D)$ $\quad \exists$ máx g = sup g = 2

g es acotada inferiormente $\quad$ ínf g = -1

$-1 = g(4)$ $\quad -1 \in g(D)$ $\quad \exists$ mín g = ínf g = -1

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN

Una función f: D⟶R se dice *ACOTADA*, si es acotada superiorm. e inferiorm.

DE LOS EJEMPLOS Y EL DESARROLLO EN ESTA CLASE OBTUVIMOS:

f es acotada si y solo si existen y son únicos sup f e ínf f.

Existe máx f si y solo sí el valor de sup f se alcanza para algún(os) punto(s) del dominio, llamados lugar(es) del máximo.

El máx f cuando existe no es los puntos (las abscisas) donde se alcanza sino el valor de f en esos puntos (la ordenada) que es único.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Existe mín f si y solo sí el valor de inf f se alcanza para algún(os) punto(s) del dominio, llamados lugar(es) del mínimo

El mín f cuando existe no es los puntos (las abscisas) donde se alcanza sino el valor de f en esos puntos (la ordenada) que es único.

Existen numerosos ejemplos de funciones acotadas que no tienen máximo o que no tienen mínimo. Si son acotadas, tienen supremo e ínfimo pero no se alcanzan.

Las funciones constantes son las únicas para las cuales ínf f= sup f= máx f = mín f y se alcanza en todos los puntos del dominio.

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 25

DEFINICIÓN **Intevalo *COMPACTO*** es un **intervalo cerrado y acotado** de reales: es decir $[a,b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$ donde a y b son dos reales fijos tales que $a < b$, que se llaman extremos del intervalo, Por definición del conjunto [a,b] éste contiene a sus extremos a y b.

Ejemplos:

Son **compactos** los intervalos [4,7]
[- , 2]
[-1000000, +1000000]
pues **son cerrados y acotados**

No son compactos los intervalos (4,7], [4,7), (4,7) pues no son cerrados, aunque son acotados.

No son compactos los intervalos que son semirrectas, porque no son acotados. Por ejemplo, **no** son compactos los intervalos $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ pues aunque son cerradas no son acotadas. **No** son compactos tampoco los intervalos $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$.

No es compacto el intervalo formado por toda la recta real, pues no es acotada.

TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS (para intervalos) (PROPIEDADES DE INTERVALOS COMPACTOS) (importante)

Si $[a,b]$ es un intervalo **compacto** y si $a_n \in [a,b]$ es una sucesión de puntos del intervalo, entonces:

a_n convergente $\Longrightarrow$ $\lim a_n \in [a,b]$ (I)

a_n no convergente $\Longrightarrow$ existe una subsucesión b_i de a_{n_i} que es convergente y su $\lim b_i \in [a,b]$ (II)

Dem.

$a_n \in [a,b] \Rightarrow a \leqslant a_n \leqslant b \quad \forall n \geqslant 1$

$\exists \lim a_n \Rightarrow$ a , b constantes

Monotonía del límite

$\lim a \leqslant \lim a_n \leqslant \lim b$

$a \leqslant \lim a_n \leqslant b \Rightarrow \lim a_n \in [a,b]$

Lqqd (I)

$a_n \in [a,b] \Rightarrow a_n$ es acotada. Teorema Bolzano Weierstrass para sucesiones

a_n acotada $\Rightarrow \exists$ subsucesión b_i que es convergente

$b_i = a_{n_i} \in [a,b] \Rightarrow b_i \in [a,b]$ aplicamos (I) a b_i $\Rightarrow \lim b_i \in [a,b]$ Lqqd (II)

TEOREMA DE WEIERSTRASS

¡¡ Muy importante !!

(Existencia de mínimo y máximo para funciones continuas en compactos)

Hipótesis Sea $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ donde $[a,b]$ denota un intervalo **COMPACTO**

Si f es **CONTINUA** entonces

Tesis: EXISTE MÁXIMO (absoluto en D) de f y EXISTE MÍNIMO (absoluto en D) de f.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Nota: En breve si se dice la palabra "Máximo" sin adjetivo se refiere el máximo absoluto, cuando existe, de la f en todo su dominio.

Análogamente cuando se refiere a la palabra "Mínimo".

NOTA IMPORTANTE Ya vimos al definir máximo y mínimo de f, que cuando existen son únicos Recordar que el Máximo (y el mínimo) No es los puntos donde se alcanza, sino el VALOR de la función en esos puntos (en el eje de las ordenadas)

OTRA NOTA IMPORTANTE:

Vimos la clase pasada ejemplos en los que existe (y por lo tanto es único) el MÁXIMO (ó el mínimo ó ambos), y la función no es continua ó el intervalo no es compacto, ó ambas cosas. También vimos ejemplos en que no existe el máximo y/o el mínimo. Concluimos que cuando no se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass a priori no puede afirmarse nada sobre la existencia de Máximo y/o de Mínimo, y hay que estudiar las particularidades de cada caso

TEOREMA DE WEIERSTRASS

¡¡ Muy importante !!

(Existencia de mínimo y máximo para funciones continuas en compactos)

Hipótesis Sea $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ donde $[a,b]$ denota un intervalo **COMPACTO**
Si f es **CONTINUA** entonces

Tesis: EXISTE MÁXIMO (absoluto en D) de f
y EXISTE MÍNIMO (absoluto en D) de f.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostración:

Vamos a demostrar solo la existencia de máximo. La prueba de la existencia de mínimo es similar. Por definición de máximo, hay que probar 2 cosas:
que f está acotada superiormente, y luego que $\sup f \in f([a,b])$, es decir que existe algún $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \sup f$. (Eso significa que se alcanza el máximo).

1er. paso Probar que f está acotada superiormente

Si f está acotada superiormente, por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$, existe $\sup f$

2do. paso Probar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \sup f$

Entonces concluiremos que $\max f = f(x_0) = \sup f$.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

¡¡ Muy importante !!

(Existencia de mínimo y máximo para funciones continuas en compactos)

Hipótesis Sea $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ donde $[a,b]$ denota un intervalo **COMPACTO**
Si f es **CONTINUA** entonces

Tesis: EXISTE MÁXIMO (absoluto en D) de f
y EXISTE MÍNIMO (absoluto en D) de f.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostración:

1er. paso Probar que f está acotada superiormente

¿$\exists\, K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant K \;\forall\, x \in [a,b]$? (A)

Por absurdo: suponemos "No (A)" Entonces

$\forall\, K \in \mathbb{R}\; \exists\, x \in [a,b]$ tal que $f(x) > K$. (B)

(B) vale $\forall K \in \mathbb{R}$. En particular vale para $K = n$.

Al real $x \in [a,b]$ que cumple (B)

cuando $K = n$ lo denoto x_n.

(B) $\Rightarrow$

$\exists\, x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) > n \quad \forall\, n \geq 1$ (C)

$x_n \in [a,b] \;\Rightarrow\; a \leq x_n \leq b \;\Rightarrow$

x_n es una sucesión acotada

Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones

$a \leq x_n \leq b \;\Rightarrow$ ($\exists$ subsucesión x_{n_i} convergente)

$\exists\, \lim x_{n_i} = L \in [a,b]$

Probamos que $x_{n_i} \in [a,b]$ $\lim x_{n_i} = L$ (D)

Probamos que $x_{n_i} \in [a,b], \quad \lim x_{n_i} = L$ (D)

Por hipótesis $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua.

Aplicamos el Teorema del pasaje

de funciones continuas a sucesiones:

(D) $\Rightarrow \lim f(x_{n_i}) = f(L) \in \mathbb{R}$ (E)

(C) $\Rightarrow f(x_{n_i}) > n_i \to +\infty \;\Rightarrow\; f(x_{n_i}) \to +\infty$ (G).

(G) contradice (E) Absurdo.

Hemos probado por absurdo que f es acotada.

superiormente

2do paso sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Continuación de la demostración del teorema de Weierstrass

1er. paso Ya probamos que $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ está acotada superiormente

Por el axioma de completitud en R, existe $c = \sup f = \sup f([a,b])$

2do. paso Probar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = c$

Por el teorema de caracterización del supremo c del conjunto f([a,b]):

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ y \in f([a,b])$ tal que $c - \epsilon < y \leq c$ (H)

(H) vale $\forall\ \epsilon > 0$. En particular (H) vale para $\epsilon = 1/n$

Al $y \in f([a,b])$ que existe por (H) cuando $\epsilon = 1/n$ lo llamo y_n

(H) $\Rightarrow$ $\exists\ y_n \in f([a,b])$ tal que $c - (1/n) \leq y_n \leq c\ \ \forall\ n \geq 1$ (J)

$y_n \in f([a,b]) \Rightarrow \exists\ x_n \in [a,b]$ tal que $y_n = f(x_n)$ (K)

$x_n \in [a,b] \Rightarrow a \leq x_n \leq b$

$\Rightarrow$ x_n es una sucesión acotada

Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones

$\exists$ subsucesión x_{n_i} convergente

$\exists\ \lim x_{n_i} = L \in \mathbb{R}$

Probamos que $x_{n_i} \in [a,b],\ \lim x_{n_i} = L$ (D)

Por el teorema de Bolzano Weierstrass para intervalos compactos $L \in [a,b]$

Por hipótesis $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es continua.

Aplicamos el Teorema del pasaje de funciones continuas a sucesiones:

(D) $\Rightarrow$ $\lim f(x_{n_i}) = f(L) \in f([a,b])$ (E)

(J) $\Rightarrow$ $\lim c - (1/n) \leq \lim f(x_{n_i}) \leq c$

$\Rightarrow$ $\lim f(x_{n_i}) = c$ (S)

(S) y (E) $\Rightarrow$ $c = f(L)$

Llamando $x_0 = L$, hemos probado que

$c = f(x_0) \in f([a,b])$

LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 28

VI DERIVADA Y DIFERENCIAL

- Derivada, recta tangente, derivable implica continua. Ejemplos
  Diferencial, derivada segunda, concavidad y derivadas de mayor orden

- Linealidad de la derivada, derivada del producto, del cociente y de la función compuesta (Regla de la cadena)

- Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial (Teorema de Lagrange)
- Corolarios del Teorema del Valor Medio (funciones con derivada idénticamente nula, y funciones monótonas estrictamente)

bibliografía para el curso:

"Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

Para el tema VI: capítulos 9 y 10

Sea $f:[a,b] \longmapsto R$. Fijemos un punto $x_0 \in [a,b]$

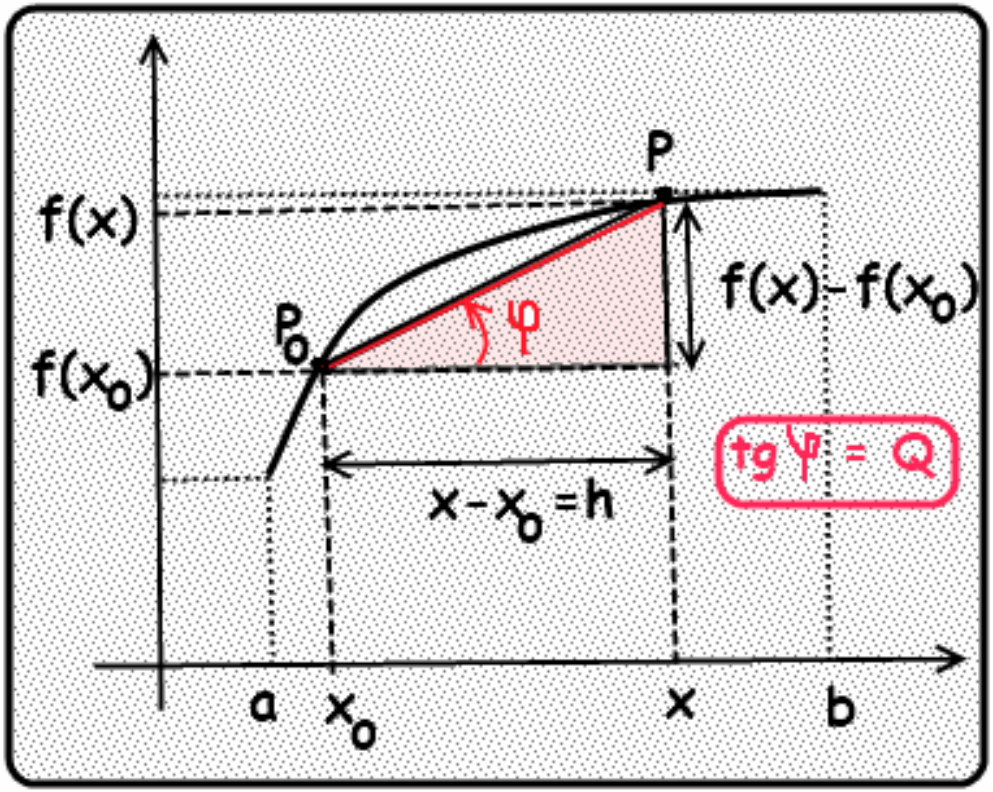
COCIENTE INCREMENTAL de f centrado en x_0

Definición: Para todo $x \in [a,b]$ tal que $x \neq x_0$ se define el cociente incremental de f

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpretación gráfica del cociente incremental Q(x):

Es la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos de la gráfica de f: uno con abscisa x_0 y el otro con abscisa x



$Q(x)$ = tangente de φ

(pendiente de una recta es la tangente del ángulo φ de la figura)

IMPORTANTE: El cociente incremental está definido solo si $x \neq x_0$

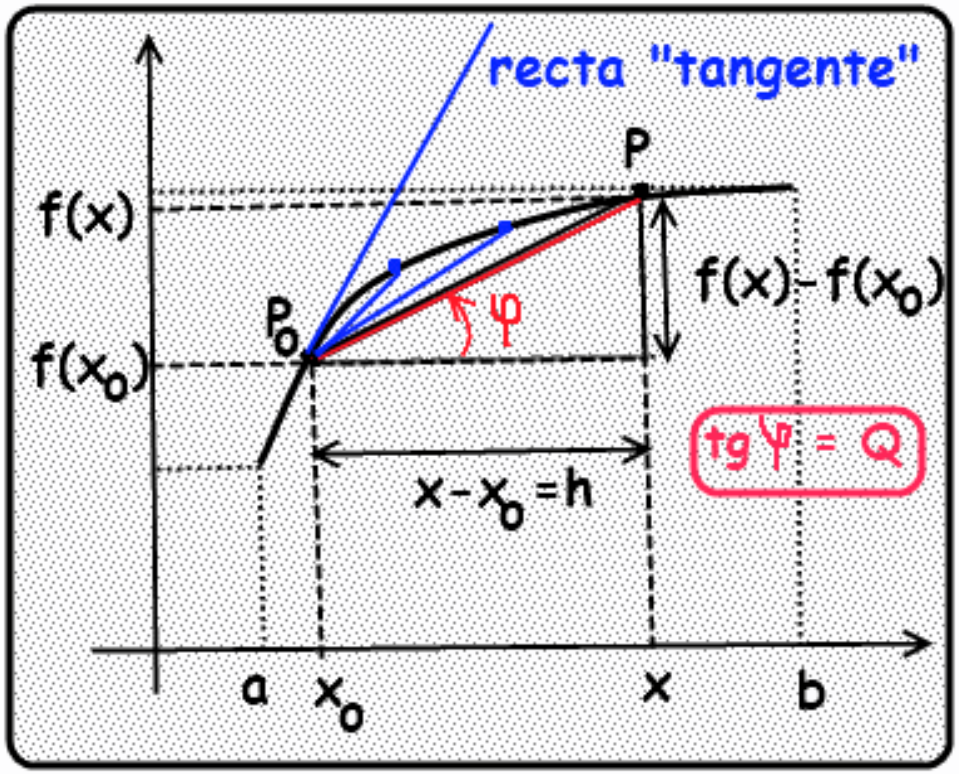
OTRA NOTACIÓN PARA EL COCIENTE INCREMENTAL

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x}$$

Si llamamos $h = x - x_0$ queda $x = x_0 + h$

$$Q = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$Q = \tan \varphi$ (pendiente de la recta secante $\overline{P\ P_0}$)



importante El cociente incremental Q está definido solo si $x \neq x_0$ es decir, solo si $h \neq 0$

h se llama incremento en la variable independiente x

$f(x) - f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$ se llama incremento en la variable dependiente

Cuando $x \longrightarrow x_0$ el punto P "tiende" al punto P_0 y la recta secante que une P_0 con P "tiende" (cuando tiene "límite") a una recta que se llama tangente a la gráfica de f en el punto P_0 con abscisa x_0 y ordenada $f(x_0)$.

La pendiente a la recta tangente es $\lim_{x \to x_0} Q(x) = \lim_{h \to 0} Q$ (cuando existe ese límite)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

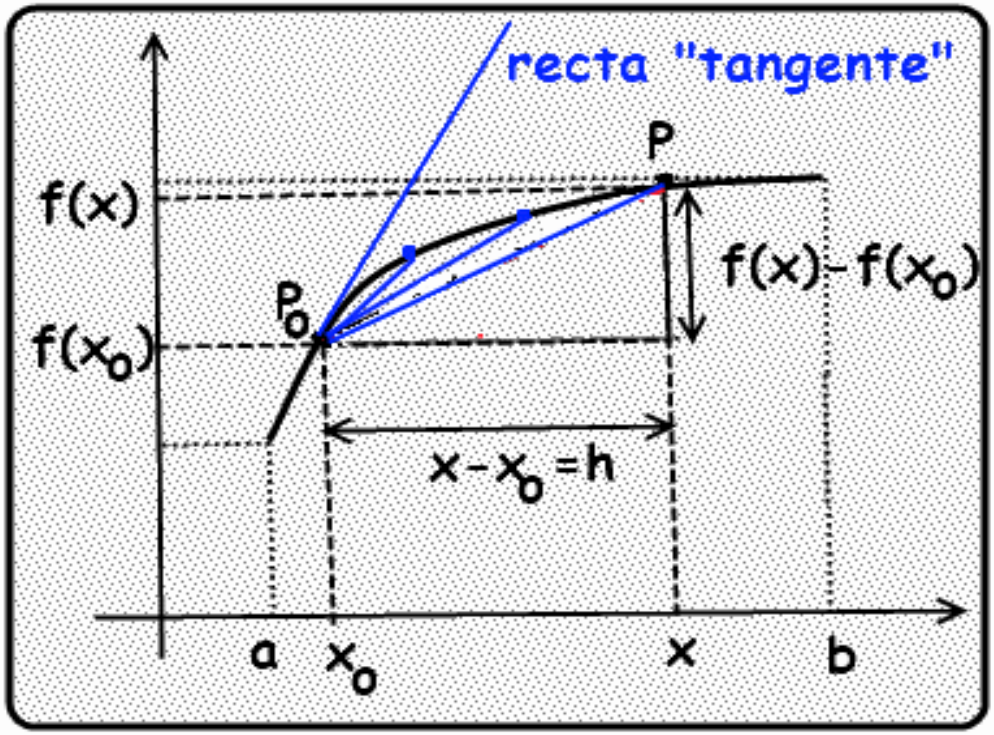
DERIVADA de la función $f(x)$ en $x=x_0$ es, por definición, cuando existe, el límite del cociente incremental cuando $x \to x_0$ (es decir cuando $h \to 0$) Se denota $f'(x_0)$

Cuando existe ese límite $f'(x_0)$ se dice que $f(x)$ ES DERIVABLE en $x= x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Definición Se llama "recta tangente" a la gráfica de f en el punto P_0 de abscisa x_0 y ordenada $f(x_0)$ a la recta que pasa por P_0 y tiene pendiente igual a $f'(x_0)$.



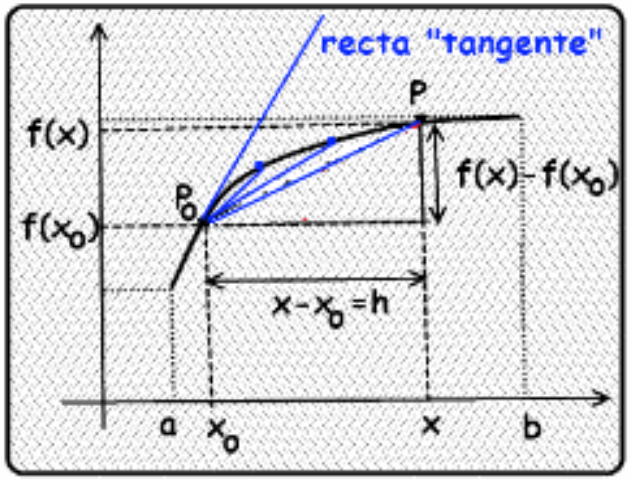
No se define recta tangente cuando no existe la derivada $f'(x_0)$.

En todas las definiciones anteriores el número real x_0 está fijo, y por lo tanto el número real $f(x_0)$ también está fijo.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Recta tangente: la que pasa por el punto P_0 y tiene pendiente igual a $f'(x_0)$



Ecuación de la recta tangente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Demostración: En geometría analítica se ve que la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0 , y_0) y tiene pendiente α es

$$y - y_0 = \alpha \cdot (x - x_0) \quad (A)$$

En este caso $y_0 = f(x_0)$, $\alpha = f'(x_0)$ (por definición de la recta tangente)

Entonces (A) $\Rightarrow$ $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ LQQD

EJEMPLO

Aplicando la definición de derivada probar que si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x_0) = 2\,x_0$.

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

$$Q(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} Q(x) = 2\,x_0$$

$$f'(x_0) = 2\,x_0$$

Ecuación de la recta tangente por el punto $P_0 = (x_0 , f(x_0))$ es

$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$ En este caso $f(x_0) = x_0^2 = 9$, $f'(x_0) = 2\,x_0 = 6$

Recta tangente queda $y-9 = 6(x-3)$ $y = 6x - 18 + 8$ $y = 6x - 9$

EJEMPLO Aplicando la definición de derivada probar que si f(x) es constante para todo x entonces $f'(x_0) = 0$ (Más adelante probaremos el recíproco: si $f'(x_0) = 0$ $\forall x_0 \in (a,b)$ entonces f(x) es constante $\forall x \in (a,b)$

Sabemos que f(x)=c constante para todo x, entonces el coc. increm. es

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c - c}{x-x_0} = 0$$ para todo x. Luego, su límite existe y

es 0. Por definición $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} Q(x)$ Resulta $f'(x_0) = 0$ LQQD.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DERIVADA

Sea $f: [a,b] \mapsto R$ una función tal que para todo $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0)$ (existe el límite del cociente incremental). Tales funciones se llaman DERIVABLES en el intervalo (a,b)

Se llama función derivada $f'(x)$ definida en el intervalo abierto (a,b) a la función que en cada punto $x_0 \in (a,b)$ es igual al número $f'(x_0)$.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS

f(x)	f'(x)
c	0
x	1
x^2	2x
x^n	$n\, x^{n-1}$
e^x	e^x
Log x (x>0)	1/x
sen x	cos x
cos x	-sen x
f(cx)	c f'(cx)
cf(x)	c f'(x)

f(x)	f'(x)
f(x)+ g(x)	f'(x) + g'(x)
f(x) g(x)	f'(x) g(x) + f(x) g'(x)
si $g(x) \neq 0$ f(x)/g(x)	$[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]/[g(x)]^2$

Más adelante probaremos solo algunas de las propiedades de la tabla anterior

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Las propiedades de la tabla de la derecha son derivada de suma, producto y cociente de func.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA (Regla de la cadena) y DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Más adelante probaremos las siguientes propiedades:

f(x)	f'(x)
$f \circ g\,(x) = f(g(x))$	$[f \circ g]\,'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Si f es invertible (biunívoca) y si $f' \neq 0$	$(f^{-1}(y))' = 1 / [f'(x)]$ donde $x = f^{-1}(y)$, $y = f(x)$

EJEMPLOS

$\text{Arcsen } y = x \iff y = \text{sen } x \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2]\ ,\ y \in [-1,1]$

$(\text{Arcsen } y)' = 1/(\text{sen } x)' = 1/\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

En este ejemplo usamos la prop. de derivada de la función inversa

$[e^{(x^2-x)}]' = [e^y]' \cdot g'(x)$ siendo $y = g(x) = x^2 - x$

$= (2x-1) \cdot e^y = (2x-1) \cdot e^{x^2-x}$

En este ejemplo usamos la regla de la cadena (derivada de la función compuesta)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

EJEMPLOS

Mostrar que $[tg\,(x)]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2(x)$

Mostrar que $[Arctg\,(y)]' = \frac{1}{1+y^2}$ siendo $x = Arctg(y)$ si y solo si $y = tg(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Usando la propiedad de derivada de un cociente, para todo x tal que $\cos x \neq 0$:

$$[tg\,x]' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - (\cos x)'\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[tg\,(x)]' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^2(x)$$

Usando la propiedad de derivada de la función inversa, y observando que para todo x la derivada de tg x es diferente de cero:

$$[Arctg\,(y)]' = \frac{1}{[tg\,(x)]'} = \frac{1}{1 + tg^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$y = tg(x)$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 29

TEOREMA (importante) Continuidad de las funciones derivables

Si $f(x)$ es derivable en $x=x_0$ entonces $f(x)$ es continua en $x= x_0$

Dem.

Por hip. $f(x)$ es derivable en $x = x_0$, es decir existe $f'(x_0)$

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} Q(x)$ siendo $Q(x)$ el cociente incremental

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

$$f(x) - f(x_0) = Q(x) \cdot (x - x_0)$$

Tomando límites cuando $x \to x_0$ y recordando que el límite del producto es el producto de los límites, obtenemos

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = [\lim_{x \to x_0} Q(x)] \cdot [\lim_{x \to x_0}(x - x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

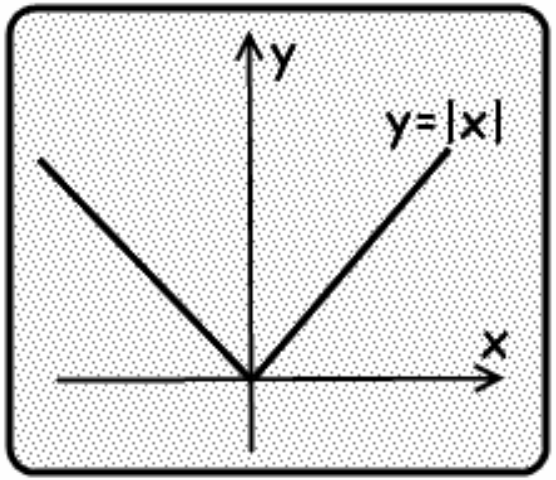
Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y deducimos, por definición de continuidad, que f es continua en $x = x_0$. LQQD

Ya demostramos el siguiente resultado

TEOREMA

Si f(x) es derivable en $x=x_0$ entonces f(x) es continua en $x= x_0$

El recíproco es falso: sabiendo que f(x) es continua en $x = x_0$ entonces f(x) puede ser derivable o puede ser No derivable en $x = x_0$ como lo muestra el contraejemplo



CONTRAJEMPLO:

Sabemos que la función $f(x)=|x|$ es CONTINUA en todos sus puntos.

Probar que NO ES DERIVABLE EN $x_0 = 0$.

Apliquemos la definición de derivada: es el límite cuando existe, del cociente incremental Q(x). Lo que hay que probar entonces es que no existe lím Q(x) cuando $x \to 0$

$$Q(x)=\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

$$Q(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow \begin{array}{l} Q(x) = 1 \text{ si } x > 0 \\ Q(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{array}$$

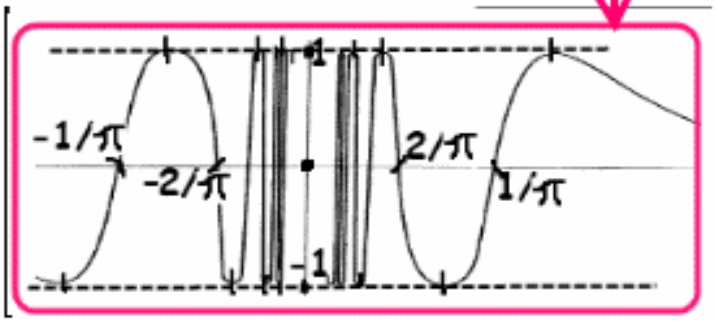
Entonces no existe límite de Q(x) cuando $x \to 0$ pues si existiera sería igual a 1 e igual a -1 al mismo tiempo.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROBAR QUE LA FUNCIÓN $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ = 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

NO es derivable en $x = 0$.

Ya probamos que esa función no es continua en $x = 0$, entonces por el teorema de continuidad de funciones derivables, no puede ser derivable en $x = 0$.

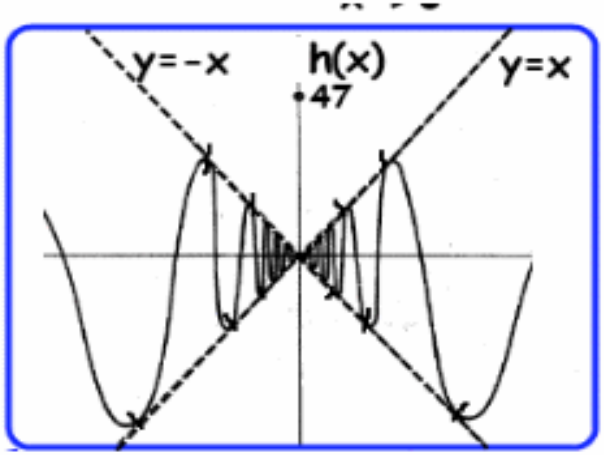


PROBAR QUE LA FUNCIÓN

$h(x) = x \text{ sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$h(x) = 0$ si $x = 0$

NO es derivable en $x = 0$

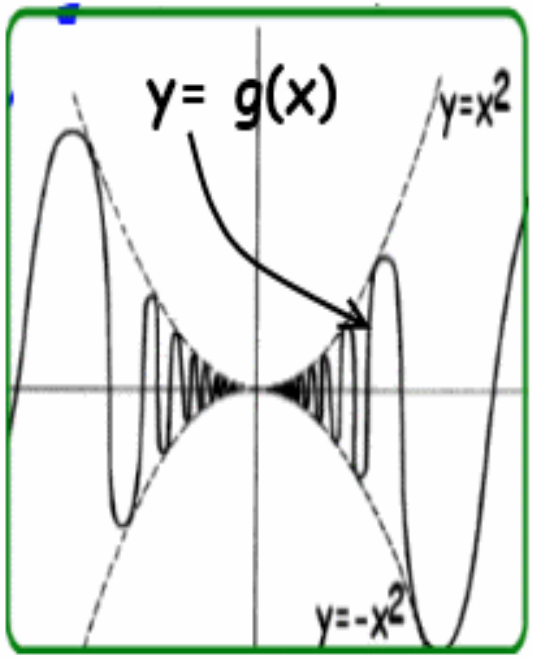


Ya probamos que $h(x)$ es continua, pues $\lim_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$. Pero la continuidad no implica necesariamente la derivabilidad . Para probar que $h(x)$ no es derivable en $x = 0$, mostremos que no existe el límite del cociente incremental $Q(x)$ cuando $x \to 0$

$$Q(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x \text{ sen}(1/x) - 0}{x} = \text{sen}(1/x)$$

Ya probamos que no existe el lím de $\text{sen}(1/x)$ cuando $x \to 0$.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



OTRO EJEMPLO

Probar que la siguiente función g(x) es derivable en x= 0

$g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$g(x) = 0$ si $x = 0$

Ya vimos que

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$

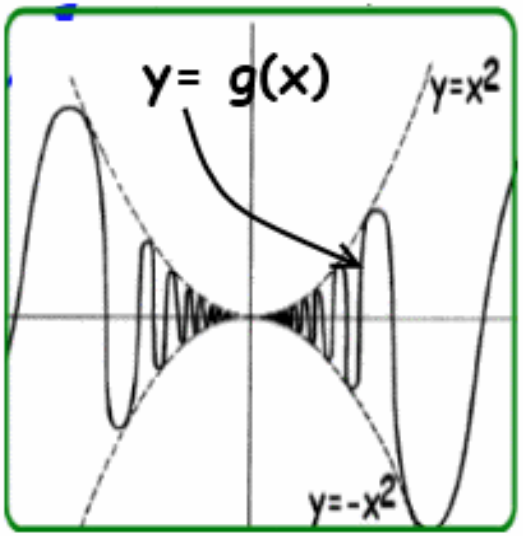
Entonces g(x) es continua en x= 0. Pero la continuidad no implica necesariamente la derivabilidad.

Para probar que existe g'(0) veamos que existe el lím del coc. increm. Q(x) cuando $x \to 0$

$$Q(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x} = x \operatorname{sen}(1/x).$$

Ya vimos que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$. Entonces existe $\lim_{x \to 0} Q(x) = 0$

Por definición $g'(0) = \lim_{x \to 0} Q(x)$ Deducimos que existe g'(0) y que g'(0)= 0



$g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$g(x) = 0$ si $x = 0$

Ya probamos que g(x) es derivable en x = 0, y que g'(0) = 0

Probar que g(x) es derivable también si $x \neq 0$ y calcular g'(x).

$$x \neq 0 \quad (1/x)' = -1/x^2$$

Este paso, obtenido mediante la fórmula de derivada de un cociente, vale solo si $x \neq 0$. Entonces, los pasos siguientes donde se use, valen solo si $x \neq 0$. Por eso no sirve este método para calcular la derivada g'(0) que ya obtuvimos mediante la definición de derivada como límite del cociente incremental

Usando la regla de la cadena, se obtiene:

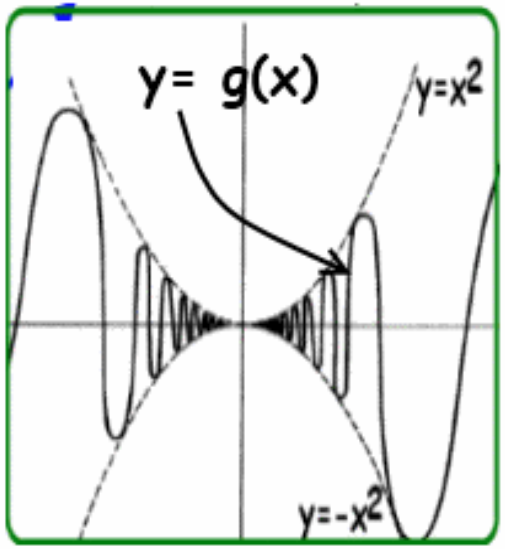
$$[\operatorname{sen}(1/x)]' = [\cos(1/x)] \cdot [-1/x^2)] = -(1/x^2)\cos(1/x)$$

Usando ahora la regla de derivada de un producto, se obtiene:

$$[x^2 \operatorname{sen}(1/x)]' = (2x)\operatorname{sen}(1/x) + x^2[\operatorname{sen}(1/x)]'$$

$$[x^2 \operatorname{sen}(1/x)]' = 2x\operatorname{sen}(1/x) - x^2(1/x^2)\cos(1/x)$$

$$[x^2 \operatorname{sen}(1/x)]' = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$$ Si $x \neq 0$



$g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$

$g(x) = 0$ si $x = 0$

Ya probamos que g(x) es derivable para todo x y la función derivada g'(x) es:

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

¿Es continua la función derivada?

Veamos que No, que g'(x) NO es continua en x= 0 pues existe g'(0) = 0, pero g'(0) no es el lím de g'(x) cuando $x \to 0$.

$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$

sen(1/x), cos(1/x) no tienen límite cuando $x \to 0$, pero están acotadas en valor absoluto. Luego $\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}(1/x) = 0$. Luego

$\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) = \lim_{x\to 0} -\cos(1/x)$

No existe.

Concluimos que g'(x) existe para todo x (incluso para x= 0) pero la función derivada g'(x) No es continua en x= 0

Una función f se dice que es DE CLASE C^1 si existe derivada para todo x en su dominio, y la función derivada f'(x) es Continua para todo x en su dominio D

Por definición f es de clase $C^1 \Leftrightarrow$ existe $f'(x) \quad \forall x \in D$
$f'(x)$ es continua $\quad \forall x \in D$

Se observa que
f es derivable $\Leftrightarrow \exists f'(x) \quad \forall x \in D \not\Rightarrow$ f es de clase C^1

El ejemplo $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, $g(x) = 0$ si $x = 0$

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Ya vimos que g'(x) no es continua en x= 0, entonces

g no es de clase C^1 aunque g es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 30

Sea $f: [a,b] \longmapsto R$ una función. Sea $x_0 \in (a,b)$ un punto (cualquiera pero fijo)

Se llama **INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x** alrededor de x_0, se denota $\triangle x$, al siguiente número

$\triangle x = x - x_0$ definido para todo x en el dominio de f.

Se llama **DIFERENCIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x** alrededor de x_0 se denota dx, al siguiente número

$dx = x - x_0$ Es decir $dx = \triangle x = x - x_0$

Para la variable independiente x, por convención, el diferencial de x es lo mismo que el incremento de x .

Se llama **INCREMENTO DE LA VARIABLE DEPENDIENTE** al siguiente número definido para todo x en el dominio de f

$\triangle f = f(x) - f(x_0)$

OBSERVAR QUE

$\triangle x = dx$ y $\triangle f$

EXISTEN PARA CUALQUIER FUNCIÓN f

Si llamamos $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ a la variable dependiente entonces su incremento

$\triangle f = \triangle y = y - y_0$

Se llama **DIFERENCIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE** a un número **df** que GENERALMENTE ES DISTINTO del incremento $\triangle f$ y que cumple las propiedades que veremos más adelante en esta clase, cuando existe (no siempre existe)

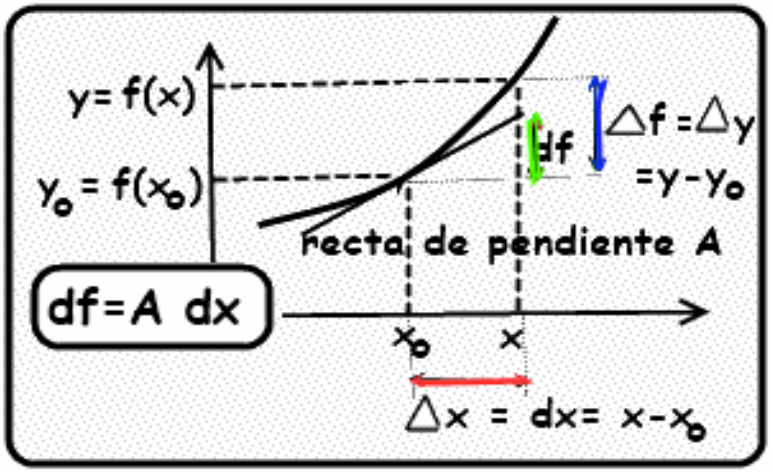
IMPORTANTE: para la variable dependiente $y=f(x)$ en general $df = dy \neq \triangle y = y - y_0$

Diferencial o incremento de la variable indep. x es

$$dx = \triangle x = x - x_0$$

Incremento de la variable dependiente y=f(x) es

$$\triangle f = \triangle y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$$



Diferencial de la variable dependiente y= f(x)

$df = dy \neq \triangle y = y - y_0$ (no necesariamente vale $\neq$ ni $=$ siempre, pero lo más frecuente es que valga el $\neq$)

es cuando existe, un número df que cumple las siguientes propiedades:

$df = A \cdot dx = A \cdot \triangle x = A \cdot (x - x_0)$ para todo x en el dominio de f, siendo A una constante

Esta propiedad dice que df depende linealmente de dx. El diferencial de la variable dependiente es una constante por el incremento de f

$\triangle f - df = \Theta(x)\,(x - x_0)$ para todo x en el dominio de f, siendo $\Theta(x)$ una función tal que

$$\text{existe} \lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$$

Esta propiedad dice que el diferencial df es "una buena aproximación" del incremento de f pues la diferencia entre uno y otro es un infinitésimo cuando x tiende a x_0 de mayor orden que $x - x_0$

$\Theta(x)$ es un "infinitésimo" cuando $x \to x_0$

Incremento de la variable dependiente $y=f(x)$ es

$$\triangle f = \triangle y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$$

Diferencial de la variable dependiente $y = f(x)$ es cuando existe, un número **df** que cumple las siguientes propiedades:

$df = A \cdot dx = A \cdot \triangle x = A \cdot (x - x_0)$ para todo x en el dominio de f, siendo A una constante

$\triangle f - df = \Theta(x)\,(x - x_0)$ para todo x en el dominio de f, siendo $\Theta(x)$ una función tal que

existe $\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$

Para la variable independiente x el incremento y el diferencial son

$$\triangle x = dx = x - x_0$$

DEFINICIÓN: f se dice diferenciable en x_0 si existe el diferencial df

EJEMPLO:

Probar aplicando la definición que $f(x) = x^3$ es diferenciable en x_0 (para cualquier x_0 real que se fije) y calcular su diferencial df. Probar que $df = 3 x_0^2 \, dx = f'(x_0)\, dx$

Incremento de f es $\triangle f = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x\, x_0 + x_0^2)$

Buscamos una constante A (independiente de x pero que puede depender de x_0 pues x_0 está fijo) tal que si denotamos $df = A \cdot (x - x_0)$ se cumpla que

$\triangle f - df = \Theta(x) \cdot (x - x_0)$ con $\lim \Theta(x) = 0$ cuando $x \to x_0$

$\triangle f - df = (x - x_0)(x^2 + x\, x_0 + x_0^2) - A(x - x_0) = [x^2 + x\, x_0 + x_0^2 - A] \cdot (x - x_0) = \Theta(x) \cdot (x - x_0)$

Llamando $\Theta(x) = x^2 + x\, x_0 + x_0^2 - A$ queremos determinar A tal que

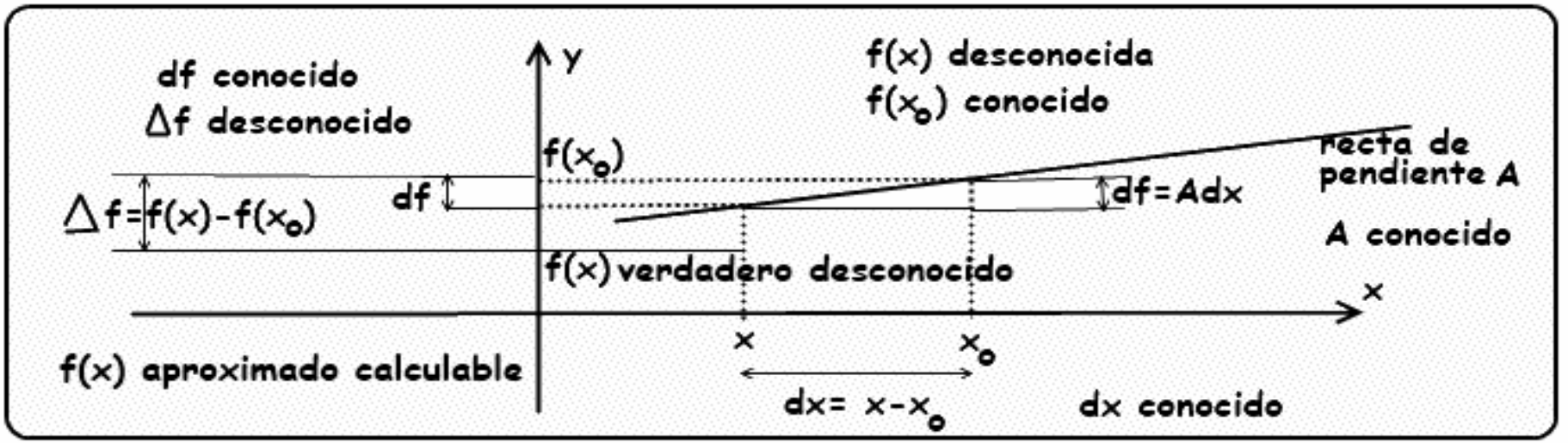
$\lim \Theta(x) = 0$ cuando $x \to x_0$ Calculando $\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 3x_0^2 - A = 0 \leftrightarrow A = 3 x_0^2$

Hemos probado que si tomamos

$df = A\, dx$ con $A = 3 x_0^2$ se cumple $\triangle f - df = \Theta(x)\,(x - x_0)$ con $\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$

Por definición, f es diferenciable en x_0 y su diferencial es $df = 3 x_0^2 \, dx$

La teoría de la diferenciabilidad permite ESTIMAR en forma aproximada con el menor error posible, los valores de la función f(x) en puntos x cercanos a x_0 conociendo $f(x_0)$ y conociendo solo $df = A\,(x-x_0)$ sin conocer más datos sobre f.



EJEMPLO: **MÉTODO DE APROXIMACIÓN LLAMADO APROXIMACIÓN LINEAL**

Estimar con el menor error posible f(0.990) sabiendo que f(1)= 7 , que f es diferenciable en $x_0 = 1$, y que su diferencial en $x_0 = 1$ es df= 50dx.

$dx = \Delta x = x - x_0 = x - 1$

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x) - f(1) = f(x) - 7$ $\qquad df = 50\,dx = 50\,(x - x_0) = 50\,(x-1)$

Sabemos que $\Delta f - df$ es un infinitésimo de mayor orden que $x - x_0$ cuando $x \to x_0$ (por la definición de diferencial df). Entonces, la mejor aproximación de Δf es df

Indicamos con $\sim$ la expresión "aproximadamente igual a"

$f(x) - 7 = \Delta f \sim df = 50\,(x-1)$ cuando x es cercano a $x_0 = 1$

$f(x) \sim 7 + 50\cdot(x-1)$ cuando x es cercano a $x_0 = 1$.

En particular si x= 0.990 se obtiene

$f(0.990) \sim 7 + 50\cdot(0.990 - 1) = 7 - 50\cdot(0.01) = 7 - 0.5 = 6.5$

Respuesta La mejor aproximación de f(0.990) con los datos disponibles sobre f es $f(0.990) \sim 6.5$

Las siguientes proposiciones dan condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidad. Dan otras definiciones alternativas (más usuales) de la diferenciabilidad que son equivalentes a la definición dada antes.

PROPOSICIÓN 1

$f(x)$ es diferenciable en x_0 si y solo si

existe una constante A y una función $\Theta(x)$ tales que:

para todo x,

$$f(x) = f(x_0) + A\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPOSICIÓN 2

$f(x)$ es diferenciable en x_0 si y solo si f es derivable en x_0

Si f es diferenciable en x_0(o lo que es lo mismo derivable en x_0) entonces el diferencial de f en x_0 es

$$df = f'(x_0)\,dx = f'(x_0)\quad x = f'(x\ )\,(x-x_0)$$

Además:

para todo x $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$

donde $\Theta(x)$ es una función tal que

$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPOSICIÓN 1

$f(x)$ es diferenciable en x_0 si y solo si

existe una constante A y una función $\Theta(x)$ tales que:

para todo x,

$$f(x)= f(x_0) + A\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$$

Demostración: Recordemos la definición de diferenciabilidad:

$f(x)$ es diferenciable en $x_0 \iff$ Existe diferencial df en x_0

Por definición del diferencial. Existe $df = A\,(x-x_0)$

si y solo si A es constante (indep de x) y $\Delta f - df = \Theta(x)\,(x - x_0)$ donde $\lim \Theta(x)= 0$ cuando $x \to x_0$ (I)

Por definición de incremento Δf tenemos que se cumple (I) si y solo si

$f(x) - f(x_0) - A\,(x-x_0) = \Theta(x)\,(x-x_0)$ siendo $\lim \Theta(x) = 0$ cuando $x \to x_0$ (II)

Finalmente (II) se cumple si y solo si

$f(x) = f(x) + A(x-x_0) + \Theta(x)(x-x_0)$ donde $\Theta(x) = 0$ cuando $x \to x_0$ LQQD

PROPOSICIÓN 2

f(x) es diferenciable en x_0 si y solo si f es derivable en x_0

Si f es diferenciable en x_0(o lo que es lo mismo derivable en x_0) entonces el diferencial de f en x_0 es

$$df = f'(x_0)\,dx = f'(x_0)\quad x = f'(x)\,(x-x_0) \qquad (I)$$

Además:

para todo x $\quad f(x)= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$

donde $\Theta(x)$ es una función tal que

$$\lim_{x \to x_0} \Theta(x) = 0$$

Demostración: Primero demostremos que si f es diferenciable entonces es derivable.

f diferenciable en $x_0 \Longrightarrow$ Existe $df= A(x-x_0)$ tal que $\Delta f - df = \Theta(x)\,(x-x_0)$ siendo

$\lim \Theta(x)= 0$ cuando x $\quad x_0$

Sustituyendo en lo anterior $\Delta f= f(x)- f(x_0)$, $df = A(x-x_0)$, y despejando $\Theta(x)$ para $x \neq x_0$ se obtiene

$$\Theta(x) = \frac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} \quad -A$$

Como $\lim \Theta(x) = 0$ cuando $x \to x_0$ deducimos que

$$\lim \frac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} = A \quad \text{cuando } x \to x_0$$

Por lo tanto f es derivable en x_0 y además $f'(x_0)= A$, de donde deducimos que $df = f'(x_0)\,(x-x_0)$. Entonces probamos que f es derivable en x_0 y además vale (I)

Ahora probemos el recíproco: si f es derivable en x_0 entonces es diferenciable en x_0

PROPOSICIÓN 2

$f(x)$ es diferenciable en x_0 si y solo si f es derivable en x_0

Si f es diferenciable en x_0(o lo que es lo mismo derivable en x_0) entonces el diferencial de f en x_0 es

$$df = f'(x_0)\,dx = f'(x_0)\quad x = f'(x)\,(x-x_0) \qquad \text{(I)}$$

Además:

para todo x $\qquad f(x)= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$

donde $\Theta(x)$ es una función tal que $\lim_{x\to x_0}\Theta(x) = 0$ (II)

Continuación de la demostración

Ahora probemos que si f es derivable en x_0 entonces es diferenciable en x_0

f derivable en $x_0 \Rightarrow$ existe $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

Llamando $\Theta(x) = \dfrac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ Tenemos $\lim \Theta(x) = 0$ cuando $x\to x_0$

Además despejando $f(x)$ en la igualdad anterior que define la función $\Theta(x)$ se tiene:

$f(x)= f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \Theta(x)\,(x-x_0)$ Esto demuestra (II) y además prueba que se cumple la afirmacion $f(x) = f(x_0) + A\,(x-x_0) + \Theta(x)(x-x_0)$ donde $\lim \Theta(x) = 0$ con A constante. En la proposición 1 demostramos que esa afirmación es equivalente a la diferenciabilidad de f en x_0. LQQD

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 31

PROPIEDADES DE LA DERIVADA

TEOREMA Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en $x=x_0$ entonces

$f(x) + g(x)$ es derivable en $x= x_0$ y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$f(x)\, g(x)$ es derivable en $x=x_0$ y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Dem.

Demostraremos que existe el límite del cociente incremental de $f+g$ y que es igual a la suma de las derivadas de f y g. El coc. incr. de $(f+g)$ es

$$Q(x)=\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x-x_0}$$

$$Q(x)=\frac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x) -g(x_0)}{x-x_0}$$

La suma de los límites es el límite de la suma. Entonces $\lim_{x\to x_0} Q(x)=$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x-x_0}$$

Cada uno de los dos límites de arriba existe y es por definición la derivada $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$ respectivamente. Concluimos que

$$\lim_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0) + g'(x_0) \Longrightarrow (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

sigue

PROPIEDADES DE LA DERIVADA

TEOREMA Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en $x=x_0$ entonces

$f(x) + g(x)$ es derivable en $x= x_0$ y $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (1)

$f(x)\, g(x)$ es derivable en $x=x_0$ y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (2)

Continuación de la demostración: Ya probamos (1). Ahora probaremos (2)

Calculemos el cociente incremental $Q(x)$ del producto $(fg)(x)$ y luego probaremos que tiene límite y que su límite satisface la igualdad (2)

$$Q(x) = \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$Q(x) = f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x)$$

Tomando límites cuando $x \to x_0$ y usando la definición de $f'(x_0)$ como límite del cociente incremental de f y la definición de $g'(x_0)$ como límite del coc.incr. de g, obtenemos la siguiente igualdad (también usamos que f y g son continuas en $x = x_0$ porque por hipótesis son derivables en $x = x_0$)

$\lim_{x \to x_0} Q(x) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$ Siendo $Q(x)$ el cociente incremental de la función (fg), su límite es $(fg)'(x_0)$. Concluimos que

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0)$$ LQQD

TEOREMA Derivada de 1/f(x)

Si $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ y si $f(x_0) \neq 0$, entonces $1/f(x)$ es derivable en $x = x_0$ y su derivada vale

$$(1/f)'(x_0) = -f'(x_0) / [f(x_0)]^2$$

Dem Calculemos el cociente incremental Q(x) de la función 1/f

$$Q(x) = \frac{[1/f(x)]-[1/f(x_0)]}{x-x_0} = \frac{[f(x_0) - f(x)] / [f(x)f(x_0)]}{x-x_0}$$

$$Q(x) = -\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{f(x)f(x_0)}$$

Tomando límite cuando $x \to x_0$
El primer factor es el coc. incr. de f
Entonces tiene límite que es $f'(x_0)$

El segundo factor es continuo en $x = x_0$ porque es un cociente de funciones continuas (la función constante = 1, y la función $f(x)f(x_0)$) y el denominador no se anula en $x=x_0$
La función f(x) es continua en $x=x_0$ porque por hipótesis es derivable.

$$\lim_{x \to x_0} Q(x) = -f'(x_0) \frac{1}{f(x)f(x_0)}$$

Siendo Q(x) el coc. incr. de (1/f) su límite es por definición la derivada $(1/f)'(x_0)$. Concluimos que $(1/f)'(x_0) = -f'(x_0) / [f(x_0)]^2$

LQQD

TEOREMA Derivada del cociente

Si f y g son funciones derivables en $x = x_0$ y si $g(x_0) \neq 0$, entonces el cociente (f/g) es derivable en $x = x_0$ y su derivada es

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dem. Llamemos $h(x) = 1/g(x)$. Por el teorema de la derivada de la función tenemos $h'(x_0) = (1/g)'(x_0) = -\, g'(x_0)/[g(x_0)]^2$.

$f/g = f\ (1/g) = f\ h$. Por el teorema de derivada del producto de func.

$$(f/g)'(x_0) = (fh)'(x_0) = f'(x_0)\, h(x_0) + f(x_0)\, h'(x_0)$$

$$(f/g)'(x_0) = f'(x_0)\, \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\, \frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA DE DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA (REGLA DE LA CADENA)

Sean $f:[a,b] \mapsto [c,d]$ $g:[c,d] \mapsto [u,v]$ dos funciones.
Sea $x_0 \in (a,b)$ Sea $y_0 = f(x_0) \in [c,d]$
Si $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ y si $g(y)$ es derivable en $y=y_0=f(x_0)$ entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en $x = x_0$ y su derivada satisface la siguiente igualdad llamada regla de la cadena:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Dem Hip) g es derivable en y_0 . Entonces es diferenciable en $y=y_0$
Por definición de diferenciabilidad:

$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)\cdot(y-y_0) + \theta_1(y)\cdot(y-y_0)$ siendo $\lim_{y \to y_0} \theta_1(y) = 0$ (A)

Tomemos $y = f(x)$ $y_0 = f(x_0)$ Hip) f es derivable en x_0. Entonces es continua en x_0. Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; $x \to x_0 \Rightarrow y \to y_0$ Sustituyendo en (A) resulta:

$g(f(x))-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot(f(x)- f(x_0)) + \theta_1(f(x))\cdot(f(x)-f(x_0))$ siendo

$\lim_{x \to x_0} \theta_1(f(x)) = 0$ (B)

sigue

Continuación de la demostración del teorema de derivada de función compuesta:

Teníamos

$g(f(x))-g(f(x_0))= g'(f(x_0))\cdot(f(x)- f(x_0)) + \theta_1(f(x))\cdot(f(x)-f(x_0))$ siendo

$\lim_{x\to x_0} \theta_1(f(x))= 0$ (B)

Hip) f(x) es derivable en x . Entonces es diferenciable en x

Por definición de diferenciabilidad:

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \theta(x)\cdot(x-x_0)$ siendo $\lim_{x\to x_0} \theta_2(x) = 0$ (C)

Sustituimos (C) donde dice $f(x) - f(x_0)$ dentro de (B):

$$g(f(x))-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0) + g'(f(x_0))\cdot\theta_2(x)(x-x_0) + f'(x_0)\cdot\theta_1(f(x))(x-x_0) + \theta_1(f(x))\cdot\theta_2(x)\cdot(x-x_0)$$

$g(f(x))-g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0) + S(x)\cdot(x-x_0)$ siendo S(x) todo lo que multiplica $(x - x_0)$ en los tres últimos sumandos. Es decir:

$S(x)= g'(f(x_0))\cdot\theta_2(x) + f'(x_0)\cdot\theta_1(f(x)) + \theta_1(f(x))\cdot\theta_2(x)$

Usando que los límites en B y C son ceros, resulta $\lim_{x\to x_0} S(x) = 0$

En resumen, hemos probado que

$(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x) = A\cdot(x-x_0) + S(x)\cdot(x-x_0)$ siendo $\lim_{x\to x_0} S(x) = 0$ y siendo

$A= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Es la definición de diferenciabilidad de $g\circ f$. Cualquier función diferenciable es derivable y su derivada es el número A.

LQQD

$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

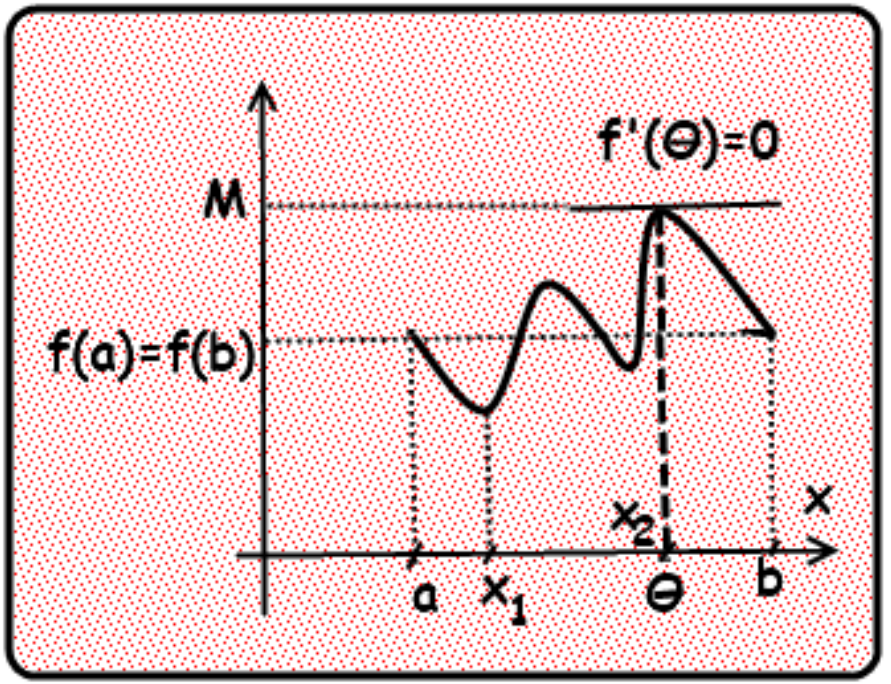
Derechos reservados 2011

CLASE 32

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA DE ROLLE (importante)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)
Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $\Theta \in (a,b)$ tal que $f'(\Theta) = 0$.



Dem Hip) f es continua en el int.compacto $[a,b]$ Por Teo de Weierstrass:

M = máx f en $[a,b]$, m= mín f en $[a,b]$
$M = f(x_1)$, $m = f(x_2)$ $x_1, x_2 \in [a,b]$

1er. caso x_1 y x_2 son ambos puntos extremos del intervalo $[a,b]$

2do. caso o bien x_1 o bien x_2 o ambos están en el intervalo abierto (a,b)

En el 1er. caso, como $f(a) = f(b)$ y ambos x_1 y x_2 coinciden con a ó b, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Pero $M = f(x_1)$, $m = f(x_2)$. Entonces $M = m$. Siendo M= máx f, m= mín f en $[a,b]$ se obtiene

$f(x) = M = m \ \forall x \in [a,b]$. Entonces f(x) es constante $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

Eligiendo cualquier $\Theta \in (a,b)$ se obtiene $f'(\Theta) = 0$ LQQD 1er. caso)

(sigue)

TEOREMA DE ROLLE (importante)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)
Si $f(a)= f(b)$ entonces existe $\Theta \in (a,b)$ tal que $f'(\Theta) = 0$.

Continuación de la dem.

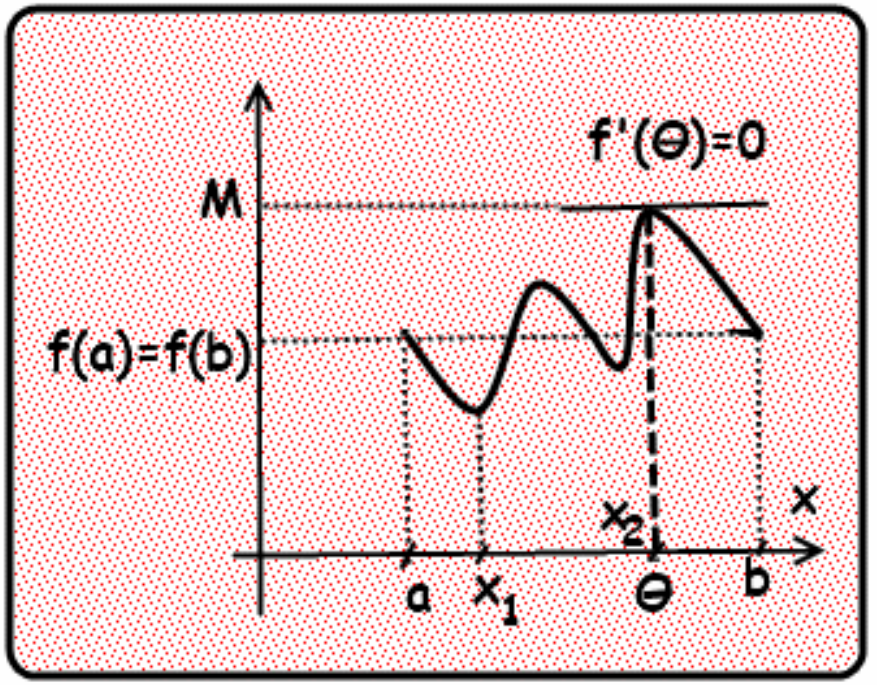
M = máx f en $[a,b]$, m= mín f en $[a,b]$
$M= f(x_1)$, $m= f(x_2)$ $x_1, x_2 \in [a,b]$

2do. caso o bien x_1 o bien x_2 o ambos están en el intervalo abierto (a,b)

Para fijar ideas supongamos que $x_1 \in (a,b)$
Si $x_1 \notin (a,b)$ entonces $x_2 \in (a,b)$ y la dem. es similar

$M= \max f = f(x_1)$, $x_1 \in (a,b)$

$$f(x) \leqslant f(x_1) \quad \forall x \in [a,b] \qquad (A)$$



Calculemos el cociente incremental $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

Por (A) si $x<x_1$ entonces $x-x_1 < 0$, $f(x)-f(x_1) \leqslant 0 \Rightarrow Q(x) \geqslant 0$
si $x>x_1$ entonces $x-x_1 > 0$, $f(x)-f(x_1) \leqslant 0 \Rightarrow Q(x) \leqslant 0$

Por la monotonía del límite $x < x_1$ $Q(x) \geqslant 0$ $\lim_{x \to x_1^-} Q(x) \geqslant 0$ (B)
$x > x_1$ $Q(x) \leqslant 0$ $\lim_{x \to x_1^+} Q(x) \leqslant 0$ (C)

Hip) Existe $\lim_{x \to x_1} Q(x) = f'(x_1)$ (B) y (C) $\Rightarrow f'(x_1) \geqslant 0$, $f'(x_1) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x_1) = 0$

Llamando $\Theta = x_1$ obtuvimos $f'(\Theta) = 0$ LQQD 2do. caso.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

(Teorema de Lagrange) (importante)

Hip) Sea $f:[a,b] \longmapsto R$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

Tesis) Existe $\Theta \in (a,b)$ tal que

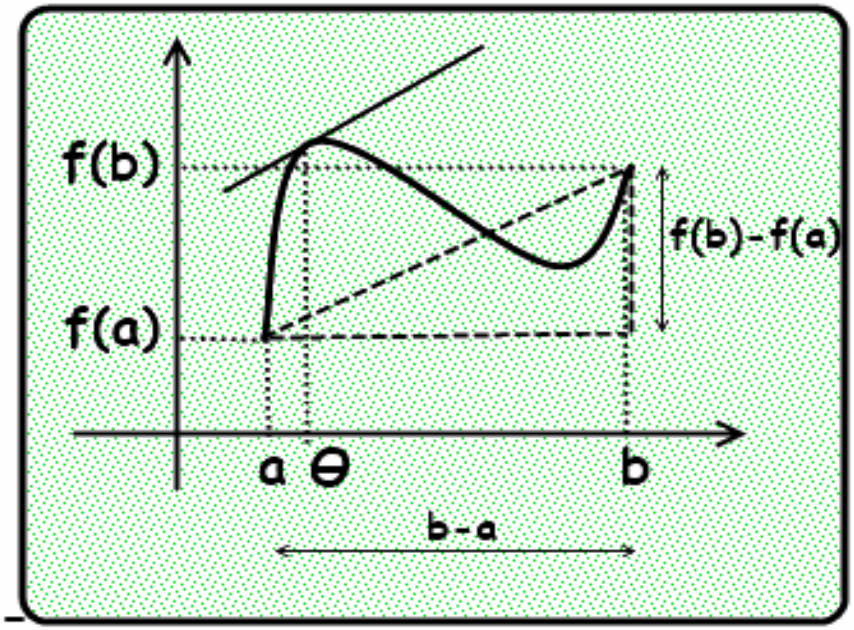
$$f'(\Theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Dem.

Sea la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Entonces $g(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) porque $f(x)$ lo es por hip).



$g(a) = f(a)$

$g(b) = f(a)$ $\quad g(b) = f(b) - [f(b) - f(a)]$

Entonces g satisface las hipótesis del teorema de Rolle, luego satisface su tesis $\Rightarrow$ Existe $\Theta \in (a,b)$ tal que $g'(\Theta) = 0$

$$g'(\Theta) = f'(\Theta) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g'(\Theta) = 0 \Longrightarrow f'(\Theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

COROLARIOS DE LOS TEOREMAS DE ROLLE Y LAGRANGE

COROLARIO 1. Funciones con derivada idénticamente nula son constantes.

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

tal que $f'(x)= 0$ para todo $x \in (a,b)$

Entonces $f(x) = c$ constante para todo $x \in [a,b]$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

COROLARIO 2 Funciones con igual derivada difieren en una constante.

Sean $f:[a,b] \mapsto R$ y $g:[a,b] \mapsto R$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b)

tales que $f'(x)= g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$

Entonces existe una constante c tal que $f(x)= g(x) + c$ $x \in [a,b]$

Dem.Corolario 1 Tomemos cualquier punto x_0 tal que $a < x_0 \leqslant b$

y apliquemos el teorema de Lagrange al intervalo $[a, x_0]$

Existe $\Theta \in (a, x_0)$ tal que $f'(\Theta) = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$

Por hipótesis $f'(\Theta)= 0$ entonces deducimos que $f(x_0) - f(a) = 0$.

Hemos probado que para todo x_0 tal que $a < x_0 \leqslant b$ se cumple $f(x_0) = f(a)$

También se cumple trivialmente $f(x_0)= f(a)$ si $x_0 = a$ Llamando $c= f(a)$ hemos probado que $f(x_0) = c \quad \forall\, x_0 \in [a,b]$ LQQD

COROLARIOS DE LOS TEOREMAS DE ROLLE Y LAGRANGE

COROLARIO 1. Funciones con derivada idénticamente nula son constantes.

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

tal que $f'(x)= 0$ para todo $x \in (a,b)$

Entonces $f(x) = c$ constante para todo $x \in [a,b]$

COROLARIO 2 Funciones con igual derivada difieren en una constante.

Sean $f:[a,b] \mapsto R$ y $g:[a,b] \mapsto R$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b)

tales que $f'(x)= g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$

Entonces existe una constante c tal que $f(x)= g(x) + c$ $x \in [a,b]$

Dem del Corolario 2 Consideremos la función auxiliar $h(x)= f(x)- g(x)$. Es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) porque por hipótesis $f(x)$ y $g(x)$ lo son.

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ porque por hipótesis $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a,b)$

Aplicando el Corolario 1 ya demostrado, a la función $h(x)$, como $h'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$ resulta $h(x) = c$ constante $\forall x \in (a,b)$

Siendo $h(x)= f(x)- g(x)$ hemos probado que $f(x)- g(x) = c$ constante $\forall x \in (a,b)$

Concluimos:

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in (a,b)$$ LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

COROLARIO 3. Funciones con derivada positiva son estrictamente crec.

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que

$f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$

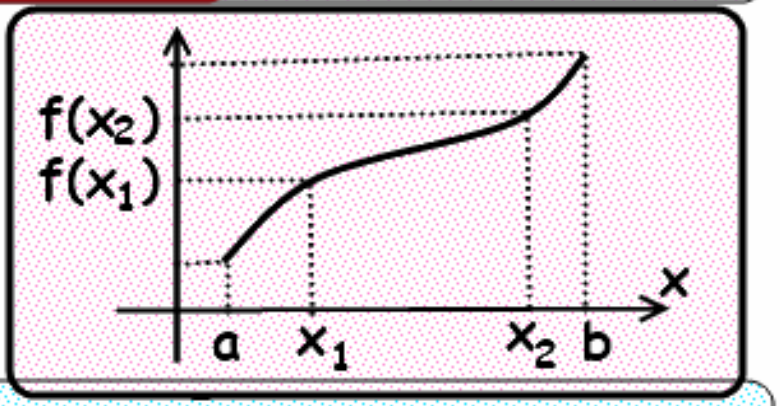
Entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$, es decir

$x_1 , x_2 \in [a,b]$ si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$

Dem

Apliquemos el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1,x_2]$ Existe $\Theta \in (x_1,x_2)$ tal que $f'(\Theta) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Entonces $f(x_2) - f(x_1) = f'(\Theta)\,(x_2 - x_1) > 0$ (pues $x_1 < x_2$ y por Hip $f'(\Theta) > 0$). Luego $f(x_2) > f(x_1)$. LQQD.



COROLARIO 4. Funciones con derivada positiva son estrictamente decrec.

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que

$f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$

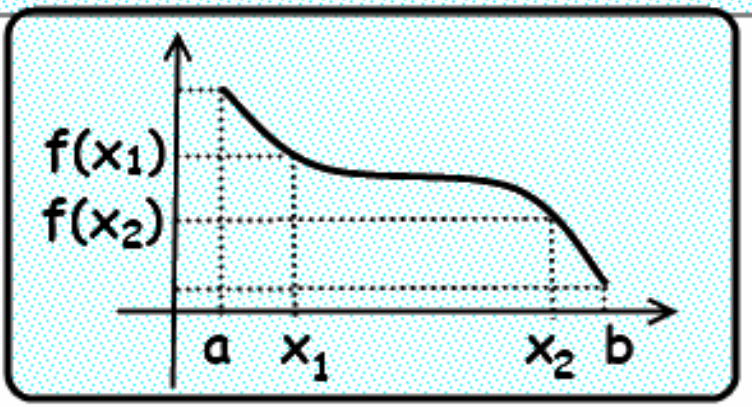
Entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$, es decir

$x_1 , x_2 \in [a,b]$ si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

Dem.

Apliquemos el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1,x_2]$ Existe $\Theta \in (x_1,x_2)$ tal que $f'(\Theta) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Entonces $f(x_2) - f(x_1) = f'(\Theta)\,(x_2 - x_1) < 0$ (pues $x_1 < x_2$ y por Hip $f'(\Theta) < 0$). Luego $f(x_2) < f(x_1)$. LQQD.



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

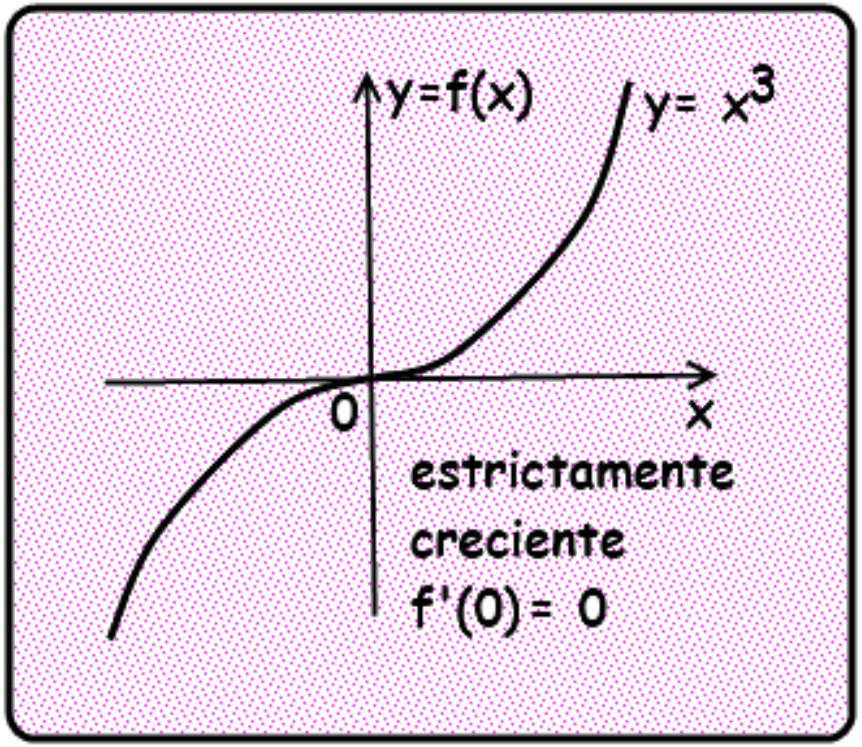
En el Corolario 1 probamos que si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es creciente estrictamente

El recíproco del Corolario 1 es falso, pues puede ser $f(x)$ estrictamente creciente sin ser necesariamente $f'(x) > 0$ para todo x. Ver Ejemplo:

EJEMPLO: Sea $f(x) = x^3$. Es estrictamente creciente pues si $x_1 < x_2$ entonces $x_1^3 < x_2^3$

Calculemos su derivada $f'(x) = 3x^2$. Se cumple $f'(0) = 0$. Entonces no es $f'(x)$ positiva para todo x .

Análogamente:
en el Corolario 2 probamos que si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es decrec. estrictamente.
Pero el recíproco del Corolario 2 es falso, pues por ejemplo $f(x) = -x^3$ es estrictamente decreciente pero $f'(0) = 0$.



Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 33

REGLA DE L'HÔPITAL (Para cálculo de $\lim f(x)/g(x)$ cuando $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0$)

TEOREMA

Hip f, g continuas y derivables en (a,b)

$x_0 \in (a,b)$

$f(x_0)=0,\quad g(x_0)=0,\ g(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$

$g'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$

existe $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = L$ real

Tesis

Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

y

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$$

REGLA DE L'HÔPITAL (Para cálculo de $\lim f(x)/g(x)$ cuando $\lim f(x)=\infty,\ \lim g(x)=\infty$)

TEOREMA

Hip f, g continuas y derivables en (a,b) excepto en un punto $x_0 \in (a,b)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

$g'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$,

existe $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = L$ real

Tesis

Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

y

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$$

EJEMPLOS

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen } x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x) - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen } x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Log } |x|}{\text{Log } |3x|} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{(1/3x)3} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{3x} = 1$$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Antes de demostrar las dos versiones de la Regla de L'Hôpital, necesitamos enunciar y demostrar el siguiente Lema

LEMA (Valor Medio de Cauchy)

Sean f y g dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b)

Entonces existe $\Theta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\Theta)\,(g(b)-g(a)) = g'(\Theta)\,(f(b)-f(a))$$

Demostración:

Sea la función auxiliar $h(x) = f(x)\,(g(b)-g(a)) - g(x)\,(f(b)-f(a))$ (A)

h(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b) porque f(x) y g(x) lo son

$h(a) = f(a)\,g(b) - f(a)\,g(a) - g(a)\,f(b) + g(a)\,f(a) = f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b)$

$h(b) = f(b)\,g(b) - f(b)\,g(a) - g(b)\,f(b) + g(b)\,f(a) = f(a)\,g(b) - g(a)\,f(b)$

Entonces

$$h(a) = h(b)$$

Aplicando el Teorema de Rolle a la función h, deducimos que existe $\Theta \in (a,b)$ tal que

$$h'(\Theta) = 0$$

(A) $\Longrightarrow$ $h'(\Theta) = f'(\Theta)\,(g(b)-g(a)) - g'(\Theta)\,(f(b)-f(a))$

Entonces hemos probado que existe $\Theta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\Theta)\,(g(b)-g(a)) - g'(\Theta)\,(f(b)-f(a)) = 0$$

Luego $f'(\Theta)\,(g(b)-g(a)) = g'(\Theta)\,(f(b)-f(a))$ LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

REGLA DE L'HÔPITAL TEOREMA (Para cálculo de $\lim f(x)/g(x)$ cuando $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0$)

Hip f, g continuas y derivables en (a,b)
$x_0 \in (a,b)$
$f(x_0)=0,\quad g(x_0)=0,\ g(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$
$g'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$
existe $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x) = L$ real

Tesis
Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$$

Demostración Fijemos un punto x cualquiera tal que $x_0 < x < b$

Apliquemos el **Lema del Valor Medio de Cauchy** a las funciones f y g en el intervalo $[x_0, x]$. Existe $\Theta = \Theta(x) \in (x_0, x)$ tal que

$$f'(\Theta(x))\,[g(x) - g(x_0)] = g'(\Theta(x))\,[f(x) - f(x_0)] \quad (A)$$

Como $\Theta(x) \in (x_0, x)$ entonces $\Theta(x) \neq x_0$ y por hip) $g'(\Theta(x)) = 0$ Entonces en (A) podemos dividir entre $g'(\Theta(x))$ y resulta:

$$f(x) - f(x_0) = [g(x) - g(x_0)]\ \frac{f'(\Theta(x))}{g'(\Theta(x))}$$

Por hipótesis $g(x_0)=0,\ f(x_0)=0$ Luego

$$f(x) = g(x)\,\frac{f'(\Theta(x))}{g'(\Theta(x))} \quad (B)$$

Como $\Theta(x) \in (x_0, x)$ tenemos $x_0 < \Theta(x) < x$. Por el teorema del sandwich

$$\lim_{x \to x_0^+} \Theta(x) = x_0$$

Llamando $y = \Theta(x)$ tenemos $y \to x_0$ cuando $x \to x_0^+$

(B) $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}$

Análogamente pero tomando x cualquiera tal que $a < x < x_0$ y haciendo $x \to x_0^-$

se demuestra que $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}$ LQQD

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

DEFINICIÓN:

Derivada segunda $f''(x)$ es, cuando existe, la derivada de la derivada primera $f'(x)$
Derivada tercera $f'''(x)$ es, cuando existe, la derivada de la derivada segunda $f''(x)$
Derivada n-ésima $f^{(n)}(x)$ es, cuando existe, la derivada de la derivada (n-1)-ésima.

Una función f(x) se dice que es **de clase C^1** si es derivable y su derivada primera $f'(x)$ es continua.

Ya vimos que hay funciones derivables para las que $f'(x)$ no es continua, entonces no son de clase C^1

Una función f(x) se dice que es **de clase C^r** si tiene derivadas primera, segunda, ... n-ésima, para todo n natural mayor o igual que 1 y menor o igual que r, y si son todas continuas.

Así, por ejemplo, una función es **de clase C^2** si tiene derivada primera y derivada segunda y son ambas funciones continuas.

Ejemplo: $f(x)= x^2$ es de clase C^r para cualquier $r \geq 1$

- $f'(x)= 2x$ es continua
- $f''(x)= 2$ es continua
- $f'''(x)= 0$ es continua
- $f^{(4)}(x)= 0$ es continua.

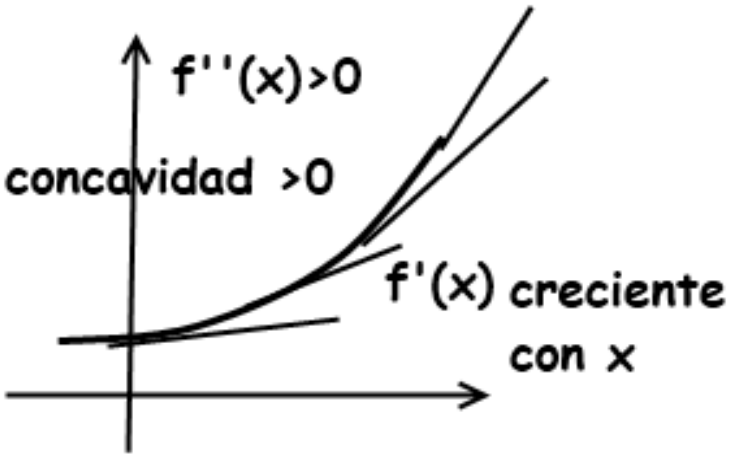
etc.

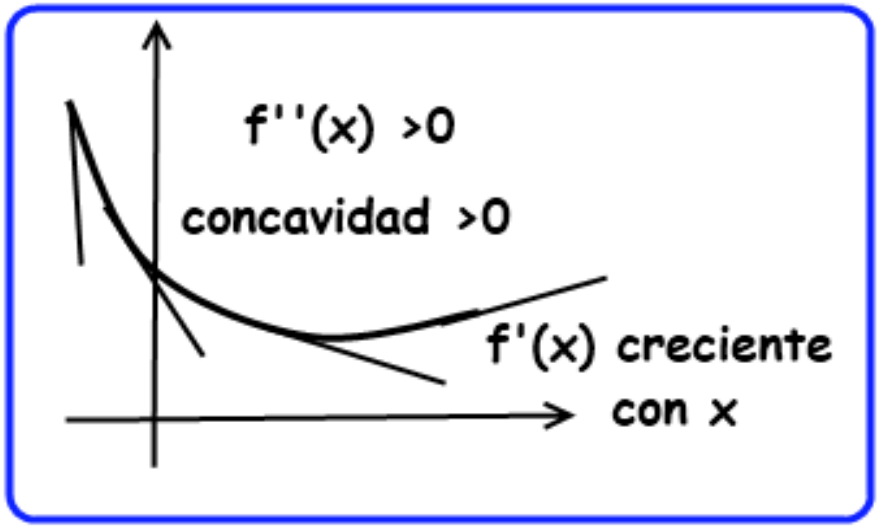
Una función se dice que es **de clase C^∞** cuando es de clase C^r para todo $r \geq 1$. . Es decir existen las derivadas de todos los órdenes de f y son todas funciones continuas

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

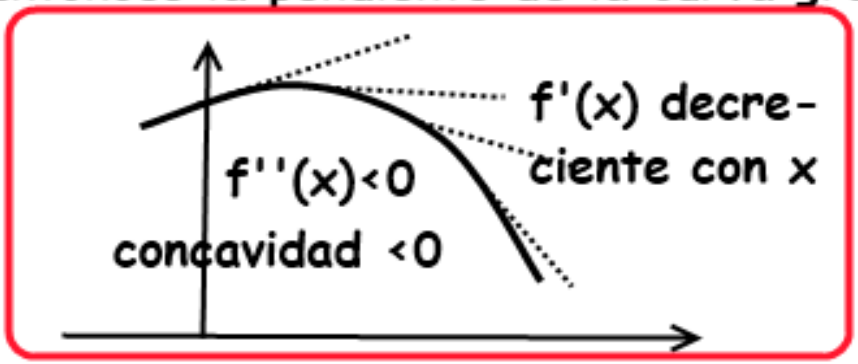
INTERPRETACIÓN DE LA DERIVADA SEGUNDA (CONCAVIDAD)

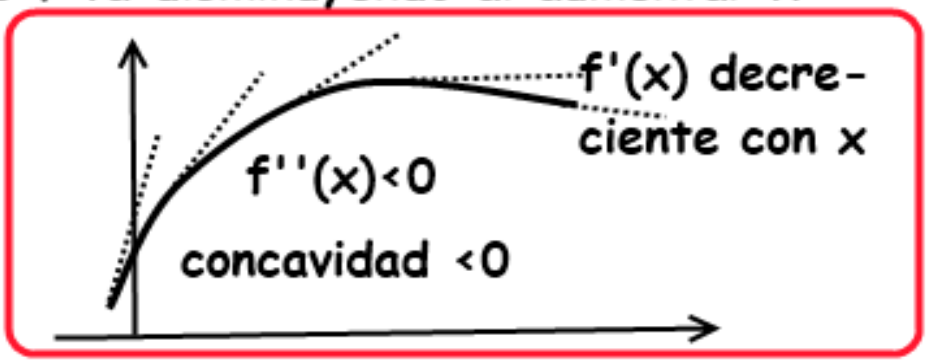
Si $f''(x) > 0$ se dice que la concavidad de la gráfica de f es positiva En ese caso la derivada primera es estrictamente creciente (porque su derivada es >0). Entonces la pendiente de la curva gráfica de f va aumentando al aumentar x:





Si $f''(x) < 0$ se dice que la concavidad de la gráfica de f es negativa En ese caso la derivada primera es estrictamente decreciente (porque su derivada es <0). Entonces la pendiente de la curva gráfica de f va disminuyendo al aumentar x





Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 36

VII EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS DE FUNCIONES DERIVABLES

- Extremos relativos Definición Ejemplos
- Puntos críticos. Definición. Clasificación
- Método de búsqueda de extremos absolutos

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

bibliografía para el curso: "Cálculo Infinitesimal"

Autor: Michael Spivak

Editorial: Reverté- Barcelona- 1992 ISBN 84-291-5136-2

Para el tema VII capítulo 11

EXTREMOS RELATIVOS O EXTREMOS LOCALES

Sea $f:[a,b] \mapsto R$. Extremo relativo o extremo local de f es un máximo relativo o local, o un mínimo relativo o local, de acuerdo a las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN $f(x_0)$ se llama **máximo relativo de f ó máximo local de f** cuando

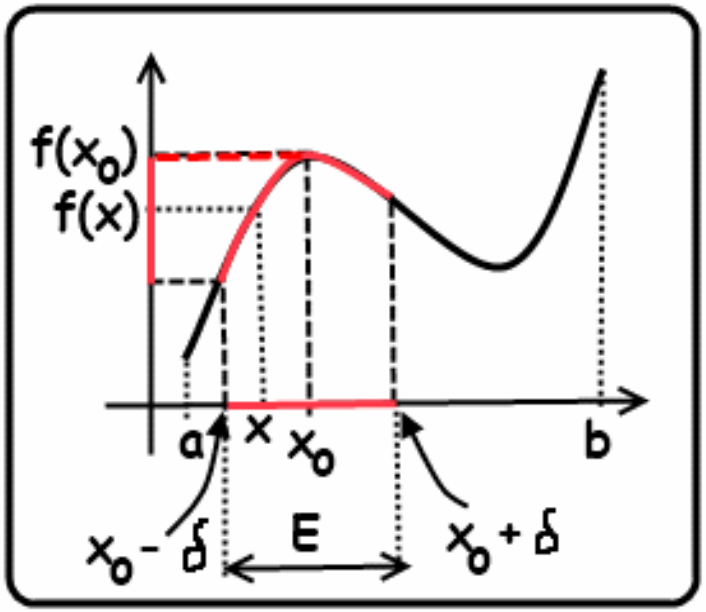
- $x_0 \in (a,b)$ (es decir $a < x_0 < b$)
- y existe un entorno $E = (x_0 - \delta , x_0 + \delta) \subset (a,b)$

tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo $x \in E$

Observar que **el máximo relativo** no es x_0 sino **$f(x_0)$**

Se dice que "en x_0 hay" un máximo relativo o que

x_0 "es lugar de" un máximo relativo



DEFINICIÓN $f(x_0)$ se llama **mínimo relativo de f ó mínimo local de f cuando**

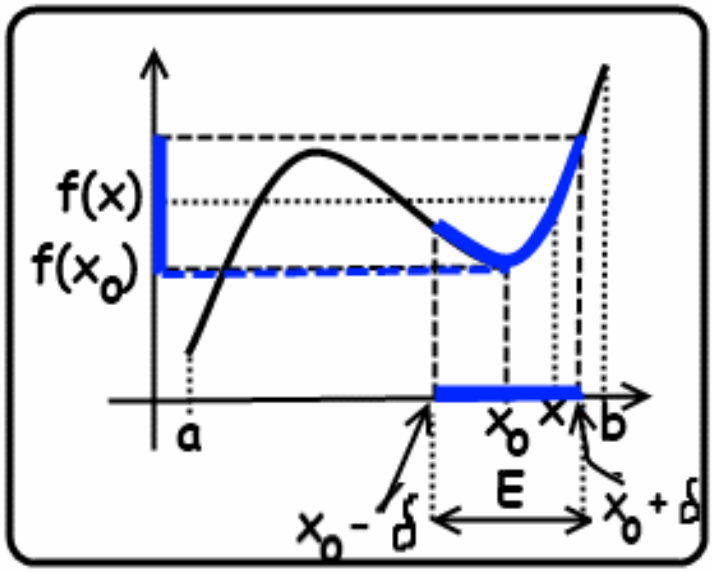
- $x_0 \in (a,b)$ (es decir $a < x_0 < b$)
- y existe un entorno $E = (x_0 - \delta , x_0 + \delta) \subset (a,b)$

tal que $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo $x \in E$

Observar que **el mínimo relativo** no es x_0 sino **$f(x_0)$**

Se dice que "en x_0 hay" un mínimo relativo o que

x_0 "es lugar de" un mínimo relativo



EXTREMOS (ABSOLUTOS)

Son el máximo y el mínimo (absolutos, cuando no se usa adjetivo son absolutos) de acuerdo a las siguientes definiciones

DEFINICIÓN $f(x_o)$ se llama máximo de f en [a,b] cuando

$x_o \in [a,b]$

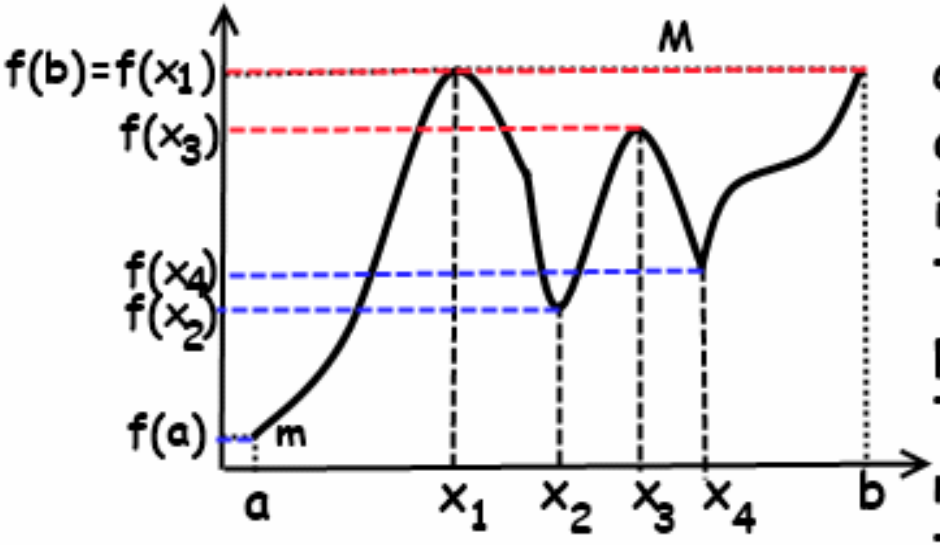
$f(x) \leqslant f(x_o)$ para todo $x \in [a,b]$

DEFINICIÓN $f(x_o)$ se llama mínimo de f en [a,b] cuando

$x_o \in [a,b]$

$f(x) \geqslant f(x_o)$ para todo $x \in [a,b]$

EJEMPLO. La función f(x) de la figura con dominio en el intervalo [a,b]



Tiene un máximo (absoluto) $M = f(b) = f(x_1)$ que es también máximo relativo porque se alcanza en un punto x_1 del interior del intervalo (a,b)

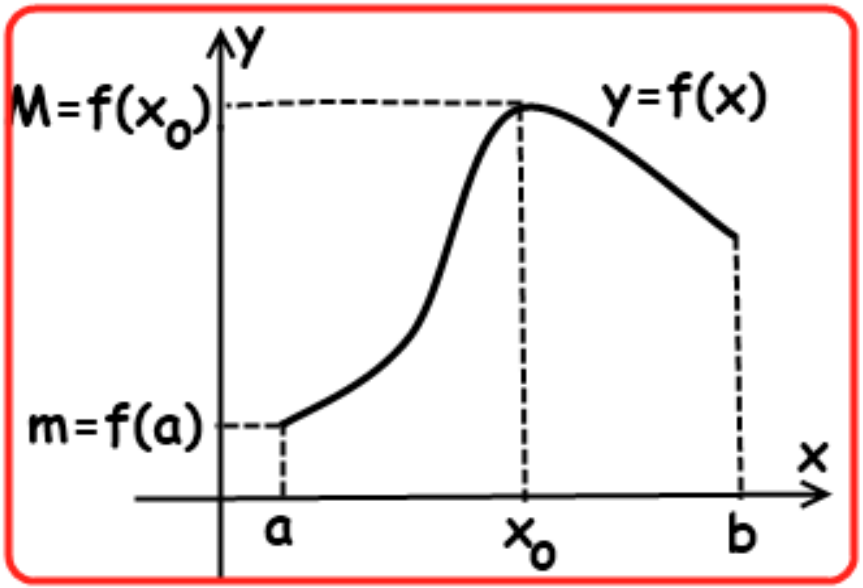
Tiene un mínimo $m = f(a)$ que es mínimo absoluto pero que no es mínimo relativo.

Tiene además otro máximo relativo $f(x_3)$ que no es máximo (absoluto).

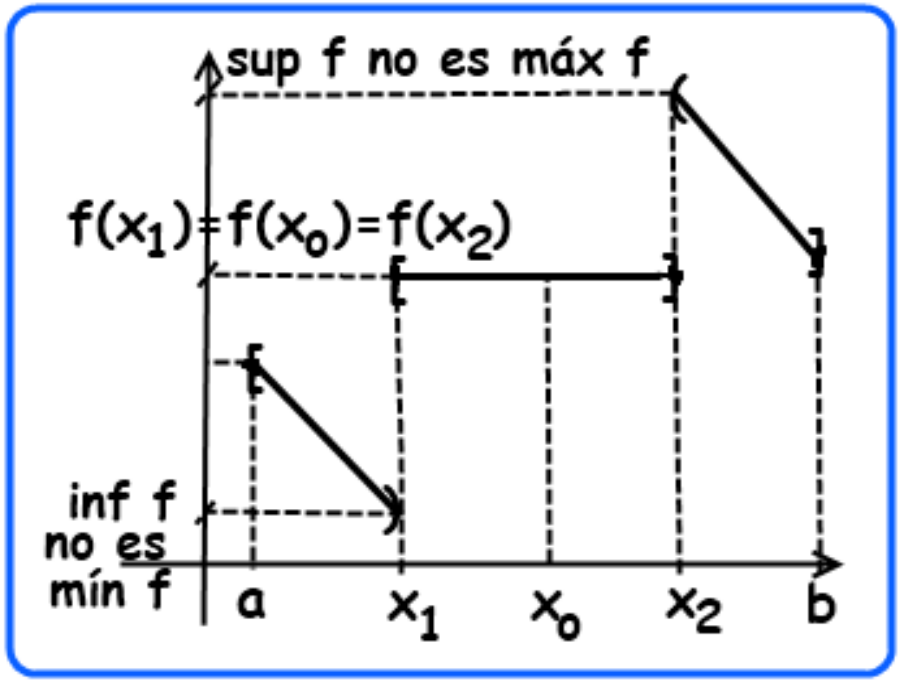
Tiene además dos mínimos relativos $f(x_2)$, $f(x_4)$ que no son mínimo (absoluto).

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTROS EJEMPLOS



Existe máx f en [a,b] máx f= $f(x_0)$
además de ser máx absoluto es máx relativo.
Existe mín f en [a,b] mín f= f(a)
es mín absoluto pero no es mín relativo.
No existen mín relativos.
El único máx relativo es $f(x_0)$ que es además el máx absoluto de f en [a,b]



En la función discontinua del ejemplo no hay máximo (absoluto) de f en [a,b] porque el supremo sup f no se alcanza:sup f no es f(x) para ningún $x \in [a,b]$. Por el moismo motivo no hay mínimo (absoluto) de f en [a,b] porque el ínfimo inf f no se alcanza en [a,b].
Hay un solo mínimo relativo y un solo máximo relativo, que coinciden y son $f(x_0)$.
Ese mínimo relativo (que también es máximo relativo) se alcanza en infinitos puntos que son todos los x_0 tales que $x_1 < x_0 < x_2$

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PROPOSICIÓN

(A) Si existe máximo absoluto de f en [a,b] y si se alcanza en algún punto $x_0 \in (a,b)$ entonces el máximo absoluto es también un máximo relativo

(B) Si existe mínimo absoluto de f en [a,b] y si se alcanza en algún punto $x_1 \in (a,b)$ entonces el mínimo absoluto es también un mínimo relativo.

Dem $M = \text{máx } f = f(x_0)$ máx absoluto de f en [a,b] existe por hipótesis

Hip) $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ Existe $\delta > 0$

tal que el entorno E está contenido en (a,b)

$$E = (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta\ ) \subset (a,b)$$

$f(x) = \text{máx } f$ en $[a,b] \Rightarrow$

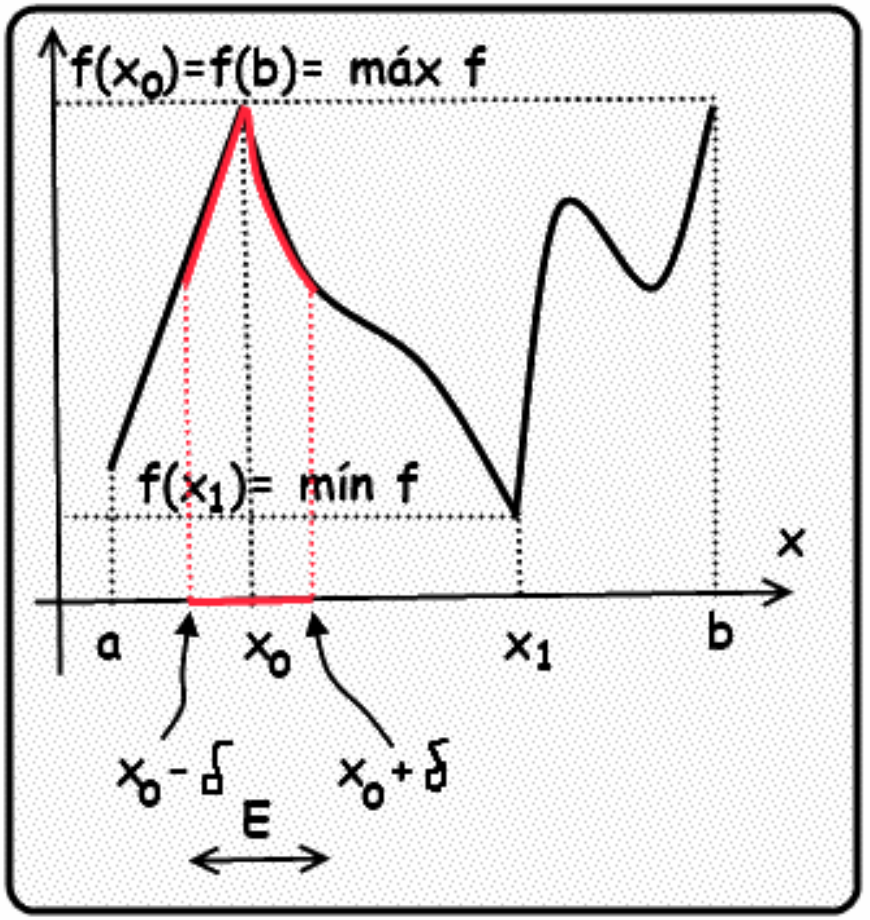
$f(x) \leq f(x_0)$ para todo x en [a,b]

En particular vale lo anterior para todo $x \in E$. Entonces

$f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in E$

Por definición $f(x_0)$ es máximo relativo o local de f. LQQD la afirmación (A)

La dem. de la afirmación (B) es similar.



UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

PUNTOS ESTACIONARIOS, CRÍTICOS O SINGULARES

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ una función.

DEFINICIÓN Un punto estacionario, crítico o singular es un punto x_1 tal que

$x_1 \in (a,b)$

$f(x_1)$ es derivable en x

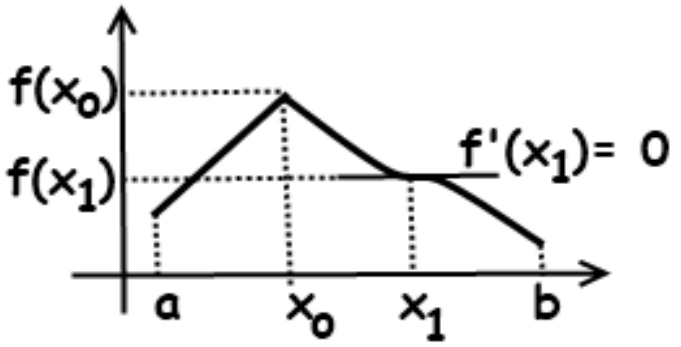
$f'(x_1) = 0$

TEOREMA 1

Si $f(x_0)$ es un extremo relativo o local de f (máximo o mínimo relativo) si $x_0 \in (a,b)$ y si f es derivable en x_0 entonces x_0 es un punto crítico de f, es decir $f'(x_0) = 0$

El recíproco del Teo 1 es falso (ver Ejemplo)

OBSERVACIÓN Si $f(x_0)$ es un extremo relativo de f, si $x_0 \in (a,b)$ entonces o bien f no es derivable en x_0 o bien es derivable y $f'(x_0)= 0$. Existen extremos relativos que no necesariamente se alcanzan en puntos críticos x_0 como en el **Ejemplo** (pues en ese ejemplo f no es derivable en x_0)



$f(x_0)$ es máximo relativo (y absoluto también) pero x_0 no es punto crítico pues f no es derivable en x_0

x_1 es punto crítico pues $x_1 \in (a,b)$, f es derivable en x_1 y $f'(x_1)= 0$. Sin embargo $f(x_1)$ no es extremo relativo o local (ni máximo rel. ni mín.rel)

TEOREMA 1

Si $f(x_0)$ es un extremo relativo o local de f (máximo o mínimo relativo) si $x_0 \in (a,b)$ y si f es derivable en x_0 entonces x_0 es un punto crítico de f, es decir $f'(x_0) = 0$

Dem Por hip) existe $f'(x_0)$ Por definición de derivada, es el límite del cociente incremental cuando $x \to x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (A)$$

Por hipótesis f(x) es un extremo relativo de f (máximo o mínimo relativo)
Supongamos para fijar ideas que f(x) es máximo relativo
Entonces, por definición de máximo relativo, existe un entorno E de x_0 tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in E \implies f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \quad \forall x \in E \implies$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \text{si } x-x_0 < 0 \ (\text{si } x<x_0) \implies \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \quad (B)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \quad \text{si } x-x_0 > 0 \ (\text{si } x>x_0) \implies \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \quad (C)$$

(A), (B), (C) $\implies f'(x_0) \geqslant 0$ $f'(x_0) \leqslant 0 \implies f'(x_0) = 0$ LQQD (la prueba cuando $f(x_0)$ es mínimo relativo, es similar)

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 37

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS (o Singuares o Estacionarios)

- Recordamos que un punto crítico es un punto x_0 en el interior del intervalo (a,b) (siendo [a,b] el dominio de f), tal que f es derivable en x_0 y tal que $f'(x_0)= 0$.
- Recordamos también que si $x_0 \in (a,b)$, si f es derivable en x_0 y si $f(x_0)$ es un extremo relativo (máximo o mínimo relativo) entonces x_0 es punto crítico.
- Recordamos también que pueden existir puntos críticos donde no hay extremo relativo.

CLASIFICACIÓN:

Dado un punto crítico x_0	Se clasifica en
lugar de máximo relativo	si para todo x en algún entorno E de x_0: $f(x) \leqslant f(x_0)$
lugar de mínimo relativo	si para todo x en algún entorno E de x_0: $f(x) \geqslant f(x_0)$
ni lugar de máximo relativo ni lugar de mínimo relativo	

TEOREMA (de clasificación de puntos críticos)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ una función de clase C^2 en [a,b]

Sea $x_0 \in (a,b)$ un punto crítico de f, es decir $f'(x_0)= 0$

Entonces,
- si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es máximo relativo
- si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ es mínimo relativo
- si $f''(x_0)= 0 \Rightarrow f(x_0)$ puede ser extremo relativo o no serlo, y en caso de serlo puede ser máximo rel. o mín. rel.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

TEOREMA (de clasificación de puntos críticos)

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ una función de clase C^2 en $[a,b]$

Sea $x_0 \in (a,b)$ un punto crítico de f, es decir $f'(x_0) = 0$

Entonces, si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es máximo relativo

si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ es mínimo relativo

si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0)$ puede ser extremo relativo o no serlo, y en caso de serlo puede ser máximo rel. o mín. rel.

Dem Hip) f de clase C^2 , $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ (Probaremos solo este caso, el otro caso se prueba de modo similar)

f de clase C^2 $f''(x)$ es continua, $f''(x_0) < 0$ Ley de conservación del signo

existe un entorno E de x_0 tal que $f''(x) < 0$ para todo $x \in E$. (C)

(C) $\Rightarrow$ f'(x) es estrictamente decreciente en E (porque su derivada es <0 en E)

$f'(x_0) = 0$ por hipótesis $\rightarrow$

- $f'(\Theta) < 0$ para todo $\Theta > x_0$ en E (A)
- $f'(\Theta) > 0$ para todo $\Theta < x_0$ en E (B)

f es continua y derivable (porque es de clase C) entonces por el teorema del valor medio del cálculo diferencial (teorema de Lagrange) para todo x fijo en E

si $x > x_0$ existe $\Theta \in (x_0, x)$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(\Theta)(x - x_0) < 0$ por (A) $x > x_0$

si $x < x_0$ existe $\Theta \in (x, x_0)$ tal que $f(x) - f(x_0) = f'(\Theta)(x - x_0) < 0$ por (B) $x < x_0$

Probamos que $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ para todo x en E

Luego $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo x en E. Por definición $f(x_0)$ es máximo relativo

LQQD

Ejemplo: Sea $f(x) = (x-2)^2 (7+e^x)$ Probar que $x = 2$ es punto crítico de $f(x)$ y clasificarlo

f es continua y derivable para todo x . $f'(x) = 2(x-2)(7+e^x) + (x-2)^2 e^x$

$f'(2) = 0 \Longrightarrow$ 2 es punto crítico de $f(x)$

f es de clase C^2 . Hallemos $f''(2)$, $f''(x) = 2(7+e^x) + 4(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$

$f''(2) = 14 + 2e^2 > 0$

Por el teorema de clasificación de puntos críticos $f(2)$ es un mínimo relativo

$f(2) = 0$. $f(x)$ tiene mínimo relativo que vale 0 y se alcanza en $x=2$

Este resultado podría haberse obtenido directamente al mirar la función $f(x)$

$f(x) = (x-2)^2(7 + e^x) \geq 0$ (porque es el producto de dos numeros ≥ 0)

$f(x) = 0$ si y solo si $x = 2$ porque $7 + e^x > 0$ para todo x

Entonces $f(x) \geq f(2)$ para todo x. Deducimos que $f(2) = 0$ es, además de mínimo relativo, el mínimo absoluto de f en su dominio (que es todo R).

Ejemplo: Sea $f(x) = (x-3)^2(x-9)$ Probar que $x = 3$ es punto crítico de f y clasificarlo.

$f'(x) = 2(x-3)(x-9) + (x-3)^2 \Longrightarrow f'(3) = 0 \Longrightarrow$ 3 es punto crítico de f

Hallemos $f''(3)$, $f''(x) = 2(x-9) + 4(x-3)^2$ $f''(3) = 2(3-9) = -12 < 0$

Por el teorema de clasificación de puntos críticos $f(3)$ es un máximo relativo

$f(3) = 0$. $f(x)$ tiene máximo relativo que vale 0 y se alcanza en $x = 3$.

Ejemplo: Sea $f(x) = 5 - (x-1)^4$ Probar que $x=1$ es punto crítico de f y clasificarlo

$f'(x) = -4(x-1)^3$ $f'(1) = 0$ 1 es punto crítico de f. Hallemos $f''(1)$.

$f''(x) = -12(x-1)^2$, $f''(1) = 0$ El teorema de clasificación no es aplicable (sigue)

Ejemplo: Sea $f(x) = 5 -(x-1)^4$ Probar que $x=1$ es punto crítico de f y clasificarlo

$f'(x)= -4(x-1)^3$ $f'(1)= 0$ 1 es punto crítico de f. Hallemos $f''(1)$.

$f''(x)=-12(x-1)^2$, $f''(1)= 0$ El teorema de clasificación no es aplicable

Estudiemos directamente el signo de

$f(x) - f(1)$ en un entorno E de $x_0 = 1$

Si esa diferencia fuera $\leqslant 0$, por definición f(1) sería máximo relativo $f(x) \leqslant f(1)$

Si esa diferencia fuera $\geqslant 0$, por definición f(1) sería mínimo relativo $f(x) \geqslant f(1)$

Si esa diferencia fuera en todo entorno E de $x= 1$ a veces >0 y a veces < 0 entonces f(1) no sería ni máximo relativo ni mínimo relativo.

$f(x) - f(1) = 5 -(x-1)^4 - [5-0^4] = -(x-1)^4 \leqslant 0$ para todo x

Luego $f(x) \leqslant f(1)$ para todo $x \Rightarrow$ f(1)=5 es máximo relativo y también máximo absoluto

Ejemplo Sea $g(x)= 5+(x-1)^4$ Probar que $x= 1$ es punto crítico de g y clasificarlo

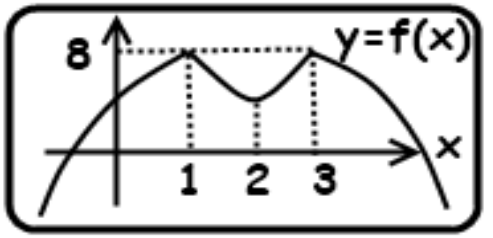
Es análogo al ejemplo anterior de f(x), queda $g''(1)= 0$ y no se puede aplicar el teorema de clasificación. Estudiando directamente el signo de $g(x) - g(1)$ resulta que es $+(x-1)^4 \geqslant 0$ para todo x. Luego $g(x) \geqslant g(1)$ para todo x

g(1)= 5 es mínimo relativo y también mínimo absoluto.

Ejemplo Sea $h(x)= 5+(x-1)^3$ Probar que $x= 1$ es punto crítico de h y clasificarlo

Es análogo a los ejemplos anteriores, queda $h'(1)= 0$, $h''(1)= 0$ y no se puede aplicar el teorema de clasificación. Estudiando el signo de $h(x)-h(1)$ queda $(x-1)^3$ que es >0 si $x> 1$ y < 0 si $x < 0$. Entonces h(1) no es max. rel. ni mín rel

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY



EJEMPLO Encontrar si existen todos los extremos relativos de $f(x) = 8-|x-1|\,|x-3|$

Si $f(x_0)$ es extremo relativo de f entonces o bien $f'(x_0)$ no existe o bien $f'(x_0)= 0$

Entonces empezamos buscando todos los puntos x_0 donde f no es derivable, después todos los puntos x_0 donde f es derivable y tiene derivada nula, y finalmente estudiamos el signo de $f(x) - f(x_0)$ para cada x_0 encontrado antes, para x en un entorno de cada x_0. Incluimos también los puntos x_0 donde no sepamos si f es derivable.

$f(x) = 8-(x-1)(x-3)$ si $x \geqslant 3$ ó si $x \leqslant 1$

$f(x) = 8 +(x-1)(x-3)$ si $1 \leqslant x \leqslant 3$.

en $x= 1$ y en $x= 3$ no sé si son derivables (podríamos investigarlo pero no necesitamos)

Es derivable para todo x diferente de 1 y de 3.

$f'(x) = 4-2x$ si $x>3$ ó si $x < 1$ Se anula en $x=2$ que no es >3 ni < 1. Entonces $f'(x)$ no se anula para ningún $x>3$ ni para $x<1$

$f'(x)= 2x-4$ si $1<x<3$ Se anula en $x= 2$. Entonces hay un único punto crítico $x=2$

Candidatos a extremos relativos en los puntos $x=1$, $x= 3$ $x= 2$

$f(1)= 8$ $f(x)-f(1) = -|x-1|\,|x-3| \leqslant 0$ para todo $x \rightarrow f(x) \leqslant f(1)$ para todo x

$f(1)= 8$ es máximo relativo y también máx. absoluto

$f(3)= 8$ Idem al caso anterior $f(3)= 8$ es máx relativo y también máx. absoluto.

$f(2)= 8-|1|\,|-1| = 7$ $f'(2)= 0$, $f''(2)= (2x-4)'= 2 >0$ $f(2)=7$ es mín. relativo.

La función f no tiene mínimo absoluto pues cuando $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$

Cálculo diferencial e integral I

Eleonora Catsigeras

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo

Uruguay

Derechos reservados 2011

CLASE 38

Sea $f:[a,b] \mapsto R$ continua. Por el teorema de Weierstrass existe máx f y existe mín f

ESTRATEGIA DE CÁLCULO DE MÁX f y de MÍN f CUANDO SE SABE QUE EXISTEN

máx f = $f(x_0)$ → x_0 pertenece al borde del intervalo [a,b], es decir $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ (A)

→ x_0 pertenece al interior del intervalo (a,b). Entonces sabemos que $f(x_0)$ es máximo relativo o local

→ si $f(x_0)$ es máximo relativo o local de f $x_0 \in (a,b)$

- $f'(x_0)$ no existe (B)
- $f'(x_0)$ existe y es $f'(x_0) = 0$ (C)

De lo anterior deducimos una estrategia para encontrar máx f, sabiendo que existe:

1er. paso Armamos una bolsa de puntos x_0 "candidatos" a lugares donde se podría alcanzar el máximo máx f. Esta bolsa de candidatos está compuesta por

(A) los puntos borde del dominio D de f Si D=[a,b] estos puntos son $x_0 = a$, $x_0 = b$

(B) los puntos $x_0 \in (a,b)$ donde f no es derivable

(C) los puntos $x_0 \in (a,b)$ donde $f'(x_0) = 0$ (puntos críticos)

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA

ESTRATEGIA DE CÁLCULO DE MÁX f y de MÍN f CUANDO SE SABE QUE EXISTEN

1er. paso Armamos una bolsa de puntos x_0 "candidatos" a lugares donde se podría alcanzar el máximo máx f. Esta bolsa de candidatos está compuesta por

(A) los puntos borde del dominio D de f Si D=[a,b] estos puntos son $x_0=a$, $x_0=b$

(B) los puntos $x_0 \in (a,b)$ donde f no es derivable

(C) los puntos $x_0 \in (a,b)$ donde $f'(x_0)=0$ (puntos críticos)

Por las dudas → (D) los puntos $x_0 \in (a,b)$ de los que no sepa si están en las clases B ó C

IMPORTANTE: En el primer paso no saltear ningún candidato, si algún punto x no sabemos si es o no candidato, lo incluimos como si lo fuera. Tenemos que estar seguros que entre los candidatos está aquel o aquellos puntos donde efectivamente se alcanza el máximo (que ya sabemos de antemano que existe). NO importa si entre los candidatos hay además, muchos otros puntos donde no se alcanza el máx. Por eso NO clasificamos los puntos críticos. Los incluimos todos dentro de la bolsa de candidatos, no importa su clasificación.

2do. paso Evaluamos la función f(x) para cada $x = x_0$ de la bolsa de candidatos.

3er. paso El mayor de los valores de f(x) encontrados en el paso 2do. es el máximo (absoluto) máx f de f en [a,b].

Análogamente, el menor de los valores de f(x) encontrados en el paso 2do. es el mínimo (absoluto) mín f de f en [a,b]

EJEMPLO Hallar máx y mín (absolutos) de f en el intervalo [0,4] siendo

$f(x) = 9-|x-1|\ |x-2|$

Probar antes que f es continua y que existen máx f y mín f

Podemos sacar los valores absolutos discutiendo según el signo de $(x-1)(x-2)$

Queda $f(x)= 9-(x-1)(x-2)$ si $x>2$ ó si $x<1$ (o sea cuando $(x-1)(x-2)>0$)

$f(x)= 9+(x-1)(x-2)$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$ (o sea cuando $(x-1)(x-2)\leqslant 0$)

La función f(x) es continua para todo x pues:

f(x) tiene una fórmula polinómica para todo $x \neq 2$, $x \neq 1$, entonces es continua

En $x= 1$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)= \lim_{x\to 1^-} 9-(x-1)(x-2) = 9= f(1)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)= \lim_{x\to 1^+} 9+(x-1)(x-2) = 9 = f(1)$

Luego existe $\lim_{x\to 1} f(x)= 9 = f(1)$. Entonces f es continua en x=1

Análogamente en $x= 2$ $\lim f(x)= 9$ cuando $x\to 2^-$ y cuando $x\to 2^+$. Entonces existe $\lim f(x)$ cuando $x\to 2$ y vale $9= f(2)$. Luego f es continua en x=2

Hemos probado que f es continua para todo x En particular es continua en [0,4]

El intervalo [0,4] es compacto. Una función continua en un compacto, por el teorema de Weierstrass tiene máx y mín (absolutos). Hemos probado que existen máx f y mín f en [0,4]

sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Continuación del ejemplo:

$f(x)= 9-(x-1)(x-2)$ si $x>2$ ó si $x<1$

$f(x)= 9+(x-1)(x-2)$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$

Ya probamos que existe máx f y existe mín f en el intervalo [0,4]

Para hallarlos usamos la estrategia expuesta antes

1er. paso) Armar la lista de candidatos a lugares donde puedan quizás alcanzarse máx f o mín f. Incluye (A) puntos borde del intervalo [0,4]

(B) puntos del interior del intervalo (0,4) donde f no es derivable

(C) puntos del interior del intervalo (0,4) donde $f' = 0$

(D) Todo otro punto "sospechoso" que yo no sepa o no quiera averiguar si está en alguna de las clases (B) ó (C) anteriores.

(A) $x = 0$, $x= 4$

(B) sé que es derivable para todo $x = 1$ ó si $x=2$. No sé si es derivable en $x=1$ y en $x= 2$. Podría investigarlo viendo si existe el límite del cociente incremental cuando x tiende a 1, y cuando x tiende a 2. Pero no es necesario, porque igual puedo incluir a los puntos $x= 1$, $x= 2$ en la lista de candidatos (de la clase (D))

(C) $f'(x) = -2x+3$ si $x >2$ ó si $x < 1$. $-2x+3 = 0$ solo si $x=3/2$ que no es >2 ni < 1

Entonces $f'(x) \neq 0$ si $x > 2$ ó si $x < 1$

$f'(x) = 2x-3$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$. $2x-3= 0$ solo si $x=3/2$ que cumple $1 < 3/2 < 2$

Entonces el candidato de esta clase es solo $x=3/2$

(D) ya incluí a los puntos $x=1$ y $x= 2$.

Sigue

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

Continuación del ejemplo:

$f(x)= 9-(x-1)(x-2)$ si $x>2$ ó si $x<1$

$f(x)= 9+(x-1)(x-2)$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$

Teníamos $x = 0,\ x= 4$ $x=1$ y $x= 2$ $x=3/2$

es la lista de candidatos a lugares donde se alcanzan máx f y mín f

Sabemos que efectivamente se alcanzan porque existen máx f y mín f

2do. paso Calcular f(x) para cada uno de los valores de x de la lista anterior.

$f(0) = 9 -(-1)(-2)= 7$ $f(1)= 9$ $f(2)= 9$ $f(3/2)= 9+(1/2)(-1/2)= 35/4$

$f(4)= 9-(3)(2)= 3$

3er. paso máx f es el mayor de los valores de f(x) hallados antes

mín f es el menor " " " " " " "

Queda

$\text{máx } f = 9 = f(1)= f(2)$ El máximo (absoluto) de f en el intervalo [0,4] es 9 y se alcanza en los puntos x=1 y x=2

$\text{mín } f= 3 = f(4)$ El mínimo (absoluto) de f en el intervalo [0,4] es 3 y se alcanza solo en el punto x= 4.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

OTRA FORMA DE HACER EL MISMO EJERCICIO (de forma gráfica)

Encontrar máx f y mín f en [0,4] siendo $f(x)= 9-|x-1||x-2|$ (Existen por el teo de Weierstrass)

Graficar $y = f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$

Buscar dónde se alcanzan máx f y mín f, a partir de las gráficas

Evaluar f(x) en el o los puntos donde se alcanza máx f Ese valor es máx f

Evaluar f(x) en el o los puntos donde se alcanza mín f Ese valor es mín f

Sacando el valor absoluto queda

$f(x)= 9-(x-1)(x-2)$ si $x > 2$ ó si $x < 1$

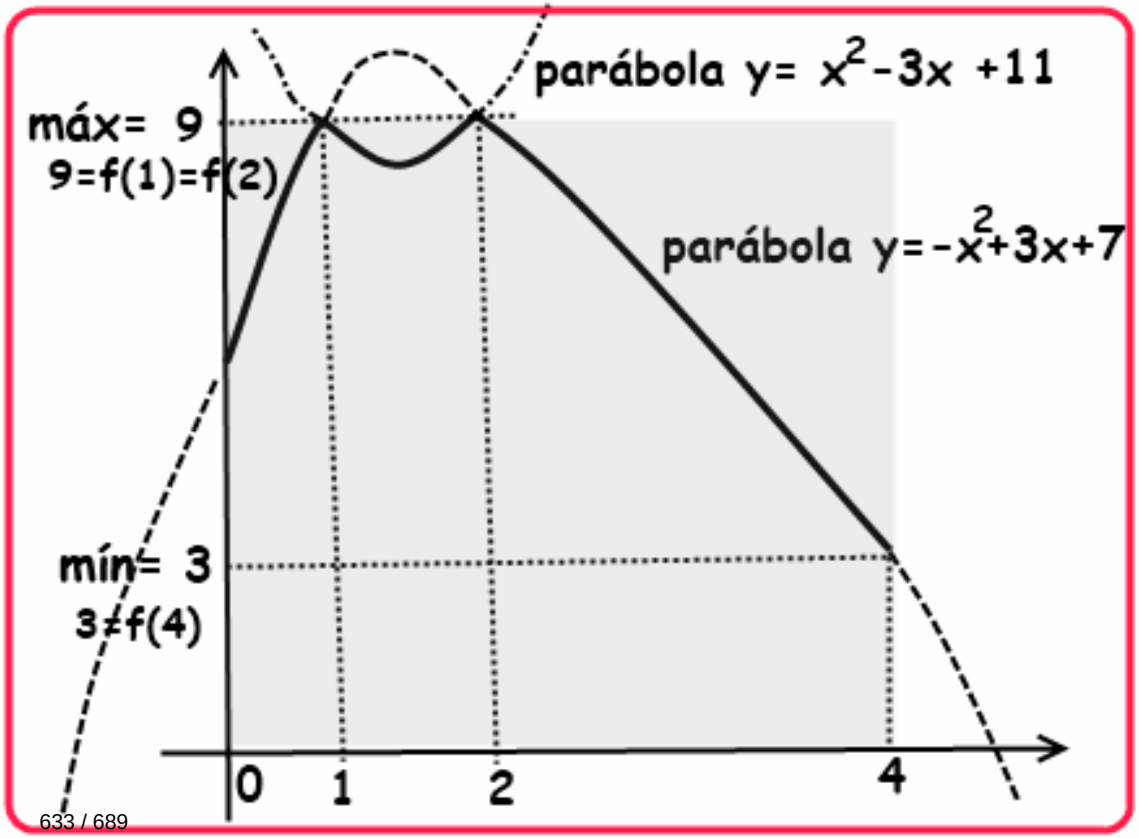
$= -x^2+3x+7$ para $2 < x \leqslant 4$

y para $0 \leqslant x < 1$

$f(x)= 9+(x-1)(x-2)$ si $1 \leqslant x < 2$

$= x^2 -3x +11$ si $1 \leqslant x \leqslant 2$

Dibujando las dos parábolas y tomando de ellas solo los tramos que corresponden a los respectivos valores de x, obtenemos la gráfica de f en el intervalo [0,4]



3

CLASES DEL 2007

C18
A01 a A04

CLASE 18 del 2007 PARTE 1: DESARROLLO DE TAYLOR EN UNA VARIABLE. Enunciado.

Bibliografía de la Clase 18:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.**

Ejercicios para las clase 18

- **Práctico 5 del año 2006**

Derechos reservados.

TEOREMA (Desarrollo de Taylor en una variable).

1. Si f(x) es una función de clase C^n entonces:

$$f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \frac{1}{2}f''(a)(p-a)^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(a)(p-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(p-a)^4 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(p-a)^n + R_n(p)$$

$$\text{cumpliendo: } \lim_{p\to a}\frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_n(p) = \epsilon(p)\,|p-a|^n, \quad \lim_{p\to a}\epsilon(p) = 0$$

FÓRMULA DE LAGRANGE PARA EL RESTO:

Si f es de clase C^{n+1}:

$$\exists\, \xi = a + t(p-a), \quad t \in (0,1), \quad \text{t. q.}$$

$$R_n(p) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(p-a)^{n+1}$$

EJEMPLO: Calcular el límite L:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - (x+y) - 1}{(x+y)^2}$$

$$u = x + y \quad \Rightarrow \quad L = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - u - 1}{u^2}$$

$$e^u = e^0 + (e^u)'|_{u=0}\, u + \frac{(e^u)''|_{u=0}}{2} u^2 +$$

$$+ \frac{(e^u)'''|_{u=0}}{6} u^3 + \epsilon(u)\, u^3, \quad \lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$$

$$e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3$$

sigue

Teníamos

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - (x+y) - 1}{(x+y)^2}$$

$$u = x + y \quad \Rightarrow \quad L = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - u - 1}{u^2}$$

$$e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3$$

$$L = \lim_{u\to 0} \frac{1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \epsilon(u)\, u^3 - u - 1}{u^2} =$$

$$L = \lim_{u\to 0} 1/2 + u/6 + u\,\epsilon(u) = 1/2$$

□

CLASE 18 del 2007 PARTE 2: DESARROLLO DE TAYLOR EN UNA VARIABLE. Demostración

Bibliografía de la Clase 18:

- **Juan de Burgos: Cálculo Infinitesimal en Varias Variables. Capítulo 2, sección 2.4, parágrafo 33.**

Ejercicios para las clase 18

- **Práctico 5 del año 2006**

Derechos reservados.

Dem. del teorema de desarrollo de Taylor en una variable: Por inducción completa en n.

$$\text{Si } n = 1 \ , \ f \in C^1, \Rightarrow \ f \text{ es diferenciable}$$

$$\Rightarrow \ f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \epsilon(p)|p-a|, \ \lim_{p \to a} \epsilon(p) = 0$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN:

$$\forall\, g \in C^{n-1} :$$

$$g(p) = g(a) + g'(a)(p-a) + \ldots + \frac{g^{(n-1)(a)}}{(n-1)!}(p-a)^{n-1} + R_{n-1}(p)$$

$$\text{donde} \quad \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

TESIS DE INDUCCIÓN, a probar:

$$\forall\, f \in C^n :$$

$$f(p) = f(a) + f'(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)(a)}}{n!}(p-a)^n + R_n(p)$$

$$\text{donde } \lim_{p \to a} \frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = 0$$

Dem.

$f \in C^n \quad \Rightarrow \quad g = f' \in C^{n-1}$

Hipótesis de inducción $\Rightarrow$:

$$f'(p) = f'(a) + f''(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{i!}(p-a)^i +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(p-a)^{n-1} + R_{n-1}(p)$$

$$\text{donde } \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

sigue

Teníamos: $$f'(p) = f'(a) + f''(a)(p-a) + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{i!}(p-a)^i +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(p-a)^{n-1} + R_{n-1}(p)$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$\text{donde} \quad \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(p)}{|p-a|^{n-1}} = 0$$

Integrando respecto de la variable real p, en el intervalo desde a hasta p:

$$f(p) - f(a) = f'(a)p + \frac{f''(a)}{2}(p-a)^2 + \ldots + \frac{f^{i+1}(a)}{(i+1)!}(p-a)^{i+1} +$$

$$+ \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(p-a)^n + \int_a^p R_{n-1}(p)\, dp$$

$$\text{Llamando } R_n(p) = \int_a^p R_{n-1}(p)\, dp \qquad (1)$$

$$R_n(p) = R_{n-1}(\xi)(p-a), \quad \xi \in (a,p)$$

$$\lim_{p \to a} \frac{R_n(p)}{|p-a|^n} = \lim_{p \to a} \frac{R_{n-1}(\xi)}{|p-a|^{n-1}} \frac{(p-a)}{|p-a|} = 0 \qquad \square$$

Dem. de la fórmula de Lagrange en una variable:

Por inducción completa en n.

Si n=0 es el teorema del valor medio del cálculo diferencial en una variable:

$$R_0(p) = f(p) - f(a) = f'(\xi)\,(p-a)$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN.

$\forall\, g \in C^n$:

$$R_{n-1,g}(p) = \frac{g^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n, \quad \xi_1 = a+t_1(p-a), \quad t_1 \in (0,1)$$

TESIS DE INDUCCIÓN.

$\forall\, f \in C^{n+1}$

$$R_{n,f}(p) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(p-a)^{n+1}, \quad \xi = a+t(p-a), \quad t \in (0,1)$$

Usando la hipótesis de inducción para el resto de la función f': $R_{n-1,f'}$

$$R_{n-1,f'}(p) = \frac{(f')^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n, \text{ donde:}$$

$$\xi_1 = a + t_1(p-a), \quad t_1 \in (0,1)$$

$$\text{Llamando } R_n(p) = \int_a^p R_{n-1}(p)\,dp \qquad (1)$$

$$R_{n,f}(p) = \int_a^p R_{n-1,f'}(p)\,dp = \int_a^p \frac{(f')^{(n)}(\xi_1)}{n!}(p-a)^n\,dp =$$

$$= f^{(n+1)}(\xi)\int_a^p \frac{1}{n!}(p-a)^n\,dp = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(p-a)^{n+1},$$

$$\text{donde : } \xi = a + t(p-a),\ t \in (0,1) \qquad \square$$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE A01 del 2007 PARTE 1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Bibliografía de la Clase A1:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clase A1

- **Práctico 1 del año 2007**

Derechos reservados.

DEFINICIÓN: Ecuación diferencial ordinaria de grado k es una igualdad en que:

- **LA INCÓGNITA ES UNA FUNCIÓN**

$$y = f(x)$$

desconocida, definida y derivable para todo $x \in I$ donde I es un intervalo abierto de reales.

- APARECE ALGUNA(S) (no necesariamente todas) LAS DERIVADAS HASTA ORDEN $k \geq 1$ DE $y(x)$:

$$y', \; y'', \; y''', \; y^{(k)}$$

EJEMPLO

$$y'' + y''' + e^x y = 4\cos x$$

LA INCÓGNITA es una FUNCIÓN $y = y(x)$

DESCONOCIDA, A ENCONTRAR

llamada **SOLUCIÓN**, porque sustituida en la ecuación donde dice y

LA TRANSFORMA EN UNA IDENTIDAD $\forall \quad x \in I,$

donde I es un Intervalo abierto de reales.

En el ejemplo:

$$y(x)'' + y(x)''' + e^x y(x) \equiv 4\cos x \quad \forall x \in I \subset \mathbb{R}$$

EJEMPLO:

$$y' = (\cos x)y$$

Una solución es

$$y(x) = e^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

pues

$$(e^{\operatorname{sen} x})' \equiv (\cos x)(e^{\operatorname{sen} x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Otra solución es

$$y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Otra es:

$$y(x) = 5e^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Todas las soluciones son de la forma:

$$y(x) = ke^{\operatorname{sen} x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

k es constante arbitraria real (para cada valor de k se obtiene una solución diferente.)

DEFINICIONES:

SOLUCIÓN GENERAL: **Todas las funciones solución de la ec. dif. (usualmente son infinitas.)**

RESOLVER: Hallar **TODAS** las soluciones

EJEMPLO

$$y'' - 2y' + y = 3$$

Solución general (después demostraremos) es:

$$y = 3 + C_1 e^t + C_2 t e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donde C_1 y C_2 **son constantes reales arbitrariamente elegibles.**

EXISTEN INFINITAS FUNCIONES SOLUCIÓN de este ejemplo de Ec. Dif.

Una solución para cada elección de los valores de las constantes.

CLASE A01 del 2007 PARTE 2: ECUACIONES DIFERENCIALES CON DATOS INICIALES

Bibliografía de la Clase A1:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clase A1

- **Práctico 1 del año 2007**

Derechos reservados.

Datos o condiciones iniciales:

Si la ecuación es de primer orden :

$$y(x_0) = y_0$$

donde

$$x_0, \quad y_0$$

son números dados.

Si la ecuación es de segundo orden:

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = u_0$$

donde

$$x_0, \quad y_0, \quad u_0$$

son números dados.

SOLUCIÓN CON DATOS INICIALES:

Entre todas las soluciones (solución general) encontrar aquella que cumple con los datos iniciales.

EJEMPLO: Hallar la solución de:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 3 \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

DATOS INICIALES

Solución general sin datos iniciales: (después probaremos)

$$y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 4 \\ y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} 4 = 3 + C_1$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0) = 5 \\ y'(x) = C_1 e^x + (C_2 x + C_2) e^x. \end{array}\right\} 5 = C_1 + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 4 \end{array}\right.$$

Respuesta: $y(x) = 3 + e^x + 4x e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CLASE A01del 2007 PARTE 3: ECUACIONES DIFERENCIALES de VARIABLES SEPARADAS

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase A1

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

ECUACIÓN DIF. DE VARIABLES SEPARADAS ES

$$y' = A(y)\,B(x)$$

Ejemplo 1:

$y' = (\operatorname{sen} x)(1+y^2)$ es de variables separadas, $A(y) = 1+y^2$ y $B(x) = \operatorname{sen} x$.

No ejemplo 2: $y' = \operatorname{sen}(x+y)$ no es

SOLUCIONES: 1) Cada real α tal que $A(\alpha) = 0$ da un función solución $y(x) = \alpha$ constante, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Si A(y) ≠ 0

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{A(y(x))}\,dx = \int B(x)\,dx$$

cambio de variable $y = y(x)$

$dy = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{dy}{A(y)} = \int B(x)\,dx \qquad (1)$$

se perdieron las soluciones constantes.

$$\int \frac{dy}{A(y)} = \int B(x)\,dx \qquad (1)$$

$$P(y) = C + Q(x) \qquad (2)$$

Donde C es una constante real arbitraria.

De (2), si se puede, se despeja y en función de x.

Para cada valor de la constante C una solución.

Además están las soluciones constantes

$$y(x) = \alpha.$$

encontradas al principio y perdidas al pasar dividiendo A(y).

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

$$y' + a(x)y = 0$$

es de variables separadas, ya que es:

$$y' = -a(x) \cdot y$$

CLASE A02 del 2007 PARTE 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 1er. ORDEN HOMOGÉNEA

Bibliografía de la Clase A2:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clase A2

- **Práctico 1 del año 2007**

CursoAudiovisualCursoAudiovisualCálculo Diferencial e Integral
Eleonora Catsigeras.
IMERL, Fac. de Ingeniería, UdelaR, J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, Agosto 2007.

Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea

$$y' + a(x)y = 0$$

es de variables separadas, ya que es:

$$y' = -a(x) \cdot y$$

La solución general se encuentra con el método general visto para las ecuaciones de Variables Separadas.

CASO PARTICULAR: Coeficiente -a(x) = b constante dada.

Ecuación diferencial lineal De 1er. Orden Homogénea y De Coeficiente constante:

y'=by; b constante real

TEOREMA:
Su solución general es:

$$y(x) = Ce^{bx} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

C constante real arbitraria.

Demostración:

$$y' = by \Rightarrow y \equiv 0$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int b\,dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = C + bx \Rightarrow$$

$$\log|y| = C + bx \Rightarrow$$

$$|y| = e^{C}e^{bx} \Rightarrow$$

$$y = \pm e^{C}e^{bx}$$

ó □

Definiendo k así:

$$k = \pm e^{C} \text{ ó } k = 0 \text{ si la solución es } y \equiv 0$$

$$y = \pm e^{C}e^{bx}$$

ó

$$y \equiv 0$$

$y = k\, e^{bx}$

siendo k una constante real arbitraria. □

CLASE A02 del 2007 PARTE 2: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 1er. ORDEN NO HOMOGÉNEA

Bibliografía de la Clase A1:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clase 1

- **Práctico 1 del año 2007**

Derechos reservados.

Ecuación diferencial lineal De 1er. Orden NO HOMOGÉNEA

$$y' + a(x)y = r(x) \qquad (NH)$$

Ecuación homogénea asociada:

$$y'_H + a(x)y_H = 0 \qquad (H)$$

TEOREMA:

$y(x)$ solución general de (NH)
$y_P(x)$ una (y una sola) solución particular de (NH)
$y_H(x)$ solución general de (H)

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_h(x) + y_P(x)$$

**La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)**

Dem.

$$y'_H(x) + a(x)y_H(x) = 0 \quad (1)$$
$$y'_P(x) + a(x)y_P(x) = r(x) \quad (2)$$
$$(1) + (2) \Rightarrow$$
$$(y_H(x) + y_P(x))'(x) + a(x)(y_H(x) + y_P(x)) = r(x$$
$$\Rightarrow y(x) = (y_H(x) + y_P(x)) \text{ es solución de (NH)}$$

¿Son todas? $y(x)$ es solución de (NH)

$$\Rightarrow \quad y'(x) + a(x)y(x) = r(x) \quad (3)$$
$$y'_P(x) + a(x)y_P(x) = r(x) \quad (4)$$
$$(3) - (4)$$
$$(y(x) - y_P(x))'(x) + a(x)(y(x) - y_P(x)) = 0$$
$$y(x) - y_P(x) = y_H(x) \text{ es solución de (H).}$$
$$\Rightarrow y(x) = (y_H(x) + y_P(x)) \quad \square$$

CLASE a2 PARTE 3:
MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTE.

Bibliografía de la Clase A1:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clase 1

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

$$y' + a(x)y = r(x) \qquad (NH)$$

$$y'_H + a(x)y_H = 0 \qquad (H)$$

La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

¿Cómo encuentro alguna solución particular $y_P(x)$ de (NH)?

ALTER-NATIVA

→ Probando, o a ojo, o como sea para encontrar alguna $y_P(x)$

ó

→ por el **"Método de Variación de Constante"**
que consiste en:

1) Escribir una $y_P(x)$ igual a $y_H(x)$, excepto que en donde esté la constante C escribo una función desconocida, a determinar, $C(x)$

2) Determinar la función $C(x)$ sustituyendo esa $y_P(x)$ en la ec. dif. (NH) para que $y_P(x)$ la verifique.

EJEMPLO: Resolver $y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$

con el dato inicial: $y(0) = 4.$

Homogénea asociada: $y'_H - (\cos x)y_H = 0 \qquad (H).$

Resuelta por Variable separadas:

$$y_H = Ce^{\operatorname{sen} x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real

Solución general de (NH) $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

Encontrar alguna $y_P(x)$ de (NH) por el

"Método de Variación de Constante":

$$y_P(x) = C(x)e^{\operatorname{sen} x} \text{ de (NH)}$$

$$(C(x)e^{\operatorname{sen} x})' = (\cos x)(C(x)e^{\operatorname{sen} x}) + \cos x$$

$$(C'(x) + C(x)\cos x)e^{\operatorname{sen} x} = C(x)(\cos x)e^{\operatorname{sen} x} + \cos x$$

$$C'(x) = e^{-\operatorname{sen} x}\cos x \;\Rightarrow\; C(x) = \int e^{-\operatorname{sen} x}\cos x\, dx$$

$$= \left(\int e^{-u}\, du\right)\Big|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-u} + k\Big|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-\operatorname{sen} x} + k$$

$$y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$$

con el dato inicial: $y(0) = 4.$

Homogénea asociada: $y'_H - (\cos x)y_H = 0 \qquad (H).$

$$y_H = Ce^{\operatorname{sen} x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real

Solución general de (NH) $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

Encontrar alguna $y_P(x)$ de (NH) por el

"Método de Variación de Constante":

$$y_P(x) = C(x)e^{\operatorname{sen} x} \text{ de (NH)}$$

$$C(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} + k$$

Una sola $y_P(x) \Leftrightarrow$ un solo k, por ejemplo $k = 0$:

$$C(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} \Rightarrow$$

$$y_P(x) = -e^{-\operatorname{sen} x}e^{\operatorname{sen} x}$$

$$y_P(x) = -1$$

SOLUCIÓN GRAL. DE (NH) es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real.

$$y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$$

con el dato inicial: $y(0) = 4.$

SOLUCIÓN GRAL. DE (NH) es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

C constante arbitraria real.

DETERMINAR LA CONSTANTE C PARA QUE CUMPLA CON EL DATO INICIAL:

$$4 = Ce^{\operatorname{sen} 0} - 1 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 5 \quad \Rightarrow$$

Respuesta:

$$y(x) = 5e^{\operatorname{sen} x} - 1$$

CLASE A03 del 2007 PARTE 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA Soluciones Exponenciales.

Bibliografía de la CLASE A03 del 2007:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cCursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

- **Práctico 1 del año 2007**

Derechos reservados.

Ecuación diferencial LINEAL DE 2do. ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

a y b constantes

TEOREMA

Las funciones solución de (H) forman un espacio vectorial de dimensión dos.

Dem. que forman un espacio vectorial: Si dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (H) entonces su suma también (verificarlo) y el producto de una de ellas por un escalar real también. (verificarlo).

COROLARIO

Si dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (H) y son Linealm. Independ. entonces forman una base del espacio vectorial de soluciones de (H); y la solución general de (H) es:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

SOLUCIONES EXPONENCIALES DE (H):

Buscar si existen soluciones de (H) de la forma:

$$y(x) = e^{\lambda x} \text{ con } \lambda \text{ constante real}$$

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

CONCLUSIÓN: $y(x) = e^{\lambda x}$

es solución de (H) si y solo sí λ es raíz de la Ecuación Característica (EC)

3 CASOS

- (EC) tiene dos raíces reales diferentes. (2 soluciones exponenciales L.I.)
- (EC) tiene una sola raíz real doble. (1 sola solución exponencial)
- (EC) tiene dos raíces complejas conjugadas no reales. (Ninguna sol.exp.)

CLASE A03 del 2007 PARTE 2: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA Solución General

Bibliografía de la CLASE A03 del 2007:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cCursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

3 CASOS

- (EC) tiene dos raíces reales diferentes. (2 soluciones exponenciales L.I.)
- (EC) tiene una sola raíz real doble. (1 sola solución exponencial)
- (EC) tiene dos raíces complejas conjugadas no reales. (Ninguna sol.exp.)

1er. Caso: Existen dos raíces reales $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de la (EC) $\Longrightarrow$

Existen dos soluciones $e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$ L.I. (verficar que son L.I.) de (H)

$\Longrightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

2do. Caso: Existe una raiz real doble λ_1 **de la (EC)** $\Rightarrow$

Existe una solución $e^{\lambda_1 x}$ de (H)

Afirmamos que $xe^{\lambda_1 x}$ **también es solución de (H) (A probar (*))**

Existen dos soluciones $e^{\lambda_1 x}$ y $xe^{\lambda_1 x}$ L.I. (Verificar que son L.I.)

$\Rightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias

Prueba de (*)

$a^2 - 4b = 0$

$\lambda_1 = -a/2$

¿ $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ es solución de (H)?

¿$y_2(x)'' + ay_2(x)' + by_2(x) = 0$?

¿$(\lambda_1^2 x + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + a(1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x} + bxe^{\lambda_1 x} = 0$?

¿$[(\lambda_1^2)x - a + a(1 + (\lambda_1)x) + bx]e^{\lambda_1 x} = 0$?

¿$(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)xe^{\lambda_1 x} = 0$?

Sí, porque λ_1 es raíz de (EC). □

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (EC)$$

3er. Caso: Raíces complejas no reales $\alpha \pm i\beta$ **de la (EC)**

Afirmamos que $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$; $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ **son soluciones de (H) (A probar (*))**

Existen dos soluciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ L.I. (Verificar que son L.I.)

$\Rightarrow$ **La solución general de (H) es**

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$$

C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

Prueba de (*)

¿ $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ / $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ soluciones de (H)?

Defino función auxiliar compleja: $y_A(x)$ es solución de (H) si y solo si sus partes Real e Imaginaria lo son.

$$y_A(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_A(x)' = e^{\alpha x}(\alpha + \beta i)(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$y_A(x)'' = e^{\alpha x}(\alpha + \beta i)^2(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))$$

¿$y_A(x)$ es solución de (H) ?

¿$y_A(x)'' + ay_A(x)' + by_A(x) = 0$?

¿$e^{\alpha x}[(\alpha+\beta i)^2 + a(\alpha+\beta i) + b](\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)) = 0$?

Sí, porque $\alpha + i\beta$ es raíz de (EC) □

CLASE A03 del 2007 PARTE 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA Ejemplos.

Bibliografía de la CLASE A03 del 2007:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cCursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

EJEMPLOS:

A) $y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (H1)$

B) $y'' + 2y' + y = 0 \quad (H2)$

C) $y'' + 2y + 2y = 0 \quad ; \ (H3)$

A) $(EC)\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$; \Rightarrow ; \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

Solución general de (H1):

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$C_1,\ C_2$ constantes reales

B) $(EC) : \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$; \Rightarrow ; \quad \lambda_1 = -1$

única raíz real, doble.

Solución general de (H2)

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$C_1,\ C_2$ constantes reales

C)$(EC)\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1 \pm i$

raíces complejas no reales

Solución general de (H3)

$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

$C_1,\ C_2$ constantes reales

CLASE A04 del 2007 PARTE 1: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA Método de Selección.

Bibliografía de la CLASE A04 del 2007:

- **"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

- **Práctico 1 del año 2007**

Derechos reservados.

Ecuación diferencial lineal De 2do. Orden NO HOMOGÉNEA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

a y b constantes

Ecuación diferencial lineal De 2do. Orden NO HOMOGÉNEA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

a y b constantes

Ecuación homogénea asociada:

$$y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$$

Ecuación diferencial lineal De 2do. Orden NO HOMOGÉNEA

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

a y b constantes

Ecuación homogénea asociada: $y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$

TEOREMA:

$y(x)$ solución general de (NH)

$y_P(x)$ una (y una sola) solución particular de (NH)

$y_H(x)$ solución general de (H)

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_h(x) + y_P(x)$$

La solución general de (NH) es la SUMA de

La solución general de (H) más

una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

Dem. **Idem. Demostración que para la ecuación lineal de primer orden, Clase 2.**

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$

$$y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$$

La solución general de (NH) es la SUMA de
La solución general de (H) más
una (cualquiera pero una sola) solución particular de (NH)

¿Cómo encuentro alguna solución particular de (NH)?

ALTER-NATIVA

- Probando, o a ojo, o como sea para encontrar alguna $y_P(x)$

ó

- por el **"Método de Selección"**

que tiene como hipótesis la siguiente:

$$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$$

p y q constantes dadas

$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados

de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y_H'' + ay_H' + by_H = 0 \quad (H)$$

Método de Selección:

Hipótesis:

$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$
p y q constantes dadas
$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados
de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: **p + i q** **no es raiz de la EC de (H).**

$$y_P(x) = e^{px}(\overline{A}(x)\cos(qx) + \overline{B}(x)\operatorname{sen}(qx)) \quad (*)$$
p y q las mismas constantes dadas en $r(x)$
$\overline{A}(x)$ y $\overline{B}(x)$ polinomios desconocidos,
ambos de grado $\leq k$
con coeficientes indeterminados, a determinar.

2do. Caso: **p + i q** **es raiz simple de la EC de (H).**

3er. Caso: **p es raiz doble de la EC y q= 0.**

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$$

Método de Selección:

Hipótesis:

$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$
p y q constantes dadas
$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados
de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: **p + i q** **no es raiz de la EC de (H).** (ver pizarrón anterior)

2do. Caso: **p + i q** **es raiz simple de la EC de (H).**

$$y_P(x) = xe^{px}(\overline{A}(x)\cos(qx) + \overline{B}(x)\operatorname{sen}(qx)) \quad (*)$$
p y q las mismas constantes dadas en $r(x)$
$\overline{A}(x)$ y $\overline{B}(x)$ polinomios desconocidos,
ambos de grado $\leq k$

3er. Caso: **p es raiz doble de la EC y q= 0.**

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (NH)$$
$$y''_H + ay'_H + by_H = 0 \quad (H)$$

Método de Selección:

Hipótesis:

$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\operatorname{sen}(qx))$
p y q constantes dadas
$A(x)$ y $B(x)$ polinomios dados
de grado $\leq$ **k** o alguno de ellos es $\equiv 0$

$k =$ mayor de los grados de $A(x)$ y $B(x)$

k=0 si A y B fueran constantes.

Tesis:

1er. Caso: **p + i q** **no es raiz de la EC de (H).** (ver pizarrón ante-anterior)

2do. Caso: **p + i q** **es raiz simple de la EC de (H).** (ver pizarrón anterior)

3er. Caso: **p es raiz doble de la EC y q= 0.**

$$y_P(x) = x^2 e^{px}(\overline{A}(x)\cos(0x) + \overline{B}(x)\operatorname{sen}(0x)) \quad (*)$$
p y $q = 0$ las mismas constantes dadas en $r(x)$
$\overline{A}(x)$ polinomio desconocido,
de grado $\leq k$
con coeficientes indeterminados, a determinar.

OBSERVAR QUE:

$$(*) \iff y_P(x) = x^2 e^{px}\overline{A}(x)$$

Los coeficientes indeterminados en los polinomios desconocidos

$$\overline{A}(x) \text{ y } \overline{B}(x)$$

del método de Selección se determinan sustituyendo en la ecuación diferencial (NH) la función

$$y_P(x)$$

que tiene la expresión dada por la fórmula (*) en cada uno de los tres casos diferentes vistos antes.

CLASE A04 del 2007 PARTE 2: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA Ejemplos.

Bibliografía de la CLASE A04 del 2007:

•"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

EJEMPLO 1 **Resolver**

$$y'' + 2y' + y = 3 \qquad (NH)$$

con dato inicial $y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$

$$y''_H + 2y'_H + y_H = 0 \qquad (H)$$

Solución general de (NH) es: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$y_P(x) = 3$ (descubierta a ojo)

$\Rightarrow \quad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3$

$C_1, \quad C_2$ constantes reales arbitrarias.

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 3 \\ y'(0) = -C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow 3 = C_1 + 3 \\ 4 := -C_1 + C_2 \\ C_2 = 4 \,,\; C_1 = 0 \end{cases}$$

Dato inicial: $y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3 \\ y'(x) &= -C_1 e^{-x} + (C_2 - C_2 x) e^{-x} \end{aligned}\right\}$$

Respuesta:

$$y(x) = 4 x e^{-x} + 3$$

EJEMPLO 2 **Resolver**

$$y'' + y = 3x^2 + 5x \quad (NH).$$

$$y_H'' + y_H = 0, \quad (H)$$

$$(EC): \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i$$

$$y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

$$r(x) = 3x^2 + 5x = e^{0x}((3x^2 + 5x)\cos(0x) + 0\operatorname{sen}(0x))$$

Método de selección, $p = 0, \quad q = 0,$

$A(x) = 3x^2 + 5x, \quad B = 0.$ Grado k = 2

$y_P(x) = \tilde{A}(x)\cos(0x) + \tilde{B}(x)\operatorname{sen}(0x) = \tilde{A}(x)$

$\tilde{A}(x)$ polinomio de grado 2 con coeficientes indeterminados:

$$\tilde{A}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Sustituyo en (NH):

$y_P(x)' = 2\alpha x + \beta, \quad y_P(x)'' = 2\alpha,$

$y_P'' + y_p = 3x^2 + 5x, \quad \Rightarrow$

$2\alpha + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 3x^2 + 5x$

$\alpha = 3, \quad \beta = 5, \quad 2\alpha + \gamma = 0,$

$\gamma = -6 \quad \Rightarrow \quad y_P(x) = 3x^2 + 5x - 6$

RESPUESTA: La solución general de (NH) es:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 3x^2 + 5x - 6$$

C_1 y C_2 constantes reales.

CLASE A04 del 2007 PARTE 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE 2do. ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNEA Otro Ejemplo.

Bibliografía de la CLASE A04 del 2007:

•**"Ecuaciones Diferenciales: Una Introducción para los cursos de Cálculo". Eleonora Catsigeras.**

Ejercicios para las clases A1 hasta A4

•Práctico 1 del año 2007

Derechos reservados.

EJEMPLO 3 **Resolver**

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \qquad (NH)$$

$y''_H + 2y'_H + y_H = 0 \qquad (H)$

E.C. tiene raíz real doble $\lambda = -1$

$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

Método de selección:

$r(x) = 2e^{-x} = e^{-x}(2\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x)$

$p = -1, \quad q = 0, \quad A(x) = 2, \quad B(x) = 0$

Grado de $A(x)$ es 0 (es un polinomio constante)

$p + iq = -1$ es raíz doble de (EC)

$y_P(x) = x^2 e^{-x}\alpha \quad (*)$

Sustituyo (*) en (NH):

$y_P(x)' = (-x^2 + 2x)e^{-x}\alpha$

$y_P(x)'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\alpha$

$¿y_P(x)'' + 2y_P(x)' + y_P(x) = 2e^{-x}?$

$¿(x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + x^2)e^{-x}\alpha = 2e^{-x}?$

$¿2\alpha e^{-x} = 2e^{-x} \ \forall\, x \in \mathbb{R}?$ Sí, si $\alpha = 1$

$y_P(x) = x^2 e^{-x}$

Respuesta:

Solución general de (NH)

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$

$C_1, \quad C_2$ constantes reales