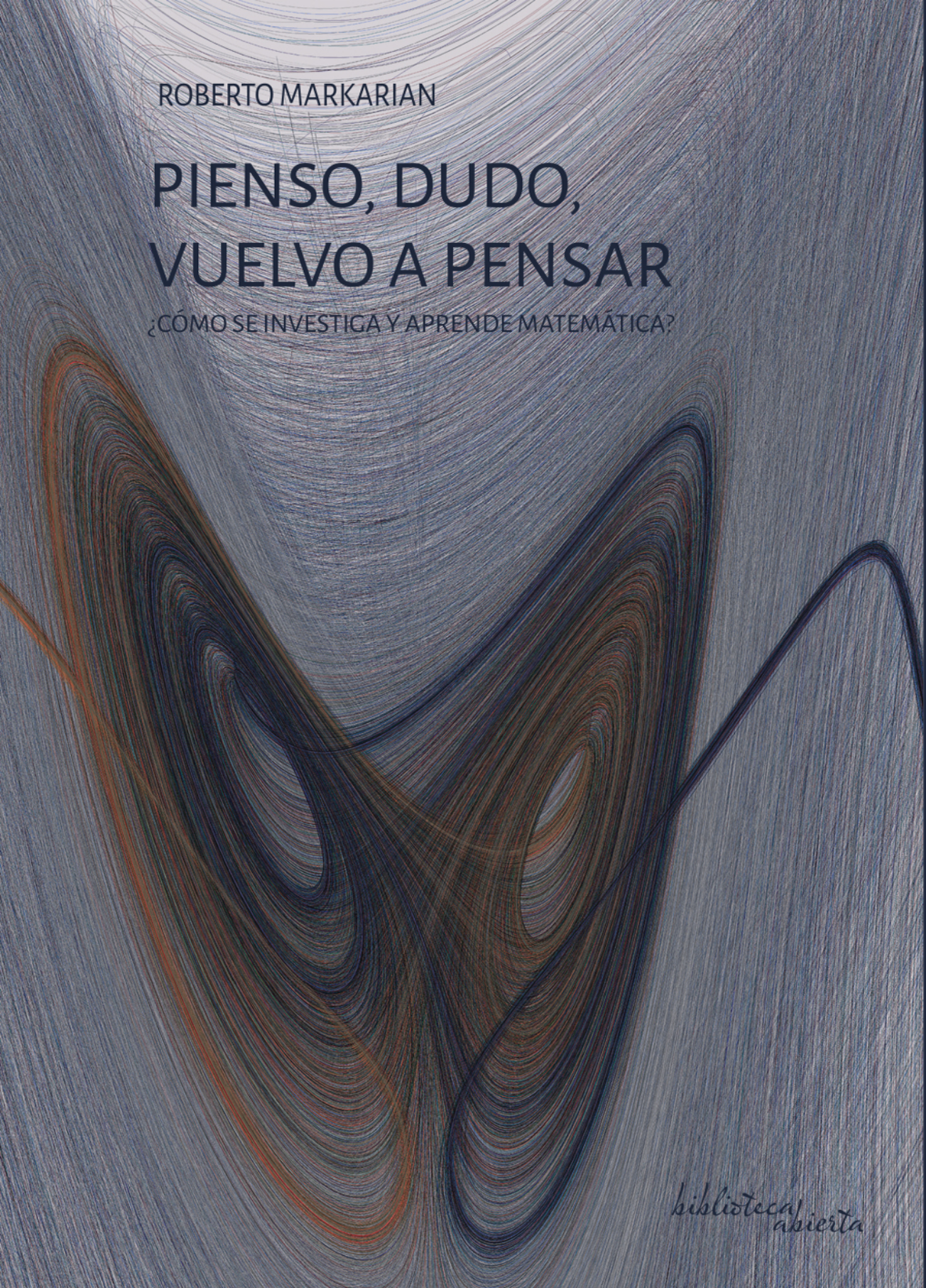




ROBERTO MARKARIAN

# PIENSO, DUDO, VUELVO A PENSAR

¿CÓMO SE INVESTIGA Y APRENDE MATEMÁTICA?

*biblioteca  
abierta*



# PIENSO, DUDO, VUELVO A PENSAR

¿CÓMO SE INVESTIGA Y APRENDE MATEMÁTICA?





UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

ROBERTO MARKARIAN

# PIENSO, DUDO, VUELVO A PENSAR

¿CÓMO SE INVESTIGA Y APRENDE MATEMÁTICA?

*biblioteca  
abierta*

Una versión en papel publicada por Estuario editora  
incluye los cuatro primeros capítulos  
y está disponible en librerías de Uruguay

Producción editorial del equipo de Ediciones Universitarias:  
Nairí Aharonián Paraskevaidis (revisión de textos del capítulo 4)  
Analia Gutiérrez Porley (diseño y diagramación de interior y tapa)

© Roberto Markarian, 2025

© Universidad de la República, 2026

 **CC BY-NC-ND 4.0**

Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Derivadas  
(CC-BY-NC-ND 4.0)

Ediciones Universitarias,  
Unidad de Comunicación de la Universidad de la República (UCUR)

J. E. Rodó 1866

Montevideo, CP 11200, Uruguay

Tels.: (+598) 2408 2906 y (+598) 2409 7720

Correo electrónico: <ucur@udelar.edu.uy>

<https://udelar.edu.uy/libros-udelar>

ISBN de la versión impresa de Estuario editora: 978-9915-706-14-6

e-ISBN de la edición digital de Libros Udelar / Ediciones Universitarias:  
978-9974-0-2388-8

## CONTENIDO

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| Introducción general                                  | 11 |
| 1. ¿CÓMO Y POR QUÉ HACEMOS MATEMÁTICA?                |    |
| 1.1. Introducción                                     | 16 |
| 1.2. ¿Por qué?                                        | 21 |
| 1.3. ¿Cómo?                                           | 37 |
| 2. UN MATEMÁTICO DISCURRE SOBRE LA EDUCACIÓN TEMPRANA |    |
| 2.1. Introducción                                     | 69 |
| 2.2. Malas influencias                                | 72 |
| 2.3. Aportes generales en Uruguay                     | 74 |
| 2.4. Los primeros años escolares                      | 78 |
| 2.5. Al fin de la escuela                             | 80 |
| 2.6. Estudios recientes. Lenguajes. Párvulos          | 85 |
| 2.7. Estudios recientes. Brechas entre niñas y niños  | 91 |
| 2.8. Más sobre la brecha                              | 96 |

|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.9. Opiniones y estudios específicos                                                                                                     | 102 |
| 2.10. Más opiniones específicas                                                                                                           | 105 |
| 2.11. Colofón                                                                                                                             | 108 |
| <br>3. BREVE HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN URUGUAY                                                                                         |     |
| 3.1. Los comienzos: hasta 1942                                                                                                            | 114 |
| 3.2. Crecimiento y consolidación: hasta 1973                                                                                              | 116 |
| 3.3. Oscuridad: hasta 1984                                                                                                                | 122 |
| 3.4. Renacimiento sobre las mismas bases<br>y diferentes condiciones: hasta 2005                                                          | 123 |
| 3.5. Diversificación: hasta ahora                                                                                                         | 126 |
| 3.6. Apéndices. Pantallazos dinámicos                                                                                                     | 128 |
| 3.7. Bibliografía muy breve                                                                                                               | 135 |
| Agradecimientos                                                                                                                           | 137 |
| <br>4. HISTORIA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN URUGUAY                                                                                      |     |
| Introducción                                                                                                                              | 141 |
| Antes de 1945. Programas de ecuaciones diferenciales<br>en cursos para ingenieros y creación<br>del Instituto de Matemática y Estadística | 143 |
| 1945-1965. Resultados de Massera y Schäffer<br>¿Una generación científico-tecnológica del 45?                                             | 150 |
| 1965-1975: Lewowicz. Cursos en Buenos Aires<br>en 1974 y 1975                                                                             | 155 |

|                                                                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1973-1984: Poco en Uruguay, la emigración, los presos                                                                                                         | 159 |
| 1982-1986: Los estudios en Uruguay en 1980-1985.<br>El Programa para el Desarrollo de las Ciencias Básicas.<br>El retorno de Lewowicz. Los nuevos doctorandos | 161 |
| 1986-1998: Creación de la Facultad de Ciencias.<br>Los primeros doctores. Primeros congresos.<br>Ampliación de las temáticas                                  | 164 |
| 1998-2005                                                                                                                                                     | 171 |
| Bibliografía y fuentes                                                                                                                                        | 174 |
| Apéndices                                                                                                                                                     | 184 |





## INTRODUCCIÓN GENERAL

Simplicio: Los argumentos y demostraciones que has presentado son matemáticos, abstractos y muy alejados de la materia concreta; y no creo que estas leyes se mantengan cuando se aplican al mundo físico y natural.

Salviati: No soy capaz de hacer visible lo invisible, ni creo que me lo pidas.

(Galileo Galilei, Discurso y demostración matemática, en torno a dos nuevas ciencias. *Giornata Prima*, p. 96 de la edición nacional, vol. VIII, Florencia, 1890-1900).

La cita, en italiano, es el acápite de uno de los últimos trabajos matemáticos de José Luis Massera: *El significado de la estabilidad*. El *Discurso y demostración matemática, en torno a dos nuevas ciencias* es el último libro escrito por Galileo Galilei, publicado en 1638, que incluye parte importante de su trabajo de los treinta años anteriores. En él establece los fundamentos de la mecánica como una ciencia. Salviati representa al Galileo de ese momento. Su repuesta marca una diferenciación entre los fenómenos de la naturaleza y sus modelos matemáticos; estos nos pueden *hacer visible lo invisible*.

Esta obra contiene cuatro trabajos independientes que, aunque íntimamente relacionados por su temática, fueron elaborados en tiempos

y con motivaciones diferentes (que se explican al comienzo de cada uno de ellos).

Los dos últimos historian diferentes aspectos del desarrollo de la investigación matemática en el Uruguay. Son esencialmente descriptivos, aunque el que abarca todas las áreas de la matemática tiene valoraciones más personales. El que le dedico a la historia del Grupo de Sistemas Dinámicos —que fue y es mi grupo— es más detallado y contiene algunas anécdotas y textos de otros colegas.

Los dos primeros pueden ser considerados continuaciones naturales de mi libro *La dimensión humana de la matemática*.<sup>1</sup> Podrían haber sido parte de él, pero surgieron a partir de preguntas que me hice y que me hicieron en sus presentaciones en diversos ámbitos y en reportajes posteriores. El título de uno de ellos, «¿Cómo y por qué hacemos matemática?», describe con precisión su objetivo y su relación con el título del libro anterior. «Un matemático discurre sobre la educación temprana» continúa atendiendo mis preocupaciones sobre la enseñanza, que motivaron varios de los capítulos del libro anterior, y responde también al fuerte interés que observé sobre las dificultades intrínsecas y en el aprendizaje de la disciplina. Contiene información y opiniones que pueden ser motivo de muchas polémicas.

Se encontrarán muchas citas de autores muy diversos. Sobre algunas he puesto comentarios que extrapolan su contenido original, porque creo que ayudan tanto a conocer textos importantes como a sacar conclusiones parcialmente diferentes a las que surgirían de inmediato sobre el contenido y los objetivos de esos textos.

Los cuatro trabajos están inyectados de un espíritu crítico, como corresponde a temas poco transitados, pero que hacen a aspectos fundamentales del conocimiento humano. En casi todos ellos he reflejado algo de mi trayectoria de vida y en algunos he descripto —y sacado conclusiones parciales— de partes de mi experiencia profesional.

Una versión impresa publicada por Estuario Editora en Montevideo, al mismo tiempo que esta versión, en junio de 2026, no incluye la amplia «Historia de los sistemas dinámicos en Uruguay» a la que se hace referencia en los capítulos 1 y 3 de este libro.

<sup>1</sup> Markarian, Roberto. *La dimensión humana de la matemática. Ensayos sobre matemática y cultura*. Montevideo: Estuario Editora, 2025, 2.<sup>a</sup> ed. ampliada de la obra editada en Ciudad de México por Correo del Maestro en 2003.

# 1. ¿CÓMO Y POR QUÉ HACEMOS MATEMÁTICA?



Este texto es la versión expandida de una exposición en el Coloquio Mensual del Instituto de Matemática y Estadística Prof. Ing. Rafael Laguardia de la Facultad de Ingeniería el 3 de diciembre del 2024. Algunas partes de este texto son reescrituras o directamente transcripciones de mi libro *La dimensión humana de la matemática*. He preferido no indicar qué es lo que proviene de esa obra; de esa manera este texto tiene continuidad y esté autocontenido. Dado que he reducido varias de las transcripciones y citas de aquella obra, he indicado con [DH, número] las páginas de la edición del 2025 donde ellas aparecen completas. He indicado con [número], la paginación de muchas de las demás citas.



## 1.1. INTRODUCCIÓN

Ni epistemología, ni historia de la matemática, ni ciencias cognitivas, ni neurociencias. Estas son reflexiones de un matemático que opina a partir de la práctica de la ciencia, su investigación y enseñanza, y de lecturas varias.

Lo que sigue son dichos de David Ruelle,<sup>1</sup> figura fundamental de la moderna físico-matemática y la mecánica estadística:

He estado soñando despierto con el encuentro con un matemático del espacio exterior [...], está haciendo investigación sobre la matemática humana. Su teoría es que la matemática humana es bastante peculiar comparada con la matemática de otras especies matemáticamente competentes de la Galaxia, y que nuestras peculiaridades se deben a defectos propios del cerebro humano. [31]

En torno a ese enfoque iré sacando ideas de otras lecturas sobre sus relaciones con la economía, la historia, nuestro cerebro... y dando mis opiniones. Muchas de las consideraciones que resumo o transcribo de otros autores no las comparto en su totalidad, pero lo discutible de la temática merece incluir enfoques muy diferentes.

En la introducción a su trabajo *La matemática como metáfora*, Yuri I. Manin<sup>2</sup> hace una interesante comparación entre la consideración que

---

1 David Ruelle (Gante, Bélgica, 1935), matemático y físico teórico, es uno de los pilares actuales de la vinculación de ambas ciencias, gustaba de caminar y andar por las montañas, y habla español. La cita es de Ruelle, David: *Mathematical platonism reconsidered*, Johann Bernoulli Lecture, Gröningen, 20 de abril de 1999, publicado en *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1 n.º 1 maart 2000, 30-33. Trad. R. M.

2 Manin, Yuri I. «Mathematics as metaphor». En Yuri I. Manin: *Mathematics as metaphor. Selected essays*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007, 27-32. Aparecido originalmente en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, Japan 1990. Trad. R. M. Yuri I. Manin (Simferopol, Crimea,

se tenía hacia la matemática a principios del siglo pasado y cien años después:

Cuando H. Poincaré<sup>3</sup> publicó en 1902 por primera vez su libro *La ciencia y la hipótesis*, se transformó en un bestseller. El primer capítulo del libro está dedicado a la naturaleza del pensamiento matemático. Poincaré discute una vieja controversia acerca de si el conocimiento matemático podría ser reducido a largas cadenas de transformaciones tautológicas de algunas verdades básicas o contiene algo más. Él argumentó que el poder creativo de la matemática se debía a la elección libre de las hipótesis-definiciones iniciales que más tarde se vieron limitadas por la comparación de las deducciones con el mundo observable. [...]

La sociedad de nuestros días parece estar mucho menos interesada en sutilezas filosóficas que los contemporáneos de Poincaré. Yo no quiero decir que la ciencia se haya vuelto menos popular. [...] Lo que ha cambiado es el estado de ánimo general. Las paradojas de las nuevas teorías físicas se perciben de forma menos dramática y más pragmática. En esta atmósfera, las acaloradas discusiones de antaño sobre la crisis fundacional de la matemática y la naturaleza del infinito parecen casi irrelevantes y ciertamente inapropiadas. La audiencia responde mucho más animadamente a las opiniones sobre la educación escolar o una nueva generación de computadoras.

Esos temas hacen a lo que ahora se denomina la pertinencia del trabajo matemático, término más meneado que las heces de Sancho Panza.<sup>4</sup> O sea, si viene al caso o si corresponde tal o cual forma de hacer ciencia.<sup>5</sup>

---

1937-2023, Bonn) fue un célebre matemático que hizo aportes fundamentales en geometría algebraica y geometría diofantina. Escribió varios trabajos de divulgación sobre lógica y filosofía de la matemática y física teórica.

- 3 Henri Poincaré (Nancy, 1854-1912, París). físico teórico y matemático. figura descolante de la ciencia en la transición de los siglos. Sentó también bases de la teoría de la relatividad y fue autor de varias obras de filosofía científica y epistemología, entre ellas la citada por Manin y *Ciencia y método* (1908).
- 4 En la primera parte, cap. xx, dice Don Quijote de la Mancha, luego de sentir el mal olor: «Peor es meneallo, amigo Sancho».
- 5 Esta parte del texto debe mucho al trabajo «Acerca de la investigación científica en América Latina: enfoques desde la matemática», por Roberto Markarian y Mario Wschebor, *Interciencia*, 24, número 3, Caracas, mayo-junio de 1999. Este artículo fue escrito cuando los autores éramos, respectivamente, secretario y presidente de la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA).

Existe actualmente una tendencia excesiva a poner el acento en el corto plazo, en las consecuencias materiales visibles de la actividad científica, y a colocar en un segundo plano la compleja trama intelectual de interacciones que ha hecho de la ciencia un aspecto significativo de la vida social. En el caso de la matemática, estos fenómenos se manifiestan de manera especialmente fuerte, entre otras razones, en virtud de las dificultades objetivas para responder en forma accesible para una buena parte de la población a la pregunta: «¿qué hacen los matemáticos?». <sup>6</sup> Estas dificultades se traducen en la sustitución de la pregunta por otra, presuntamente más sencilla: «¿cuáles son las consecuencias que yo puedo observar de lo que hacen los matemáticos?».

Se ha convertido en un verdadero problema la pretensión de parte de planificadores y economistas de justificar la inversión social en ciencia con base en un cálculo de *costo-beneficio*. Para muchos de ellos la *valorización del conocimiento* se basa en su utilidad para un *desarrollo económico*, cuyas premisas y características no están bien definidas o que es casi sinónimo de más inversiones que redundan en más empleo. En esta versión, la *pertinencia social* es juzgada por mediadores que, dado que ignoran aquello que deben evaluar, requieren de parámetros simples y contundentes para tomar decisiones. Las consecuencias que esta dinámica tiene sobre la comunidad académica son peligrosas y debe ser objeto de un análisis cuidadoso. La evaluación de la adecuación entre la enseñanza y la investigación y las necesidades sociales depende fundamentalmente de quién la hace, con qué propósitos y desde qué puntos de vista.

Los principios generales deben ser el fomento o la creación de bases para culturas autónomas e independientes y la atención de las necesidades sociales. La elaboración de políticas y las prácticas a favor de esos principios no son fáciles en nuestras sociedades subdesarrolladas: muchas veces aquellas políticas no pasan de declaraciones de circunstancias y, en general, los gobiernos y sectores económicamente más influyentes, obran en el sentido opuesto. Se deben encontrar respuestas múltiples, pues las simplificaciones no resuelven estos problemas. Más bien, se requiere saber combinar la participación de los científicos y de otros actores sociales y preservar la libertad de creación.

6 Mi colega, bien más joven, Rafael Potrie (Montevideo, 1984) hizo un interesante paralelismo: presentó aquella pregunta con esta «¿qué hacen los diplomáticos?». Y agregó un comentario de otra índole, un tanto jocoso: nos diferenciamos en que estos se expresan mejor que nosotros.

Aquellas tendencias sobre la evaluación suelen ser reflejo de fenómenos similares a los que ocurren en los países ricos, aunque sus consecuencias sobre nuestra realidad son más graves, en la medida en que se insertan en un cuerpo más débil. Por ejemplo, la acción del gobierno de Thatcher en la Gran Bretaña de la década del 80, orientada de esta manera, generó en las universidades británicas consecuencias negativas y durables a pesar de la existencia de tradiciones intelectuales muy establecidas. El lema de que se debe estar en condiciones de vender servicios en el mercado, que practican los émulos latinoamericanos de estas doctrinas, actualmente muy activos y en posiciones de poder, es previsible que genere en nuestros países efectos mucho más negativos y difíciles de reparar.<sup>7</sup> Estos temas están más desarrollados en [DH, 47-48].

Diferente es la situación que se vive en Estados Unidos de América con el segundo ascenso a la presidencia de Donald Trump, en el que la persecución a las universidades y la disminución de inversiones estatales en su financiación se debe más bien a razones ideológicas relacionadas con la xenofobia, los pretendidos antisemitismo y razones de seguridad. Esperemos que este virus distinto no se propague por nuestros países.

La cultura *oficial*, la de los grandes medios de comunicación de masas, la propaganda e incluso manifestaciones artísticas están impregnadas de ese inmediatez. El «hacé la tuya», que significa «hacelo ahora», es la consigna de grandes sectores de la población, de muchos (demasiados) dirigentes empresariales. No hay mucho que explicar acerca de las consecuencias ideológicas que esto tiene en contra de las ciencias y la gente que se dedica a cosas sin impacto inmediato. Más aún, en el caso de la matemática, los temas tratados son difíciles de explicar. Por tanto, su popularidad es baja, y su dificultad agrava este prejuicio.

Tampoco se debe olvidar que la creciente deshumanización y aislamiento de grandes porciones de nuestras sociedades, la irracionalidad que caracteriza a muchos de nuestros gobernantes, incluso las formas salvajes de resolver los conflictos sociales, geográficos o religiosos, influyen fuertemente en el desconocimiento de la importancia y las consecuencias generales de la ciencia. Igualmente es imposible desconocer que la disminución de la calidad de la educación en los sectores más

7 A ello se agregan las opiniones que alientan su no utilización, y predicen la conveniencia de usar tecnologías más atrasadas y con mayor intensidad de mano de obra. La apuesta a la utilización de tecnologías atrasadas conlleva necesariamente la perpetuación de la fosa productiva y social con relación a los países ricos.

pobres, las condiciones de vida infrahumanas de grandes sectores de la humanidad, las mentiras divulgadas masivamente muchas veces por medios automatizados son elementos que influyen negativamente en la conformación de opiniones bien fundadas. Esto lleva simultáneamente a la elección de gobernantes oscuros, muchas veces incultos, defensores de los peores intereses económicos y de expresiones ideológicas retrógradas, enemigos de la diversidad y del desarrollo integral de los seres humanos y a un desconocimiento de las consecuencias del desarrollo científico, de su importancia en la creación de objetos y procedimientos de la vida cotidiana, y en la promoción de profundos valores que enaltecen al género humano.

Capítulo aparte merecerían la influencia de las desigualdades sociales y culturales y la diferenciación entre el norte y el sur de nuestro planeta.

## 1.2. ¿POR QUÉ?

### 1.2.1. LAS CIENCIAS, CREACIONES HUMANAS

¿La matemática de los humanos del planeta Tierra podría ser distinta? ¿Qué otra matemática podría ser desarrollada por seres inteligentes que vivan en un planeta distante? ¿Tendría ese planeta leyes físicas distintas?<sup>8</sup>

Poincaré decía que una pregunta tiene sentido si uno es capaz de concebir una respuesta que tenga sentido. No es el caso de esas preguntas. Pero yo creo que puede haber otros planetas con seres inteligentes y que sus ciencias podrían ser diferentes.

Nuestras ciencias están modeladas por y para vivir en este planeta que logró tener seres humanos inteligentes con un cerebro muy desarrollado. Este instrumento es capaz de guardar información, procesarla, concebir lenguajes que le permitieron comunicarse ampliamente. Así surgieron sociedades complejas que han tomado mucha independencia respecto del resto de la naturaleza en que viven. Tienen creencias, mitos, religiones, ciencias. Tratan de mejorar sus condiciones de vida y su relación con el mundo en que viven. Las ciencias surgen de la observación más o menos meticulosa a lo largo de algunas decenas de miles de años, interpretándola, tratando de actuar sobre ella y concibiendo una maquinaria, llamada, por nosotros, lógica, creación característica del cerebro humano.

Todas las teorías científicas son creaciones humanas. Es por ello que la mecánica clásica (aquella de Newton, Galileo, etcétera) fue mejorada por la relativista (la de Einstein), y no hay problema en fraccionar reiteradamente al electrón que nos enseñaron que era indivisible, por los años sesenta, cuando íbamos al liceo. Ni que hablar cuánto más

---

<sup>8</sup> Me extendo en consideraciones sobre estas preguntas en la sección 3.1 de este trabajo.

se sabe hoy de la célula que hace cien años, para no comparar con lo que sabía Paracelso.<sup>9</sup>

Todas las teorías científicas se basan en diversos postulados o axiomas que vinculan su estructuración, su desarrollo, con la realidad que tratan de representar. Sobre ellos se hacen elaboraciones racionales, en muchos casos matematizadas que constituyen la forma corriente del pensar por la humanidad históricamente considerada, que permiten deducir nuevos resultados o incluir en un contexto más amplio, simple o armónico, los resultados, conclusiones o constataciones anteriores de la teoría. Einstein observó con suma delicadeza que *su* relatividad evita hacer agregados (postulados) a la electrodinámica de Maxwell para explicar los movimientos de los electrones a altas velocidades o la experiencia de Michelson-Morley. Las mismas leyes de Maxwell incluyen las de Faraday, Oersted, etcétera. Así, lo que daremos en llamar la dialéctica de la naturaleza aparece relegada, en las exposiciones sistemáticas (las teorías científicas), en parte a aquellos postulados vinculatorios. Estas son las teorías que se enseñan y sobre las que se para el investigador para descubrir nuevas relaciones u objetos y por tanto para eventualmente encontrar hechos o deducciones que contradicen aspectos de la teoría.

En un trabajo del poco conocido y talentoso filósofo uruguayo Mario Sambarino<sup>10</sup> se dice:

Toda cultura humana se halla relacionada con un conjunto organizado de técnicas, cuyo estado permite caracterizar a cada momento social y a su correspondiente forma cultural. Lo propio de la situación actual no está en el hecho de que haya técnicas, sino en el desarrollo cuantitativo de ciertas técnicas, y en la variación cualitativa que resulta tanto de su magnitud como de su relación con la ciencia.

9 Se llamaba en verdad Teofrasto Bombast von Hohenheim (1493-1541), pero, ante tal nombre, pasó a la historia como Paracelso. Nació en Suiza, fue alquimista y uno de los fundadores de la medicina experimental.

10 Sambarino, Mario: *Ciencia, técnica y tecnología*. En *Galileo*, 5-6, Facultad de Humanidades y Ciencias, Montevideo, setiembre de 1970. También opina: «Llamamos ciencias aplicadas a conjuntos proposicionales científicamente fundamentados, que se seleccionan, se organizan y se investigan en función de su utilidad para orientar el ejercicio de actos reales coordinados, destinados a la transformación de un determinado sector de lo existente. Una proposición científica no es por sí misma de ciencia pura o aplicada; deviene tal o cual según el contexto proposicional en el cual se integra». Mario Sambarino nació y murió en Montevideo (1918-1984). Fue profesor del Instituto de Profesores Artigas (IPA) y de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad de la República, Uruguay.

Hecha esa precisión sobre el estado actual de las técnicas, Sambarino entra de lleno en una definición de la ciencia:

La ciencia es una actividad intelectual, de carácter colectivo, que procura establecer aseveraciones críticamente fundadas y objetivamente controlables, [...] sobre lo que existe y lo que puede existir; y las organiza sistemáticamente como momentos de un proceso, siempre inconcluso y revisable.

Destaco lo que podrían ser consideradas palabras claves de tal definición: *actividad intelectual, colectivo, objetivamente controlables, inconclusa*. Continúa destacando, en un lenguaje decididamente más sutil, los resultados de ese proceso:

[...] se determinan formas de estructuración, o regularidades de coexistencia, de condicionamiento o de sucesión, que se encamina hacia su ampliación constante y su eventual transformación por rectificaciones internas, procediendo según métodos de eficacia establecida de indagación, demostración, verificación o falsación.

Y termina de un modo que puede ser considerado demasiado categórico, pero que, por ello mismo, llama a la reflexión, a tratar de entender más profundamente sus significados:

La finalidad de la ciencia es conocer, y la circunstancia que resulta modificada es el precedente no-saber referido a un ámbito determinado de lo existente. [DH, 70]

### 1.2.2. LA CIENCIA MATEMÁTICA

Mi opinión es que casi todo lo que se acaba de expresar en general es aplicable a la matemática. Naturalmente que en física o en química el vínculo con la realidad aparece más explícito. Existe una mayor autonomía de la matemática en relación con la satisfacción de las necesidades materiales. Pero no es menos cierto que cada ciencia tiene su dinámica propia, su idiosincrasia, digamos, que tienen más que ver con su evolución histórica que con su objeto de estudio. Un ejemplo extraño



e interesante de esto es el siguiente. Tycho Brahe fue quien levantó los datos que permitieron a Kepler demostrar que las órbitas de los planetas eran elípticas. Hay quien dice que si Tycho hubiera tenido instrumentos diez veces más precisos se habría postergado por mucho tiempo la aparición de los Kepler, los Newton, y la astronomía moderna, porque sus datos les mostrarían que, en realidad, las órbitas no son elípticas.<sup>11</sup>

Rodolfo Gambini,<sup>12</sup> en una conferencia dictada recientemente destacó:

La matemática tiene un papel singular entre las ciencias por ser la más precisa y perfecta de las actividades humanas y la más apta para describir las regularidades de la naturaleza. En palabras del gran matemático Joseph Fourier [...] «La matemática parece constituir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos». Por siglos se ha considerado que ella permite acceder al mundo Platónico de las ideas puras.

Continúo la transcripción sin más comentarios porque el lenguaje es llano y las ideas precisas:

La matemática no es tan diferente de la física. Es la ciencia que describe en forma precisa estructuras y procesos. Es más abstracta que la física porque las mismas estructuras pueden aparecer en ámbitos muy

11 El matemático luso-brasileño Marcelo Viana, refiriéndose al desarrollo a partir de los años sesenta de varias ramas de los sistemas dinámicos, se atrevió a escribir: «Fue probablemente una suerte que Smale y sus alumnos y colegas no conociesen [acerca del resultado de Lorenz sobre atractores extraños] en los tiempos que ellos estaban colocando los fundamentos de la teoría de los sistemas hiperbólicos: los habría convencido de que estaban yendo en una dirección equivocada. De hecho, una teoría satisfactoria de los atractores extraños robustos para flujos tendría existencia solo recientemente, construyéndose sobre varios avances obtenidos entretanto». Viana, Marcelo, «What's new on Lorenz strange attractors?». *The Mathematical Intelligencer*, 22:3 (2000), 6-19. Trad. R. M.

12 Gambini, Rodolfo (Montevideo, 1946) es un insigne físico teórico uruguayo quien hizo grandes avances en la llamada teoría unificada de campos, al introducir una teoría cuántica de la gravedad. En la conferencia referida, dictada el 13 de mayo del 2025 en la Alianza Francesa de Montevideo con motivo de la presentación de un libro, se caracteriza a sí mismo así: «si bien me he visto en la necesidad de introducir algunos conceptos matemáticos nuevos, ha sido para entender la teoría de campos y siempre en forma heurística. No soy matemático, más bien he utilizado la matemática como un instrumento fundamental para entender las leyes físicas y extraer sus consecuencias».

distintos de la realidad. Pensarla como la ciencia de las estructuras y procesos permite concebir una respuesta satisfactoria a su «*irrazonable efectividad*» para describir la naturaleza del universo, que ha llamado la atención a tantos físicos y matemáticos como en el caso de Eugene Wigner y el propio Albert Einstein.

Las ciencias naturales modernas nacieron con la física de Galileo quien observó que las leyes de la naturaleza están escritas en el lenguaje de la matemática. El éxito del proceso de matematización que culminó con la mecánica newtoniana fue tan grande que los primeros filósofos naturales de la modernidad como Descartes o Spinoza trataron de reducir la realidad física a su representación matemática. Según esta visión la materia no tenía más atributos que su extensión, es decir su distribución espacial y sus desplazamientos. Siglos de reflexión física y filosófica nos han enseñado que las descripciones fisicomatemáticas resultan de procesos de abstracción e idealización de una realidad externa que las trasciende; constituida por fenómenos a los que solo podemos referirnos ostensiblemente, es decir, señalándolos.

La mencionada *autonomía* de la matemática, que se extiende a casi todas las ciencias, la hace avanzar muchas veces en sentidos inesperados, lo cual se acrecienta a medida que la ciencia o la rama de una ciencia son más abstractas o tratan de objetos más generales. Pero estas independencias y características imprevisibles no llevan a que cada teoría sea una bolsa de disquisiciones estériles, con objetos que poco tienen que ver con el mundo o, mejor, con la parte del mundo que nos interesa a los seres humanos.

Con la matemática pasa lo mismo.

### 1.2.3. IMPULSOS PARA EL AVANCE DE LA MATEMÁTICA

Muchos de los impulsos decisivos para el avance de la matemática han venido desde afuera de la disciplina. La teoría de la complejidad, la algorítmica, la robótica, están en la base de la revolución de la informática (se podría decir que tanto los alcances como las limitaciones de las computadoras dejan de ser entendidos si la base matemática es olvidada o deja de desarrollarse). Los problemas de tratamiento de señales están en la base de las *ondelettes*, que son una nueva manera de ver viejos problemas

de representación de funciones complicadas mediante sumas de objetos más sencillos. La física-matemática que hasta hace poco tiempo era otro nombre para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales ahora abarca sectores muy diversos de la matemática, desde la geometría algebraica y la teoría de grupos (matemática de la más pura, si la hay) a los procesos estocásticos y los sistemas dinámicos.

Bien decía el matemático francés Alexander Grotendieck<sup>13</sup> en 1985, cuando aún no había dejado la matemática y virado al budismo, que la razón de hacer matemática es «sacar nuevos conceptos de la oscuridad».

En un trabajo de balance y perspectiva al final del siglo xx, el genial matemático V. I. Arnold<sup>14</sup> se refiere a la organización de la disciplina, y los impulsos para su avance. Toma un camino que parece humorístico, pero es muy serio:

Toda la matemática se divide en tres partes: criptografía (pagada por la CIA, la KGB e instituciones por el estilo), hidrodinámica (apoyada por los fabricantes de submarinos atómicos) y mecánica celeste (financiada por instituciones militares y otras que tiene que ver con misiles, tales como la NASA).

13 Alexander Grotendieck (Berlín, 1928-2014, Ariège, Pirineos franceses). De familia perseguida por el nazismo, tuvo una formación peculiar en matemática y fue un genial matemático que hizo aportes fundamentales en geometría algebraica, álgebra conmutativa, álgebra, teoría de categorías. Pacifista activo prácticamente se retiró de la matemática a principios del 1970, aunque redactó importantes manuscritos de matemática y autobiográficos en la década siguiente. En el libro de David Ruelle que figura en la nota al pie n.º 40 se da interesante información sobre su vida.

14 Arnold, Vladimir Igorevich (Odesa, 1937-2010, París) fue alumno de Kolmogorov y aportó de manera crucial en diversas ramas de la matemática: sistemas dinámicos, topología, geometría algebraica real y simpléctica, hidrodinámica, teoría de singularidades... El trabajo al que nos referimos es: Arnold, V. I. «Polimatemática: ¿es la matemática una única ciencia o un conjunto de artes?» («Polymathematics: Is mathematics a single science or a set of arts?»). En *Mathematics: frontiers and perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, Editors. International Mathematical Union, AMS, 2000, 403-416. Al final de este trabajo pone como opinión de Kolmogorov lo siguiente: «las burocracias unidas de todos los países serán pronto capaces de detener toda clase de creatividad, haciendo imposible nuevos descubrimientos matemáticos, como lo son los descubrimientos geográficos. Ahora podemos imaginar que algunos de los más atractivos dominios de la matemática serán transformados en reservas salvajes, donde la gente rica podrá comprar por un precio exorbitante el placer de cazar uno o dos teoremas, guiado por un *jaegermeister* científico» (p. 416, trad. R. M.).

La criptografía ha generado la teoría de números, la geometría algebraica sobre cuerpos finitos, el álgebra,<sup>15</sup> la combinatoria y las computadoras.

La hidrodinámica procreó el análisis complejo, las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de grupos y álgebras de Lie, la teoría de cohomología y la computación científica.

La mecánica celeste es el origen de los sistemas dinámicos,<sup>16</sup> el álgebra lineal, la topología, el cálculo variacional y la geometría simpléctica.

15 Uno de los creadores del álgebra moderna y sus aplicaciones a la geometría, François Viète, era el criptógrafo del Rey Enrique IV de Francia. Viète nació en Fontenay-le-Comte en 1540 y murió en 1603. Además de abnegado matemático fue relator del Consejo de Estado. Vale la pena recordar algo de la vida de este Enrique para entender por qué tenía muchas cosas para esconder y necesitaba un buen criptógrafo. Nació calvinista en 1553, se salvó de la matanza de la Noche de San Bartolomé (24 de agosto de 1572) por abrazar el catolicismo. Volvió a su religión de nacimiento poco después, pero se hizo rey, católico, en 1594 luego de que asesinaran a Enrique III en 1589. Lo que pasó en el interregno fue muy interesante, pero no da para contarlo en un libro sobre la matemática. Así y todo, pacificó Francia, promulgó el Edicto de libertad religiosa de Nantes (1598) y lo asesinaron en 1610 cuando quería juntarse con los protestantes alemanes para derribar a la Casa de Austria. No confundirlo con el inspirador de Shakespeare. Fue muy bien retratado en uno de aquellos inmensos cuadros de Rubens dedicados a «La vida de Catalina de Medicis», que decoran ahora un salón entero del Louvre.

16 La mecánica celeste estudia el movimiento de los objetos celestes, o sea, los planetas y otros objetos celestes, más pequeños y mucho más grandes, que andan deambulando por el espacio (celeste). Hubo una época que se creyó que todo giraba alrededor de la Tierra, luego vinieron unos señores que inventaron el heliocentrismo y que establecieron que las órbitas de los planetas eran elípticas, no porque se suprimieran de la oración palabras que no eran necesarias para su comprensión (elipsis, forma gramatical), sino por la forma (de elipse). Pero pronto se vio que esto no era tan así, y que se producían unas variaciones llamadas seculares, por sus largos períodos, y otras más breves, en particular en la Luna, llamadas libraciones (balanceos). También desde la segunda mitad del siglo XVIII se sabe que cuando se considera el movimiento de una pequeña partícula (un satélite o nave espacial) bajo la atracción gravitatoria de dos cuerpos masivos, la Tierra y la Luna, o el Sol y el (baricentro del) sistema Tierra-Luna, por ejemplo, se encuentran unos puntos muy particulares, llamados puntos de libración. Estos tienen la hermosa y casi increíble propiedad de que una partícula inicialmente en él se mantendrá allí por la eternidad. Esta larga —espero que interesante— nota ayudará (1) a comprender la vinculación que Arnold hace entre la rama de la matemática llamada sistemas dinámicos y la mecánica celeste; (2) a quitarle telas de arañas a quienes piensan que la matemática para nada sirve, y (3) a disipar la cuestión epistemológica que se refiere a las aproximaciones dadas por las ciencias, a la realidad.

La existencia de relaciones misteriosas entre todos estos dominios diferentes es la característica más impresionante y encantadora de la matemática (que no tiene explicación racional).

La experiencia de los últimos siglos muestra que el desarrollo de la matemática no se debe al progreso técnico (lo cual consumió la mayor parte de los esfuerzos de los matemáticos en todo momento), sino más bien a los descubrimientos de interrelaciones inesperadas entre diferentes dominios (que fueron posibles por esos esfuerzos). [403-404]

Sir Michael Atiyah<sup>17</sup> dio también su visión esquemática de los grandes tiempos de desarrollo de la matemática y sus relaciones con la física; en *Geometría y física en el siglo XX*,<sup>18</sup> escribió:

Las tres grandes ramas de la matemática son, en orden histórico, Geometría, Álgebra y Análisis. La Geometría se la debemos esencialmente a la civilización griega, el Álgebra tiene origen indo-árabe y el Análisis (o el Cálculo) fue creación de Newton y Leibniz, inaugurando la era moderna.

Luego explica que esas ramas de la matemática, en el ámbito de la física, corresponden al estudio del espacio, el tiempo y el continuo y que si bien la primera y última asociaciones son fáciles de entender, la de álgebra-tiempo es más sutil: destaca que las operaciones algebraicas sucesivas (suma, multiplicación, etcétera) se realizan una detrás de otra, o sea, necesitan tiempo para darles significado.

Debo reconocer que estas opiniones de Atiyah son discutibles, pero representan muy bien las opiniones de un gran matemático sobre las relaciones entre las dos ciencias y sus desarrollos relativos.

17 Michael Francis Atiyah (Londres, 1929-2019, Edimburgo) fue un matemático británico-libanés que hizo aportes fundamentales en geometría. Recibió la medalla Fields en 1966 y el Premio Abel en 2004. La medalla Fields era considerada como el Premio Nobel en matemática; es otorgada por la Unión Matemática Internacional, cada cuatro años, en el Congreso Internacional de los Matemáticos; los premiados deben tener menos de 40 años. Desde 2003 el rey de Noruega otorga anualmente el Premio Abel (Niels Henrik Abel (1802-1829) fue un eminente matemático noruego), seleccionado por la Academia Noruega de las Ciencias y las Letras, a un matemático insigne por su obra global. Por ello, y por su cuantía económica (€ 755 000), es ahora considerado por muchos el equivalente al Premio Nobel de las Matemáticas.

18 Atiyah, Michael: «Geometry and physics of the 20th Century». En Joseph Kounineier, Dominique Flament, Philippe Nabonnand, Jean-Jacques Szczeciniarz, editores: *Géométrie au XXe siècle. Histoire et horizons*, Hermann, París, 2005, pp. 4-9. Trad. R. M.

Cien años antes Henri Poincaré ya destacaba que las interrelaciones entre diversas partes de las ciencias producen sus avances y el rasgo contradictorio de la especialización excesiva: «Es por aproximaciones inesperadas entre las diversas partes que se efectúan los progresos. Especializarse mucho sería lo mismo que prohibir estas aproximaciones». <sup>19</sup> Así, como sucede en otras ramas de la actividad intelectual, entre los matemáticos existen opiniones contrapuestas: respecto de las características fundamentales de la disciplina: las de quienes enfatizan en su unidad y las de aquellos que, alternativamente, ponen el acento en su extraordinaria diversidad. Ambos puntos de vista tienen fundamento y pueden coexistir con mucha salud.

Es cierto que muchas veces sus partes se relacionan de maneras difíciles de explicar («que no tiene explicación racional», dice Arnold en la cita anterior) y que la materialidad de sus objetos es muchas veces difícil de explicar. Mas es igualmente cierto que muchos de esos objetos han surgido a través del estudio de conceptos menos generales, pero con rasgos comunes; que definiciones y resultados muchas veces difíciles de entender y justificar, aun dentro de la comunidad matemática, resultaron de inmensa utilidad mucho tiempo después.

Además, diversos sectores de la matemática sufrieron impulsos cruciales por las necesidades de otras ciencias. Ya hemos dado ejemplos de esto. Asimismo, conviene recordar que el estudio de los sistemas dinámicos, que es la rama de la matemática a que nos dedicamos varios matemáticos uruguayos siguiendo las huellas de Massera, se vieron impulsados, incluso en su financiación, por el desarrollo de la coherencia y la carrera espacial entre las potencias de la época (década de 1950).

Por ello, no es extraño que en la matemática los *demonios* de la dialéctica estén encerrados en los postulados: cuando las contradicciones surgen hay que ir al sótano de los demonios para resolverlas y, entreverándose con ellos, aclarar un poco las cosas. No es secundario a efectos de estas reflexiones que toda la teoría de conjuntos y la discusión sobre los fundamentos de la matemática gire siempre tomando como referencia las diversas presentaciones de los números naturales (caso típico, el teorema de Gödel), el vínculo más auténtico y firme del hombre matemático con la realidad.

---

19 Poincaré, Henri: *Ciencia y método*, Espasa-Calpe, Argentina, Buenos Aires, 1944. Libro primero. Capítulo II. «El porvenir de las matemáticas» (p. 34).

#### 1.2.4. MATEMÁTICA Y REALIDAD

El creciente proceso de abstracción de los entes matemáticos es paralelo al incremento del carácter no intuitivo de los conceptos de la física, la química, la biología e incluso de la informática. Alguien ha dicho con razón que el carácter finito de la velocidad de la luz es una abstracción (o se la concibe en un proceso de abstracción): difícilmente alguien pueda decir qué significan trescientos mil kilómetros por segundo, salvo que es aproximadamente la velocidad de la luz. En la misma categoría de abstracción caen el acortamiento de los objetos a altas velocidades, el carácter corpuscular de las ondas luminosas, la existencia de partículas virtuales que duran millonésimas de segundos y la transmisión de la herencia a través del acoplamiento de moléculas de ácidos nucleicos. Todas estas descripciones tienen tal grado de racionalización en su presentación y comprensión que se hace difícil decir que son observaciones de la experiencia.

Cualquier dificultad del tipo anotado no quita a estos fenómenos su carácter objetivo, material, su carácter independiente de nuestra conciencia. O sea, que su presentación en el marco de cada una de sus teorías no los elimina como representación de fenómenos reales. Su descripción podrá mejorar, algunas de sus propiedades podrán merecer una interpretación muy distinta, pero siempre serán aproximaciones perfeccionadas de un objeto que existe más allá de sus descripciones. Estas afirmaciones valen incluso para las formalizaciones cuánticas de la física en que la interacción entre el observador y el objeto (observado) abrieron una brecha en este tipo de interpretaciones. Ruego releer los textos de Mario Sambarino que comentamos al final de la sección 2.1.

Con los objetos de la matemática no pasa nada sustancialmente distinto. Su génesis y sus vínculos con la realidad —en un sentido amplio—, su desarrollo y su inclusión en una teoría (matemática) determinada siguen las mismas rutas. La matemática está llena de senderos muertos, como las otras ciencias han tratado de abarcar su realidad por caminos que resultaron pobres o estériles, o bien permitían conocer una pequeña parcela de la realidad sin dar enfoques o previsiones sobre terrenos linderos del laberinto de la naturaleza. Por ello, si bien es posible decir que los objetos matemáticos no existen en el sentido intuitivo usual, no son tangibles es otra manera de decirlo, de igual manera podría decirse que no existen el concepto de *árbol* —me refiero a ‘el árbol’, no a ‘ese árbol’— o de *átomo*, o de *valor de cambio*, para referirnos a otra ciencia (creo



que son pocos los que defenderían la inexistencia de ‘el árbol’, etcétera). Recordar la cita primera de Galileo.

Para la presentación de las teorías científicas es fundamental definir conceptos que resumen propiedades comunes a diversos objetos (representantes de clases de equivalencia, diríamos en nuestra jerga). Por suerte el hombre tiene muy desarrollada la capacidad de hacer estos procesos (aunque aquí podemos entrar en un círculo —no vicioso—, pues quizás sea por eso que la ciencia humana ha tomado la forma en que la conocemos. Todo niño normal aprende fácilmente qué es *una recta* e incluso qué es *la recta*. Mucho más le costará diez años después distinguir el *material* campo electromagnético.

Estas apreciaciones sobre las semejanzas entre la matemática y otras ciencias no ignoran las diferencias de sus objetos (sobre esto hemos escrito bastante) y métodos. Los métodos de cada ciencia son muy característicos, por lo que la matemática tiene los suyos adaptados al carácter abstracto de aquellos objetos. Además, es claro que para el conocimiento de un fenómeno concreto se conjugan diversas ciencias y sus métodos. El crecimiento de una planta puede ser analizado por un nutricionista animal, un botánico o un genetista. Cada uno se interesará por los aspectos que trata su ciencia; y en una escala de creciente abstracción o formalización del análisis es posible que alguno de ellos recurra a un matemático para estudiar mejor lo que le interesa.

No puedo dejar de anotar que el problema de la existencia y el carácter de los objetos matemáticos se relaciona directamente con la cuestión eminentemente filosófica de la relación entre la imagen humana de la realidad y la realidad misma; creo que esto se conoce como el problema de la identidad del pensar y el ser. La pregunta principal es ¿podemos conocer el mundo real —aceptando que este existe independientemente de nuestra conciencia— y hacernos una imagen refleja de él? Dado el carácter *naïf*, ingenuo, que anuncié para toda esta parte, mi respuesta es particularmente elemental y directa: la práctica humana, su producción, los experimentos que se realizan una y otra vez con resultados semejantes, las maneras como ponemos los fenómenos naturales a nuestro servicio son todos procesos que muestran la buena equivalencia entre nuestro conocimiento y la naturaleza.

Sobre esto nos instruye Henri Poincaré en *La ciencia y la hipótesis*,<sup>20</sup> capítulo IX titulado «Las hipótesis en física», bajo el subtítulo «Papel de la

20 Poincaré, Henri: *La ciencia y la hipótesis*. Espasa-Calpe, Argentina, Buenos Aires, 1943. Cuarta parte: «La naturaleza» (pp.139-142). En el mismo libro, continuando el



experiencia y de la generalización», con ideas que son fácilmente trasladables a la matemática:

La experiencia es la única fuente de la verdad: solo ella puede enseñarnos algo nuevo; solo ella puede darnos certeza. He aquí dos afirmaciones que nadie puede discutir. [DH, 74]

No es suficiente observar; es preciso usar de esas observaciones, y para ello es necesario generalizar. Eso es lo que se ha hecho siempre; [pero el recuerdo de los errores cometidos] ha vuelto al hombre cada vez más circunspecto, se ha observado cada vez más y se ha generalizado cada vez menos. [...]

Gracias a la generalización, cada hecho observado nos permite prever un gran número; únicamente que no debemos olvidar que solo el primero es cierto y que todos los otros son solo probables. Por sólidamente asentada que pueda parecernos una previsión no estamos jamás absolutamente seguros de que la experiencia no la desmentirá, si nos proponemos verificarla. Pero la probabilidad es a menudo bastante grande para que prácticamente podamos contentarnos con ella. Vale más prever sin certeza que no prever nada. [161-163]

Esta última idea se relaciona con la importancia de las llamadas conjeturas en matemática; enunciados que aún no tienen validación (o rechazo) y que constituyen fuentes de inspiración para quienes trabajan o comienzan a trabajar en asuntos relacionados con esos enunciados. Detalle al margen, en esta obra, en medio de una discusión que preanuncia la teoría de la relatividad, Poincaré muestra como el éter es en realidad una necesidad teórica, para darle coherencia a planeamientos matemáticos basados en la mecánica clásica.

---

desarrollo de las ideas comprendidas en la transcripción, en medio de una discusión que preanuncia la teoría de la relatividad, muestra como el éter es en realidad una necesidad teórica, para darle coherencia a planeamientos matemáticos basados en la mecánica clásica.

### 1.2.5. SIMPLICIDAD. EVOLUCIÓN

En el mismo capítulo, bajo el subtítulo «La unidad de la naturaleza», desarrolla la idea de simplicidad en ciencia que se relaciona con la de economía del pensamiento a la que haré referencia en la sección dedicada a ¿Cómo? Continuamos transcribiendo, porque muestra la riqueza de visión (afirmar y negar) que es necesario tener para entender estas relaciones entre la naturaleza y la ciencia:

Si nuestros medios de investigación fueran cada vez más penetrantes, descubriríamos lo simple debajo de lo complejo, después lo complejo debajo de lo simple, otra vez de nuevo lo simple debajo de lo complejo y así sucesivamente, [...] es necesario detenerse en alguna parte, y para que la ciencia sea posible, es necesario detenerse cuando se ha encontrado la simplicidad. [...]

¿Qué importa que la simplicidad sea real o que encubra una verdad compleja? [DH, 75]

Sin embargo, hay una diferencia. Si la simplicidad fuera real y profunda resistiría a la precisión creciente de nuestros medios de medida; entonces, si creemos [que la naturaleza es profundamente simple] debiéramos concluir de una simplicidad aproximada, una simplicidad rigurosa. Esto se hizo otras veces; no tenemos más el derecho de hacerlo.

La simplicidad de las leyes de Kepler, por ejemplo, solo es aparente; esto no impide que se apliquen muy a menudo para todos los sistemas análogos al sistema solar pero impide que sean rigurosamente exactas. [146-147]

Respecto de estos mismos asuntos, Rolando García, entonces profesor de física en la Universidad de Buenos Aires (UBA), en una reunión y homenaje a Jean Piaget<sup>21</sup> expresó:

Cuando se habla de explicación causal, se suele tener con frecuencia una cierta imagen de lo que representa la explicación causal en física, una imagen que me parece falsa pese a que caracterizó la física del siglo XIX.

21 Jean Piaget, Bärbel Inhelder, Rolando García, J. Vonèche (eds.): *Epistemología genética y equilibración. Homenaje a Jean Piaget con motivo de sus 80 años*, Ginebra, julio de 1976. Editorial Fundamentos, Madrid, 1981 [144-146]. Rolando Víctor García (Azul, Argentina, 1919-2012, Ciudad de México), físico e historiador de la ciencia, resistió la intervención de la dictadura argentina de la Universidad de Buenos Aires (UBA) en 1966.

Hoy sabemos bien que la física no es axiomatizable en su conjunto. También sabemos que no existe una teoría física aplicable a todos los dominios, existen únicamente teorías físicas aplicables en algunos dominios y ante determinada escala de fenómenos. Consideremos por ejemplo, un fenómeno natural puramente físico. Por deformación profesional, hablo siempre de la atmósfera, pero lo hago también porque es la parte de la naturaleza más cambiante de cuantas existen a nuestro alrededor y en la que pueden observarse las sucesivas estructuraciones durante una evolución, a diversas escalas de tiempo, desde los más cortos períodos de tiempo, minutos u horas, hasta los más largos, milenios. Cuando se habla del «movimiento de la atmósfera» se opera una selección de datos a los que se llama «hechos».

A continuación, Rolando García pasa a analizar varios de los conceptos que están en el centro de las teorías científicas: los hechos, las ecuaciones, las escalas de aplicabilidad, las perturbaciones:

Los hechos no son los de la atmósfera: se trata de una selección que se hace, en un conjunto espacial y temporal dado, en el que se seleccionan, por abstracción, ciertos parámetros que corresponden a una determinada escala temporal y espacial. A continuación se aplican las ecuaciones de la mecánica y de la termodinámica apropiadas a esta escala, pese a que éstas no son aplicables a cualquier tipo de escala. Se da el caso que determinados fenómenos, o más exactamente, fenómenos de ciertas dimensiones, pueden ser explicados de una manera causal. Esto quiere decir que se establecen cadenas temporales de sucesos unidos entre sí a partir de los cuales se pueden hacer determinadas predicciones. Ahora bien, incluso algunos fenómenos de esta escala se hacen imprevisibles si se continúa en el tiempo. ¿Por qué? porque existen siempre perturbaciones que corresponden a movimientos de una escala inferior y que se interaccionan con los movimientos considerados hasta el momento en el que las interacciones se hacen de una tal magnitud, dentro de la escala considerada, que las predicciones ya no son válidas. Por supuesto siempre podemos seleccionar la escala y, durante un cierto tiempo, la evolución sigue siendo más o menos previsible. En ese caso tenemos un sistema explicativo, pero no existe sistema explicativo alguno que tenga en cuenta todas las escalas, todas las perturbaciones. [DH, 184-185]

Luego de todas estas citas, es inmediato concluir que toda esa relación, la naturaleza misma y nuestro pensamiento deben ser vistos en

constante evolución. Que la ciencia es un edificio en constante construcción y demolición. Nada de lo dicho antes tendría sentido si quisiéramos quedarnos con una fotografía. En este contexto toman un sentido de total avanzada las siguientes palabras de Fredrich Engels en la introducción de la *Dialéctica de la naturaleza*.<sup>22</sup>

Todo lo que las Ciencias Naturales de la primera mitad del siglo XVIII se hallaban por encima de la antigüedad griega en cuanto al volumen de sus conocimientos e incluso en cuanto a la clasificación de la materia, se hallaban por debajo en cuanto a la interpretación de los mismos, en cuanto a la concepción general de la naturaleza.

Para los filósofos griegos el mundo era algo que había surgido, esencialmente, del caos, que se había desarrollado, que había llegado a ser. En cambio, para los naturalistas del período que estamos estudiando el mundo era algo petrificado, inmutable y, para la mayoría de ellos, además, algo que había sido creado de golpe. La ciencia estaba aun profundamente empantanada en la teología. En todas partes buscaba y encontraba como causa primera un impulso exterior, que no se debía a la propia naturaleza.

Aunque la atracción, llamada pomposamente por Newton gravitación universal, se concibe como cualidad esencial de la materia, ¿de dónde proviene la inexplicable fuerza tangencial que traza la órbita de los planetas? ¿Cómo surgieron las innumerables especies vegetales y animales? ¿Y cómo ha aparecido el hombre mismo, del que se sabe, desde luego, que no ha existido eternamente? La ciencia de la naturaleza respondía con harta frecuencia a estas preguntas remitiéndose al creador de todas las cosas. Copérnico inicia este período con la repulsa de la teología; Newton lo cierra sentando el postulado del inicial impulso divino. [7]

[...]

El primero que abrió una brecha en esta concepción fosilizada de la naturaleza fue, no un naturalista, sino un filósofo. En 1755 apareció la «Historia general de la naturaleza y teoría del cielo» de Kant. El problema de impulso inicial quedaba eliminado; la tierra y todo el sistema solar aparecían como algo que había ido formándose en el transcurso del

22 Engels, Friedrich: *Dialéctica de la naturaleza*. Editorial Grijalbo, México, 1961. La Introducción fue escrita en 1875-76. La obra completa no llegó a ser redactada en forma definitiva. La obra que ahora recibe el nombre *Dialéctica de la naturaleza* tiene una unidad coherente basada en sus ideas centrales y está formada por trozos —muchos deshilvanados y registrados al pasar— escritos entre 1873 y 1886. Engels (1820-1895), que fue amigo y colaborador directo de Karl Marx, escribía en forma más clara y didáctica.

tiempo. Si la gran mayoría de los naturalistas de aquel tiempo hubiesen sentido un poco menos de horror al pensamiento expresado por Newton en la admonición: «¡Oh, física, ten cuidado de la metafísica!»<sup>23</sup>, hubieran podido extraer de este solo descubrimiento de Kant conclusiones que les habrían ahorrado» interminables extravíos y cantidades inmensas de tiempo malgastados en falsas direcciones. [8-9]

Reafirmando su profunda fe evolucionista, nos presenta este panorama apocalíptico que de continuar la falta de consideración de la evolución de la naturaleza —de lo existente—, la irracionalidad de la especie humana, quizás esté más cerca de lo que presagiaba Engels:

Pero «todo lo que nace es digno de perecer».<sup>24</sup> Podrán pasar millones de años, cientos de miles de generaciones podrán nacer y morir, pero llegará inexorablemente el día en que, al agotarse el calor del sol, no alcance para fundir los hielos que avanzan desde los polos; los hombres, más y más hacinados junto al Ecuador, no encontrarán tampoco allí el calor necesario para vivir; irá desapareciendo paulatinamente toda huella de vida orgánica, y la Tierra, muerta, convertida en una esfera fría, como la Luna, girará en las tinieblas más profundas, siguiendo órbitas más y más reducidas, en torno al Sol, también muerto, para precipitarse, por último, en los espacios cósmicos. [17]

23 Se alude a la idea expresada por I. Newton en el trabajo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principios matemáticos de la filosofía natural*), libro tercero. Consideraciones generales.

24 Palabras de Mefistófeles en el *Fausto*, de Goethe, parte I, escena III. Esta expresión le gustaba a Engels, al extremo que aparece nuevamente en otro de sus escritos fundamentales: *Ludwig Feuerbach y el fin de la filosofía clásica alemana* (Marx, K. & Engels, F.: *Obras escogidas* en dos tomos. Tomo II. Editorial Progreso, Moscú, s/f. [355-56]): «Y así, en el curso del desarrollo, todo lo que un día fue real se torna irreal, pierde su necesidad, su razón de ser, su carácter racional, y el puesto de lo real que agoniza es ocupado por una realidad nueva y viable; pacíficamente, si lo viejo es lo bastante razonable para resignarse morir sin lucha; por la fuerza, si se opone a esta necesidad. De este modo, la tesis de Hegel se torna, por la propia necesidad de la dialéctica hegeliana, en su reverso: todo lo que es real, dentro de los dominios de la historia humana, se convierte con el tiempo en irracional; lo es ya, de consiguiente, por su destino, lleva en sí, de antemano el germen de lo irracional; y todo lo que es racional en la cabeza del hombre se halla destinado a ser un día real, por mucho que hoy cho-que todavía con la aparente realidad existente. La tesis de que todo lo real es racional, se resuelve, siguiendo todas las reglas del método discursivo hegeliano, en esta otra: todo lo que existe merece perecer». [DH, 77]

### 1.3. ¿CÓMO?

#### 1.3.1. EL CEREBRO MATEMÁTICO

Una explicación completa del éxito de la matemática necesitaría una comprensión mejor del lenguaje, de la estructura del cerebro y su funcionamiento. Ella estudia modelos y estructuras, y realiza análisis lógicos y cálculos con ellos. En nuestra búsqueda de la comprensión del mundo, sea por la necesidad de sobrevivir en él, sea porque queremos saber qué hay en él, sea porque queremos darle sentido a las relaciones entre sus distintos objetos, necesitamos una ciencia de las estructuras, en abstracto, y un método para saber qué es cierto, qué es interesante, en estas estructuras. Por ello se introducen símbolos que permiten un manejo sistemático de ellas, se las extiende y generaliza tratando de unificarlas en estructuras superiores. Estos procedimientos, métodos y objetos de creación tan peculiarmente humana son una primera razón de porqué hay que prestar atención a la matemática. Y en particular a las características de nuestra mente que permiten esos procesos de abstracción, con sus éxitos y dificultades.

En los últimos decenios<sup>25</sup> los avances en los estudios sobre el funcionamiento del cerebro han llevado a una pregunta muy natural: ¿Por qué nuestra matemática es así? ¿Cómo elabora el hombre sus formulaciones abstractas? ¿Está nuestro sistema fisiológico bien adaptado para las funciones que debe realizar en esta etapa de la evolución humana? Recientemente se ha escrito mucho sobre esto.<sup>26</sup> Por ejemplo, Hersh

25 Es de destacar el trabajo seminal de Norman Wiener: *Cibernética. Control y comunicación en el animal y la máquina*. Hermann, París, 1948, una de cuyas tesis centrales es que pueden existir leyes generales concernientes a las regulaciones aplicables por igual a seres vivos y artefactos humanos.

26 Hersh, Reuben: *What is mathematics really*. Oxford University Press, 1997. Dehaene, Stanislas: *The Numbers Sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University

destaca el carácter de la matemática como invención humana más que como descubrimiento. Chaltin pide a los matemáticos que adoptemos un planteamiento casi empírico de la disciplina: «la matemática no es tan diferente de la física».

Para Stalisnas Dehaene,<sup>27</sup> que estudió matemática en la École Normal Supérieure, y se dedicó luego a la neurofisiología y las ciencias del conocimiento, la matemática «está grabada en la estructura misma de nuestro cerebro» y este resulta muy útil para conceptuar los números porque vivimos en un mundo lleno de objetos diferenciados y móviles. Más aún, analizó ciertas partes del cerebro cuyo daño parece estar directamente relacionado con la pérdida de capacidades numéricas básicas. Esta zona parece estar también vinculada con el procesamiento del lenguaje y la distinción entre derecha e izquierda. Concluye con que las capacidades matemáticas elementales (sumar, por ejemplo) no se diferencian de la capacidad para el lenguaje. Pero que las capacidades superiores (matemáticas o literarias) son obra de la cultura humana, basado en aquel substrato neurológico. Butterworth argumenta en el mismo sentido y trata de demostrar que nuestros genes contienen las instrucciones para construir un «cerebro matemático», por lo que aún sin aprendizaje los seres humanos han nacido para contar. Escribe:

La importancia de los números está basada no precisamente en su utilidad obvia sino en la manera como ellos han modelado nuestra manera de pensar sobre el mundo. Es el lenguaje en base al cual formulamos las teorías científicas. Como dijo Einstein, los números son «la contraparte simbólica del universo»; son fundamentales para las medidas que tomamos como evidencia fundamental de nuestras teorías. «Si usted no puede medir... su conocimiento es magro e insatisfactorio», para citar al gran científico del siglo XIX Lord Kelvin quien, no casualmente, inventó la escala para medir temperaturas absolutas.

Dehaene discute el posible desarrollo de «otras matemáticas»:

---

Press, Nueva York, 2.ª edición, 2007; traducción al español: *El cerebro matemático: Cómo nacen, viven y a veces mueren los números en nuestra mente*. Siglo Veintiuno, Buenos Aires, 2016. Chaltin, Gregory J.: *The limits of mathematics*. Springer, Berlín, 1996. Butterworth, Brian: *The mathematical brain*, Macmillan Publishers, London, 1999.

- 27 Stanislas Dehaene nació en Roubaix, cerca de Lille, 1965, neurocientífico cognitivo. Miembro del Collège de France. Dictó conferencias en Uruguay (noviembre del 2021), es doctor honoris causa de la Universidad de la República.

Si las especies extraterrestres hubieran evolucionado en un ambiente similar al nuestro —por ejemplo, en un mundo compuesto de objetos distintos y móviles— lo más probable es que hubieran incorporado, por selección natural, las mismas regularidades sobre el mundo exterior que nosotros y tendrían una aritmética y una geometría muy parecidas. Pero supongamos que las especies extraterrestres hubieran evolucionado en un ambiente radicalmente diferente, por ejemplo, en un mundo fluido. En ese caso, el conocimiento de los objetos móviles no sería esencial para su supervivencia, mientras que el conocimiento de la mecánica de fluidos, los vórtices, etc. sí lo serían. Creo que esta hipotética especie habría asimilado en su cerebro regularidades asombrosamente diferentes de las nuestras.<sup>28</sup>

David Ruelle en *Conversaciones sobre matemática con un visitante del espacio exterior*,<sup>29</sup> da una versión agradable sobre esos asuntos. No me hago solidario con todas sus manifestaciones. Pero su enfoque es absolutamente original y resalta desde una óptica inesperada el carácter humano, evolutivo y necesario de la ciencia matemática.

En un texto previo parte del cual ya he citado en la Introducción (ver nota al pie n.º 2), el mismo David Ruelle explicó el porqué de su interés en cruzarse con un ser extraplanetario:

He estado soñando despierto con el encuentro con un matemático del espacio exterior y con comparar notas con él, ella o ello. Finalmente he llegado a la conclusión que el matemático del espacio exterior tenía la forma de una agradable joven mujer. (Si usted prefiere un Dios Griego, podemos llegar al término medio de una Diosa Griega). Su nombre es Pallas, y está haciendo investigación sobre la matemática humana. Su teoría es que la matemática humana es bastante peculiar comparada con la matemática de otras especies matemáticamente competentes de la

28 Deahene, Stanislas: *What are numbers, really? A cerebral basis for number sense. Conversations mind*, 27 de octubre de 1997, Edge Foundation. Consultado en [https://www.edge.org/conversation/stanislas\\_dehaene-what-are-numbers-really-a-cerebral-basis-for-number-sense](https://www.edge.org/conversation/stanislas_dehaene-what-are-numbers-really-a-cerebral-basis-for-number-sense) Trad. R. M.

29 Ruelle, David: «Conversations on mathematics with a visitor from outer space». En *Mathematics: frontiers and perspectives*. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, editores. International Mathematical Union, AMS, 2000, 251-259. Traducido por R. M. en el apéndice A de *La dimensión humana de la matemática. Ensayos sobre matemática y cultura*. [DH, 199-213].



Galaxia, y que nuestras peculiaridades se deben a defectos propios del cerebro humano.

Desde luego, usted puede exclamar que Pallas es solo un producto de mi imaginación, que no conocemos otras especies matemáticamente competentes de la Galaxia y que, por tanto, las especulaciones sobre su matemática son infundadas y sin valor. Concuerdo solo en parte con eso. Nuestras computadoras electrónicas no son buenas matemáticas, pero tienen algunas competencias matemáticas, y hay ciertas cosas matemáticamente útiles que hacen mucho mejor que los humanos. (Recuerden que Gauss y Riemann hicieron grandes cálculos numéricos a mano, y que los matemáticos actuales hacen lo mismo usando sus computadoras.) La conclusión es inevitable de que hay algunas capacidades útiles que deberíamos poseer y no poseemos, y que la falta de esas capacidades pueden tener profundos efectos en los logros de la matemática humana.

Resulta posible y fructífero evaluar algunas de las virtudes y los defectos del cerebro matemático humano, usando neurofisiología y comparaciones con las computadoras. En lo que sigue damos una lista y analizamos lo que hemos encontrado. [31]

(Esta es una buena oportunidad para destacar que las computadoras tienen un pie afincado en el mundo de los instrumentos —el aparato mismo, estas teclas que ahora aprieto, los mecanismos para apagar y prender, etcétera, el *hardware*, que le dicen— y otro en un conjunto de reglas, de algoritmos, que son de naturaleza eminentemente matemática y simbólica.)

He aquí las características del cerebro anotadas por Ruelle (todo está explicado con más detalle en el apéndice indicado en la nota al pie n.º 30 y en la primera nota al pie de este trabajo):

La arquitectura del cerebro es fuertemente paralela.

El cerebro es lento.

Nuestra memoria es pobre.

Nuestro pensamiento matemático usa varios sistemas y funciones del cerebro y el sistema nervioso central: visión, lenguaje, etcétera.

Podemos focalizar nuestra atención en una tarea, pero solo de una manera limitada.

Nos gustan las formulaciones cortas.

No somos buenos con las manipulaciones formales lógicas.

Pero somos bastante buenos en encontrar regularidades y significados.

### 1.3.2. CEREBRO Y COMPUTADORA

Comparemos algunas de esas características con las de una computadora. La velocidad que parece instantánea en el cerebro es millones de veces más lenta que la de una computadora en diversas operaciones automatizables. Pero la arquitectura paralela del cerebro le permite procesar simultáneamente mucha información. Un ejemplo típico, particularmente importante, es que la información que entra por los ojos (color, orientación, tamaños, movimientos, etcétera) es destinada a la vez a diferentes partes del cerebro.

Precisamente nuestras habilidades visuales se han ido perfeccionando a lo largo de millones de años, transformándose en uno de nuestros principales vínculos con la naturaleza. Estos fenómenos han sido muy bien estudiados por la moderna neuropsicología y ciencias cognitivas;<sup>30</sup> Ruelle hace clara referencia al tema en diversos trabajos.

Además, a pesar de que no está explicitada en esa enumeración destinada a comparar con las computadoras, el cerebro tiene habilidades lingüísticas que han sido fundamentales para crear nuestros lazos sociales, construir comunidades con comunicaciones fluidas y ¡poder presentar ideas abstractas como las matemáticas! Al extremo de que hay grandes matemáticas, como Yuri I. Manin, para quien «nuestra ciencia es considerada como un dialecto especializado del lenguaje natural, y su funcionamiento como un caso especial del habla».<sup>31</sup> Hay quienes pretenden hacer una presentación puramente formalizada de la matemática sin usar los lenguajes naturales. Ello sería totalmente contrario no solo a la evolución de las civilizaciones humanas, el surgimiento de cada idea matemática, sino tan confuso y opaco que lo harían imposible de manejar.

Frecuentemente se confunde *pensar* con *hablar*. Platón, en el diálogo *El Sofista* pone en boca del Extranjero:

El pensamiento y el discurso no forman más que uno. He aquí toda la diferencia. El diálogo interior del alma, el que tiene consigo mismo, sin

30 Por ejemplo, Spelke, Elizabeth. *What babies know: core knowledge and composition*. Oxford University Press, Nueva York, 2022. Spelke, nacida en 1949, sicóloga cognitiva, trabaja en la Universidad de Harvard. Recibió, entre muchos, el doctorado honoris causa de la Universidad de la República (diciembre del 2022).

31 Ver nota al pie n.º 3.

el auxilio de la voz, es lo que se llama pensamiento. El soplo que el alma exhala por la boca, articulándolo, es lo que se llama discurso.

Esta confusión arrastrada por siglos destaca, por contraposición, la importancia de los elementos no orales en el pensamiento matemático.

A todo ello se refiere también David Ruelle en el trabajo indicado en la nota al pie n.º 2. Luego de dar aquellas características de nuestra mente, nos dice que se puede intentar dar una descripción del modo matemático de pensar compatible con las analogías indicadas al fin de la sección anterior.

Para la mayoría de nosotros científicos, la lengua materna es distinta del inglés, que es nuestra lengua profesional. El registro de la actividad del cerebro del matemático puede entonces dar frases o pedazos de oraciones en dos lenguas con roles algo diferentes (quizás las observaciones y palabrotas en la lengua materna y los aspectos técnicos en inglés), Pero la salida verbal podría ser salpicada con elementos no verbales, visuales para la mayoría de nosotros [...]. Debido a nuestra pobre memoria y a nuestra capacidad limitada de atención, usamos símbolos verbales y no verbales y tratamos de combinarlos en algo útil. El trabajo creativo es entonces de naturaleza combinatoria, usando la analogía por guía. Para aliviar nuestra pobre memoria frecuentemente tomamos una hoja de papel, dibujamos diagramas o garabateamos fórmulas: la hoja de papel cumple la función de una memoria externa y hace buen uso de la competencia visual. [32]

A continuación, Ruelle comenta que la geometría griega usaba las figuras como «intuición visual» y como «memoria externa de una manera extraordinariamente efectiva». El uso de fórmulas estuvo en la base de la siguiente explosión de la matemática occidental (a partir del siglo XVIII): se usaba la memoria externa de naturaleza visual de manera más general pues la manipulación de fórmulas «va al corazón de lo que consideramos matemática». Ruelle concluye este análisis histórico haciendo observaciones sobre el proceso creativo mismo, que es tema de la próxima sección, en cuya primera parte hacemos más comentarios sobre la referencia a Poincaré. Aun así, lo incluimos aquí porque su conclusión se refiere a la «conformación de nuestro cerebro»:

Después de algún tiempo de investigación el problema se nos hace familiar, o sea, las cosas han sido puestas en la memoria de largo plazo

y podemos realizar un trabajo significativo sin una hoja de papel. ¡De hecho el trabajo creativo puede ser hecho inconscientemente! Como fue observado por Poincaré. Y entonces, más o menos de golpe nos convencemos que tenemos una buena idea. Pero, por la manera como funcionamos, la idea está en términos de símbolos abreviados. Cosas de este estilo: «funciona porque hay un punto fijo y si lo mira del modo correcto es más o menos claro que es único». (Frases de este tipo son comunes al final de un seminario y, dependiendo del caso, clarifica todo lo anterior o lo deja en la más densa bruma.) Tenemos ahora que desempacar los símbolos abreviados, confiar que no serán en realidad una mala sorpresa y escribir las cosas con suficiente detalle como para que los colegas se convenzan. [32]

Comparto enteramente la descripción anterior. De hecho, al final de la próxima sección me extenderé en ejemplos de mi propia experiencia al comenzar mis estudios más avanzados de sistemas dinámicos. Pero las conclusiones que siguen sobre la veracidad de las afirmaciones son harto discutibles (nos hemos extendido sobre ello en las secciones 2.1 y 2.4) aunque la última frase merece la mayor atención y reflexión.

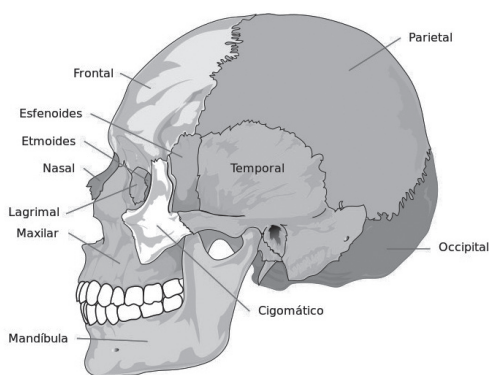
Lo que surge de nuestra discusión es que estas ideas [matemáticas] son específicamente humanas, y dependen de la especial conformación de nuestro cerebro, y en particular en sus defectos. La veracidad de una afirmación específica es algo que compartimos con los dioses, pero lo que vemos como las ideas profundas subyacentes «que hacen que las cosas funcionen» puede que sean invenciones nuestras, mortales. En otras palabras, nuestra alta valoración de los aspectos conceptuales de las teorías matemáticas puede que solo refleje nuestras limitaciones específicamente humanas con respecto a la memoria y a la capacidad de atención. [32-33]

En su importante libro<sup>32</sup> sobre el cerebro matemático Dehaene recopila investigaciones variadas sobre los números y el funcionamiento del cerebro. En los últimos capítulos concluye: «no hay dudas de que el cerebro trata al número como una categoría específica del conocimiento, que requiere su propio aparato neurológico en el lóbulo parietal». [342]

Reivindica también que esas regiones se asocian a percepciones de espacio y tiempo, pero que no se activan con el mero pensamiento abstracto u operaciones de comparación. [341]

<sup>32</sup> Ver nota al pie n.º 27.

Las neuronas de la corteza prefrontal parecen ser las que almacenan informaciones a utilizar más adelante, incluyendo las informaciones numéricas. Allí también parece hacerse la coordinación de los diversos módulos que actúan con cierta independencia. Esta parte planifica, coordina, corrige errores; algo así como «un cerebro dentro del cerebro». El hecho de que esta parte tenga una maduración muy lenta —hasta la pubertad o después— permite dudar si su especialización existe desde el comienzo o es consolidada a lo largo del aprendizaje.

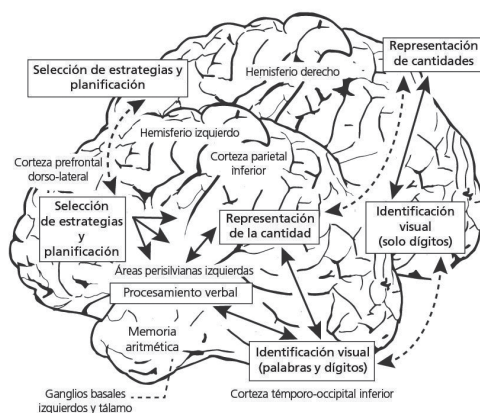


El análisis más global de otros sicólogos y neurocientíficos se aparta mucho de los enfoques demasiado centrados en el aprendizaje independiente de conceptos numéricos a los que parecen afiliarse muchos científicos, en particular Dehaene. Estos últimos dejan de lado aspectos que son comunes a todo el aprendizaje y se comparten con casi todos los procesos de elaboración humanos.<sup>33</sup> Estas opiniones no desmerecen que Dehaene ha colaborado de manera fundamental en demostrar el carácter ancestral de muchos de los conocimientos iniciales que tenemos sobre numeración, comparaciones, estadísticas, etcétera.

Al final de su libro, en la «Parte IV» («La ciencia contemporánea del número y el cerebro»), agregada en la 2.<sup>da</sup> edición, hace planteos tan interesantes como este:

33 Corresponde destacar que se han traducido al español otros libros de Dehaene que tratan estos temas. Las traducciones de estas dos obras han salido casi simultáneamente con sus ediciones originales en inglés y francés: *La conciencia en el cerebro*, Siglo Veintiuno Editores, Buenos Aires, 2015. *¿Cómo aprendemos?*, Siglo Veintiuno Editores, Buenos Aires, 2019.

[...] los inventos humanos más nuevos —incluidas las letras, así como los números y todos los conceptos de la matemática— tienen que encontrar su nicho en un cerebro humano que no evolucionó para albergarlos. Han tenido que meterse en el cerebro invadiendo territorios corticales dedicados a funciones de cierta afinidad. En el caso de la aritmética, comenzamos con un sentido del número aproximado que compartimos con otros animales, y que involucra los lóbulos parietales. A medida que nuestra aritmética se expande a funciones completamente novedosas y exclusivamente humanas, como la suma de dos dígitos, estos conceptos flamantes se pueden representar en el cerebro, por lo menos en parte, solo porque algunas funciones ya existentes en la corteza cercana se reciclan para este nuevo uso. Así, la aritmética invade las áreas cercanas que codifican el espacio y los movimientos de los ojos. [346-347]



Por último, más recientemente en un estudio específico, posterior a la publicación del libro aludido, Dehaene con Marie Amalric<sup>34</sup> realizaron un interesante experimento con quince matemáticos y quince no matemáticos —para comparar—, todos de buen nivel académico. Observaron que las regiones del cerebro que se activaban al responder preguntas de matemática avanzada fueron las del surco intraparietal que se activan también en niños al resolver simples problemas de numeración.

34 Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). «Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113 (18), 4909-4917.

### 1.3.3. CÓMO SURGEN LAS IDEAS MATEMÁTICAS

La obra *Ciencia y método* (1908), de Henri Poincaré, tiene un libro primero, titulado *El sabio y la ciencia*, en cuyo «Capítulo III» estudia «La invención matemática». Allí da una explicación de cómo resolvió uno de los temas más importantes en los que trabajó:

[...] subimos en un ómnibus para no sé qué paseo, en el instante en que ponía el pie en el estribo la idea me vino sin que nada en mis pensamientos previos me hubiera podido preparar para ella, que las transformaciones de que había hecho uso para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclidiana. No hice la comprobación; no hubiera tenido tiempo puesto que apenas sentado en el ómnibus proseguí la conversación comenzada, pero tuve en seguida la absoluta certidumbre.

Reflexionando sobre varias experiencias de este tipo, Poincaré expresa su creencia de que lo que parece una iluminación repentina es, en realidad, el resultado de un largo trabajo subconsciente previo. Poincaré, quien era en realidad un hombre muy racional, atribuye un gran papel al pensamiento inconsciente en un proceso intelectual superior. Aquí presenta algunos hechos interesantes de la observación, y audazmente desarrolla sus implicaciones. Pero, de una manera que le es característica, se detiene cuando llega al final de lo que puede argumentar seriamente.

Existen múltiples testimonios de que el pensamiento matemático no se basa solo en el lenguaje, sino que emplea conceptos que pueden depender de elementos visuales, incluso musculares. Einstein que manifestaba esto último, en cuanto a la conciencia, añade: «Me parece que lo que llamas conciencia plena es un caso extremo que nunca puede alcanzarse por completo. Se me antoja relacionado con lo que se conoce como la estrechez de conciencia (Enge des Bewusstseins)».<sup>35</sup>

Estas experiencias no tienen por qué ser las de todos los matemáticos, aunque hayan sido las de estas grandes figuras. También han sido las mías en muchas ocasiones: estar dándole vueltas a unos cálculos o relaciones entre definiciones y procedimientos intrincados y súbitamente darme cuenta de que el asunto iba por otro lado o que el cálculo debía

35 La carta de Einstein está reproducida en el apéndice II del libro de Hadamard; ver nota al pie n.º 38.

ser simplificado de otra manera. En mi caso muchas veces estuvo relacionado con suaves euforias derivadas de escuchar obras musicales que me emocionaban particularmente o con una pequeña dosis de alcohol (de esto último daré más opiniones y vivencias al comentar otros textos de David Ruelle).

Naturalmente que todo esto puede analizarse a la luz del modo de funcionar del cerebro, en particular, sus memorias de corto y largo plazo. En parte, el llamado período de incubación puede consistir en el traslado de los resultados de un período de preparación a la memoria de largo plazo. O sea, que después de analizar un poco el problema, comparar, hacer analogías, consultar (todo ello es la preparación), es bueno dejarlo incubarse un buen tiempo.

Jacques Hadamard<sup>36</sup> siguiendo a Poincaré<sup>37</sup> y otros muchos que ambos consultaron «distingue cuatro momentos dentro de la actividad matemática: una fase consciente de *preparación*, una fase inconsciente de elaboración o *incubación*, una *iluminación* que retrotrae al pensamiento consciente y una fase consciente de verificación. En la fase de incubación se van agrupando ideas de diversas formas hasta escoger la combinación adecuada». La elección depende de razones muy variadas, aunque para Hadamard tiene un fundamento estético.

La referencia a la estética de la matemática está particularmente presente en la obra de Godfrey H. Hardy, *Apología de un matemático*.<sup>38</sup> En este pequeño libro de un matemático de típica flema inglesa (por ejemplo, jugaba regularmente al críquet), se trata de explicar cómo se elabora la matemática. Él la considera sin grandes efectos en la humanidad, lo que resultó en una gran decepción porque estaba comenzando la segunda guerra mundial y se mostraba que la pureza de la matemática no era

36 Jacques Hadamard (Versailles, 1865-1963, París) hizo grandes contribuciones en teoría de números, análisis complejo y aportes que abrieron las puertas al estudio de los flujos geodésicos en superficies de curvatura negativa.

37 Poincaré, Henri: *Science et méthode*, Ernest Flammarion, París, 1908. [Traducciones al español: *Ciencia y método*, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1944; *Sobre la ciencia y su método*, Circulo de Lectores, s. A., Barcelona, 1997] J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press, Princeton, 1945; edición ampliada en 1949 y reeditada por Dover, Nueva York, 1954.

38 Hardy, Godfrey H.: *A mathematician's apology*. Cambridge University Press, 1940, prólogo de C. P. Snow. Edición española: *Apología de un matemático*. Nivola Libros. Madrid, 1999. Presentación de Miguel de Guzmán. Hardy (Surrey, 1877-1947, Cambridge, Inglaterra) hizo importantes aportes a la teoría de números y el análisis junto con John E. Littlewood. Fue el gran mentor de Srinivasa Ramanujan (Tamil Nadu, India, 1887-1920).



tanta: sus aplicaciones durante la guerra eran notorias. Fue un pacifista a ultranza, consecuente con esa concepción. Fundamenta con gran calidad literaria la fuerte motivación estética del trabajo creativo en la disciplina. La palabra *apología* está usada en el sentido de los griegos clásicos: 'justificación', 'defensa'. Y lo hace con cierta nostalgia: «Escribo sobre la matemática porque, como cualquier otro matemático que tiene más de 60 años, ya no tengo la frescura de mente, la energía ni la paciencia para realizar mi trabajo con eficacia».

La elegancia, la estética de la creación, el descubrimiento matemático, puede que no sea sentida por un gran número de personas vinculadas de una manera u otra a la disciplina. Pero muchos más tenemos y manifestamos un sentimiento parecido que es el placer de esas tareas, podría decir la alegría de encontrar algún nuevo resultado o un ejemplo opuesto a un resultado conjeturado o, en etapas más tempranas, descubrir la relación de unos aspectos históricos con otros. Rehacer un razonamiento ya conocido, pero que uno redescubre. Esto se manifiesta muchas veces en momentos, a veces breves, de euforia o manifestaciones que pueden ser vistas como extemporáneas por quien no sabe el origen.

Más allá de reconocer esas etapas en el modo de hacer matemática, siempre que hacemos matemática se nos desarrolla una intuición específica. De alguna manera coleccionamos un montón de datos a los que podemos acceder más fácilmente que a otros con los que trabajamos habitualmente. Podemos decir que actuamos por intuición porque ese proceso es inconsciente. Hacer matemática es siempre un proceso de construcción que puede incluir alguno o varios de los objetos antes indicados: hacer una demostración, escribir un artículo, leer unas notas si esto acarrea la elaboración de algo en la mente. En este sentido constructivo guarda cierta relación con la creación artística. Y a pesar de que esto nos lleva nuevamente cerca de las afirmaciones de Hadamard y Hardy (las ideas matemáticas se seleccionan por razones estéticas), hay que tener en cuenta siempre las expresiones de Arnold y otros al referirnos a los impulsos decisivos para el avance de la disciplina.

Otra observación relacionada con el hacer matemática es que muchas veces, luego de dar respuesta a algún problema o entenderlo, tenemos la percepción —y lo manifestamos— de que el asunto era simple o fácil. La mayor parte de las veces esta es una percepción errónea y cuando decidimos llevarlo a su etapa rigurosa, escrita o no, nos damos cuenta de su complejidad, que su relación con otros resultados no es tan evidente, etcétera.

En una de sus últimas obras de carácter general<sup>39</sup> David Ruelle escribió:

El cerebro matemático contiene muchos objetos: teoremas, lemas, preocupaciones financieras [...]. Todas estas cosas coexisten e interactúan de un modo poco conocido. Afortunadamente, el pensamiento matemático puede deslindarse de todo lo demás. [...] Esta separación presenta una gran ventaja metodológica y es que permite aislar una parcela susceptible de analizarse con extraordinaria profundidad, mucho mejor que las cuestiones relacionadas con la psicología. Esta posibilidad de analizar en profundidad el pensamiento matemático confiere un considerable interés filosófico al asunto. Así y todo, no hemos de olvidar que en la mente de un profesional de las ciencias exactas, además de hermosas ideas matemáticas, hay muchas cosas oscuras. [144]

Para los matemáticos, en particular, el cerebro es la principal herramienta y hay que conservarlo en un estado razonablemente bueno, lo cual no siempre sucede. Muchos bebemos café o té para mantenernos despiertos o por costumbre colectiva. Una buena sala de vida entre matemáticos siempre tiene una buena cafetera y nos gusta decir que transformamos café en teoremas. El tabaco también puede favorecer la concentración intelectual, aunque algunos de sus restantes efectos son bastante catastróficos. El consumo de marihuana era generalizado en los ambientes académicos estadounidenses, inclusive entre los matemáticos, en los años sesenta y puede que lo sea ahora en muchos institutos del mundo occidental, aunque hay pocos que digan que los ayuda en su trabajo profesional.

Una constatación personal es que algunos matemáticos beben vino o un poco de otra bebida alcohólica para calmarse, mientras que otros lo hacemos para entrar en un leve estado de euforia que favorece la creatividad; en algunos, esto último también se produce al escuchar música. No es sorprendente que en algunos de estos estados se emitan exclamaciones, se hagan gestos o movimientos que manifiestan el haber dilucidado alguna duda que nos tenía preocupados desde mucho tiempo atrás.

39 Ruelle, David: *El cerebro de los matemáticos. Los grandes matemáticos y sus formas de pensar*. Antoni Bosch, editores, Barcelona, 2010, p. 204. Traducción de Víctor V. Úbeda. 1.ª edición en inglés, *The mathematician's brain. A personal tour through the essentials of mathematics and some of the great minds behind them*. Princeton University Press, 2007.

### 1.3.4. ASPECTOS PSICOLÓGICOS

En el libro antes citado, en un capítulo titulado «La manzana de Turing»,<sup>40</sup> Ruelle hace una serie de observaciones interesantes sobre aspectos psicológicos de los matemáticos. Hemos extractado una serie de trozos colocando el número de la página de la edición española al final de cada una de ellas.

Evidentemente, ciertos dones (en concreto, una buena memoria a corto plazo) son muy útiles para la actividad matemática. También podríamos mencionar la capacidad para la concentración o una buena disposición para el pensamiento abstracto [110].

Ruelle considera que esas constataciones son «un tanto difusas». A pesar de ello mi experiencia propia y la de muchos colegas me permiten afirmar que la buena memoria de corto plazo, la capacidad de concentración y la disposición para el pensamiento abstracto son rasgos que muchos matemáticos tienen en grados superiores a la generalidad. La siguiente observación es también corroborada por mi experiencia en el ambiente matemático que conocí y conozco, aunque la explicación para la carencia de aptitudes comunicativas es muy discutible y de difícil definición. El ejemplo extremo que presenta puede no ser un caso aislado, pero no me consta que sea frecuente.

Muchos matemáticos también están bien adaptados socialmente, pero lo interesante es que muchos otros no. ¿A qué se debe? La idea es que si uno es inteligente pero carece de aptitudes comunicativas se interesará por actividades poco exigentes en el plano social. Entre dichas actividades se cuenta la matemática, la programación informática, y ciertas formas de creación artística. Como ejemplo podríamos citar al gran Kurt Gödel, una persona obsesionada por su salud y con escaso don de gentes. Cabe suponer que tuviese una riquísima vida interior pero sus relaciones con

---

40 Alan Turing (1912-1954) fue un matemático, lógico, etcétera, que dio formalizaciones para los conceptos de algoritmo y computación científica. Puede ser considerado uno de los padres de la computación teórica. Desentrañó algunas de las claves usadas por los nazis para transmitir información a su armada. Se suicidó, aparentemente inyectando cianuro en una manzana, luego de que le comenzaran a aplicar tratamientos agresivos contra su homosexualidad, *descubierta* en 1952 y que era considerada delito.

el mundo exterior parecían estar en gran medida mediadas por su esposa, Adele. Cuando Adele quedó incapacitada a causa de una enfermedad, el genial lógico se vio obligado a enfrentarse solo a sus problemas, en concreto a la obsesión de que la gente quería envenenarlo. La inanición que él mismo se provocó terminó causándole la muerte, que le sobrevino sentado en una silla de un hospital de Princeton, en Nueva Jersey. [111]

En relación con la cita que sigue, acompaño todas las opiniones sobre las formas de pensar y comportarse de muchos matemáticos. Las primeras formas concretas a las que se refiere las he observado en mí mismo.

Creo que muchos matemáticos (no todos) sí que tienen algo peculiar en común, a saber: una forma un tanto rígida de pensar y comportarse. Conste que baso esta opinión en pruebas anecdóticas, no clínicas. Más concretamente, según mi experiencia, muchos matemáticos dan excesivos detalles a la hora de responder una pregunta intrascendente [...], o encuentran dificultades lógicas en una afirmación que a la mayoría de la gente no le causa el menor problema. O en ocasiones te piden que les repitas un chiste para acto seguido preguntarte dónde está la gracia. Insisto en que no todos los matemáticos son así, gracias a Dios. En este mundillo uno se encuentra gran variedad de tipos psicológicos e incluso trastornos mentales, siempre que no afecten a la inteligencia. Las tendencias paranoicas, obsesivas o maníaco-depresivas no son raras entre los científicos en general, aunque también hay muchos que de tan normales e insípidos resultan deprimentes. [111-112]

La frecuencia de ataques nerviosos no ha merecido estudios estadísticos. ¿Es mayor que la media? ¿Es menor que entre los poetas y pintores? Aun así, reconozco que conozco varios casos y los indicados a continuación son paradigmáticos. La referencia al exceso de trabajo mental, la concentración en un solo tema o preocupación durante períodos prolongados son frecuentes en todo matemático; esto puede generar distracción, estar ausente, obsesiones.

El número de casos conocidos de matemáticos de primera fila que han sufrido ataques nerviosos es impresionante. Constance Reid, en su

biografía de David Hilbert,<sup>41</sup> dedica apenas unos renglones a los varios meses que el insigne matemático pasó internado en un sanatorio como consecuencia de una crisis nerviosa. La biógrafa trae a colación el ataque, anterior y más severo, de Felix Klein y transcribe las siguientes palabras de Courant: «casi todos los grandes científicos que he conocido sufrían graves depresiones»<sup>42</sup>. Podríamos comparar la actividad matemática de gran nivel con la escalada de alta montaña: las dos son hazañas admirables, pero peligrosas. En un caso la mente y en el otro el cuerpo se ven forzados al máximo, y hay un precio que pagar. Aparte de los ataques de nervios, el abuso al que someten a sus cerebros los matemáticos suele traducirse en un carácter distraído y carente del sentido práctico (los poetas tienen una fama parecida). Y puede que otro resultado de la hiperactividad cerebral sea la alopecia, común entre los intelectuales. [112]

Que sepa no existen pruebas clínicas de que la caída del cabello esté relacionada con la actividad intelectual. En mi caso es fruto de la genética armenia y conozco muchos matemáticos con gran pelambrera. Acompaño plenamente la primera frase de la cita siguiente sobre el carácter intrincado y laborioso del trabajo de los matemáticos, aunque creo que nuestro aislamiento de la vida real se da en proporciones semejantes a las del común, la generalidad de las personas. Cuesta distinguir la influencia de diversos aspectos de la historia de Turing; está demasiado relacionado con la persecución de su homosexualidad.

Así pues, los investigadores matemáticos se entregan a una labor muy ardua, aunque, en cierta medida, viven en un universo separado y se ahorran algunos de los problemas relacionales típicos de la «vida real». Sin embargo, estos problemas sin resolver pueden aflorar de forma brutal y

41 Constance Reid: *Hilbert*, Springer, Berlín, 1970. David Hilbert (1862-1943) fue un matemático alemán, creador de la Escuela de Göttingen, destruida por el nazismo en 1933. En 1900, presentó una colección de veintitrés problemas que marcaron la investigación matemática del siglo XX.

42 El matemático estadounidense de origen alemán Richard Courant (1888-1972) fue alumno y posteriormente colaborador de Hilbert. Felix Christian Klein (1849-1925) también fue uno de los que consolidó la Universidad de Göttingen como uno de los más grandes centros de matemática de aquellos tiempos, muy conocido por sus aportes a la geometría no euclidiana y su relación con la teoría de grupos.

reclamar plena atención. Sirva como ejemplo la historia del matemático británico Alan Turing.<sup>43</sup> [113]

Otra situación interesante es la de John Forbes Nash Jr. (1928-2015) [DH, 43-45]. Muchos aspectos de su vida se divulgaron en la película y el libro *Una mente brillante*.<sup>44</sup> El tema de su tesis de doctorado en la Universidad de Princeton estaba basado en cuestiones que había pensado luego de hacer un curso de economía internacional en Carnegie Mellon, donde se había graduado. Se trataba del problema del regateo o de las negociaciones, que motivaron su interés en la teoría de juegos que había aprendido estudiando los trabajos de Von Neumann y Morgenstern. Esto dio lugar a su trabajo sobre los juegos no cooperativos, que serían premiados muchos años después con el Nobel de Economía.

Durante los siguientes nueve años encaró y resolvió varios problemas centrales de geometría y análisis. Estos son los trabajos que los matemáticos consideran fundamentales y por los que pudo haber sido firme candidato a la Medalla Fields<sup>45</sup> de 1958. El trabajo que le valió el Premio Nobel fue una utilización ingeniosa de conocimientos bien conocidos; su trabajo ulterior es mucho más rico e importante.

A principios de 1959 comenzó a sufrir disturbios mentales que él mismo caracterizó como un pasaje de la «racionalidad científica del pensamiento al pensamiento alucinado característico de las personas que son psiquiátricamente diagnosticadas como esquizofrénicos o paranoico-esquizofrénicos».

En los sesenta tuvo períodos de mejoría y produjo buena matemática, pero a fines de esa década comenzó su peor etapa de la que solo se recuperaría a principios de los noventa. En 1994 escribió:

[...] actualmente parece que nuevamente estoy pensando racionalmente en el estilo que caracteriza a los científicos. Sin embargo, esto no es motivo de tanta alegría como si alguien se recuperara de una incapacidad física. Entre otras cosas porque la racionalidad del pensamiento impone un límite al concepto personal de sus relaciones con el cosmos. [...]

Estadísticamente, parecería improbable que cualquier matemático o científico, a la edad de 66 años, fuera capaz, a través de continuados

43 Andrew Hodges: *Alan Turing: The enigma*, Simon & Schuster, Nueva York, 1983.

44 Sylvia Nasar: *A beautiful mind*, Simon & Schuster, Nueva York, 1988.

45 Ver nota al pie n.º 18.

esfuerzos de investigación, de agregar mucho a sus logros anteriores. Sin embargo, aún estoy haciendo el esfuerzo y es concebible que con el hueco de alrededor de 25 años de pensamiento parcialmente alucinado que significó una especie de vacaciones, mi situación puede ser atípica. De modo que tengo esperanzas de ser capaz de alcanzar algo de valor a través de mis actuales estudios o con cualquier nueva idea que venga en el futuro.

Un aspecto interesante es el de la elección de las áreas de trabajo y de con quién trabajar. Las experiencias pueden ser muy diferentes. En los otros dos trabajos de este libro —especialmente en los referidos a sistemas dinámicos encontrarán enfoques y narraciones de tales experiencias.

Mi experiencia en estos rubros tiene cierta semejanza con la de Michael Atiyah (ver nota al pie n.º 18), con las notorias diferencias de calidad, áreas, personas involucradas, experiencias de vida, de países y momentos políticos. Pero puedo compartir todas las observaciones generales que hizo en una entrevista realizada en el Instituto de Matemática y Estadística de la Universidad de San Pablo, publicada en la revista *Matemática Universitaria*.<sup>46</sup> A continuación de la cita comentaré aspectos fácticos de mi peripecia personal.

Estaba en Cambridge, Reino Unido.

Gustaba de la geometría y decidí trabajar en geometría, y escogí a Hodge [William V. D. 1903-1975] como orientador porque él representaba una vertiente moderna. Terminó siendo una buena elección, porque mucha cosa estaba sucediendo en geometría algebraica en aquel momento, nuevas ideas en cohomología de haces venían de Francia y de Estados Unidos, era un buen momento para entrar en el área. Después fui a los Estados Unidos y conocí a Bott [Raoul, 1923-2005]. Sí, fue una buena elección, y tuve suerte. [...]

Durante su vida, su carrera, debe hacer varias elecciones. Muy frecuentemente es una cuestión de suerte si usted hace una buena o una mala elección. [...] Puede ir a un área que está en pleno desarrollo de muchas cosas nuevas o puede ir a una que está acabada, quiero decir, hecha, con pocos problemas difíciles por resolver. Entonces esas son cuestiones

46 «A poesia de sir Michael Atiyah». Entrevista concedida a Michael Forger e Severino Toscano Melo. *Matemática Universitária*, revista de la Sociedad Matemática Brasileira, n.º 48-49, 2010, 27-38. Trad. R. M.

de suerte. Es claro que después uno hace su propio camino. En el comienzo, está muy a la merced del entorno, de las personas a su alrededor. Hace unas elecciones, que ayudan, pero buena parte es suerte. [...]

Las personas que usted conoce bien cuando es joven son las personas con quien queda en contacto toda la vida. [28]

Esta es mi sencilla posible comparación con la experiencia de Atiyah. Incluiré al final referencias a mi trabajo matemático relacionadas con la cita de Ruelle al comienzo de la sección 3.2. El lenguaje matemático será informal, visto que este libro está pensado para lectores no especializados.

En 1982 acababa de salir de cerca de siete años en prisión (ver apéndice IV de mi trabajo sobre la historia de los sistemas dinámicos en Uruguay) y tenía una complicada situación familiar y personal. Decidimos recomponer mi vida académica. Antes de 1970 había estudiado bastante sobre sistemas dinámicos. Con el apoyo de Marcos Sebastiani, entonces en la Universidade Federal de Rio Grande do Sul (Porto Alegre) recommencé desde cero estudios de *bacharelado* y, como todo fue muy bien, en paralelo hice varios cursos de maestría. Escogí a Jorge Lewowicz y Artur Lopes como orientadores. Terminé la Maestría. Después fui a Rio de Janeiro a hacer el doctorado bajo la orientación de Jacob Palis y en 1991 fui a Moscú a trabajar con Yakov G. Sinai.<sup>47</sup> En Dubná (centro nuclear soviético) conocí a Nikolai Chernov<sup>48</sup> con el que hicimos varios libros e investigaciones. «Sí, fue una buena elección y tuve suerte.»

Ahora describo aspectos vinculados a la elección de la tesis de maestría que en definitiva marcaron mis estudios de los llamados billares caóticos a los que dediqué gran parte de mi producción académica. En la sección 5.4 de mi libro [DH, 145-151], se explican los aspectos técnicos con más detalles. Desde principios de los sesenta la escuela moscovita de Yákov Sinai estaba estudiando algunos aspectos vinculados a la dinámica de gases motivados en trabajos de Boltzmann de fines del siglo XIX: modelar la dinámica y propiedades de los gases con las leyes de la mecánica newtoniana. En particular explicar por qué mediciones hechas en

47 Yákov. G. Sinai (nacido en Moscú, 1935). Matemático y físico teórico. Con Ruelle, uno de los pilares de la vinculación entre ambas ciencias. Uno de los creadores de la moderna teoría ergódica. Fue galardonado con el Premio Abel en 2014.

48 Nikolai Chernov (1956-2014), alumno de Sinai, con tesis sobre ergodicidad y entropía en billares. En su breve vida fue un referente fundamental de esa área. Aprendí mucho de él e hicimos muchas cosas juntos. Desarrolló gran parte de su carrera en la Universidad de Alabama-Birmingham.



lugares diferentes de un recinto aislado, sin la acción de fuerzas externas, daban los mismos resultados. Boltzmann había resuelto este asunto introduciendo una «hipótesis ergódica».

Siguiendo ideas del físico Nikolai S. Krylov (1917-1947), se trataba de probar que esa propiedad motivada por algún tipo de desorden del movimiento era intrínseca al modelo: moléculas chocando entre ellas y con los bordes del recinto, sin perder energía. En 1970 Sinai publicó un trabajo fundamental que abrió una nueva rama de los estudios de sistemas con movimientos desordenados (metafóricamente se les dio el nombre de *caóticos*): «Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards», publicado en la revista *Russian Math. Surveys*. Había reducido el problema a analizar el movimiento inercial de un punto en un cuadrado (en realidad en la superficie de *un toro* matemático) con un obstáculo circular en su interior, y había estudiado las propiedades que generaban el desorden. Habían surgido los billares caóticos. Los billares matemáticos, por su analogía con el juego de mesa, habían sido estudiados ya desde los años 30, pero con enfoques diferentes y no relacionados con estos modelos físicos. Trabajos posteriores de Leonid Bunimovich (1947) y Maciej Wojtkowski (1948), ambos vinculados inicialmente a la escuela soviética, habían probado que otras mesas de billar podían tener dinámicas caóticas.

El trabajo de Wojtkowski, publicado en 1986, motivó conversaciones entre Anatoli Katok y Jorge Lewowicz.<sup>49</sup> Este último me sugirió que le metiera el diente al asunto utilizando sus técnicas justo cuando yo estaba precisando elegir un tema para mi tesis de maestría. ¡Providencial! Y me puse a refrescar más en detalle las técnicas de Lewowicz (que ya había estudiado quince años antes) y a estudiar por primera vez y completamente solo el trabajo de Sinai. No había en la región especialistas en estos temas y debía comprender en detalle las ideas de Sinai y Wojtkowski para obtener nuevos resultados con otros métodos. Un punto que complicó todo fue que la traducción del trabajo de Sinai tenía muchos errores (quizás también la versión rusa) en los cálculos, por lo que yo iba y venía dudando de todos y rehacía prácticamente el trabajo. Pude decir poco después que esto había sido una suerte porque me había

49 Sobre Jorge Lewowicz, ver información en el trabajo sobre la historia de los sistemas dinámicos en Uruguay. Anatoli B. Katok (1944-2018), también alumno de Sinai, importante especialista en sistemas dinámicos que desarrolló parte importante de su actividad en la Pennsylvania State University.

permitido meterme en un tema desconocido desde el comienzo. Todo sucedió como escribió Ruelle (reiteramos partes de las citas):

Para aliviar nuestra pobre memoria frecuentemente tomamos una hoja de papel, dibujamos diagramas o garabateamos fórmulas: la hoja de papel cumple la función de una memoria externa y hace buen uso de la competencia visual. [...] Después de algún tiempo de investigación el problema se nos hace familiar, o sea, las cosas han sido puestas en la memoria de largo plazo y podemos realizar un trabajo significativo sin una hoja de papel. ¡De hecho el trabajo creativo puede ser hecho inconscientemente! [...] Y entonces, más o menos de golpe nos convencemos que tenemos una buena idea. Pero, por la manera como funcionamos, la idea está en términos de símbolos abreviados. [...] Tenemos ahora que desempacar los símbolos abreviados, confiar que no serán en realidad una mala sorpresa y escribir las cosas con suficiente detalle como para que los colegas se convenzan.

En mi caso, yo mismo debía convencerme luego de garabatear no una, sino centenares de hojas de papel (que tenían detrás ¡diagramas de electroencefalogramas!). Y resultó. Como dato anecdótico esos defectos en la traducción del trabajo de Sinai (y en los trabajos de otros autores) fueron una de las motivaciones para escribir con Chernov una especie de compendio con nuevos resultados: el libro titulado *Chaotic billiards*, publicado en 2006 por la American Mathematical Society.

En la misma entrevista que motivó esa larga descripción de momentos de mi vida, Michael Atiyah se refiere a las relaciones entre los nuevos desarrollos matemáticos y sus aplicaciones. Viniendo de quien viene vale la pena conocerlo:

Las personas piensan, en general, que alguien desarrolla una teoría y luego halla algunas aplicaciones. No fue eso lo que sucedió, de forma alguna. Había algunos problemas particulares que venían de la topología, que me interesé en estudiar y descubrí que era posible obtener nuevos buenos resultados usando algunas ideas de Grothendieck [que había introducido la K-teoría en geometría algebraica]. Entonces percibí que era necesario desarrollar la teoría sistemáticamente. Ya teníamos las aplicaciones en mente antes de desarrollar la teoría, y sabíamos que los resultados que obtendríamos de la teoría serían muy poderosos, o sea, sabíamos que valdría la pena desarrollarla. El caso no era «desarrolle la teoría y entonces halle una aplicación», era justamente lo contrario, la aplicación

vino antes. La aplicación lo fuerza a sistematizar sus métodos y entonces usted desarrolla la teoría con ese propósito, pero sabiendo de antemano que eso va a resolver el problema.

Es una lección útil: las cosas no acontecen como las personas piensan, en orden lógico. No funcionan en orden lógico, pero sí indirectamente. [29]

Comentario aparte merece la relación con las religiones. Los pocos datos registrados indican que entre los científicos de Estados Unidos la creencia en un dios personificado (*personal God*), como el del cristianismo, ha venido decreciendo a lo largo del siglo *xx*.<sup>50</sup> En el mismo documento se registra que los matemáticos parecen ser más religiosos que la mayoría de los demás científicos. El porcentaje de matemáticos que creen en Dios y en la vida ultraterrena es dos veces mayor que el de los físicos. El porcentaje de miembros de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos que se declaran creyentes es bastante bajo: más bajo entre los biólogos que entre los demás científicos (5,5 %; 14,3 entre los matemáticos, 7,5 % entre los físicos). Otros datos indican que los registros son más altos, pero siempre con esa diferencia de dos a uno a favor de los matemáticos sobre los físicos. Haciendo una reinterpretación de esos datos, se podría pensar que los matemáticos y los físicos tienen, en promedio, relaciones distintas con la realidad. No tengo una percepción personal sobre este interesante asunto ni he relevado información de las centenas de colegas que conozco.

Permítaseme hacer ahora un comentario de orden personal: la matemática trae humildad. Es muy difícil decidir sobre la veracidad de un resultado aparentemente simple y claro. No se encontrará un matemático escribiendo que la solución final, la teoría unificadora que soluciona todo, está a mano. Más bien estamos esperando sorpresas que nos muestren nuevas riquezas por explorar, que nos indiquen cómo probar un resultado que atisbamos. La experiencia indica que esto sucede. Para un matemático estas sorpresas son más extrañas de lo que normalmente se imagina, por lo que nuestro trabajo es cauteloso, lento y, en este sentido, humilde.<sup>51</sup>

50 E. J. Larson y L. Witham: Correspondence «Leading scientists still reject God», *Nature*, 394 (1998), 313.

51 En Nimier, Jacques: *Les Mode de relations aux mathématiques: attitudes et représentations*, Méridiens Klincksieck, París, 1988 (se puede consultar en Internet Archive Books), hay interesantes enfoques sobre estos aspectos psicológicos, tanto en los matemáticos como en la enseñanza de la disciplina.

### 1.3.5. EL RIGOR Y EL LENGUAJE DE LA MATEMÁTICA

De tiempo en tiempo, el asunto de cuán *rigurosa* debe ser la matemática entra en cuestión. La opinión generalizada en la comunidad matemática es que la búsqueda de nuevas ideas, de nuevas relaciones, etcétera, corre por un andarivel intuitivo y hasta inconsciente del tipo al que ya nos hemos referido. Los intentos de transformar en norma esa manera informal de trabajar, realizados por matemáticos *comunes*, y dejar de ser tan compulsivo en los detalles de los argumentos han llevado frecuentemente a resultados desastrosos. No toda la investigación matemática anda por aquellos niveles y, por el contrario, la aplicación de métodos estándar a problemas estándar o el encontrar buenas y eficaces maneras de relacionar áreas o métodos considerados hasta entonces separadamente constituyen gran parte de los avances de la disciplina, a los que se dedica gran parte de los matemáticos. Lo que los humanos llamamos *matemática*, la ciencia desarrollada a lo largo de la evolución intelectual de los hombres, incluye la formalización, la organización en formas lógicas reproducibles, en fin, lo que se da en llamar *pensamiento riguroso*.

Observamos desde ya que muchas de las consideraciones que se hacen sobre la construcción de la disciplina pueden aplicarse al proceso creativo personal. A estos temas nos hemos referido en la sección anterior.

Algunos conceptos sencillos, cuyos significados más o menos exactos todos conocen, han recibido un tratamiento riguroso a través de la matemática. Por ejemplo, para nombrar unos pocos: número, longitud, área, volumen, cambio, aleatoriedad, computación y computabilidad, simetría, movimiento, energía, fuerza, espacio, continuidad, infinito. ¿Cabe pedirle a la matemática que pierda rigor al analizar tales conceptos? O, por el contrario, ¿no es ese rigor, y la precisión ganada, lo que le da contundencia y utilidad a la disciplina?

En un artículo de 1993, Jaffe y Quinn advierten que la interacción entre física y geometría podría ser peligrosa para los padrones de rigor en la matemática. Ese artículo abrió una interesante polémica en que participaron varios de los matemáticos más relevantes del momento (Michael Atiyah, Armand Borel, Morris W. Hirsch, Saunders Mac Lane, David Ruelle, Karen Uhlenbeck, René Thom, Edward Witten, Christopher Zeeman, entre otros) y motivó un artículo especial de William P.

Thurston.<sup>52</sup> La respuesta de los autores originales (aparecida en abril de 1994) está llena de metáforas, pero es clara:

Estamos de acuerdo con él [Atiyah] en que la supresión de la especulación condenaría a las matemáticas a «una vejez artrítica». [...] En la misma línea, apreciamos la observación de Thom de que el «rigor» recuerda a la frase «rigor mortis».

Es verdadero que la matemática que se hace rigurosa con éxito está muerta, y la vida real está, como sugiere Atiyah en la especulación. Podríamos pensar en la matemática como en un árbol: solo las hojas y una fina capa alrededor del tronco y las ramas están realmente «vivas». Pero el árbol está sostenido por una gran literatura de madera «muerta» publicada. Nuestra posición es que el material debe estar realmente sano antes de dejarse morir e incorporarse a la madera. En esta imagen, la «naturaleza autocorrectiva de la ciencia» implica que si se publica demasiada madera podrida, la rama cae y el árbol vuelve a empezar.

En realidad, parecen haberse dado períodos pendulares de expansión en los cuales se suceden etapas con progresos extraordinarios con cierto relajamiento de los criterios de rigor, seguidas de etapas en que se trata de digerir y ordenar sobre bases sanas los avances precedentes, para asegurar el progreso posterior.<sup>53</sup> La matemática es simultáneamente

52 Jaffe, Arthur & Quinn, Frank: «Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics». *Bulletin of the A.M.S.*, 29 (1993), 1-13. Michael Atiyah *et al.*: «Responses to "Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics"», en A. Jaffe and F. Quinn. *Bulletin of the A.M.S.*, 30 (1994), 178-207. Thurston, William P.: «On proof and progress in mathematics». *Bulletin of the A.M.S.*, 30 (1994), 161-177. Trad. R. M.

53 Se podría decir que fueron necesarios Cauchy y Weierstrass para organizar la creatividad desbordante de Euler. Leonhard Euler (Basilea, 1707-San Petersburgo, 1783) fue el matemático más prolífico del siglo XVIII. Empezó estudiando liturgia y hebreo porque su padre quería que siguiera su carrera de pastor calvinista. Se estableció en San Petersburgo, primero entre 1727 y 1741, donde escribió manuales de matemática escolar, dirigió el Departamento de Geografía de la Academia, fue comisario de pesas y medidas y dio a luz su célebre trabajo de mecánica. Se incorporó a la Academia de Berlín en 1741, pero en 1766 vuelve a Rusia, invitado por Catalina II, la Grande. En todas las ramas de la matemática se encuentra su nombre y sus contribuciones. Introdujo los símbolos de  $e$ ,  $\pi$  e  $i$ . Auguste-Louis Cauchy (París, 1789-Sceaux, 1857) fue monárquico empedernido en tiempos de revoluciones republicanas, y vivió también en Suiza, Turín, Praga. Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (Ostenfeld, Westfalia, 1815-Berlín, 1897) nunca se doctoró y se orientó más bien hacia la enseñanza. Cuidadoso y ordenado, fundamentó rigurosamente la matemática de su tiempo (definiciones de límite, continuidad, funciones continuas sin derivadas, etcétera).

invención y prueba y esto viene de la cooperación entre la intuición y la lógica.

Poincaré relaciona el tema del rigor con el de las formulaciones breves. A principios del siglo xx escribía:<sup>54</sup>

Desde mediados del siglo pasado, los matemáticos han tratado con ahínco creciente de alcanzar la certeza absoluta; tienen razón y esta tendencia se acentuará cada vez más. En matemáticas la certeza no es todo, mas sin ella no hay nada; una demostración que no sea rigurosa, es la nada. Creo que a nadie se le ha de ocurrir discutir esta verdad. Pero si se la tomara demasiado al pie de la letra, se podría inferir que antes del año 1820, por ejemplo, no había matemática, esto sería excesivo; los geómetras de ese entonces sobreentendían voluntariamente lo que nosotros explicamos mediante prolijos discursos. [29]

[...] Es hacia la economía del pensamiento que se debe tender, no es suficiente dar modelos para imitar. Es preciso que se pueda después de nosotros abandonar esos modelos y en lugar de repetir un razonamiento ya hecho, resumirlo en algunas líneas. Y es en esto que se ha logrado el éxito varias veces: por ejemplo, existía una clase de razonamientos que se parecían y que se encontraban en todas partes; eran perfectamente rigurosos, pero eran largos. Un día se imaginó la palabra uniformidad de la convergencia y esta sola palabra los ha tornado inútiles; ya no hay necesidad de repetirlos puesto que se sobreentienden. [29-30]

En la misma línea el matemático inglés Sylvester<sup>55</sup> consideraba en 1876 que los enunciados generales son más simples que los casos particulares. (Y de allí sacaba una conclusión dialéctica: una idea matemática no debería estar petrificada en un ámbito axiomático formalizado, sino que debería ser considerada como un río que fluye.) Poincaré remataba: «¿Por qué se atribuye tanto valor a la invención de una transformación? pues porque de un solo teorema nos permite sacar diez o veinte; tiene el mismo valor que un cero colocado a la derecha de un número entero».

Ahora bien, lo que llamamos elegancia matemática es la simplicidad (o la economía, al decir de Poincaré) que se busca en la formulación de un

54 En *Ciencia y método*. Libro primero «El sabio y la ciencia», capítulo II. «El porvenir de la matemática».

55 James Joseph Sylvester (1814-1897): uno de los más grandes algebristas de la época (teoría de determinantes, de los invariantes algebraicos; teoría de números y formas canónicas). Trabajó en la Escuela Militar de Woolwich (1855-1870), en John Hopkins University (Baltimore, 1870-1883) y en Oxford University (1883-1894).

resultado (último teorema de Fermat) o en las ideas detrás de una teoría. Dirac<sup>56</sup> destacando su coincidencia de opiniones con Schrödinger escribió en 1977: «Para nosotros era una especie de acto de fe que cualesquiera ecuaciones que describan leyes fundamentales de la naturaleza tienen que encerrar una gran belleza matemática». En el epígrafe que escribió en la Universidad de Moscú (que les solicita a los visitantes ilustres que dejen una opinión breve) escribió «Una ley física tiene que poseer belleza matemática».

Más abstractamente, en la misma Universidad de Moscú, escribió Hideki Yukawa, pionero de la teoría de las fuerzas nucleares fuertes: «La naturaleza es, por esencia, simple». Y David Ruelle: «Uno puede entender la atracción de tal simplicidad para el cerebro humano [que es] tan limitado en su capacidad de atención y en su memoria».

De una manera algo distinta se plantea la cuestión del rigor en lo que respecta a la enseñanza de la matemática; o para decirlo mejor, el problema del rigor en la enseñanza debe ser mirada con un filtro de colores distinto, porque, a pesar de que se presenta de manera distinta, la cuestión es la misma. Ver capítulo 2 de mi libro [DH, 79-101].

La búsqueda de regularidades, significados e interpretaciones tiene una importancia obvia para la supervivencia. Todos reconocemos en estas propiedades de la mente uno de los rasgos distintivos de la especie humana. En esas búsquedas parecemos finalmente mejores que las computadoras. En palabras de Ruelle (ver nota al pie n.º 29): «El cerebro humano es incansable en “interpretar” los datos que recibe. Esto puede bordear lo ridículo cuando buscamos regularidades aritméticas en los dígitos de un número de teléfono que recordamos con dificultad debido a nuestra pobre memoria».

Si este problema tiene implicancias respecto de la ciencia matemática, las tiene aún más desde el punto de vista de su aprendizaje. Los profesores —especialmente los maestros porque estas cuestiones se plantean de manera preponderante en la enseñanza inicial— debieran conocer bien la importancia que estas funciones cerebrales tienen también en el aprendizaje de la matemática.

56 Paul Adrien Maurice Dirac, inglés (1902-1984), Erwin Schrödinger, austríaco (1887-1961). Fueron con Louis Victor de Broglie y Werner Heisenberg, de los principales creadores de la mecánica cuántica. Recibieron el Premio Nobel de Física en 1933.



La matemática tiene la forma de un lenguaje. Wigner<sup>57</sup> escribió en 1960, en un trabajo titulado de manera un tanto críptica *La no razonable efectividad de la matemática en las ciencias naturales*: «La afirmación de que las leyes de la naturaleza están escritas en el lenguaje de la matemática fue debidamente hecha hace 300 años (le es atribuida a Galileo); es más cierta ahora que nunca».

Se puede decir que, sin ese lenguaje, los grandes avances de la física o la biología de este siglo hubieran sido inconcebibles. A pesar de que muchas veces parece que las hazañas de la matemática son la solución de algún problema famoso, en realidad, la historia de la matemática muestra que son su lenguaje, sus métodos y conceptos, los que le dan valor y uso diario.

Esta constatación de que la matemática es en realidad un lenguaje que maneja información muy formalizada, se relaciona directamente con uno de los puntos arriba planteados, a saber, que usamos diversas funciones del sistema nervioso central para pensar matemáticamente, para *hacer* y para *explicar* matemática. En particular, para muchos, el lenguaje es la esencia del pensamiento. Sin embargo, Einstein llegó a escribir en un texto ya citado,<sup>58</sup> respondiendo a «Una pesquisa sobre los métodos de trabajo de los matemáticos» promovida por la revista *L'Enseignement Mathématique* (1902-1904):

Las palabras o el lenguaje, tal como se les escribe o habla, no parecen jugar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos del pensamiento son ciertos signos e imágenes más o menos claras que pueden ser «voluntariamente» reproducidas y combinadas.

Y agregaba, para colmarnos de sorpresa, que «esos elementos son, en mi caso, de tipo visual y algunas de tipo muscular. Las palabras

57 Wigner, Eugene Paul: «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences». *Communications in Pure and Applied Math.* 13, 1-14 (1960). Eugene Paul Wigner, de origen húngaro (1902-1995), recibió el Premio Nobel de Física en 1963 por sus contribuciones a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales, particularmente a través del descubrimiento y aplicación del principio de simetría (teoría de grupos aplicada a la mecánica cuántica). Colaboró con E. Fermi en la construcción del primer reactor atómico (Chicago).

58 Estas respuestas de Albert Einstein constan como apéndice en el libro de Jacques Hadamard, escrito en 1945. Ver notas al pie n.º 36 y 38.



convencionales u otros símbolos deben ser buscados laboriosamente solo en una segunda etapa», cuando se quiera comunicarlo a otros.

En cualquier caso, el secreto del éxito en la investigación es el manejo de los fracasos. Pues, si uno nunca fracasa, es como si las tareas que se puso fueran demasiado fáciles. La investigación interesante debe tener una cuota de riesgo. A un nuevo trabajo le preguntamos: ¿Son los resultados nuevos? ¿Cuán adelante van en relación con la literatura existente? ¿Es claro y está bien escrito? ¿El autor está familiarizado con el trabajo existente en el área y de la relación de sus resultados con otros del área? ¿Cuán sorprendentes son los resultados? ¿Cuán elegantes son los métodos? ¿Se han introducido nuevos métodos?

Lo que damos en llamar la dialéctica de la naturaleza aparece relegada, en las exposiciones sistemáticas (las teorías científicas), en parte a aquellos postulados vinculatorios. Estas son las teorías que se enseñan y sobre las que se *para* el investigador para descubrir nuevas relaciones u objetos y, por tanto, para eventualmente encontrar hechos o deducciones que contradicen aspectos de la teoría.

Esta dialéctica se da también en los múltiples frentes abiertos por las investigaciones a través de los cuales la infinitamente rica realidad se va colando permanentemente. Así los elementos contrapuestos se van incrementando hasta la medida de provocar saltos y necesarias modificaciones y perfeccionamientos de los principios. En este caso es que se dice que la teoría ha sido superada, que corresponde *pararse* sobre los nuevos principios.

La buena elección de los postulados vinculatorios solo es verificable en la práctica humana, en las relaciones directas con la naturaleza (que incluye las relaciones entre los seres humanos, que son parte de ella). La efectividad de las vinculaciones, de las teorías científicas, puede merecer muchas disquisiciones filosóficas, epistemológicas, antropológicas y otras *icas*. Sin embargo, no puede dudarse de la inmensa capacidad que le han dado a la especie humana para desarrollarse, para mejorar su control de la naturaleza, para satisfacer su insaciable sed de conocer.

Por tanto, esa buena elección ha estado vinculada a numerosos grandes saltos del conocimiento humano. Su fecundidad depende del tipo de problemas que se enfrentan en un momento concreto, de su capacidad de arrojar luz sobre diversos sectores de la teoría o teorías adyacentes. Por ejemplo, las teorías ptolomeica y copernicana explicaban (al surgir esta) los mismos fenómenos con grados parecidos de exactitud; pero es imposible olvidar que la (por ello) llamada revolución copernicana tuvo un profundo carácter inventivo y fertilizante sobre otros amplios

sectores del conocimiento y de la ideología. Incluso, el hecho de que Galileo trabajara sobre una Tierra plana y *se equivocara* al ignorar el rozamiento de los objetos en movimiento fue lo que permitió el enunciado del principio de inercia que dio pie a la creación de la mecánica tal como se le usó sin ningún tipo de tribulación durante casi trescientos años (y la seguimos usando para casi todos los efectos prácticos).

Por último, no se puede olvidar que los desarrollos de la experimentación y de los aparatos de observación son dependientes de técnicas que muchas veces poco tienen que ver con la teoría científica a que se aplican sus resultados y descubrimientos. No hay que explicar cómo estos colaboran de manera fundamental en el mejor conocimiento de los fenómenos naturales y, por tanto, en la conformación de los fundamentos de las teorías.

Quizás no concuerde enteramente con el modo en que están escritas algunas ideas de la siguiente transcripción,<sup>59</sup> pero creo que globalmente son razonables para terminar estas notas:

Tal vez sea hora de intentar sacar algunas conclusiones cautelosas, recordando que la cuestión de la naturalidad de nuestra matemática no es un problema muy bien planteado. No se debe sobrevalorar la influencia de los accidentes históricos: algunos conceptos como los de los números naturales, o de los grupos, tendrían que aparecer tarde o temprano en el desarrollo de la matemática humana. Sin embargo, resulta sorprendente que algunas muy buenas ideas matemáticas no han sido proporcionadas por la lógica interna del desarrollo matemático, pero han venido del exterior. Son concebibles otras circunstancias externas que habrían conducido a matemáticas diferentes. ¿Hasta qué punto? Mi opinión es que la matemática humana podría ser bastante diferentes de lo que son.

[...] Además, creo que la naturalidad de nuestra matemática no se debe tanto a una necesidad lógica como a la naturaleza peculiar de la mente humana. Me refiero a la forma en que nuestro «pensamiento lógico» está ligado a la intuición visual y ligado a «lenguajes naturales» ilógicos. Me refiero también a nuestra idiosincrática afición por las formulaciones breves que llamamos «elegantes» y por la manera repetitiva de argumentar lo cual calificamos de «naturales».

59 Ruelle, David: «Is our mathematics natural? The case of equilibrium statistical mechanics». *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 19, julio de 1988, pp. 259-268. Trad. R. M. El poema, en español en el original.

Esto no quiere decir que la matemática sea una construcción arbitraria. Por supuesto que no: es un objeto estructurado y, en cierto sentido, no es más que estructura. Esa estructura no está hecha para que la entendamos, pero la mente humana puede aprovecharla: eso es lo que hace que la matemática sea tan fascinante. Nos gusta pensar que el descubrimiento de la estructura matemática es como un camino trazado por los dioses. Pero, como escribió Antonio Machado, quizá no haya camino:

Caminante, son tus huellas  
el camino y nada más;  
caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.

## 2. UN MATEMÁTICO DISCURRE SOBRE LA EDUCACIÓN TEMPRANA<sup>60</sup>

---

<sup>60</sup> Este trabajo debe mucho al espacio que me dieron desde comienzos de este siglo la editorial y la revista *Correo del Maestro*, México, para ir reflexionando y publicando sobre estos temas. En particular, su principal responsable, Virginia Ferrari, fue un incentivo permanente para profundizar y polemizar. Anteriormente la Dra. Ana María Ferrari me había introducido en las dificultades de la matemática en niños a través de estudios hechos desde su especialidad, la pediatría. Últimamente el trabajo conjunto con la Dra. en Pedagogía Marianella Maxera me permitió precisar conceptos y estudiar temas cercanos. Varios miembros del Centro Interdisciplinario en Cognición para la Enseñanza y el Aprendizaje (CICEA), en particular, uno de sus coordinadores, Alejandro Maiche, me permitieron un acercamiento más profundo a temas de las ciencias cognitivas. A todos ellos mi agradecimiento.



## 2.1. INTRODUCCIÓN

Nunca imaginé que mis preocupaciones por el aprendizaje y la enseñanza de la matemática terminaran convergiendo con una de las preocupaciones principales de nuestras sociedades y gobiernos: la situación de la niñez.

En nuestros países, en particular en Uruguay, el hecho de que el crecimiento endógeno de la población se esté dando en los sectores más pobres, que la cantidad de personas de estos sectores se mantiene o crece, hace que haya cada vez más niños pobres que no recogen los frutos de muchas políticas sociales y educativas.

Mis estudios y lecturas más recientes me han llevado a la firme convicción de que es al comienzo del ciclo escolar (4-6 años de edad) cuando se producen grandes diferenciaciones en el aprendizaje, la apreciación y la consideración dada a las distintas disciplinas. Es en esa etapa que la matemática comienza a ser un objeto de temor, rechazo o... prestigio.

Si así fuera, el enfocar los problemas del aprendizaje y la enseñanza de la matemática a edad temprana pasa a ser un tema que debería incluirse en los asuntos a tratar cuando se considere a la primera infancia como un problema social global. De todo esto trata este trabajo.<sup>61</sup>

He dedicado algunas secciones (2, 4, 5) a tratar temas directamente relacionados con la disciplina: cuáles son las posibles dificultades que surgen en los primeros años de la enseñanza escolar (digamos cuando el niño tiene 6-8 años) y los conocimientos y métodos que me parecen que deberían estar parcial o totalmente incorporados por los alumnos al fin del ciclo escolar (cuando tiene 12 años); le facilitarían su uso en la vida cotidiana y avances posteriores en la disciplina.

El hecho de que sea un matemático no especialista en educación escolar me hace andar con prudencia y audacia simultáneamente. La

---

61 Cuestiones algo más técnicas, en la medida de lo posible, han sido pasadas a notas al pie de página.

desvalorización de la ciencia en general y el plantear que la matemática, en particular, es una disciplina muy difícil, casi inaccesible, son ideas que deben ser combatidas. Es bueno que los matemáticos hablemos de esos temas, aunque toquemos asuntos que conocemos poco y en los que podemos equivocarnos, con audacia y prudencia. En estos tiempos en que la inmediatez y la falta de solidaridad domina en grandes sectores de la sociedad («hacé la tuya», «vivila bien», «no mires para los costados», etcétera), el promover una disciplina que piensa casi todo en el largo plazo y en el trabajo con muchos colegas es una buena colaboración en el combate a esas mezquindades sociales.

En este sentido, estas notas no son un trabajo de investigación ni buscan —por carencias del autor— lo que ahora se denominan evidencias (numéricas, estadísticas, resultados de encuestas), sino más bien un ensayo, reflexiones, experiencias de vida académica y personal sobre estos problemas de la educación de la disciplina.

Aun así, he recurrido al conocimiento y la exposición de *evidencias* empíricas en asuntos que se refieren a mis convicciones. Muchas de ellas comparan resultados entre niños y niñas,<sup>62</sup> pero resulta claro que la matemática es complicada para todos, aunque el asunto se agrava respecto de las niñas. Esta es una de las razones para explicar la constatación de la poca participación de mujeres en estudios de ciencias exactas (física, matemática) y profesiones en que esas ciencias ocupan un lugar muy importante (tecnologías, ingenierías), agrupadas en español bajo la sigla CTIM.<sup>63</sup> Estos temas han preocupado a todos los que promovemos la mayor igualdad posible de acceso al conocimiento, a los cargos y en particular los que implican toma de decisiones. Ellos son una parte indisoluble del reconocimiento de que, a pesar de las diversas diferencias biológicas, todos tenemos el derecho de avanzar de manera semejante y en el mayor respeto a la diversidad.

Por ello, debemos hacer campaña por el reconocimiento en general de las ciencias y los estudios profundos y en particular de la matemática:

62 No soy de los que transforman estos estudios cuantitativos en «palabra de Dios». Las preguntas que se realizan pueden estar sesgadas, el momento o entorno socio-cultural y hasta físico pueden condicionar las respuestas. Pero, cuando hay tantos resultados semejantes en distintos países sobre cuestiones muy parecidas, ellos no se pueden ignorar. Se trata de darle un contexto cualitativo, analítico, sociocultural, que muchas veces falta en esos estudios.

63 Normalmente se las denomina con la sigla en inglés STEM (science, technology, engineering, mathematics). Al final de la sección 3, hacemos comentarios sobre esta temática.

un movimiento *matematicista*. Tratar de convencer de que junto con dificultades inherentes a la naturaleza, a la idiosincrasia de la disciplina, existen estereotipos que vamos asimilando desde la infancia: que es solo para gente muy inteligente, que las niñas no son buenas en matemática, que conocer la estructura y saber cómo calcular con fracciones no sirve para nada en la adultez. Hay cosas que se van asentando en la sociedad y es difícil borrarlas. Esto es notorio en diversos aspectos culturales, de costumbre e ideológicos. Por ejemplo, el modo de hablar la misma lengua (el mexicano se distingue del hondureño; el argentino de Buenos Aires o Córdoba del uruguayo), en las ropas que se usan, el culto al dinero y las compras, etcétera. Algunas de estas características y costumbres suelen asociarse a las formas de producción, al sistema económico, a características ideológicas de cada país. En muchos casos esta asociación es valedera; en algunos, no. En esta última categoría cae el tema que nos ocupa.

Habría que educar desde temprano para romper prejuicios y abrazar, querer, lo abstracto, lo cual al fin y al cabo es una de las mayores virtudes del cerebro humano. Gracias a ella, pasamos de contar ovejas con piedras —un método sencillo, pero brillante para asegurarse de que ninguna se pierda— a imaginar conceptos como el cero y a construir sistemas complejos, como por ejemplo la transmisión electrónica de información financiera: en el cajero automático no hay que gritar «Quiero retirar cinco mil pesos», la información del pedido y la respuesta son mensajes escondidos, encriptados, que van de unas máquinas a los bancos y estos dicen «Sí, dale, que tiene saldo». La matemática es mucho más útil de lo que se cree. Si los seres humanos no fuéramos capaces de pensar abstractamente, seríamos poco más que unos simios avanzados.



## 2.2. MALAS INFLUENCIAS

En las secciones 2.3 y 2.4 del capítulo sobre «Enseñanza y aprendizaje de la matemática» de mi libro *La dimensión humana de la matemática*, he tratado con algún detalle sobre las dificultades y el prestigio de la disciplina y sobre la influencia del subdesarrollo y las deficiencias en la formación de los profesores en el incremento de esas dificultades. También hice referencia en el capítulo 1 a rasgos de nuestros tiempos que conspiran contra nuestra disciplina: poner énfasis en el corto plazo, en los resultados inmediatos.

Haré ahora referencia a una investigación que parecería que tiene poco que ver con la *conspiración* contra nuestra disciplina, pero a los que asigno mucha importancia evolutiva. Se refiere a la modificación a lo largo de muchos decenios del uso de ciertas expresiones y palabras en el lenguaje. Estarían mostrando el incremento de opiniones más individualistas, de una visión menos científica de la realidad. Este es un aspecto que no tiene que ver directamente con la disciplina, pero influye en los temores y amores a ella.

Con el sugestivo título de *El auge y la caída de la racionalidad en el lenguaje*,<sup>64</sup> que emula el título de una historia de la Alemania nazi por William L. Shirer (*El auge y la caída del Tercer Reich*), un grupo de científicos, tres neerlandeses y un estadounidense, estudió el lenguaje de millones de libros aparecidos entre 1850 y 2019, que constan en la base Google Ngram. Hicieron lo mismo con los artículos del mismo período del periódico *New York Times* (fundado en 1851).

Analizaron la frecuencia de las cinco mil palabras más usadas en aquellos libros en inglés y en español (discriminando libros de ficción y no ficción). Las clasificaron en las relacionadas con la racionalidad, la

---

64 Marten Scheffer, Ingrid van de Leemput, Els Weinans and Johan Bollen: «The rise and fall of rationality in language». *Proceedings of the National Academy of Sciences: Psychological and Cognitive Sciences*, 118 (51), e2107848118, 16 de diciembre del 2021.

ciencia y la cuantificación (por ejemplo, «tecnología, física, determinar, conclusión», etcétera) y las relacionadas con la intuición, la creencia, la espiritualidad y la sabiduría («imaginar, sospecha, sentir, creer», etcétera). Los resultados en todas las categorías fueron del mismo tipo.

Mostraron que las primeras aumentaron sistemáticamente después de 1850, mientras que las segundas disminuyeron.

Este patrón se invirtió en la década de 1980, y este cambio se aceleró alrededor de 2007, cuando en todos los idiomas la frecuencia de las palabras relacionadas con los hechos disminuyó, mientras que el lenguaje cargado de emoción aumentó, una tendencia que se acompañó de un cambio del lenguaje colectivista al individualista. [Esto se refleja], entre otras cosas, en la proporción de pronombres singulares y plurales, como «yo»/«nosotros» y «él»/«ellos». También mostraron que esos resultados se repiten en «las tendencias de los términos de búsqueda correspondientes en Google, lo que respalda la idea de que los cambios en el lenguaje de los libros reflejan en parte los cambios en los intereses».

Sacaron algunas conclusiones sociológicas e ideológicas:

El auge de la argumentación sin base factual tal vez pueda entenderse como parte de un cambio más profundo, [...] que estamos viviendo un período histórico especial. Mostraría en las últimas décadas un cambio sustancial: «el interés del público, ha pasado de lo colectivo a lo individual, y de la racionalidad a la emoción».

¿Qué tiene que ver todo esto tan interesante con nuestro tema? Pues que la matemática cae en la categoría de lo que está perdiendo interés. Y esa constatación influye en la opinión y la práctica colectivas, la que se transmite a los niños, de manera semejante al modo de hablar o de vestir o de peinarse.

### 2.3. APORTES GENERALES EN URUGUAY

Me ha parecido muy útil traer a colación un resumen de los estudios uruguayos sobre *Aportes de las ciencias cognitivas a la educación*, contenidos en un libro aparecido hace pocos años.<sup>65</sup> Contiene diversos enfoques y trata varias áreas del conocimiento relacionadas con una temática tan importante. Resaltamos que contiene dos trabajos relacionados con nuestro tema: *Claves cognitivas para enseñar matemática en la escuela*, por Dinorah de León y Alejandro Maiche (pp. 255-287) y *Dificultades en la adquisición de las matemáticas y discalculias*, por Sergio Dansilio (pp. 289-309).

Del primer trabajo extractamos estos aspectos que vienen al caso:

Parece claro que una gran cantidad de personas adultas [...] no cuentan con las herramientas básicas para comprender buena parte de los temas que se suelen discutir en las campañas políticas y, por consiguiente, son más vulnerables a las campañas políticas basadas en información falsa o engañosa (las llamadas noticias falsas). [...]

La matemática es una forma de pensar en la que la razón y los argumentos adecuados toman protagonismo. Por eso, la educación matemática es un factor clave para el fortalecimiento de la democracia. La equidad en el aprendizaje de las matemáticas es la piedra angular de una sociedad libre. Disuade a quienes quieren dominar a la gente y, por esta razón, la democracia debe abordar los malos resultados en matemáticas como un problema fundamental, un ataque real a sus bases. De esta manera, promover la educación matemática en las primeras etapas de la vida no solo contribuye a la equidad, sino que también ayuda a crear ciudadanos y ciudadanas empoderadas y capaces de participar en buena

---

65 Verónica Nin y Juan Valle Lisboa, coordinadores: *Aportes de las ciencias cognitivas a la educación*. Universidad de la República, Montevideo, 2023. Hay versión en internet, por ejemplo: [https://ipes.cfe.edu.uy/images/novedades/novedade\\_externas/2024/Neurociencias\\_CICEA.pdf](https://ipes.cfe.edu.uy/images/novedades/novedade_externas/2024/Neurociencias_CICEA.pdf)

parte de las discusiones que nuestras sociedades tienen planteadas hoy y aún más en el futuro próximo.

También se refieren al carácter predictivo del aprendizaje de la matemática; ayuda a conocer sobre las habilidades futuras de las personas:

El conocimiento cuantitativo y numérico específico es más predictivo de logros posteriores que las pruebas de inteligencia o capacidad de memoria. [...] Por ello, mejorar la capacidad matemática desde el principio (cuando es más fácil de hacer) se debe considerar una política de equidad en el futuro, porque el conocimiento matemático será un factor determinante para la vida futura.

Más recientemente, las Academias Nacionales de Ciencias (ANCIU), de Economía (ACADECO), de Ingeniería (ANIU) y de Medicina (ANM) constituyeron un Grupo Interacadémico para la Educación Matemática (GIEM) que en julio del 2024 elaboró un informe<sup>66</sup> cuyo centro estuvo en la «Importancia de la matemática y de su enseñanza» y en dar opiniones sobre «“Transformación educativa”. Competencias». Las consideraciones sobre este último punto tienen particular actualidad al momento de escribir estas líneas (segundo semestre, 2025). Incluye también secciones sobre el contexto cultural y social de la enseñanza y su vinculación con STEM, que mucho tienen que ver con los temas de esta nota.

Respecto de la «Enseñanza de la matemática y contexto cultural y social», ese es el título de una de las secciones, se hacen consideraciones que me interesa rescatar, porque condicionan opiniones sobre algunos sistemas de evaluación muy en boga:

Es muy conocido el indicador PISA, elaborado por la OECD,<sup>67</sup> que se menciona frecuentemente a nivel periodístico, pero cuya aplicación ha

66 Enrique Barrios (ANM), Cecilia Calvo, Héctor Cancela (ANIU) y Roberto Markarian (ANCIU): *Enseñanza de la matemática en Uruguay: algunas reflexiones*. Cecilia Calvo, uruguaya radicada en Barcelona, colaboró de forma muy importante. Ricardo Pascale, designado por la ACADECO, falleció en el período de elaboración del informe. Accesible en <https://anciu.org.uy/noticias/item/199-ensenanza-de-la-matematica-en-uruguay-algunas-reflexiones.html>

67 Organisation for Economic Cooperation and Development (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos), tiene treinta y ocho miembros; incluye casi todos los países de Europa occidental; de América, Canadá, Cosa Rica, Colombia, Chile, Estados Unidos, México; Japón, Israel, Turquía, y otros.

recibido también diversas críticas y sus efectos prácticos son polémicos. Entre las críticas principales, se menciona que tras más de 20 años de aplicación, los resultados medidos no han mejorado globalmente ni en los países OECD ni en los otros participantes, e incluso han decaído. Por ejemplo, Finlandia, durante mucho tiempo considerada como una referencia, ha sufrido bajas importantes en los resultados obtenidos en el último ciclo de la prueba. Estados Unidos, que ha bajado su performance en matemática, ha mejorado su posición en la clasificación, dado que otros países han sufrido bajas de resultados aún mayores.

Un elemento mencionado en la literatura es que tanto el diseño de la prueba como las conclusiones de su aplicación han tendido a ignorar las diferencias de contexto social y cultural entre los distintos países, y, por lo tanto, las recomendaciones realizadas no necesariamente han logrado efectos favorables. El clasificar algunos países, tales como Finlandia, Corea del Sur o Canadá como «casos de éxito», han llevado a su idealización y a copiar algunos aspectos específicos de su política y práctica educativa sin consideración con su contexto, con resultados que pueden ser contraproducentes (Enchikova et al, 2022).<sup>68</sup> Creemos que las características de las experiencias usualmente consideradas exitosas dependen de tal manera del contexto social y cultural que no son extrapolables en forma directa; y aunque es necesario conocer tales experiencias puede ser potencialmente engañoso buscar una solución simple para un problema complejo. [...] Es inútil pretender que una sociedad se comporte con patrones culturales de otra para encajar con las supuestas experiencias exitosas de ese otro sitio. En cualquier sistema, introducir cambios y ver resultados requiere varios lustros, así como una inversión adecuada y una planificación correcta (Taylor et al., 2023).<sup>69</sup> Quizás la única recomendación global adecuada es profundizar la formación del personal docente, con visión crítica y capacidad para generar soluciones que se adapten a las realidades nacionales, e involucrarlos en el diseño e implementación de los cambios deseados.

68 Enchikova, E. et al. (2022), «Does PISA help fighting for social equity?». In S. Vachkova, & S. S. Chiang (Eds.), «Education and city: quality education for modern cities», vol. 3. *European Proceedings of Educational Sciences* (pp. 80-89). <https://doi.org/10.15405/epes.22043.8>

69 Taylor, M. et al. (2023). *A new approach to mathematics and data education: A discussion paper from the Mathematical Futures Board of The Royal Society's Advisory Committee on Mathematics Education (ACME)*. The Royal Society. <https://royalsociety.org/-/media/policy/projects/maths-futures/new-approach-to-mathematics-and-data-education.pdf>

Respecto a «Educación matemática y vinculación con stem», también se hacen algunas consideraciones disruptivas, que propugnan por la simultaneidad de la integración y el respeto por las peculiaridades de cada disciplina:

Una educación STEM de calidad es imposible sin una adecuada base matemática.

Algunas iniciativas han intentado solucionar esta problemática mediante propuestas de una enseñanza integrada de la matemática con otras áreas STEM. Sin embargo, esta solución, a nuestro entender, entraña el riesgo de que dicha integración diluya no solo los conocimientos matemáticos y, al fragmentarlos, la estructura propia de esta disciplina, sino que no permite una construcción adecuada del conocimiento matemático por parte de los estudiantes basada en itinerarios didácticos propios de la asignatura.

Consideramos fundamental mantener un equilibrio entre la integración natural de la matemática en el marco STEM y la preservación de su identidad y estructura disciplinar. [No se puede relegar a la matemática] a una mera herramienta funcional dentro de un enfoque interdisciplinario. [...]

Más allá de defender un espacio para la enseñanza de la matemática fuera del trabajo interdisciplinario en proyectos STEM, creemos que su inclusión puede contribuir de manera significativa y visible al desarrollo de todas las áreas STEM. Consideramos que la integración, en su justa medida, de la matemática en el trabajo de otras áreas STEM podría inspirar y preparar a los estudiantes para futuras carreras en ese ámbito, incluyendo vocaciones matemáticas entre aquellos alumnos que inicialmente se sintieron atraídos por otras áreas científicas o tecnológicas.

## 2.4. LOS PRIMEROS AÑOS ESCOLARES

Está generalizado el comentario de que al fin del ciclo escolar se observan en los alumnos grandes carencias en sus conocimientos y usos de la matemática. A veces se incluye la geometría, el uso del pensamiento abstracto, los sistemas de medida, etcétera. Partimos de la hipótesis de que es en la transición de la educación preescolar (o en el hogar) a la enseñanza primaria que se produce el primer gran desfasaje en la comprensión de esas disciplinas. Por tanto, es de interés ver cuáles son las novedades de esa transición. En un sentido más general se podría decir que se está pasando de la aritmética (el manejo de los números naturales) al álgebra (o mejor, los pasos iniciales del álgebra). Estas no son transformaciones instantáneas, sino características que se van mezclando al incorporar la comprensión y buen uso de las propiedades de los números y sus operaciones.

Esta incorporación de elementos claramente más abstractos tiene sus dificultades. La escritura de los números, el significado del cero, el valor de la posición de los números en nuestro sistema (ahora casi universal), la propia denominación de los números mayores (*veinti...*, *treinta y...*) incorporan elementos totalmente nuevos en las prácticas y aprendizajes humanos.

Revisando los programas escolares de los años iniciales nos encontramos con que, en distintos países, casi uniformemente, en los dos primeros años, se incluyen estos elementos (ver también las referencias de la sección 9):

Respecto de la numeración natural:

- Se comienza la representación y la interpretación de la escritura numérica.
- Se introduce el cero, se estudian las regularidades de las series numérica orales y escritas; según la lengua se analizan las regularidades de las denominaciones (en español, *uno*, *once*; *dos*, *doce*; *veinti...*, *treinta y...*).
- Se comienza a estudiar la numeración racional, las partes de la unidad, mitad.

- Se estudian las relaciones entre la adición y la sustracción y sus significados.
- Propiedades de la adición: conmutativa, asociativa, ¡neutro!
- Maneras de realizarlas: algoritmos.
- La recta numérica.
- Mayor, menor, igual; anterior, posterior.

Respecto de la geometría, las figuras, el proceso es semejante:

- Nombres de los polígonos y poliedros.
- Reconocimiento y nombre de sus partes (caras, aristas, vértices; lados, vértices).

Respecto de las magnitudes y medidas, aunque podría no encajar en matemática:

- Longitud, amplitud angular, superficie, peso, ¿masa?, tiempo, temperatura.
- Mediciones, unidades de medida, instrumentos de medida.

Además, se incorporan como prácticas habituales el hacer operaciones mentales y la resolución de problemas dados por textos. La acumulación de todas estas novedades y su íntima imbricación con asuntos del lenguaje, son dificultades que se agregan a la transición psicológica que podría estar dándose en el niño. Una conclusión casi obvia de estas constataciones es la importancia de exponer a los niños a experiencias y lenguajes matemáticos tanto en la escuela como en la casa desde edades muy tempranas.

Se puede considerar que la comprensión de los números naturales es la clave o sinónimo de todo lo antes dicho. Es un asunto de denominación. La conceptualización de los primeros números naturales está incorporada desde el nacimiento mismo y se va depurando en los primeros años de vida. Los saltos que se producen al incorporarse a la educación primaria son simultáneamente necesarios, complejos y abarcan múltiples procesos mentales. Parece difícil dar un buen tratamiento a estas transiciones desde una visión puramente disciplinar. Como ya dijimos, la incorporación de las experiencias y el lenguaje matemático en el quehacer regular de las familias (juegos, tradiciones, cuentos) y la buena disposición y conocimientos de los maestros resultan fundamentales.

Las carencias en ambos ámbitos (familia, escuela) afectan por igual a niños y niñas. Tipos de juegos y de juguetes, estigmas, estereotipos, prejuicios, mala formación, en ambos ámbitos, están bastante bien documentados. Por lo menos, en nuestro mundo occidental el tratamiento dado a las niñas respecto de estos asuntos es diferenciado y tiene consecuencias en sus futuros. A todo ello nos referiremos más adelante.



## 2.5. AL FIN DE LA ESCUELA

Esta sección ha sido incluida para explicar algunas características de la disciplina que parecen escapar a estereotipos sociales o psicológicos. Por tanto, deberían manifestarse o percibirse en forma parecida en personas de distinto origen, sexo, etcétera. Podría haber sido un apéndice al trabajo, pero finalmente opté por incluirlo para analizar más elementos específicos de la disciplina.

Creo útil comenzar con una recapitulación de las destrezas que actualmente se considera que facilitan el aprendizaje, el manejo de los métodos básicos, el *modus vivendi* de la disciplina en una etapa algo avanzada de su uso. Parece útil hacer una enumeración de lo que es posible considerar como rasgos que describen una formación razonable al fin del ciclo escolar; lo que se suele llamar el *perfil de salida*. Por ahora, dejemos de lado aspectos más relacionados con la personalidad, con la psicología del estudiante (temores, afinidades, etcétera).

Naturalmente, toda esta enumeración puede ser puesta en discusión a la luz de investigaciones más recientes o perspectivas pedagógicas distintas. Los cuatro primeros ítems que enumero muy esquemáticamente se relacionan con la formación de conceptos matemáticos bastante precisos.

**MEMORIZACIÓN DE DATOS Y PROCEDIMIENTOS.** La memorización sistemática, con detalles, clasificada, si se quiere, de una cantidad de datos que deberán ser utilizados sistemáticamente, es parte del saber matemático. El uso de memorias automáticas (computadoras, etcétera) pareciera que ha disminuido la importancia de esta característica. Por ejemplo, las calculadoras permiten evitar el dedicar mucho tiempo a hallar raíces cuadradas, a estudiar con mucho detalle diversos tópicos de

trigonometría o de las propiedades de los logaritmos.<sup>70</sup> Sin embargo, el manejo, aunque más no sea aproximado, de las tablas de multiplicar, la forma general de algunas funciones, fórmulas de áreas, etcétera, es necesario para cualquier avance. De igual manera, se deben manejar los procedimientos estandarizados, que deben ser aplicados en orden correcto, con precisión.<sup>71</sup> Esta especie de memoria secuencial y la aplicación ordenada de rutinas, en particular en las operaciones elementales, puede resultar difícil, pero sus procesos lógicos son parte de conocimientos útiles en muchas otras áreas de la vida personal y social. Esta capacidad para integrar diferentes informaciones y procesarlas de manera más o menos rutinaria es parte de la buena formación en matemática.

**LENGUAJE Y SÍMBOLOS ESPECÍFICOS.** Hay palabras, oraciones y símbolos complejos, precisos, muchas veces algo alejadas de su significado usual. Son muy útiles, muchas veces indispensables, para transmitir ideas complejas. Se podría decir que son un mal necesario, pues muchas veces la hacen más inaccesible. Pero su exceso en la enseñanza elemental es poco motivante. Estos elementos decisivos en el progreso de la disciplina se consolidaron en el siglo **XVI** con el desarrollo de la notación y el formalismo del álgebra. El lenguaje no motiva, las ideas sí; ningún estudiante se motivará si no ve algún elemento que provoque su curiosidad. Se mostrarán interesados en las ideas, métodos y técnicas que forman parte de la disciplina: hay que introducirlos cuando se hagan necesarios para consolidar el aprendizaje de aspectos verdaderamente relevantes. Más adelante analizaremos con mayor detalle diversos planteos sobre el lenguaje matemático.

**RECONOCIMIENTO Y USO DE PATRONES, IMÁGENES.** El estudiante debe poder reconocer rápidamente esquemas, palabras clave que le permitan usar rutinariamente las técnicas adecuadas, la visualización de conceptos, definiciones y hacer aplicaciones en contextos bien definidos.

<sup>70</sup> Al margen observo que los logaritmos en base diez tuvieron gran importancia para hacer cálculos (yo mismo los usé en la transición entre mis estudios secundarios y universitarios); esto desapareció por lo que debería dedicarse más tiempo a los logaritmos en base  $e$  y su función inversa, la exponencial  $e^x$ , quizás la función más importante de la matemática, que aparece en la descripción de muchos fenómenos (crecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, etcétera).

<sup>71</sup> Algunos ejemplos: conmutatividad de algunas operaciones, que el símbolo de más (+) se transforma en el de menos (−) al pasar de un miembro al otro de una igualdad; el orden a usar para eliminar paréntesis, así  $3 - (5 \times 4 + 6) = -23$ .

El reconocimiento de figuras o presentaciones gráficas (por ejemplo, columnas, conjuntos de números) forman parte de estas características. Incluyen sucesivos pasos de abstracción pues todos ellos aparecen de muy diversas maneras. La interpretación visual de algunas definiciones abstractas es crucial para avanzar en la comprensión de entes geométricos: paralelas, equilátero, circunferencia.

**PROCESOS LÓGICOS.** Las cadenas de razonamientos que son características de la matemática deben ser ejercitadas por los estudiantes de la escuela primaria. En particular, los razonamientos proposicionales y proporcionales resultan fundamentales en todas las áreas de la acción humana.<sup>72</sup> Por otra parte, el progreso en la comprensión de los mecanismos lógicos necesita de un grado avanzado de conceptualización. En matemática, es muy difícil razonar bien si los objetos del razonamiento no están definidos con precisión, si no se conocen sus elementos constitutivos y sus límites. Muchas veces una dosis generosa de memoria puede cubrir grandes carencias en estas conceptualizaciones (sumar quebrados sin saber muy bien qué representan las fracciones, por ejemplo), pero a la larga estas carencias aparecen, aunque más no sea porque con el paso del tiempo todo se olvida. Aun así, las cosas deben ir a su debido tiempo. De igual manera que en la evolución de las ideas, también en la enseñanza los conceptos deben ser introducidos a medida que van siendo solicitados por los tópicos enseñados, a medida que el alumno esté en condiciones de apreciar críticamente la importancia de lo que está aprendiendo. En caso contrario, el resultado es pernicioso, pues en lugar de estimular el aprendizaje, produce el efecto opuesto, genera desinterés por una matemática que trata de objetos imperceptibles, cuya necesidad no se vislumbra.<sup>73</sup>

72 Los primeros son los que relacionan enunciados utilizando conectivos lógicos (conjunctiones o adverbios) que representan operaciones sobre esas proposiciones formando proposiciones de mayor complejidad. Ejemplos simples «si..., entonces...» y «si..., o...»: «Si Pedro tenía 5 caramelos y dio 3 a Manuel, entonces le quedan 2». Los razonamientos proporcionales surgen naturalmente en relaciones entre tiempo y velocidad, en recetas de cocina y en las escalas de mapas: «Si un mapa tiene escala de 1 cm = 5 km, ¿qué distancia real hay entre dos ciudades que en el mapa aparecen a 3 cm?».

73 La evolución de la ciencia también da buenos ejemplos: los matemáticos profesionales lidiaron con funciones durante casi dos siglos antes de llegar a su definición general. Solo dieron una definición precisa (con sus contenidos y alcances) cuando la resolución de delicadas cuestiones (de convergencia) lo hizo absolutamente necesario. Por ejemplo, en etapas un poco más avanzadas, la introducción prematura de conceptos

**APLICACIONES.** El estudiante debe naturalizar que el buen uso de la matemática lo ayuda a resolver o ver de manera distinta problemas de su vida cotidiana, de su entorno, de su interés. La capacidad de resolución de problemas está fuertemente basada en los grados de conceptualización y rigor lógico: identificación de las preguntas planteadas, utilización de alternativas válidas, cambios de frente para atacar el problema ante el fracaso de alguno utilizado previamente. Los fenómenos u objetos percibidos en la realidad no van acompañados de fórmulas matemáticas; hay que saberlas elegir, incluso cuando se realiza un ejercicio de interés compuesto o se tratan de resolver aquellos interesantes problemas escolares que llevan a sistemas de ecuaciones.

**ESTIMACIONES.** La resolución de problemas destaca la importancia de lo cuantitativo y la necesidad de tener escalas de referencia respecto de los posibles resultados. Son un verdadero indicador de la comprensión de los procesos matemáticos en esa etapa de la formación. Ejemplos sencillos que aparecen incluso en etapas más avanzadas de la formación son los siguientes: se multiplicaron números de una cifra decimal y el resultado dio varios miles; se quiere calcular la velocidad promedio con que un auto se desplazó entre Montevideo y Florida y el resultado dio novecientos km por hora (o los datos estaban mal o hubo un error de cálculo), etcétera. El comprender la índole del problema o realizar cálculos aproximados, groseros, se podría decir, es una gran virtud. Es imprescindible en esta etapa que la buena memorización, la perfección lógica, se complementen con el resultado más inmediato del saber matemático: cuantificar fenómenos y acontecimientos, operar adecuadamente con los números resultantes y compararlos con aproximaciones menos rigurosas.

**ACUMULACIÓN.** Todas las características antes anotadas se complementan totalmente a lo largo del tiempo; es difícil avanzar teniendo grandes carencias en las etapas anteriores. Esta es una cuestión respecto de la cual los docentes de ciclos superiores somos particularmente sensibles. Muchas veces se considera que el destaque de este carácter acumulativo de los estudios de matemática es una sobreexigencia de los profesores. No es así. La buena comprensión, la memorización, la práctica, de los

---

como los de función inyectiva, sobreyectiva, inversa, compuesta..., sin la utilización adecuada de esos conceptos —y, por tanto, sin revelar su real importancia—, es un ejercicio gratuito que se le exige al estudiante. Gratuito y contraproducente.

métodos y conceptos antes estudiados son casi imprescindibles para entender razonablemente las etapas más avanzadas; facilita el aprendizaje y consolida más fácilmente lo nuevo. Todos los rasgos antes analizados abonan la importancia de la acumulación en el conocimiento matemático. Ruego al lector haga un breve repaso de ellos para convencerse de qué carencias en unos aspectos se reflejan en debilidades de los otros, qué ideas estudiadas en tercero del ciclo escolar reaparecen en sexto.

**EVALUACIONES.** Este breve párrafo no corresponde propiamente a los objetivos generales de la enseñanza en la escuela, que se han destacado en negrita en esta sección. Sin embargo, dado que las evaluaciones que se hacen de lo aprendido por los alumnos se relacionan directamente con esos objetivos, haremos alguna referencia a ellas. A pesar de nuestra insistencia en la memorización de datos, procedimientos y patrones, la evaluación no puede estar centrada en estos aspectos. Más bien debería dirigirse a los otros rasgos: procesos lógicos, estimaciones, buen uso de los conceptos principales en las aplicaciones. La insistencia en los aspectos memorísticos más bien deforma el aprendizaje de la disciplina, aunque algunas veces puede llevar a éxitos circunstanciales. Trataremos estos temas con algo más de detalle en la sección 9.

## 2.6. ESTUDIOS RECIENTES. LENGUAJES. PÁRVULOS

Las grandes dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en todos los niveles han generado múltiples propuestas, cambios de programas y énfasis en casi todos los países y hasta en sus subunidades administrativas o políticas. Diversos procesos y modificaciones han resultado inaplicables o fracasado estrepitosamente a escalas generales. A modo de ejemplo menciono la llamada *matemática moderna*, muy formalizada, de mediados del siglo pasado, su posterior completo rechazo en diversos países; los esfuerzos novedosos en Finlandia y Singapur, para nombrar solo dos, y las modificaciones de planes en Gran Bretaña y en Francia.

Los estudios en psicología cognitiva, neurociencias y la utilización de herramientas estadísticas e instrumentos de alta precisión para reconocer cambios en las reacciones y en el funcionamiento del cerebro están modificando el panorama reciente para percibir cuáles son las dificultades iniciales y en qué momento de la vida humana se producen.

### 2.6.1

En primer lugar, me ha parecido útil, por significativo en cuanto a las orientaciones existentes, incluir comentarios sobre investigaciones recientes sobre las relaciones entre el lenguaje llamado natural y el lenguaje matemático. Recordemos que Galileo habría dicho que el universo «está escrito en el lenguaje de la matemática y sus caracteres son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una palabra». Una interpretación posible de esto, que es la que usualmente se da, es esta: el verdadero lenguaje es el de la matemática.

En un sentido algo diferente Albert Einstein escribió, respondiendo a «Una pesquisa sobre los métodos de trabajo de los matemáticos» promovida por la revista *L'Enseignement Mathématique* (1902-1904): «Las palabras o el lenguaje, tal como se les escribe o habla, no parecen jugar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos del pensamiento son ciertos signos e imágenes más o menos claros que pueden ser “voluntariamente” reproducidos y combinados», y agregaba, para colmarnos de sorpresa, que «esos elementos son, en mi caso, de tipo visual y algunas de tipo muscular. Las palabras convencionales u otros símbolos deben ser buscados laboriosamente solo en una segunda etapa», cuando se quiera comunicarlos a otros.<sup>74</sup>

En medio de opiniones tan aparentemente opuestas surgen psicólogos cognitivos, como Stanislas Dehaene,<sup>75</sup> que sugieren «un modelo de reciclaje neuronal: en el curso de su evolución, mucho antes de la aparición del lenguaje, el cerebro interiorizó representaciones no verbales del espacio, el tiempo y el número, que compartimos con muchas especies animales». Para ilustrar tal opinión recurren a mostrar restos arqueológicos de grabados de figuras geométricas (paralelas, zigzags) algunas de las cuales se remontan al *Homo erectus*, hace cuatrocientos cincuenta mil años. Además, y fundamentalmente, recurren a herramientas de análisis más actuales comenzando con la ubicación de la matemática en el cerebro.

En mi libro sobre *La dimensión humana de la matemática* [234], cité trabajos de Amalric y Dehaene<sup>76</sup> sobre dónde se localizan las partes de

74 Estas respuestas de Albert Einstein constan como apéndice en el libro *The mathematical mind (The psychology of invention in the mathematical field)* por Jacques Hadamard (1865-1963), escrito en 1945. Princeton Science Library, 1996.

75 Ver, por ejemplo, la conferencia en el College de France, 18 octubre del 2018, *La nature du langage mathématique: explorations en imagerie cérébrale*. Consultada en <https://www.youtube.com/watch?v=VCaZiGS6oIs>

76 Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). «Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(18), 4909-4917. Haciendo estudios semejantes en profesionales con alta formación, matemáticos y no matemáticos, «solo en matemáticos profesionales, los enunciados matemáticos ya fueran de álgebra, análisis, topología o geometría, activaron un conjunto reproducible de regiones frontales bilaterales, intraparietales y temporales ventrolaterales [parte inferior de lóbulo temporal]. Y lo que es más importante, estas activaciones no afectaron a las áreas relacionadas con el lenguaje y el conocimiento general semántico. Por el contrario, los juicios matemáticos estaban relacionados con una amplificación de la actividad cerebral en los sitios que se activan con

la corteza cerebral cuando se piensa matemáticamente en niños y en matemáticos activos. Estos mismos autores en un trabajo casi simultáneo<sup>77</sup> indican:

[...] la reflexión matemática recicla regiones bilaterales intraparietales y temporales ventrales implicadas en el sentido numérico elemental. Incluso la recuperación de hechos simples, como recordar que «la función seno es periódica» o que «los autobuses de Londres son rojos», activa áreas disociadas para conocimiento matemático y no matemático. Junto con otros estudios [...], nuestros resultados indicaron una separación importante entre dos redes cerebrales para la semántica matemática y no matemática.

Poco después relacionaron estos estudios con los que algunos de los autores estaban haciendo en paralelo con indígenas de la Amazonia.<sup>78</sup>

Se expone a los sujetos a una secuencia de ubicaciones espaciales en un octógono y se les pide que predigan ubicaciones futuras. [Simetrías y rotaciones] son detectadas y utilizadas espontáneamente por adultos, preescolares y miembros adultos de un grupo indígena de la Amazonia, los Mundurucu, que tienen un léxico numérico y geométrico restringido y un acceso limitado a la escolarización.

Concluyen que todos ellos tienen capacidad de percibir y procesar información espacial minimizando su complejidad. Estos diversos experimentos son tomados como caminos de verificación de aquel modelo de reciclaje neuronal.

---

los números y las fórmulas en los no matemáticos [...]. Las pruebas sugieren que la pericia matemática de alto nivel y el sentido numérico básico comparten raíces comunes en un circuito cerebral no lingüístico».

77 Amalric, M., Dehaene, S.: *Cortical circuits for mathematical knowledge: evidence for a major subdivision within the brain's semantic networks*. Phil. Trans. R. Soc. B, 19 de febrero del 2018, vol. 373, n.º 1740: 20160515.

78 Amalric, Marie; Wang, Liping, Pica; Pierre, Figueira, Santiago; Sigman, Mariano, & Dehaene, Stanislas: *The language of geometry: Fast comprehension of geometrical primitives and rules in human adults and preschoolers*. PLoS Computational Biology, 26 de enero del 2017.



## 2.6.2.

En segundo lugar, incluimos un breve resumen sobre análisis recientes respecto de la comprensión cuantitativa, matemática, si se quiere, de lactantes y párvulos menores de 4-5 años. En el «Epílogo de la segunda edición» de mi libro sobre *La dimensión humana de la matemática* me extendí un poco sobre estas cuestiones. Los planteos recientes vienen de la interrelación principalmente entre la psicología y las neurociencias cognitivas, la lingüística, la filosofía, la antropología y el buen uso de nuevas técnicas computacionales y otras tecnologías.

Los niños antes de entrar en la escuela tienen una capacidad extraordinaria de aprender: gran parte de su lengua (y otras si se hablan en su entorno), ubicarse en su entorno, las formas y funciones de los objetos, otras costumbres y habilidades. Lo aprenden rápido porque no tienen que aprenderlo todo y disponen de mecanismos innatos para hacerlo. Todos los niños antes de la escuela tienen ideas generales sobre cantidad y reconocen estructuras geométricas. En la escuela gran parte de esos aprendizajes deberían potenciarse; adquieren nuevos conceptos y símbolos que los ayudan a comprender la evolución de su entorno a diferentes escalas físicas o temporales.

Elizabeth Spelke<sup>79</sup> es una de las estudiosas que más ha aportado al entendimiento de los aspectos generales de la cognición en bebés y niños. Seguiremos algunas de sus presentaciones de estos temas. Ella, entre otros, ha presentado esos conocimientos básicos (*core knowledge*) en la forma de seis sistemas cognitivos innatos que se aplican a todos los entornos humanos y perduran a lo largo de toda la vida. Se refieren a distintos problemas que el ser humano debe encarar y, tal vez, resolver. Son, por tanto, automáticos e inconscientes y guían el aprendizaje.

En relación con este trabajo destacamos tres que Spelke denomina sistemas: numérico, de objetos y de lugares. El primero refiere a la cuantificación de los conjuntos de objetos y eventos; permite al recién nacido representar los números con aproximación, tener una representación abstracta de pequeñas cantidades. El sistema de objetos (cuerpos inertes, no vivos y sus movimientos, base del entendimiento inmediato del mundo físico) actúa cuando el bebé se concentra en los objetos y distingue cantidades inferiores a tres. Dan comienzo a la enumeración, a

79 Elizabeth S. Spelke. *What babies know: core knowledge and composition*. Oxford University Press, Nueva York, 2022.

través de una aritmética simbólica aproximativa con números mayores; colabora en que sus capacidades numéricas intuitivas y simbólicas se relacionen. Se ha comprobado que las capacidades intuitivas mejoran, más adelante, los resultados en la matemática simbólica. Algo semejante sucede con el sistema de lugares que se relaciona con los comienzos de la geometría, nos da un sentido de dónde estamos, permite construir los mapas mentales de los sitios en que nos movemos y fija nuestra memoria para los acontecimientos que vivimos.<sup>80</sup>

Aún es más claro que el lenguaje se va conformando desde el nacimiento mismo (desde antes, fundamentan algunos). Desde los tres meses los bebés utilizan el lenguaje que se habla en su entorno social para descubrir el mundo: nuevos tipos de objetos y nuevos análisis de formas. Cuando comienzan a conversar, amplían su lenguaje y comparten y descubren puntos de vista con el interlocutor.

Respecto de símbolos y aspectos geométricos, a los 15 meses los niños son sensibles a perspectivas distintas, cuestiones a las que, luego, ya en la enseñanza formalizada, dan nuevas perspectivas en geografía, en historia, en biología, en matemática ( $6 = 4 + 2 = 18/3 = \text{raíz cuadrada de } 36$ ).

El lenguaje y los símbolos juegan un papel fundamental desde el comienzo. Existen pruebas de que conversaciones con números en familia o en la guardería predicen el éxito en el aprendizaje de la matemática en la escuela. Jugar con unidades, docenas, símbolos espaciales (especialmente en los juegos) colaboran en dar significados a las palabras, a los algoritmos aritméticos y a los símbolos espaciales. Todas estas intuiciones favorecen el aprendizaje y prestigio de la matemática en la escuela. Parecería que un entorno tanto familiar, lúdico, como con niños y maestros en el preescolar lleno de lenguaje y símbolos numéricos prepara de la mejor manera para el salto a la escuela.

Ruego al lector que revise su historia, la de sus allegados, las diferencias entre niños y niñas en los juegos infantiles. Creo que percibirá a qué etapas y procesos nos estamos refiriendo. En lo personal lo relacioné con lo que recuerdo de mi niñez y me convencí de la importancia del preescolar y primer año que hice con Lala, una maestra que daba clases particulares en la calle Fray Bentos —donde nosotros vivíamos— casi en la curva entre José Villagrán y Enrique Clay; su impronta y el profundo

80 En la obra citada Spelke distingue otros tres sistemas: de formas (representa a los seres vivos y sus funciones); de agentes (se focaliza en los seres animados, incluyendo la gente, que actúan sobre los objetos y producen cambios en ellos); de seres sociales (que se involucran unos con otros, comparten sus experiencias y forman lazos duraderos).

sentido común de mi madre Osana, que me enseñaba a moverme en el almacén, a ayudar al abuelo Manoug a hacer las cuentas, permitieron que entrara directamente en segundo grado a la Escuela n.º 38, en la calle Juan Jacobo Rousseau, y marcaron de una manera u otra mi afinidad con la matemática.

## 2.7. ESTUDIOS RECIENTES. BRECHAS ENTRE NIÑAS Y NIÑOS

Desde hace varios decenios se han estudiado a diversas escalas cuáles son las formas y los niveles de aprendizaje de las ciencias, la matemática en particular, y el impacto de esos aprendizajes en el futuro profesional, social, económico, de esas personas. Estos estudios, muchos de ellos cuantitativos, basados en grupos pequeños de instituciones y personas, sacan conclusiones sobre la influencia y las opiniones intrafamiliares y de los profesores en el nivel de aprendizaje, los temores, los prejuicios, sobre esas disciplinas.

Personalmente mi primera aproximación a la temática fue antes del año 2000 a través un artículo aparecido en 1992 en las *Pediatric Clinics of North America*: «La ira con la matemática. Deficiencias en el dominio de la matemática en los escolares».<sup>81</sup>

También para indagar en el origen del rechazo femenino a los estudios en ciencias exactas o en profesiones en que la matemática juega un papel muy importante, se han implementado estudios sobre los procesos cognitivos en lactantes y niños hasta los primeros años escolares. Esto ha sido concomitante con los avances extraordinarios en la ubicación de las áreas de la corteza cerebral que se activan al realizar procesos matemáticos.

Las conclusiones iniciales de toda esa combinación (*combo* es una manera actual de decirlo, acortando la expresión) son bastante firmes y coinciden con las diversas percepciones de padres, maestros, enseñantes de diversas profesiones, etcétera: hay un gran salto al entrar en la

---

81 Melvin D. Levine, Ronald L. Lindsay and Martha S. Reed: «The wrath of math. Deficiencies of mathematical mastery in the school child». *Pediatric Clinics of North America*, vol. 30, n.º 3, junio de 1992, 525-536.

escuela a hacer estudios formalizados,<sup>82</sup> mayor en las niñas que en los niños, y que esto genera un estereotipo sobre las dificultades de la matemática que se mantiene a lo largo de toda la vida.

Esta no es una monografía erudita sobre la temática. Por tanto, no daré una lista detallada de los múltiples trabajos donde estos temas han sido tratados. Me concentraré en algunos documentos fundamentales a escala internacional y algunos resultados nacionales que corroboran aquellas conclusiones.

Dada la calidad del equipo que hizo el estudio y la amplitud de la muestra (todos los niños de un país durante varios años) comenzaremos resumiendo los principales resultados de un trabajo aparecido muy recientemente en *Nature* (11 junio del 2025), una revista donde se dan a conocer resultados muy importantes en diversas áreas de las ciencias. En este estudio han colaborado dos de los principales estudiosos (E. Spelke y S. Dehaene) de muchos de los temas antes indicados junto con una cantidad de otros investigadores para sacar conclusiones de evaluaciones que abarcaron a millones de niños franceses. El título del trabajo lo dice todo: «Rápida aparición de una brecha de género en matemática en el primer curso».<sup>83</sup> Analizaremos con algún cuidado el resumen del trabajo:

La prevención de las disparidades de género en matemática es una preocupación mundial. En la infancia y la primera niñez, los niños y las niñas muestran conocimientos básicos similares sobre números y espacio. Por lo tanto, se cree que las disparidades de género en matemática reflejan principalmente la interiorización del estereotipo sociocultural de que «a las chicas se les da mal la matemática».

Esta afirmación es verificada, por lo menos en casi todo el mundo occidental. Se suele definir *estereotipo* como «imagen o idea aceptada comúnmente por un grupo o sociedad determinada, muchas veces predominante, sobre cómo es (descriptivo) o cómo debería ser, actuar u opinar (prescriptivo) un grupo o una persona, simplemente por el hecho

82 Esto no pretende ignorar los millones de niños en el mundo que no llegan a estas etapas y quienes, por ende, no viven esas transiciones; están mucho más atrás.

83 P. Martinot, B. Colnet, T. Breda, J. Sultan, L. Touitou, P. Huguet, E. Spelke, G. Dehaene-Lambertz, P. Bressoux & S. Dehaene: «Rapid emergence of a maths gender gap in first grade». Publicado en línea: 11 de junio del 2025. <https://doi.org/10.1038/s41586-025-09126-4>. Excepto E. Spelke, todos los investigadores trabajan en instituciones francesas.

de pertenecer a un determinado grupo». En el lenguaje actual se suele confundir con lo políticamente correcto. Los estereotipos de género respecto de la matemática más comunes, además del indicado en la cita, son que las niñas son biológicamente peores que los niños en matemática, que las niñas son más reacias al riesgo que los niños.

Los estereotipos prescriptivos, como los referidos al papel de la mujer en la sociedad, más que la biología, se han señalado desde hace tiempo como un factor que puede explicar en gran medida la brecha de género en el rendimiento matemático entre niños y niñas en todos los países.

Este estereotipo de género se agrega a uno más amplio que se aplica a todos los niños (a todas las personas) respecto de las dificultades y la inaccesibilidad del conocimiento matemático. Este estereotipo está incrementado en las niñas por aquel estereotipo prescriptivo. O sea, que el inculcar, hablar, referirse a las dificultades de la matemática es una situación normalizada, de alguna manera validada, en el imaginario colectivo general, en las conversaciones familiares, en los ambientes educativos tanto informales como formales. Esto llega al extremo de que quienes nos dedicamos a estas ciencias somos muchas veces catalogados dentro de un grupo con percepciones y capacidades diferentes. Como bichos diferentes de la fauna humana.

Sin embargo, sigue siendo incierto dónde, cuándo y en qué medida se arraiga este estereotipo. Aquí presentamos los resultados de una evaluación longitudinal de 4 años del rendimiento en lenguaje y matemática de todos los alumnos franceses de primero y segundo de primaria (2.653.082 niños).

Esta cifra transforma este estudio no en una encuesta, siempre discutible, sino en un verdadero censo donde lo único que puede merecer dudas son los formatos de las preguntas que llevan a los diversos resultados. Sobre esto último la calidad del equipo responsable y los cuidados que indican en la publicación misma eliminan muchas de los cuestionamientos que pudiesen hacerse.

Los niños y las niñas mostraban puntuaciones muy similares en matemática al entrar en la escuela, pero una diferencia de género a favor de los niños se hizo altamente significativa después de 4 meses de escolarización y alcanzó un efecto de aproximadamente 0,20 [20 %] después de 1 año. Estos resultados se repitieron cada año y variaron solo ligeramente en función de la familia, la clase o el tipo de escuela y el nivel socioeconómico.

Esta uniformidad de los resultados resulta particularmente asombrosa, pues muestra que los estereotipos están fuertemente arraigados en el tejido social, en la cultura, en el modo de pensar de esa sociedad. Los autores dedican mucho espacio a este tema, al mostrar el tipo de correlaciones que establecieron y midieron.

Aunque la escolarización se correlacionaba con la edad, aprovechando las variaciones de los resultados se observó que la brecha de género se incrementaba más con la escolarización que con la edad. Estos resultados apuntan al primer año de escolarización como el momento y el lugar en el que surge una brecha de género en matemática a favor de los varones, lo que ayuda a centrar la búsqueda de soluciones e intervenciones. [1]

Luego de un exhaustivo análisis de correlaciones de diversos datos los autores llegan al siguiente *Resumen de las observaciones empíricas*, que transcribimos en parte:

Nuestros resultados corroboran estudios anteriores que, basados en muestras menores, encontraron que la brecha de género surge tempranamente ya en primer o segundo curso [84]. El presente análisis, realizado a partir de datos de población total [*population-level data*], nos ha permitido dar un paso más y demostrar que la brecha de género en matemática es un fenómeno precoz y generalizado.

Este carácter precoz es el más preocupante porque confirmaría que el esfuerzo por modificar el estatus sociológico de la matemática deberá analizarse desde la más tierna infancia. La diferenciación entre niños y niñas se mantiene a lo largo de todo el ciclo escolar y de la enseñanza secundaria. El rechazo a la matemática y, por lo tanto, las dificultades en la comprensión y el aprendizaje de la disciplina se va incrementando en todos, niños, niñas, adolescentes, y hace un salto especial al comenzar el ciclo secundario en que el adolescente tiene nuevos enfoques sobre su vida y racionaliza los estigmas que le vienen influyendo. Entonces, los defectos en la formación científica hacen eclosión ante los temas más avanzados que van haciendo parte de la enseñanza. Seguramente

---

84 Aquí se hace referencia a trabajos sobre niños en Estados Unidos, con datos entre 1998 y 2005, en particular en revistas de economía, que corroboran los del trabajo francés. (Nos referiremos a algunos de ellos más adelante.)

el tratamiento menos personalizado al avanzar los estudios y las nuevas situaciones emocionales también influyen. Esta brecha...

[...] afecta a todos los estratos de la sociedad, independientemente del tipo de escuela y la pedagogía relacionada, el nivel socio-económico, la ocupación de los padres, la composición de pedagogía relacionada, el nivel socio-económico, la ocupación de los padres, la composición de la familia, el entorno escolar [nivel socioeconómico medio de los centros escolares, el rendimiento medio en matemáticas de la clase, la heterogeneidad de la clase...] y la ubicación geográfica, todas ellas variables básicas que rara vez o nunca se han estudiado simultáneamente en trabajos anteriores basados en encuestas más pequeñas. [7]

Estas características uniformes no sabemos si se dan en nuestros países. Creemos del caso insistir que lo que se analiza en este gran estudio es la brecha de género y no los resultados generales en matemática. Podría suceder, como sucede en nuestros países, que el desempeño general, de niños y niñas sea muy distinto según «el nivel socioeconómico medio de los centros escolares» y «la heterogeneidad de la clase»: el desempeño educativo general, en particular en matemática, es decididamente peor en las escuelas de contexto crítico o con más bajo ingreso económico. Esto parece no suceder en las escuelas francesas, como lo indica esta última parte de las conclusiones.



## 2.8. MÁS SOBRE LA BRECHA

La validez de estas conclusiones sobre el estereotipo está corroborada por la vida misma, como escribimos al principio: el asunto se agrava respecto de las niñas como se evidencia mucho más adelante con la poca participación de mujeres en estudios de ciencias exactas (física, matemática) y profesionales en que esas ciencias ocupan un lugar muy importante (tecnologías, ingenierías), agrupados en español bajo la sigla CTIM.

En nuestro país se están emprendiendo estudios semejantes. Me referiré a tres trabajos finales de grado<sup>85</sup> de la Facultad de Psicología orientados por Alejandro Maiche. El primero y el último corroboran lo ya indicado.

El segundo, el de Daiana Ávila, introduce un ingrediente que está sugerido en muchos trabajos anteriores, sin estas llamadas evidencias cuantitativas: el papel de los docentes. En este trabajo, resume varios trabajos que...

[...] apoyan la hipótesis de que los estereotipos pueden afectar significativamente el rendimiento de las niñas en pruebas de matemáticas [por lo que] la aparición de la brecha parece ser más una consecuencia de factores culturales y sociales que tiende a ampliarse durante el proceso

---

85 Nathalia San Román: *Matemática temprana y género: Un análisis de resultados en escuelas uruguayas*. Abril del 2023. [https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos\\_finales/archivos/tfg\\_nathalia\\_sanroman.pdf](https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos_finales/archivos/tfg_nathalia_sanroman.pdf)

Daiana Nadia Ávila Barrone: *Sesgo de género presente en las maestras y su impacto en el rendimiento matemático de niños y niñas en la educación inicial y primaria*. Abril del 2024. [https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos\\_finales/archivos/trabajo\\_final\\_grado\\_daiana\\_avila.pdf](https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos_finales/archivos/trabajo_final_grado_daiana_avila.pdf)

Fanny Maud Delorme Mancel: *Inicios y evolución de la brecha de género en matemática simbólica*. Abril del 2025. [https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos\\_finales/archivos/tfg\\_-\\_fanny\\_delorme\\_final.pdf](https://sifp.psico.edu.uy/sites/default/files/trabajos_finales/archivos/tfg_-_fanny_delorme_final.pdf)

de escolarización. Esto resalta que las instituciones educativas son ámbitos donde los factores sociales y culturales ejercen un gran impacto en las experiencias, expectativas, motivaciones y creencias de sus miembros, que contribuyen a la génesis y mantenimiento de estas disparidades. [pp. 7-8]

Tales conclusiones se vieron confirmadas en escuelas uruguayas en que se recabó la opinión de decenas de maestras de quince escuelas de los departamentos de Montevideo, Canelones, Colonia, San José, Soriano y Salto, de diferentes quintiles socioculturales [9]. Luego de depurar por extraedad de los alumnos (más de 5 años a los alumnos del último nivel de preescolar y de más de 6 años los de primer año escolar) y por la presencia de menos del 50 % de los alumnos matriculados en el grupo, se realizaron pruebas a 206 niñas y 211 niños de 16 grupos de primer año y 8 de preescolar, 12 de nivel socioeconómico bajo y 13 del alto.

El cuestionario sobre las creencias de las maestras —hecho sobre la base de estándares internacionales— abarcó seis preguntas acerca de la opinión del rendimiento en matemática de su clase y cuatro generales sobre género y matemática. Un ejemplo de cada categoría, en una escala de 1 a 5, clasifique: «los niños de mi clase me prestan más atención cuando explico cosas de matemática que las niñas»; «las niñas son más talentosas en matemáticas que los niños».

Los resultados revelan que la diferencia en el rendimiento matemático entre niñas y niños a favor de los niños se manifiesta desde el primer año, especialmente en el rendimiento matemático simbólico, posiblemente relacionado con la introducción de ciertos aspectos formales de matemáticas en el programa escolar. Además, se observa que el nivel de sesgo en las maestras parece repercutir en el aumento de la brecha, especialmente en las escuelas de nivel socioeconómico bajo. [29]

O sea, que los pronósticos a favor de los niños de las maestras (en virtud de las opiniones manifestadas en esos cuestionarios) se verificaban en las pruebas realizadas por el grupo. Y las disparidades a favor de los niños no se daban en los grupos en que las maestras no tenían el sesgo que desfavorecía a las niñas.

En el estudio sobre los escolares franceses se ratifica la influencia de los maestros en incrementar las disparidades. Se destaca que...

[...] investigaciones anteriores han explorado varios factores potenciales que, o bien exacerban o bien mitigan la brecha de género en matemática. Las creencias de los adultos y los estereotipos, incluidas las técnicas y valoraciones de los profesores, podrían interferir con la estimación neutral del rendimiento de los alumnos y reforzar las disparidades de género en el rendimiento en matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria. Por ejemplo, los profesores suelen subestimar las capacidades matemáticas de las niñas, asumiendo que los niños poseen talentos innatos mientras que las niñas progresan solo a través de la diligencia y el esfuerzo, suposiciones que pueden minar la confianza de las niñas en su capacidad para aprender matemática.

Además de estas valoraciones y ejemplos, se incluyen referencias explícitas a la llamada ansiedad,<sup>86</sup> tanto de los alumnos como de los maestros, y la influencia de los padres en profundizar estos sesgos:

Las chicas también sufren más ansiedad matemática que los chicos, especialmente en situaciones que implican pruebas de matemática competitivas o de tiempo limitado, un efecto perceptible ya en segundo de primaria en todo el mundo. Además, la ansiedad matemática de las profesoras disminuye el rendimiento matemático de las niñas, mientras que los niños no se ven afectados. Los padres y los profesores también pueden tener un sesgo en el tiempo que dedican a retar a los niños de uno u otro sexo en matemática o lectura. [1]

Este tipo de consideraciones ha llevado a tomar medidas muy personalizadas en niñas y adolescentes. Por ejemplo, fomentar la determinación y la adaptación ante situaciones adversas. Enfatizar el papel del esfuerzo en el rendimiento y la perseverancia. Son medidas que colaborarían en la disminución de estas ansiedades.

Cabe también destacar que muchas de las investigaciones anteriores a que se refiere la cita precedente fueron publicadas con datos de los Estados Unidos en revistas de economía y llegan a las mismas conclusiones. Daremos un único ejemplo:

86 La traducción al español de la palabra *anxiety* como 'ansiedad' («estado de agitación, inquietud o zozobra del ánimo») no me parece la más adecuada. Quizás *inseguridad*, *malestar* o *rechazo* fueran mejores, pero hemos mantenido la traducción literal, para no entrar en más disquisiciones en terrenos poco conocidos. En la sección 8 se da una definición de la ansiedad matemática. *Apprehensions* ('aprensiones', 'temores') es la palabra que aparece en la obra de pediatras de 1992, nota al pie n.º 82.

La brecha de género en el rendimiento en matemática, definida como la puntuación de los chicos menos la puntuación de las chicas en pruebas estandarizadas, aumenta sustancialmente cuando los estudiantes son asignados a profesores de matemática con estereotipos de género más fuertes. Los estereotipos de los profesores inducen a las chicas a rendir menos en matemática y elegir institutos menos exigentes, siguiendo las recomendaciones de sus profesores.

Esta investigación no hace distinciones del sexo de los maestros y destaca la diferente influencia del sesgo en alumnos de disciplinas muy diferentes:

Estos efectos se deben, al menos en parte, a la menor confianza en la capacidad matemática de las chicas expuestas a profesores con prejuicios sexistas. Los estereotipos perjudican el rendimiento en los exámenes de las chicas, que acaban por no alcanzar todo su potencial. [La autora nos dice que] No detecto efectos estadísticamente significativos sobre los resultados de los alumnos de los estereotipos de los profesores de literatura.<sup>87</sup>

La medición e interpretación del nivel de sesgo de los maestros [p. 35 del trabajo de D. Ávila] merece discusión. Podrían estar sesgados por su experiencia de trabajar con niñas y niños durante muchos años y llegar a esa conclusión, podrían tener un desinterés por la disciplina desde sus estudios secundarios. La restricción a esas afirmaciones binarias puede inducir defectos en las correlaciones. Lo empírico debe tener una base conceptual precisa.

A pesar de estos comentarios considero que los tres trabajos son valiosos y abren las puertas, como de alguna manera lo sugiere Daiana Ávila («posiblemente relacionado con la introducción de ciertos aspectos formales de matemáticas en el programa escolar»), al estudio de los estereotipos que influyen en niños y niñas. A la luz de la experiencia de todos los días surge la conclusión más general de que el aprendizaje de la

87 Michela Carlana: «Implicit stereotypes: Evidence from teachers' gender bias» («Estereotipos implícitos: Evidencia del sesgo de género de los maestros»). *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 134, issue 3, agosto del 2019, pp. 1163-1224. Existen otros estudios, citados en el trabajo de Ávila, igualmente recientes, en que se destaca la influencia negativa de las maestras. Por ejemplo, Beilock, S. L.; Gunderson, E. A.; Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). «Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement». *PNAS, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(5), 1860-1863.

matemática se distingue del de casi todas las otras disciplinas en todos los humanos, aunque sea mayor en las niñas y mujeres.

Para completar estos aspectos anotamos que estas influencias de los maestros se han documentado en muchos otros trabajos. Por ejemplo, en Chile se hicieron estudios que mostrarían que la diferenciación con las niñas comienza en la educación parvularia (preescolar) en la que se produciría una influencia negativa de las maestras,<sup>88</sup> fenómeno que también se ha documentado en Uruguay. En el resumen del trabajo se dice:

Los resultados principales del presente estudio muestran una tendencia que exhibe dos elementos: primero, que las educadoras hablan más con los hombres en comparación con las mujeres, y segundo, que es a ellos a quienes se les dirigen las preguntas y tareas de mayor nivel cognitivo durante la enseñanza de las matemáticas, lo que coincide con los estudios tanto a nivel nacional como internacional. Por último, un hallazgo llama profundamente la atención, pues los datos concluyen que las educadoras bloquean o ignoran los comentarios, preguntas y/o respuestas de las mujeres más que a los hombres o incluso que al grupo completo, incidiendo negativamente en el desarrollo, oportunidades, aprendizajes y desempeño matemático de las niñas.

Para terminar el análisis de estos aspectos vuelvo a resaltar el gran número de referencias a la diferenciación entre sexos que aparecen en revistas de economía. En general están motivados en la pérdida del mal llamado «capital humano». He consultado, por ejemplo, un observatorio económico donde aparecen múltiples referencias a esos trabajos.<sup>89</sup> En uno de ellos se dice que se ha descubierto «que las mujeres jóvenes asignadas a clases exclusivamente femeninas en su primer año de universidad tienen aproximadamente un 57 % menos de probabilidades de

88 Serrano Gómez, Javiera Emma: «Prácticas pedagógicas y estereotipos de género en la enseñanza de las matemáticas en Educación de Párvulos». Tesis para obtener el título profesional de educadora de párvulos. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Sociales, enero del 2020. <https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/175244/Seminario%20de%20T%c3%adtulo%20Profesional-%20Javiera%20Serrano%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

89 Almudena Sevilla, Pilar Cuevas-Ruiz: *How can we reduce gender gaps in mathematics education?* Economics Observatory. Schools, universities & training. 10 de marzo del 2022. <https://www.economicsobservatory.com/how-can-we-reduce-gender-gaps-in-mathematics-education>

abandonar los estudios y un 61 % más de probabilidades de obtener una titulación de máxima calificación según el sistema británico».<sup>90</sup>

Respecto de esta peculiaridad, en uno de los trabajos de la nota al pie n.º 26, publicado también en una revista de economía,<sup>91</sup> se expresan algunas constataciones sorprendentes en que se relacionan resultados diferentes con la separación entre niños y niñas en las escuelas y cursos de la enseñanza primaria y secundaria:

Pasando a las comparaciones entre países, observamos que los resultados anteriores que relacionaban la brecha de género en matemática con las medidas de igualdad de género son sensibles a la inclusión de los países musulmanes, donde, a pesar del bajo estatus de la mujer, la brecha de género en matemática es escasa o nula. [210]

90 Alison L. Booth, Lina Cardona-Sosa and Patrick Nolen: «Do single-sex classes affect academic achievement? An experiment in a coeducational university». *Journal of Public Economics* 168 (2018) 109-126.

91 Roland G. Fryer Jr. And Steven D. Levitt. «An Empirical Analysis of the Gender Gap in Mathematics». *American Economic Journal: Applied Economics* 2 (Abril del 2010) 210-240.

## 2.9. OPINIONES Y ESTUDIOS ESPECÍFICOS

Como hemos visto en la sección anterior, sobran evidencias de que el rechazo, prejuicios y relativos fracasos de las mujeres en ramas de las ciencias y profesiones vinculadas a la matemática se generan tempranamente. La focalización en las diferencias entre niñas y niños ha opacado el estudio del problema general del «miedo a la matemática». De las conversaciones, notas, novelas, diversas manifestaciones artísticas donde la matemática aparece, surge la conclusión de que un número notoriamente mayoritario de las personas que han tenido estudios regulares desde la infancia tienen la opinión de que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se distinguen del de casi todas las otras disciplinas.

En mi libro *La dimensión humana de la matemática* he dado ejemplos varios de esta constatación. Las citas allí contenidas de Edgar Allan Poe son por demás reveladoras.

Las razones para que ello suceda no se deben solo a estereotipos, a imaginarios colectivos, pero estos influyen fuertemente especialmente en la percepción subjetiva, en el temor, en los preconceptos sobre la disciplina y quienes tienen poca o mucha facilidad para ella.

Muchas de las características que he resumido en la sección 5, dan un carácter peculiar al aprendizaje de la matemática. Para motivar la relectura de esos ítems destaco los que me parecen particularmente diferenciadores: lenguaje y símbolos específicos, procesos lógicos, acumulación. En todos los casos la exigencia de precisión en definiciones y procesos agrega peculiaridades que son ajenas a muchas otras disciplinas y al comportamiento cotidiano de los seres humanos. Destaco el último ítem. No se puede aprender matemática en los últimos cursos secundarios si no se sabe sumar fracciones. El saber matemático no tiene la presentación de un queso emmental: una deliciosa masa con grandes agujeros. La evolución del aprendizaje de la matemática en los ciclos primario y secundario debería más bien ser una masa uniforme en que los agujeros que aparecieran fueran considerados como vacíos que hay que

ir llenando.<sup>92</sup> La buena comprensión, la memorización, la práctica de los métodos y conceptos antes estudiados son casi imprescindibles para entender razonablemente las etapas más avanzadas. Facilita el aprendizaje, consolida más fácilmente lo nuevo.

Una problemática que ha sido ampliamente estudiada en niños (y también en mayores) es la llamada ansiedad matemática (*math anxiety*), definida de la siguiente manera: «una reacción emocional negativa caracterizada por sentimientos de tensión, aprensión y miedo ante situaciones matemáticas». Puede manifestarse como un malestar que afecta a la capacidad de una persona para realizar tareas matemáticas, resolver problemas e incluso pensar en números. Esta ansiedad puede obstaculizar el rendimiento tanto en el ámbito académico como en la vida cotidiana. Hay muchos estudios que relacionan la ansiedad y el desempeño en pruebas. Nos ha parecido útil traer a colación un trabajo<sup>93</sup> en que esos ingredientes se relacionan con la memoria de trabajo (*working memory*), entendiéndose por tal la parte de la memoria a corto plazo que se ocupa del procesamiento perceptivo y lingüístico consciente inmediato.

Los autores hicieron un estudio con 154 niños (más o menos la misma cantidad de niñas y varones) y se obtuvieron resultados semejantes a estudios simultáneos con adultos y otros anteriores con estudiantes de secundaria y bachillerato: se encontró una relación inversa entre la ansiedad matemática y el rendimiento en matemática para los niños con memoria de trabajo más activa.

Los individuos con alta memoria de trabajo tienden a depender de estrategias de solución con alta utilización de esa memoria y es probable que estas estrategias se vean interrumpidas cuando la capacidad de la memoria de trabajo es cooptada por la ansiedad matemática. Argumentamos que la identificación y el tratamiento tempranos de las ansiedades matemáticas son importantes porque ellas pueden convertirse en una bola de nieve y, finalmente, llevar a los estudiantes con el mayor potencial (es decir, aquellos con la mayor memoria de trabajo) a evitar los cursos de matemática y la elección de carreras relacionadas con la matemática.

92 Por más detalles ver p. 98 de mi libro *La dimensión humana de la matemática*. Nota al pie n.º 1.

93 Ramírez, Gerardo; Gunderson, Elizabeth A.; Levine, Susan C., y Beilock, Sian L.: «Math anxiety, working memory, and math achievement in early elementary school». *Journal of cognition and development*, 14(2):187-202, abril-junio del 2013.



La influencia de la matemática en aspectos psicológicos, en particular de niños, fue observada bien antes del año 2000. Los grandes pedagogos preocupados por la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina se interesaron en ello. Desde la pediatría hubo interés en el asunto; por ejemplo, hemos consultado *The wrath to math*. Ver nota al pie n.º 23. Poco antes Wigfield y Meece<sup>94</sup> observaron «dos componentes de la ansiedad matemática, un componente de reacciones afectivas negativas y un componente cognitivo». El componente afectivo se relacionaba más bien con las percepciones de habilidad y rendimiento matemático. El componente cognitivo se relacionaba de forma más fuerte y positiva con la importancia que los niños conceden al esfuerzo real en matemática y a la matemática misma. Ya en estos trabajos se observaba que las niñas manifestaban reacciones afectivas negativas hacia la matemática más fuertes que los niños.

El trabajo de 2013 antes citado (nota al pie n.º 35) fue de los primeros en detectar a través de encuestas y comparaciones numéricas la ansiedad matemática en niños en los primeros años escolares. Esto que se percibe por mera observación del comportamiento de los niños pequeños dio lugar a gran cantidad de estudios posteriores (obsérvese que el trabajo de campo del estudio mencionado es de alrededor del 2010) y dieron por estos métodos confirmación de que dicha ansiedad tiene un efecto acumulativo que se observa también al final de la escuela y en los estudios secundarios.

---

94 Allan Wigfield & Judith L. Meece (1988). «Math anxiety in elementary and secondary school students». *Journal of Educational Psychology*, 80, 210-216. Wigfield sigue siendo un referente en estudios sobre las motivaciones de niños en edad escolar.

## 2.10. MÁS OPINIONES ESPECÍFICAS

Derek Haylock fue docente de universidades inglesas y ha producido una profusa obra dedicada a maestros y profesores tratando de exponer los contenidos matemáticos que los maestros deberían saber. En general están referidos a los programas en uso en Inglaterra. Una de sus últimas obras importantes<sup>95</sup> fue escrita bajo la totalmente compartible consigna: «una de las mejores maneras de que los niños aprendan y comprendan mucho de la matemática de la escuela primaria es que se las explique un maestro que las entienda».

Seré bastante extenso al describir algunas de las apreciaciones de este autor que es particularmente sincero y claro en exponer diversas situaciones problemáticas.

Desarrolla a partir del «Capítulo 2. Valor posicional» los temas que Haylock considera que los maestros deberían entender. Pero ¿y el capítulo 1 de qué trata? Precisamente de la «Inseguridad de los maestros ante la matemática».<sup>96</sup>

95 Derek Haylock: *Mathematics explained for primary teachers*, SAGE publications, California, 2006. Hay traducción al español: *Matemáticas explicadas para maestros de primaria*, Correo del Maestro y la Vasija, México 2010. Todas las citas en este trabajo están entre las páginas 19 y 27 de la edición en español.

96 Los capítulos son 27 en total. Son los siguientes: «Modelado matemático»; «Las estructuras de la suma y la resta»; «Estrategias mentales para sumar y restar»; «Métodos escritos para la suma y la resta»; «Las estructuras de la multiplicación y la división»; «Estrategias mentales para la multiplicación y la división»; «Métodos escritos para la multiplicación y la división»; «Restos y redondeos»; «Múltiplos, divisores y primos»; «Números cuadrados, números cúbicos y formas numéricas»; «Enteros: positivos y negativos»; «Fracciones y razones (tasas)»; «Cuentas con decimales»; «Proporciones y porcentajes»; «Manejo de datos»; «Comparación de conjuntos de datos»; «Probabilidad»; «Álgebra»; «Coordenadas y relaciones lineales»; «Medición»; «Ángulo»; «Transformaciones y simetrías»; «Clasificar formas»; «Perímetro, área y volumen»; «Razonamiento matemático». En la séptima edición del libro, del 2024, los capítulos son muy semejantes, pero han sido reordenados y la estructura lógica es aún más clara al organizarse los 28 capítulos en secciones:

En este capítulo inicial, incluido en la sección sobre *Comprensión matemática* en las últimas ediciones del libro, hace constataciones muy actuales para nuestro país: los maestros estaban muy pendientes de los enfoques sobre la organización de las actividades escolares y quedaba poco tiempo para dar explicaciones sobre los conceptos principales. Para dar idea de a qué nos referimos: estaban más preocupados en avanzar página por página en algún manual, en los aspectos procedimentales, que en dar explicación de los porqués, en los aspectos sustantivos de las preguntas a responder.

Haylock escribió:

Por supuesto, para aprender matemática se necesita más que recibir la explicación del docente y luego hacer los ejercicios de práctica. El uso y la aplicación de la matemática deben estar siempre en el centro del aprendizaje de la materia. Pero los niños necesitan [en grupos] explicaciones cuidadosas, sistemáticas y apropiadas de conceptos, procedimientos y principios matemáticos. [... Esto] puede estar asociado con una costumbre prevaleciente en primaria que enfatizaba el aprendizaje activo y las necesidades del alumno individual. Pero me parece que es más una consecuencia de la inseguridad con la matemática que es característica de muchos maestros.

La población adulta en general tiene muchas y variadas confusiones acerca de cuáles son los procesos matemáticos básicos en la vida diaria y su importancia. Se los relaciona con preguntas cuyas respuestas están bien o mal, que no merecen aproximaciones. Los ya anotados sentimientos de incompetencia, frustración y ansiedad con la matemática están relacionados con estas confusiones. Los maestros y profesores no somos ajenos a estas características, que podrían ser consideradas deficiencias.

Haylock expresa que su experiencia indica que los sentimientos de los practicantes del magisterio respecto de la matemática se pueden agrupar en ansiedad y temor, expectativas, estilos de enseñanza y aprendizaje, imagen de la disciplina y lenguaje. Luego da datos y analiza estos aspectos.

Respecto de la ansiedad dice que gran número de maestros...

---

«a. Comprensión matemática»; «b. Razonamiento matemático y resolución de problemas»; «c. Números y cálculos»; «d. Otros conceptos y habilidades numéricas»; «e. Álgebra»; «f. Medida»; «g. Geometría»; «h. Estadística y probabilidad».

[...] están confundidos en muchos de los conceptos que subyacen en el material que enseñan a los niños y que no están del todo conscientes de sus insuficiencias en matemática. [...] Esa visión difundida de que la matemática es difícil y, por lo tanto, solo para inteligentes, aumenta esos sentimientos de inferioridad. [Estas ansiedades de] los maestros (y los padres) pueden usualmente ser transmitidas a sus alumnos.

Más adelante, en un tono autocrítico observa —en su calidad de profesor de matemática de maestros— que «debemos parar y reflexionar acerca de qué les hacemos a nuestros alumnos: son adultos exitosos e inteligentes pero continúan sintiéndose [...] tontos o frustrados cuando se enfrentan a tareas matemáticas» y consideran socialmente aceptable no ser buenos en matemática.

En una valoración que en nuestros países me siento tentado a ratificar indica que los maestros jóvenes tienen...

Recuerdos de la forma en que les fue enseñada la matemática, reconociendo ahora, desde su perspectiva adulta, que parte del problema era una limitación importante del estilo de enseñanza que tuvieron [...] haber sido estimulados a aprender de memoria, a aprender reglas y recetas sin entender. Este estilo de aprendizaje memorístico era luego reforzado por un éxito aparente [...] que fortalece] la sensación de ansiedad e insuficiencia.

Al final de la sección 5 nos hemos referida a los aspectos memorísticos en las evaluaciones de los alumnos. Todas estas valoraciones me traen a la memoria unas expresiones —con las que estoy enteramente de acuerdo— que escuché o leí en alguna parte: los profesores y maestros no solo deben enseñar ecuaciones, sino que deben saber qué importancia tienen y han tenido, qué importancia tendrán en los siguientes cursos. ¡Esto no es lo que sucede! Muchos profesores aprenden el contenido específico y machacan con él sin saber para qué.

Por último, Haylock destaca que, para muchos de sus alumnos, maestros jóvenes, «el lenguaje matemático parecía ser demasiado técnico, demasiado específico de la disciplina y no era reforzado por su uso en la vida diaria». Incluso no reconocían ideas matemáticas que habían entendido bastante bien, cuando estas eran formuladas en el lenguaje matemático formal. Este, como ya he expresado, es un mal necesario que hay que saber cómo *driblear*.

## 2.11. COLOFÓN

Creo haber destacado suficientemente el carácter no especializado, se podría decir amateur, de mi acercamiento a la enseñanza de la matemática en niños. Creo que estos nuevos enfoques del asunto relacionando las dificultades reales de la disciplina, con lo que traemos desde el inicio, al nacer, con los vicios que se van consolidando a lo largo de la educación formal y los estereotipos que imperan llevan naturalmente a un enfoque histórico-cultural, a magnificar el aprendizaje en interacción con los incentivos del ambiente social. Dicho en un lenguaje que siento un poco ajeno, pero que expresa bien mis ideas, afirmo que las construcciones mentales son individuales, pero evaluables solo en contextos sociales. La matemática no escapa a esa valoración. Es un rasgo más de su dimensión humana. Debemos hacer esfuerzos porque se vaya suavizando esa diferenciación extrema que se hace de la disciplina en relación con otras ramas del saber.

Puede argüirse que estas notas nada aportan a qué hacer en el aula. Sin empacho digo que no es mi propósito inmediato. Hemos tratado de dar nuevos enfoques a los problemas del aprendizaje y la enseñanza de la matemática tomando en cuenta asuntos que hacen al origen del conocimiento matemático en los seres humanos, su evolución en los primeros años de vida y los prejuicios que existen respecto de la disciplina.<sup>97</sup> Soy

---

97 Si tuviera que recomendar textos que se aproximen a mis opiniones sobre qué y cómo enseñar matemática en la escuela incluiría los de Derek Haylock y los de los seguidores de la «Educación matemática realista», promovida por Hans Freudenthal (1905-1990; fue un importante matemático de los Países Bajos, que hizo aportes en topología algebraica. Poco antes de los setenta se dedicó a la enseñanza matemática elemental; su intervención evitó que la llamada *nueva matemática* avanzara en los Países Bajos. Posteriormente concibió un lenguaje matemático universal [lincos] que haría posibles comunicaciones con extraterrestres; razonablemente tuvo pocos adeptos). A Haylock ya me he referido antes. Marja van den Heuvel-Panhuizen ha escrito y coordinado varios libros siguiendo los principios de Freudenthal. Entre ellos destaco el titulado *Children learn mathematics: A learning- teaching trajectory*

consciente de que quizás me arriesgo de más, pero en estos tiempos de tantas incertidumbres, de corrección política, es mejor fundamentar debidamente y hablar claro.

---

*with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school.* Freudenthal Institute, Utrecht University, 2001. Hay una traducción al español, *Los niños aprenden matemáticas*, editada por Correo del Maestro, México, 2010.



### 3. BREVE HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN URUGUAY





Este trabajo es una versión expandida de la presentación de Roberto Markarian en la reunión inaugural del congreso organizado para celebrar la inauguración del Laboratorio Internacional de Investigación IRL-2030. Laboratorio del Plata, denominada «IFUMI's Launching Conference at Montevideo. A meeting to celebrate the inauguration of the International Research Laboratory IRL-2030. Laboratorio del Plata».

La reunión transcurrió entre el 28 de octubre y el 1 de noviembre del 2024. La primera sesión estuvo dedicada a «Roots and wings of Mathematics in Uruguay».

Muchos detalles, en particular los relacionados con el desarrollo de las áreas sistemas dinámicos y geometría se pueden encontrar en la mencionada «Historia de los sistemas dinámicos en Uruguay». Como apéndices a este trabajo hemos agregado algunos pantallazos de la actividad de ese grupo —que es el mío—. Creo que muestran de una manera más personalizada otros aspectos de la dimensión humana de la actividad matemática: la disposición a cambiar y la apertura de nuevos rumbos, los aportes entre colegas, el respeto a pesar de diferencias ideológicas, la incomprensión que lleva a aspectos jocosos.

Es imposible hacer una historia de la matemática en Uruguay sin tener en cuenta tanto la historia como el tamaño del país. Somos menos de 3,6 millones de habitantes, casi la misma cantidad en los últimos veinte años.

Esta exposición se divide en cinco partes de acuerdo con la evolución de la disciplina en el país:

1. Los comienzos: hasta 1942.
2. Crecimiento y consolidación: hasta 1973.
3. Oscuridad: hasta 1984.
4. Renacimiento sobre las mismas bases y en condiciones diferentes: hasta 2005.
5. Diversificación: hasta ahora.

### 3.1. LOS COMIENZOS: HASTA 1942

Se podría considerar —con grandes reparos— que las primeras contribuciones originales a la matemática en Uruguay son las de Rafael Barret, quien realizó cálculos sobre la cantidad de números primos menores que un número dado y, en 1903, habría enviado una carta a Henri Poincaré con sus resultados. Rafael Barrett fue un español, con una buena formación en ingeniería y matemática, desarraigado de su condición aristocrática, que luego de combativas y azarosas estadías en Paraguay murió tuberculoso en la Gironde, Francia; tenía 34 años. Sin embargo, no se sabe a ciencia cierta cuándo y cómo habría llegado al Río de la Plata.<sup>98</sup>

Hasta 1985, los estudios y la enseñanza de la matemática avanzada estaban estrechamente ligados casi exclusivamente a la enseñanza de la ingeniería y ramas afines (Facultad de Matemática y Ramas Anexas). La creación de la Facultad de Humanidades y Ciencias en 1945 no cambió mucho esta situación.

Los ingenieros de finales del xix y principios del xx habían colaborado con ingenieros ingleses, franceses, alemanes, en obras ferroviarias y portuarias; una década más tarde con cierta independencia, se encargarán de la construcción de la gran obra de la Rambla Sur, costanera del Río de la Plata, desde las cercanías del puerto de la ciudad de Montevideo hacia el este.

Cabe destacar el nivel de los programas de Matemática aprobados en estos años, escritos bajo la influencia de Eduardo García de Zúñiga (1867-1951), de la primera generación de ingenieros y decano de la

98 Toda la información está contenida en: García de Zúñiga, Eduardo: «Rafael Barrett, matemático». *Boletín de la Facultad de Ingeniería*. Vol. 1, 1935, pp. 30-32. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198168.pdf>. También en: Laguardia, Rafael (1951). «Eduardo García de Zúñiga. Algunos aspectos de su personalidad». *Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias*, n.º 7, diciembre de 1951. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/198595.pdf>

Facultad durante varias épocas; entre sus referencias figuraban libros muy recientes: *Algebrían analysis*, de Ernesto Cesàro; *Calcul vectoriel*, de Raoul Bricard, y *Leçons de mécanique rationnelle*, de Paul Painlevé. Los programas permanecieron casi inalterados durante décadas.

A partir de 1925, hubo visitas y conferencias de importantes científicos. Recogemos algunas de ellas: Julio Rey Pastor (1925; 1932: el azar, teoría de los errores); Albert Einstein (1925); Emile Borel (14 de agosto de 1929: aplicación del cálculo de probabilidades al principio de Carnot y a los fenómenos irreversibles); Francesco Severi (1930: la relatividad al alcance de las personas cultas; el valor de las hipótesis en matemática); Jacques Hadamard (1930: psicología de la invención matemática y científica).

En aquel ambiente fermental y polémico, Rafael Laguardia (1906-1980) regresó en 1929 de París, donde había realizado estudios con Goursat, Picard, Borel, Julia, Denjoy, Montel. Fue autorizado a impartir un curso libre sobre funciones analíticas y sus aplicaciones. Dirigió un grupo que estudiaba regularmente matemática. Mischa Cotlar (1913-2007) formó parte del grupo, José Luis Massera (1915- 2002) se incorporó en 1935.

Establecieron importantes vínculos con matemáticos que salieron de España e Italia entre 1921 y 1939: Julio Rey Pastor (1888-1962), Luis Santaló (1911-2001), Beppo Levi (1875-1961) que se establecieron en el Río de la Plata.

### 3.2. CRECIMIENTO Y CONSOLIDACIÓN: HASTA 1973

La creación del Instituto de Matemática y Estadística (IME) en 1942 marcó un cambio fundamental en la enseñanza, la formación y la investigación en matemática en el país. Rafael Laguardia, que fue el director natural desde el primer momento, y José Luis Massera fueron los abanderados de aquel proceso, con perfiles diferentes, pero en estrecha colaboración. En el período inicial —hasta 1952— se incrementaron los intercambios científicos. Por ejemplo: los días 28 y 29 de julio de 1942, Georges D. Birkhoff (Harvard<sup>99</sup>) dictó dos conferencias («¿Es posible medir esto?» y «Lógica y matemática modernas»); en 1943 y 1947, Marshall Stone (Harvard), que se había doctorado bajo la dirección de George D. Birkhoff, dio conferencias en español. Georges Valiron (París, 1946), Antony Zygmund (Chicago, 1948), Warren Ambrose (MIT, 1948), Leopoldo Nachbin (Río de Janeiro, 1951), Paul R. Halmos (Chicago, 1951-1952) y Laurent Schwartz (Nancy, 1952) estuvieron aquí. Se creó y creció una biblioteca de matemática —que fue el orgullo de América Latina durante muchos años—, empezaron a salir las publicaciones del IME.

Laguardia realizó estancias prolongadas entre 1943 y 1945 en la Universidad de Santa Fe (Argentina) y en Harvard, Princeton y Brown; Massera las llevó a cabo entre 1947 y 1948 en Stanford, Nueva York y Princeton. Las actividades de este período pueden considerarse las del inicio de los trabajos sobre ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

Mario Wschebor (1939-2011) comentó:

Los matemáticos tienen que agradecerle a Massera el teorema de existencia porque en estos países pequeños como Uruguay, las tradiciones científicas comienzan a desarrollarse con personas excepcionales desde

99 Se indica, en todos los casos, lugar de trabajo al momento de visitar Uruguay y fecha de la visita.

el punto de vista de su talento [...] pero también excepcionales desde el punto de vista de su fuerza de voluntad y de su capacidad para enfrentar circunstancias completamente adversas. Tras describirlos: aislamiento, guerra, entorno hostil (profesionalidad de la Facultad de Ingeniería), falta de reconocimiento [...] estas personas fundaron una escuela que nosotros, hijos de esa escuela, lo primero que tenemos que agradecerles es su existencia porque no habría matemática en Uruguay si ellos no lo hubieran hecho. Sin duda hay una impronta personal muy fuerte de los fundadores que son Massera y Laguardia.

Massera explicó que fue a Stanford atraído por las figuras de los húngaros George Polya (1887-1985) y Gábor Szegő (1895-1985), pero...

Paradójicamente, no fue en la Universidad sino fuera de ella donde encontré un motivo de gran interés profesional. Conocí a una persona que había sido oficial de alto rango en la marina zarista [...]. Entonces trabajaba para la Marina [...]. Trabajaba entonces para la US Navy en problemas de estabilización de buques en mares agitados, y se apoyaba en estudios teóricos de matemáticos rusos sobre cuestiones de estabilidad, de los que tenía fotocopias y sabía que la Universidad de Nueva York había hecho una publicación en inglés. Conseguí un ejemplar y como en Uruguay había adquirido algunas nociones de ruso, también pude leer las fotocopias de mi amigo el marino. [...] Me apasionaban estos temas.

... y se trasladó de la costa oeste a Nueva York y Princeton [MA, 98] 49-50. Los dos primeros trabajos de Massera (1943, 1944) aparecieron en español en publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), de la Facultad de Ingeniería (Montevideo) y del Instituto de Matemática y Estadística. El siguiente (1949) en los *Annals of mathematics* (Princeton), quizás la revista más importante de la disciplina.

Algunos años más tarde, Juan Jorge Schäffer (1930-2017) —alumno y coautor de algunos de los resultados fundamentales de Massera— escribió sobre las virtudes de Massera en la tarea investigadora (ecuaciones diferenciales lineales y análisis funcional): «un juicio preciso sobre qué resultados pueden considerarse “importantes” [...] y la modestia y el buen gusto [...] de publicar precisamente lo que merece la pena ser publicado».

Aunque M. Wschebor no se especializó en la rama de la matemática de Massera, se consideraba su discípulo. Al referirse a su claridad expositiva, transmitió la idea...

[...] de que tiene que ver con las tradiciones culturales de una época determinada [...] un rasgo cultural. Hoy en día, una forma de defender la falta de claridad en el discurso es inducir a la gente a la falsa noción de que se opone a la heurística y a su esencia intuitiva interna, lo que me parece una tontería. Massera era un maestro. El poder de la intuición formaba parte, sin duda, de su discurso. Oponer ambas cosas es, como he dicho antes, una tontería.

A continuación, Wschebor destaca otro rasgo distintivo: la unidad en la diversidad.

En una época de profesionalización de las ciencias en la que la especialización puede ser muy destructiva, cada uno de estos colegas ha sido, ante todo, alguien con una amplia gama y una gran variedad de intereses en la actividad intelectual y cultural. Massera es matemático, y naturalmente también historiador de las ideas; no lo olvidemos. Y esto es casi parte integrante de su ubicación, siendo difícil separar un aspecto del otro. Creo que cuando se manejan los conceptos de multidisciplinariedad e interdisciplinariedad se hace con una superficialidad alarmante. Por ello, esta visión de los intelectuales clásicos debería trasladarse a la experiencia intelectual de los más jóvenes. Algunas de las fracturas culturales que se han producido en los últimos 30 años corresponden a esta visión de, digamos, riqueza, complejidad. Esto no debe tomarse como un consejo, sino más bien como una reivindicación de una forma de ver la cultura.

El propio Massera afirmó:

Entre las personas que empiezan a cultivar la ciencia con cierta originalidad, no debe haber un criterio que yo llamaba de *Pago Chico* (lugar pequeño, en lenguaje rural), es decir, que se limitan a las cuestiones que surgen en el campo. Entonces dije que [eso] era falso y que teníamos que aspirar a superar los rangos mundiales y lo hacemos, lo seguimos haciendo. Lo hicimos antes, lo seguimos haciendo...

Un ejemplo de la importancia que estaba tomando la matemática en Uruguay es que en diciembre de 1951 se realizó en Punta del Este un «Simposio sobre algunos problemas matemáticos que se estudian en América Latina», «organizado en colaboración con el Instituto de Matemática y Estadística».

Laguardia se referiría una y otra vez a que hay que tener cuidado con hacer el palomar sin tener las palomas: «El palomar se llenará de gatos».

Una segunda generación de matemáticos se incorporó al IME hacia 1950. Todos ellos estudiaron en el extranjero: Alfredo Jones (1930), Cesáreo Villegas (1921-2001), Günter Lumer (1929-2005), Juan Jorge Schäffer (1930-2017).

Como dijo uno de ellos, Alfredo Jones: «Me gradué como ingeniero y luego hice matemática en Illinois. Ahora estamos infinitamente mejor que cuando empecé en los años sesenta». Se doctoró en la University of Illinois at Urbana-Champaign (1962). Cesáreo Villegas viajó a Estados Unidos para estudiar Estadística Industrial en 1954-1955. Gunter Lumer también viajó a ese país, se doctoró en la University of Chicago (1959), fue profesor en la Universidad de Seattle y luego se instaló en Bélgica. Juan Jorge Schäffer se doctoró en Ingeniería Eléctrica y Matemática en Zúrich (1956), emigró a Estados Unidos en 1968.

En el «Capítulo 10. Montevideo» de su libro *I want to be a mathematician. An automathography*, Paul R. Halmos (Budapest, 1916-2006, California) dedicó más de treinta páginas a su visita a Uruguay entre setiembre de 1951 y mayo de 1952. Dio una vívida imagen de la matemática en Uruguay hace setenta años. Describió en detalle la habitación donde se alojó, las comidas, el tiempo y el clima, la estructura de la universidad, los salarios, etcétera:

Las ventanas de la oficina daban al mar —hermosa vista— desde donde soplaban los vientos fríos. El edificio era nuevo (en realidad inacabado), pero mal construido; cuando un viento decidía soplar, soplar de verdad, las ventanas no bastaban para evitar que los papeles de mi mesa se agitaran. No había calefacción central. Pretendían instalar calefacción central, pero el dinero se acabó antes de que el edificio estuviera terminado.

Gente del instituto El número total de personas a las que vi en el instituto más de una vez durante mi estancia fue de 11.

[Con] Alfredo Jones (pronunciado Choness), y Cesáreo Villegas [...] tuve sobre todo contacto amistoso, pero muy poco de tipo profesional. Estaba Laguardia, por supuesto, a quien consideraba sin duda un amigo, pero con quien mis contactos profesionales eran casi exclusivamente administrativos.

Por último, pero no por ello menos importante, están Massera, Lumer y Schäffer. Massera tiene la misma edad que yo (35 años en 1951); ya era un matemático establecido y respetado. Lumer y Schäffer eran unos 15 años más jóvenes, estudiantes ambiciosos y con talento.



Massera era un tipo fornido, de estatura por debajo de la media, con el pelo oscuro pero canoso cortado a la media y un comportamiento tranquilo, casi plácido. Conmigo se mostró cordial y amable. Aunque no ocultaba que era miembro activo del partido comunista local, se las arreglaba para mantener su vida política cuidadosamente separada de la profesional. Le veía todos los días durante el horario oficial del instituto (que en invierno era de 1.30 a 6.30 de la tarde). Permanecía en su despacho más que la mayoría de los demás (todos los despachos podían espiarse desde todos los demás gracias a un ingenioso sistema de ventanas diseñado a tal efecto), y parecía estar ocupado haciendo lo que hacen los matemáticos. Hablamos del tiempo tomando una taza de té, me contó el contenido de su último curso sobre el espacio de Hilbert e intentó interesarme por su actual problema de investigación sobre ecuaciones diferenciales. A menudo se interesaba por las preguntas que nos hacíamos los demás y, tras desaparecer en su despacho para pensar en ellas, salía una hora más tarde con las respuestas. Mecanografiaba sus propios trabajos —largos—; leía las revistas de actualidad; dirigía un seminario; y guiaba a varios estudiantes en sus estudios relacionados con el seminario.

[En 1985, cuando se escribió el libro:]

Laguardia ha muerto. Massera se convirtió en diputado comunista y, cuando el gobierno pasó de un comité-presidencia de tipo suizo a un ultraderechismo represivo, fue encarcelado y torturado, y permaneció en prisión durante ocho años. Jones es un algebrista respetado en Brasil, y Villegas un estadístico respetado en Canadá. Lumer se dedica a los espacios duros de Hardy en Bélgica, y Schäffer (en parte todavía bajo el impulso de Massera) ha trabajado mucho en ecuaciones diferenciales en Pittsburgh. La matemática en Uruguay está muerta ahora, tan muerta como lo estaba antes de Laguardia; quizás reviva algún día. [185-188]

El contenido de las últimas secciones del capítulo queda claro a través de sus títulos: «Enseñanza en Montevideo», «Investigación en Uruguay», «Espía, grado menor», «Pequeños recuerdos».

Jorge Lewowicz (1937-2014), Enrique Cabaña (1937) y Alfredo Gandulfo (1936-1971). Ingresaron al IME en 1958. Mario Wschebor (1939-2011), y Marcos Sebastiani (1940) comenzaron a trabajar en la Universidad en los años sesenta.

Salieron del país para realizar estudios de posgrado. Cabaña terminó los estudios de Ingeniería y se fue a Estados Unidos en 1968 para trabajar

con H. P. Mac Kean. Lewowicz con Mauricio Peixoto, Wschebor con Jean-Pierre Kahane en 1972. Sebastiani fue el primero —de cuatro— de los doctorandos de René Thom; obtuvo el título de doctor en 1970, regresó a Uruguay y poco después se instaló en Porto Alegre, donde aún reside. La formación adquirida en el IME y las condiciones de trabajo que allí reinaban potenciaron las salidas al exterior.

La siguiente generación comenzó a trabajar en el IME entre 1966 y 1972. Algunos de ellos fueron (se indica fecha de nacimiento, lugar, fecha y orientador de doctorado): Rodrigo Arocena (23/2/1947, UCV, Caracas, 1979, M. Cotlar); Walter Ferrer (2/12/1948, UC, Berkeley 1980, G Hochschild); Jorge Gerszonowicz (4/10/1946-23/7/2021, Rutgers, 1982, F. Treves); Gerardo González-Springer (17/12/1949-22/9/2024, París VII 1977, J-L Verdier); Ricardo Mañé (14/2/1948-14/3/1995, IMPA, Río de Janeiro, 1973, J. Palis); Roberto Markarian (12/12/1946, IMPA, 1990, J. Palis); José Heber Nieto (6/4/1949); José Vieitez (6/6/1950, UR, Montevideo, 1992, J. Lewowicz). Arocena, Ferrer, Gerszonowicz y Markarian tenían cargos permanentes. Marcos Dacjzer (1948, IMPA, 1980, M. do Carmo); Ricardo Fraiman (12/1949, UBA, 1980, V. J. Yohai); Juan Tolosa (7/8/1943, U Amistad de los Pueblos Patricio Lumumba, Moscú, 1969, V. I. Rozhkov); todos ellos comenzaron a trabajar en matemática en el mismo período.

Massera y casi todos los nombrados anteriormente fueron destituidos de sus cargos poco después de producirse el golpe de Estado en Uruguay, durante la Intervención de la Universidad en setiembre de 1973. Muchos matemáticos emigraron poco después. Massera, Lewowicz, Markarian y Vieitez permanecieron en el país.

### 3.3. OSCURIDAD: HASTA 1984

En 1974 emigraron a Argentina Rodrigo Arocena, Enrique Cabaña, Marcos Dacjzer, Walter Ferrer, Ricardo Fraiman, Jorge Gerszonowicz, Jose H. Nieto, Gonzalo Pérez y Mario Wschebor. En 1976 a Argentina y Brasil: José Vieitez y Jorge Lewowicz, respectivamente.

José Luis Massera (octubre de 1975) y Roberto Markarian (febrero de 1976) fueron detenidos y torturados; liberados en marzo de 1984 y septiembre de 1982, respectivamente. En una de las prisiones donde permanecieron conjuntamente escribieron, junto con Vladimir Turianski y Elvio Accinelli unas sencillas notas sobre fundamentos de la matemática que fueron publicadas unos años más tarde.

Voy a decir algo sobre la solidaridad con nosotros, tomando como ejemplo las palabras de Laurent Schwartz en *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Editions Odile Jacob, París 1997. En la tercera parte, «Au coeur du combat politique» («Capítulo XIII. Le Comité des Mathématiciens»), explica que:

[...] el Comité [...] organizó en 1976 una reunión en la Mutualité exigiendo la liberación de tres matemáticos de los países socialistas, dos de América Latina y José Luis Massera.

Cuatrocientos cincuenta matemáticos franceses firmaron una petición por su libertad y una delegación formada por Yvette Amice, Cartan, Diedonné y yo mismo, fue recibida por el embajador uruguayo. Entregamos un mensaje firmado también por Kahane, que no pudo estar presente.

En el libro hay también unas líneas dedicadas a mí y a mi esposa, Leny Durán.

### 3.4. RENACIMIENTO SOBRE LAS MISMAS BASES Y DIFERENTES CONDICIONES: HASTA 2005

Una lista parcial de profesores de matemática que trabajaron en la Udelar antes del fin de la intervención incluye a Eleonora Catsigeras, Heber Enrich, Gabriel Paternain, Miguel Paternain, Álvaro Rovella, Gustavo Balerio, Nelly Camporeale, Sylvia Dobyinski, Daniel Kofman, Ernesto Mordecki, Fernando Peláez, Fernando Paganini, Gonzalo Pérez.

La liberación de Massera en marzo de 1984 fue recibida con inmensa alegría por quienes deseaban estudiar o reiniciar sus estudios de matemática. El encuentro con Massera recién salido de la cárcel en su casa de la calle Ámsterdam es recordado con cariño por todos sus participantes.

Los matemáticos que regresaban se encontraron con aquel grupo de jóvenes licenciados o estudiantes avanzados de matemática o ingeniería que habían recibido una educación que ellos mismos consideraban deficiente.

Quiero destacar la cohesión de los matemáticos uruguayos que volvían del exilio, Arocena, Cabaña, Ferrer, Lewowicz, Gonzalo Pérez, Wschebor, etcétera, al juntarse con los que empezaban a estudiar matemática y los que habíamos estado presos como Massera y yo.

En 1985, se dieron las condiciones para dar un salto en el desarrollo de todas las ciencias, en particular de la matemática. Universidad, gobierno y centros privados de formación, analizaron el problema e hicieron propuestas para la reconstrucción.

Arocena hizo interesantes reflexiones sobre el antes y el después de la dictadura para la matemática uruguaya:

Una determinada forma de hacer matemática contribuyó a la consolidación de esa pequeña comunidad; el estilo de los maestros fundadores, Laguardia y Massera, perduró en ella. [...] La etapa académica que se inició en Uruguay con el fin de la dictadura estuvo poderosamente

influenciada por investigadores uruguayos —los que regresaron al país—: los que, sin radicarse nuevamente allí, colaboraron activamente con las tareas de reconstrucción —por la gran cantidad de jóvenes que en esta etapa salieron a estudiar al exterior y regresaron, y por las relaciones internacionales de todos ellos—. Así, se forjó una red de colaboraciones y vínculos con el mundo académico internacional, del tipo que hoy es habitual, pero que, debido a la microescala de la actividad científica anterior y a su carácter bastante insular, marca más fuertemente que en otros países las diferencias entre un «antes» y un «después».

Desde antes del fin de la dictadura se organizó lo que luego se llamaría Programa de Desarrollo de Ciencias Básicas (PEDECIBA). En el seminario de evaluación de propuestas para el desarrollo programado de las ciencias básicas (10 al 20 de diciembre de 1984) participaron por el Área Matemática: Enrique Cabaña (presidente), Rodrigo Arocena, Walter Ferrer, Alfredo Jones, Jorge Lewowicz, Mario Wschebor, José Luis Massera, Julio Ricaldoni, Gonzalo Pérez, Roberto Markarian (secretario técnico). Cuatro de nosotros vivíamos en Uruguay, cuatro en Venezuela, dos en Brasil. «Los de afuera eran muy importantes.»

En junio-agosto de 1985, la Comisión del IME, presidida por Gonzalo Pérez Iribarren, solicitó nombrar al instituto Profesor Ingeniero Rafael Laguardia (y elevó una lista circunstanciada de méritos redactada por José Luis Massera). El 8 de octubre, el CDC de la universidad resuelve favorablemente.

En 1986, comienza a funcionar el PEDECIBA.

En 1987, se crea el Centro de Matemática (CM), dependiente del Rectorado y del Consejo Directivo Central (CDC). El CM pretendía concentrar la actividad de todos los investigadores en matemática. El CM otorga todas las titulaciones en Matemática, pero PEDECIBA administra los posgrados. En 1989 existían grupos permanentes de investigación en las subáreas de Álgebra, Análisis Funcional, Probabilidades y Estadística y Sistemas Dinámicos, y en informes de la época se señala que el Centro de Matemática, dependiente ahora de la Facultad de Humanidades y Ciencias, cuenta con trece doctores trabajando en él.

El proceso de creación de la Facultad de Ciencias (1986-1990) está documentado en diversos trabajos de Mario Wschebor, uno de sus principales promotores. En 1989, la Universidad de la República solicitó al Consejo Nacional de Investigación, Ciencia y Tecnología (CONICYT) incluir en una solicitud al Banco Interamericano de Desarrollo (BID) fondos para la FCEN

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales), que luego se llamaría Facultad de Ciencias). Incluía el Centro de Matemática.

El Seminario de Sistemas Dinámicos, con la orientación general de Jorge Lewowicz, comenzó a funcionar en 1987, por lo que ese año puede considerarse el de la creación del Grupo de Sistemas Dinámicos y Geometría. El seminario comenzó y sigue funcionando los viernes a las 14.30 en la Sala de Seminarios del IMERL. Se dan muchos más detalles en la *Historia de los sistemas dinámicos en Uruguay*. Trayectoria semejante tuvo el Seminario de Probabilidad y Estadística.

Ver <https://pye.cmat.edu.uy/historia>.

Hubo muchas reuniones de las diferentes áreas. Destacaré solo una, porque participó mucha gente y sobre dos áreas: XIV Escuela Latinoamericana de Matemática (ELAM), del 1 al 9 de diciembre del 2005, en Balneario Solís, dedicado a probabilidad y estadística, matemática y sistemas dinámicos y sus interacciones. Su Comité Organizador estuvo integrado por: Pablo Ferrari (USP, Brasil); Roberto Markarian (IMERL, Uruguay); Ernesto Mordecki (CMAT, Uruguay); Gonzalo Perera (IMERL, Uruguay); Martín Sambarino (CMAT, Uruguay); Marcelo Viana (IMPA, Brasil); Mario Wschebor (CMAT, Uruguay), y Marcelo Cerminara (Secretario, IMERL, Uruguay). Un centenar de alumnos y decenas de conferencias. Hubo seis cursos impartidos por Pierre Collet, Konstantin Khanin, Alain Chenciner, Michael Shub y Charles Pugh, Ravi Mazumdar y David Nualart. Los «Apuntes del curso» tenían 320 páginas y estaban disponibles al principio de la Escuela.

### 3.5. DIVERSIFICACIÓN: HASTA AHORA

Hay colegas que consideran importante el papel de la Licenciatura de Matemática de 1992 para consolidar una formación sólida y amplia; un aspecto valioso es que, en general, todos podemos hablar de matemática y entendernos. Otro es que cualquier egresado está preparado para hacer un doctorado en los lugares más prestigiosos del mundo. Esto sucedió y sucede, es una de las cosas que nos hacen fuertes y diversos.

Considero que algo fue cambiando, aumentando, consolidándose, inmediatamente después del 2000, digamos 2005. Algunas de sus características: nuevas áreas con trabajos importantes, matemáticos jóvenes muy creativos, buenas relaciones entre nosotros, mejor financiamiento en la década 2005-2015, crecimiento de las relaciones internacionales tanto en la región como con instituciones internacionales de alto nivel en todas las áreas.

El alto rigor en la evaluación y selección del personal se considera un gran mérito que debe preservarse y profundizarse.

Los investigadores miembros del PEDECIBA-Matemática, hace seis años, eran sesenta; ahora son setenta y cuatro (GR 3, 44; GR 4, 15; GR 5, 15; total activos: 74; asociados: 19; eméritos: 3).

Los grupos de Sistemas Dinámicos y Geometría, y Probabilidad y Estadística, destacan por su funcionamiento conjunto y por la calidad de varios de sus investigadores.

El grupo de Sistemas Dinámicos es el más numeroso (treinta doctores, más de un tercio del total de investigadores del país; dieciséis doctores en Probabilidad y Estadística). Los distintos grupos de Álgebra y Geometría Algebraica también cuentan con investigadores destacados. Hay seminarios regulares de varias áreas, muchos de ellos desde los ochenta; el Seminario de Álgebra del IMERL tiene cerca de veinte años.

Los grupos de Teoría de Números y Lógica muestran una buena diversificación de áreas.

La interrelación de ramas aplicadas con alto componente matemático, incluyendo análisis numérico, computación científica, etcétera, también siguen un ritmo creciente.

Los dos institutos principales se encuentran en Montevideo. El IMERL de la Facultad de Ingeniería tiene más profesores que el Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias. Juntos agrupan a más del ochenta por ciento de los investigadores. La licenciatura en Matemática se otorga en la Facultad de Ciencias; los posgrados son administrados por el PEDECIBA. Existen otros grupos más pequeños de investigadores en otras Facultades de la Udelar en Montevideo, en particular en la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración (FCEA).

El crecimiento de grupos de investigación más pequeños fuera de Montevideo, en el litoral norte (Salto, Paysandú) y en el Este (Maldonado, Rocha) es un logro muy importante. También debe tenerse en cuenta la existencia de grupos relacionados con las aplicaciones de la matemática tanto en la Universidad de la República como en algunas universidades privadas.

Un reto para el futuro cercano es que el PEDECIBA puede comenzar a desaparecer. Este programa administra programas de posgrado en diversas ciencias, particularmente en matemática, por lo que habrá que analizar dónde ubicarlos, dada la cantidad de profesores que trabajan en diferentes instituciones.

Hubo discusiones sobre la existencia de un grupo fuerte de investigación en la Facultad de Ingeniería. En estas discusiones fueron fundamentales las posiciones de Massera y particularmente de Lewowicz, a veces incomprendidas. De no haber sido por esta firmeza, la situación de la matemática en Uruguay hubiera sido otra. Cada uno actuó con su peculiar estilo y manera, todos con gran sinceridad y honestidad.

El complejo de instituciones, por cierto, algo intrincado, formado por el CM, el IME, la AM-PEDECIBA, etcétera, constituyen, al mismo tiempo, una continuación y una superación del proceso de formación y desarrollo de la escuela matemática uruguaya que hemos tratado de esbozar. Sin duda, la experiencia y el tiempo irán afinando, perfeccionando y simplificando estos mecanismos, lo que augura un extenso y profundo enriquecimiento de su integración y de la amplitud de sus actividades.

Hoy podemos celebrar que todos nos consideramos parte de un mismo cuerpo que se consolida con la inauguración del Instituto Franco-Uruguayo: el Laboratorio Internacional de Investigación IRL-2030.



### 3.6. APÉNDICES. PANTALLAZOS DINÁMICOS

#### APÉNDICE I. CUATRO RAZONES. ELEONORA CATSIGERAS

Eleonora Catsigeras y Heber Enrich, su esposo, estudiaron ingeniería, se recibieron (en 1981 y 1978) y trabajaron en ANTEL y UTE, respectivamente. Antes de recibirse ya daban clases de matemática en la Facultad de Ingeniería. En el texto que sigue (fechado en Montevideo, 16 al 18 de marzo del 2024), ella narra cómo se fue dando el pasaje al estudio y las importantes investigaciones que realizaron en sistemas dinámicos.<sup>100</sup>

No era ingeniera exitosa. No me gustaba el trabajo de ingeniera. Estaba deseando dejar ANTEL... Me recibí de ingeniera porque no tenía otra cosa más cercana a la matemática para estudiar en Uruguay en aquel entonces.

Cuando terminé las disciplinas de matemática y física de ingeniería y fui a preguntar, no me acuerdo en qué año (era en dictadura), a la Facultad de Humanidades y Ciencias sobre qué oferta de cursos de matemática había, terminaron ofreciéndome estudiar sola algunas materias y dar las clases yo, como docente, no como estudiante. Esa era la cuestión. No había cómo formarse en matemática. Así que renuncié al IME y me dediqué durante diez años a la ingeniería. Pero muy a disgusto. Ganaba bien, pero pagaba yo un precio muy alto estando infeliz con mi trabajo. Se me hacía horrible. De todas formas, puse lo mejor de mí en mi trabajo en ANTEL, y conocí gente genial allí dentro (entre ellos Andrés Tolosa, con quien éramos compañeros de trabajo, y que hace poco llegó a

---

<sup>100</sup> Los enlaces siguientes contienen un mismo archivo cuyo texto (también de Eleonora Catsigeras) es una muestra de la expectativa de muchos jóvenes por estudiar matemática poco después del fin de la dictadura: [https://www.fing.edu.uy/eleonora/Recopilacion/Archivos/Divulgacion/2017\\_LewowiczSalioAlPasillo.pdf](https://www.fing.edu.uy/eleonora/Recopilacion/Archivos/Divulgacion/2017_LewowiczSalioAlPasillo.pdf) y <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/568568.pdf>

ser presidente de ANTEL, y fue junto con su señora Carmita a mi despedida del IMERL en diciembre pasado).

Pero dejar ANTEL y dedicarme a los sistemas dinámicos no fue ningún sacrificio, sino todo lo contrario. Yo dejé ANTEL recién en 1990 para ir al IMPA (aunque fuimos al IMPA recién en enero de 1991). Durante los últimos años de trabajo de ANTEL, ya estábamos estudiando las asignaturas de la Licenciatura en Matemática y dando los exámenes.

Después de la llegada de Lewowicz y de su curso de Introducción a los Sistemas Dinámicos, el factor más importante para mi decisión de dedicarme a los sistemas dinámicos fue el provocado por los cursos de Mañé en Montevideo. Mañé nos daba cursos cortos en diciembre cuando venía a visitar a su familia. Eran cursos de doctorado del IMPA. Nos introdujo a la teoría ergódica, ya que daba un curso de transformaciones expansoras con la demostración del teorema de Ruelle. Casi siempre preguntaba ese tema en los exámenes de calificación del IMPA. Y los apuntes, escritos de puño y letra por Mañé, fueron muy inspiradores. Se volvieron un *bestseller* entre los estudiantes del IMPA de la primera mitad de la década de 1990. Nos pedían prestados los apuntes de Mañé para fotocopiarlos, ya que de otra forma solo se podía estudiar el tema en los artículos originales, que eran muy difíciles de entender. Pero cuando Mañé nos lo enseñó en su curso en Montevideo en la segunda mitad de la década de 1980, nos entusiasmó mucho, fue clarísimo y disfrutable, a pesar de que recién estábamos por la mitad de la carrera de la licenciatura.

El tercer factor (primero, segundo y tercero en orden cronológico) fue nuestra ida al ICTP (International Centre for Theoretical Physics, que tiene un área de matemática) de Trieste en 1988. Fuimos a la Escuela de Sistemas Dinámicos y después al *workshop* de Sistemas Dinámicos. Pudimos ir gracias a la recomendación de Lewowicz que no sé cómo hizo para que nos aceptaran, porque solo éramos estudiantes de grado.

En Trieste hicimos tres cursos. Fueron muy intensos. Uno de Palis, sobre sistemas dinámicos. Zezé<sup>101</sup> daba las clases prácticas. A Palis ya lo conocíamos de una visita que había hecho él al IMERL (por ese entonces, IME). A Zezé la conocimos en esa oportunidad en Trieste. Estaba con Laurita, bebé de pocos meses de edad (la hija de Jacob y Zezé). El segundo curso que hicimos fue con Mañé sobre teoría ergódica. Recién acababa de escribir su libro, y ese curso fue magnífico. Viana, que por

101 Así llamamos a María José Pacífico, en ese entonces esposa de Jacob Palis. Jacob Palis fue orientador de muchos de quienes nos dedicamos a estudiar Sistemas Dinámicos en IMPA.

ese entonces era estudiante de doctorado del IMPA, daba las clases prácticas del curso de Mañé. Fue ahí donde lo conocimos.

Hubo una cuarta motivación (cuarta en orden cronológico, pero no menos importante): conocer a Ruben Budelli y empezar a trabajar con él en 1989.

Budelli vino un día, creo que de 1989, no recuerdo bien, al Seminario de Sistemas Dinámicos que organizaba Lewowicz. No expuso nada, pero quería conversar sobre un problema matemático de dinámica que le había surgido en sus investigaciones de redes de neuronas biológicas. Budelli sabía el lenguaje matemático y cómo plantearnos el problema a nosotros, que no sabíamos nada de biología. Además de médico y biólogo, había estudiado matemáticas en la Facultad de Ingeniería.

Heber y yo nos enganchamos con el problema y en un par de semanas le llevamos la solución matemática. Budelli escribió el artículo en lenguaje para neurocientíficos, que fue coautorado por Heber y yo, y un cuarto coautor biólogo que había estado estudiando el problema con Budelli desde el punto de las neurociencias. Finalmente, fue publicado en 1991 cuando ya estábamos haciendo el doctorado en el IMPA.

En 1988 o principios de 1989, no recuerdo bien, terminamos la licenciatura. Budelli siguió visitando el IME frecuentemente. Me explicó, con maravillosa claridad y precisión sobre neurociencias, y sobre el origen de sus problemas matemáticos. Después de unos meses me planteó varias preguntas abiertas. Las estudié, resolví, y finalmente mis resultados fueron mi tesis de maestría, defendida creo que en diciembre de 1989. (Heber, José *Pepe* Vieitez, yo y no recuerdo quiénes más fuimos la primera generación en recibirse de la Maestría en Matemática del PEDECIBA.)

Budelli me presentó a José Segundo, quien era un destacado neurocientífico uruguayo, profesor emérito en Estados Unidos, muy reconocido e influyente en los ámbitos académicos de todo el mundo. Tuve varias reuniones con Segundo. Pero el lenguaje que él usaba, propio de las neurociencias, me resultaba muy extraño y difícil de traducir a la matemática.

Cuando me fui a Brasil y ya estaba haciendo el doctorado en matemática pura en el IMPA, Segundo me mandó una invitación, que agradecí, pero rechacé, para ir a Japón cuatro años a hacer doctorado en neurociencias. Creo que Segundo se había equivocado. Yo no estaba capacitada para investigar en neurociencias, sino solo en la matemática que podía quizás ayudar a resolver problemas de las neurociencias; si había alguien capaz de hacer la traducción en un sentido y en el otro, era Budelli. Pero Budelli era único. No encontré en todas mis incursiones

posteriores en la biomatemática a nadie capaz de hacer esa traducción como la hacía Budelli.

Desde que me fui al IMPA en 1991, abandoné los problemas de neurodinámica. Hasta el 2005 en que los retomé. Y trabajé desde el 2005 hasta el 2017, en paralelo, en matemática pura y en los problemas matemáticos de las neurociencias, cuando tratan de sistemas dinámicos.

## APÉNDICE II. MAÑÉ-MARKARIAN. BILLARES EN URUGUAY

Roberto Markarian nació el 12 de diciembre de 1946; Ricardo Mañé,<sup>102</sup> el 14 de enero de 1948. Ingresaron a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República en 1964 y 1967, respectivamente.

A fines de los sesenta, Ricardo Mañé y Roberto Markarian actuaron en posiciones diametralmente opuestas en el Centro de Estudiantes de Ingeniería y Agrimensura (CEIA), en el que Markarian ocupó importantes cargos directivos. Las discrepancias más importantes eran en relación con la situación política tanto nacional como a nivel mundial. Esas discrepancias, menos manifiestamente, continuaron durante gran parte del período de la dictadura uruguaya (1973-1985).

Habiendo estudiado con Jorge Lewowicz en Montevideo, Mañé fue invitado por Jacob Palis en 1971 a estudiar en IMPA, Río de Janeiro, donde se doctoró en 1973; pasó a ocupar un lugar prominente en el Grupo de Sistemas Dinámicos del IMPA.

Terminada la dictadura, desde 1987, Mañé dictó varios cursos en la Facultad de Ingeniería, en Montevideo, y Markarian comenzó a viajar regularmente a Río de Janeiro. Desde ese entonces (Mañé falleció en 1995) mantuvieron una relación cordial, en particular en las veladas organizadas en la residencia carioca de Jacob Palis y María José Pacífico (Zezé).

El libro *Introdução à teoria ergódica* (Proyecto Euclides, primera edición, 1983; traducido y en parte corregido como *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer, 1987) tiene secciones dedicadas a la teoría ergódica de billares, tema sobre el que versaban las investigaciones de Markarian.

<sup>102</sup> Biografías con muchas opiniones de colegas: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mane/> «On Ricardo Mañé by Ricardo Mañé»: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 29(1), 1998, 2-6. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Mane\\_auto/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Mane_auto/)

El libro está dedicado, entre otros, a Zezé quien ayudaba a Mañé en su desordenada vida doméstica.

Mañé formó parte, en febrero de 1990, del tribunal que evaluó la tesis de doctorado de Markarian, integrado, además, por Jacob Palis (orientador), Welington de Melo, Rafael Labarca y Jorge Lewowicz.

## BILLARES EN URUGUAY

La teoría matemática de billares caóticos a los que Roberto Markarian dedicó gran parte de su actividad de investigación era una temática exótica en América Latina en los años ochenta. Jorge Lewowicz fue un notorio especialista en el uso de funciones de Liapunov para estudiar fenómenos desordenados. José Luis Massera, las había usado para estudiar fenómenos estables, ordenados. La posibilidad de aplicar funciones y formas cuadráticas de Liapunov para estudiar fenómenos caóticos desde el punto de vista probabilístico, en particular los modelos de billares derivados de la teoría de gases, había sido planteada por Anatoli Katok a Jorge Lewowicz a inicios de los ochenta.

Poco después de que Markarian volviera a la actividad matemática en 1984 (había estado en prisión entre inicios de 1976 y fines de 1982), debía fijar tema para su tesis de maestría en la Universidad Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS), bajo la orientación de Artur Lopes. Lewowicz —en esa época retornando a Uruguay— le sugirió estudiar formas cuadráticas de Liapunov para probar propiedades caóticas (exponentes de Liapunov no nulos) en sistemas diferenciables con singularidades. Estos temas fueron desarrollados por Markarian en sus tesis de maestría y de doctorado, defendidas en diciembre de 1986 y en febrero de 1991, respectivamente.

Un comentario en cierta medida jocoso es que luego del XVI Coloquio Brasileiro de Matemática (Julio 1987, IMPA) se realizó un II Coloquio de Sistemas Dinámicos (Agosto 1987, Universidad Federal de Río de Janeiro). En esta última Jacob Sinai dio una conferencia sobre teoría ergódica de billares —área, entre muchas otras, en que realizó y promovió trabajos seminales—. En ella elogió un trabajo del Dr. Roberto Markarian (basado en su tesis de maestría, que aparecería luego en *Communications in mathematical physics* [118], 1988). Poco después de la conferencia preguntaron a Palis, quien en ese momento orientaba la

tesis aún no defendida de Markarian, si podría no aceptarla cuando Sinai ya lo había declarado doctor.

En ese período Armenia era una república de la URSS, y había quienes pensaban que Markarian (de apellido armenio) debía ser también de la escuela moscovita de Sinai que en aquellos años era el centro casi único donde trabajaban o se habían formado quienes se dedicaban a los billares matemáticos.

### APÉNDICE III. «LO QUE ESTÁ AL LADO DE ANOSOV»

Alrededor de 1997, Lewowicz planteó a sus alumnos un problema abierto sobre el comportamiento de ciertos difeomorfismos con tangencias en el borde de Anosov<sup>103</sup> («at the boundary of Anosov»), los que están «al lado de Anosov». Eleonora Catsigeras narra así una anécdota que puede ser considerada jocosa y típica de comportamientos entre matemáticos:

En 1997 o cerca de ese año, no recuerdo bien, fui a un workshop de sistemas dinámicos en el IMPA. Cuando llegué al edificio del IMPA, había mucha gente, muchos matemáticos en el patio. Faltaban dos horas para que empezaran las conferencias. Veo a Palis llamándome con la mano entre la multitud para que me acercara. Estaba con Anosov. Pensé, ingenua yo, que quería presentarme a Anosov. Pero no. No me presentó a Anosov. Solo me dijo, en inglés, que lo llevara al Jardín Botánico, que Anosov quería visitarlo. Le di la mano a Anosov, le dije mi nombre, y como una perfecta guía turística, lo invité a seguirme.<sup>104</sup>

Me llenó de emoción darme cuenta que tendría a Anosov para mí sola durante dos horas. Y pensé que era un desperdicio no hablar de

<sup>103</sup> Los llamados sistemas de Anosov son un tipo fundamental de objetos matemáticos que permiten describir las propiedades fundamentales del comportamiento de muchos fenómenos desordenados, caóticos. Llevan ese nombre por Dmitri Victorovich Anosov (1936-2014), quien fue alumno de Lev Pontriagin, uno de los grandes matemáticos soviéticos, ciego. El trabajo original de Anosov (Dmitri V. Anosov: *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, (1967). Proc. Steklov Inst. Mathematics, 90) tiene más de cien páginas y en él se introducen los U-sistemas que inmediatamente se pasaron a llamar de Anosov.

<sup>104</sup> Anosov había salido esporádicamente del territorio de la Unión Soviética, era casi una leyenda; hablaba poco y en un inglés no muy fluido.

matemática con él. Pero nunca me animé, por temor a meter la pata, a hablar de matemática en los encuentros sociales con grandes matemáticos.

Así que con mi mayor gusto lo llevé a Anosov a recorrer el Jardín Botánico de Río de Janeiro. Él era grande y corpulento y caminaba muy rápido. Yo tenía casi que correr a su lado. Además era muy callado. No decía palabra alguna. Y yo tampoco.

Al llegar al Jardín Botánico compré las dos entradas. Él no hizo gesto de pagar la suya y no dijo gracias después que las compré.

Durante la recorrida del parque, siempre caminando a velocidad máxima, me animé a decirle que yo había sido estudiante de Palis y que me había doctorado dos años antes. Y le conté un poquito sobre el tema de mi tesis. Creo que hasta ese momento él pensaba que yo era una empleada del IMPA. Él seguía calladito. Finalmente, creo que más por cortesía que por interés, me preguntó en qué estaba trabajando ahora. En los sistemas al lado de Anosov, le respondí. Y agregué «como yo estoy ahora».

### 3.7. BIBLIOGRAFÍA MUY BREVE

- AROCENA, RODRIGO Y PÉREZ, GONZALO: «Matemática», en *Ciencia y Tecnología en el Uruguay*, Montevideo, Centro de Investigaciones económicas (CINVE). Ministerio de Educación y Cultura, 1986, pp. 71-94. <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/gperez/documentos/arocena-perez.html>
- CHIANCONE CASTRO, ADRIANA: «Los matemáticos uruguayos, una historia de migraciones». *Redes*, vol. 4, n.º 10, octubre de 1997, pp. 179-212. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90711303008>
- CHERONI, ALCIÓN: «Eduardo García de Zúñiga. Un humanista militante». *Gaceta universitaria*, vol. 6, n.º 1, noviembre de 1992, pp. 37-38. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/197889.pdf>
- GANÓN, VÍCTOR: *PEDECIBA. Los orígenes de una revolución científica y cultural en el Uruguay posdictadura (1985-1990)*. Editorial Palabra Clave, Montevideo, 2022.
- GARCÍA, VICENTE I.: *Memoria de lo actuado durante el período complementario 12 de mayo de 1939-5 de marzo de 1940 y el período 5 de marzo de 1940-5 de marzo de 1943. Decanato del Profesor Ingeniero Civil Vicente I. García Universidad de la República Oriental del Uruguay, Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas*. Imprenta Nacional, 1943 <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/199760.pdf>
- GARCÍA DE ZÚÑIGA, EDUARDO: «Rafael Barrett, matemático». *Boletín de la Facultad de Ingeniería*, vol. 1, 1935, pp. 30-32. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198168.pdf>
- INCHAUSTI, MARTA: «El ime en la Facultad de Ingeniería. Su dimensión científica». *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, suplemento al volumen 7, Montevideo, 1995, pp. 3-114. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/417495.pdf>
- MARKARIAN, ROBERTO Y MORDECKI, ERNESTO, coordinadores: *José Luis Massera. Ciencia y compromiso social*. Orbe-PEDECIBA, Montevideo, 2010.
- MASSERA, J. L.: «Los orígenes y el desarrollo de la Escuela Uruguaya de Matemática». *Interciencias*, vol. 13, n.º 4, Caracas (Venezuela), 1990, pp. 177-182. Reproducido en García de Zúñiga, Eduardo (1990). *Lecciones de historia de las matemáticas*. <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/de/interciencias.html>



*José Luis Massera. El científico y el hombre. Premio México de Ciencia y Tecnología 1997.*

Publicación realizada por la Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo, 1998. <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/196037.pdf>

## AGRADECIMIENTOS

A los agradecimientos contenidos de una manera u otra en los tres capítulos de este libro y en su antecesor, *La dimensión humana de la matemática*, agrego ahora

Al equipo de Estuario editora, por diversas sugerencias y correcciones que me fueron haciendo a lo largo del proceso de edición del libro.

Al personal de las Secciones Hemeroteca e Información de la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería

A varias personas queridas que sugirieron el título, me ayudaron a transformarlo e hicieron propuestas varias sobre los textos.

A mi familia pequeña que me apoyó e incentivó permanentemente.



## 4. HISTORIA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN URUGUAY<sup>1</sup>

ROBERTO MARKARIAN

---

<sup>1</sup> En junio de 2021 colegas de nuestra área de trabajo nos pidieron a Eleonora Catsigeras, Roberto Markarian, Álvaro Rovella, Martín Sambarino, José Vieitez que hiciéramos algo parecido al texto que sigue. Si bien el proceso de recolección de información se hizo bastante rápido, razones ignotas hicieron que todo se atrasara. Roberto Markarian es el único responsable de esta versión —una especie de cronología comentada, sin mayores análisis temáticos— que tiene aportes de todos los arriba indicados y varios más expresamente indicados. Se trató de consultar e incluir notas personales de otros colegas. Se consultó a Silvia Estol y a Lydia Tappa —sobre cursos de posgrado—, y a las memorias anuales del Instituto de Matemática y Estadística Prof. Ing. Rafael Laguardia (IMERL) y del Centro de Matemática (CMat) de las facultades de Ingeniería (FING) y de Ciencias (FCIEN), respectivamente. Se ha contado con el aporte eficaz de personal de la Biblioteca de FING, en particular de Jorge Ribeiro, y de la Secretaría General de la Universidad de la República (Daniel Rodríguez) y de varios otros colegas y funcionarios.



## INTRODUCCIÓN

El título completo de este trabajo debiera ser «Historia de los estudios de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos y del Grupo de Sistemas Dinámicos en la Universidad de la República, Uruguay hasta 2005», pero resultaría demasiado largo, por lo que nos restringimos al que tiene, por breve y bastante descriptivo del contenido.

Con la intención de abarcar el período que va desde los comienzos del siglo xx hasta 2005, se incluye una periodización que puede ser considerada arbitraria, pero que responde —con imprecisiones derivadas de la falta de información y de la ignorancia del autor— a la evolución de la disciplina en el país. En cada etapa se indican documentos o referencias que contienen información sobre los temas tratados, y, en muchos casos, se relacionan con el desarrollo de la matemática y otras ciencias en el país.

Muchas veces, especialmente en los períodos iniciales, es difícil discernir lo relacionado con las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos de los estudios de matemática en general, por lo que para algunos la narración puede ser sobre abundante.

Si bien no daremos una definición de los temas de la matemática que figuran en el título, algo hay que decirle al público lector. Se trata del estudio matemático de la evolución de fenómenos, en particular los movimientos en el tiempo. En primer lugar, se estudian estas evoluciones relacionando las posiciones con sus variaciones (derivadas), pero a comienzos del siglo xx se introdujeron enfoques más variados, incluyendo propiedades probabilísticas y sus relaciones con otras áreas, en primer lugar la geometría y el álgebra.<sup>2</sup>

En la periodización se destacan dos *procesos fundacionales* de características muy diferentes, vinculados a la evolución general del desarrollo

---

2 Algunas explicaciones más detalladas se pueden encontrar en el capítulo 5, en particular en la sección 5.4 de mi libro [DH]

intelectual y científico y de la vida política nacionales. Un primer proceso que abarca a los estudios e investigaciones iniciales de ecuaciones diferenciales en el país, cuyo *summum* se puede situar en la obra de José Luis Massera de finales de los cuarenta y comienzos de los cincuenta del siglo **xx**. El segundo se relaciona directamente con el fin de la dictadura y se puede situar entre 1984 y 1990.

ANTES DE 1945.  
PROGRAMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
EN CURSOS PARA INGENIEROS  
Y CREACIÓN DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Se podría considerar —con grandes reparos— que las primeras contribuciones originales a la matemática en Uruguay son las de Rafael Barrett (1876-1910), quien hizo cálculos sobre la cantidad de números primos menores de un número dado y que, en octubre de 1903, le habría enviado una carta a Henri Poincaré con sus resultados. La Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República a mediados de los años treinta del siglo xx adquirió diversos materiales de Barrett sobre matemática, en particular copia de esa carta.<sup>3</sup> Barrett fue un español desarraigado de su condición aristocrática, conocido por sus denuncias de la explotación en los campos paraguayos, que tenía una buena formación en ingeniería y matemática. Se desconoce si los textos fueron elaborados en Uruguay pues es incierto el derrotero del escritor y político entre su salida de la España natal y Buenos Aires entre finales de 1901 y 1903. Luego de combativas y azarosas estadías en Paraguay murió tuberculoso en la Gironda, Francia; tenía 34 años.

Los estudios y la enseñanza de la matemática estuvieron íntimamente vinculados hasta hace unos cincuenta años casi solamente a la enseñanza de la ingeniería y sus ramas cercanas, y la creación de la Facultad de Humanidades y Ciencias en 1945 no modificó mucho esta situación.

La ley de julio de 1885 estableció que la Universidad de la República<sup>4</sup> estaría formada por tres facultades, una de las cuales fue la de Matemática y Ramas Anexas, creada en 1888. Bajo fuerte influencia de modelos franceses otorgaba los títulos de Ingeniero de Puentes, Caminos y Calzadas (una carrera de cuatro años de duración), de Arquitecto (cuatro años), de

3 Ver [GZ35] y [La51].

4 Por más detalles, ver <https://udelar.edu.uy/historia>



Ingeniero Geógrafo (tres años) y de Agrimensor (dos años). Cuando ya se incrementaba la influencia alemana en todo el ambiente universitario, en 1915 la facultad se dividió en la de Ingeniería y Ramas Anexas —que, cuarenta años después pasó a denominarse Facultad de Ingeniería y Agrimensura— y en la de Arquitectura.

Los ingenieros de finales del siglo XIX y de comienzos del XX habían colaborado con ingleses, franceses y alemanes en las obras de los ferrocarriles y del puerto, y, por los años veinte, ya con cierta independencia de estos, se hicieron cargo de la construcción de la gran obra de la Rambla Sur hacia el este del puerto de la ciudad de Montevideo.

En 1914, se da una primera polémica bien documentada sobre el tipo de matemática que se debía enseñar en la Facultad de Ingeniería, que detallaremos, porque las posiciones que se contrapusieron en ella se mantuvieron hasta los setenta y, de una u otra manera siguen vigentes, y se centran en la necesidad de tener —o no— cultura, ciencia e investigación autónomas en nuestros países, considerados *subdesarrollados*.

La publicación *La Enseñanza de las Matemáticas en la Ingeniería* promovida por el profesor Juan Monteverde [Mo15], contiene los programas aprobados en 1914, propuestos por Eduardo García de Zúñiga (E. G. Z.) y varios artículos críticos. Corresponde destacar que Juan Monteverde (1850-1920) fue decano en los períodos 1889-1992, 1892-1994, 1895-1905), mientras que E. G. Z. (1865-1951) lo fue en 1905-1907, 1910, 1926-1928. Ambos fueron destacados ingenieros civiles que ocuparon importantes cargos técnicos en la Administración pública y estuvieron involucrados en grandes obras —especialmente E. G. Z.— como la del puerto de Montevideo. E. G. Z., además de ser el principal promotor del enriquecimiento de la biblioteca de la FING, tuvo una rica producción bibliográfica<sup>5</sup> y fue miembro del primer Consejo Honorario de la Facultad de Humanidades y Ciencias.<sup>6</sup> Monteverde era en esos tiempos el principal representante de las tendencias más profesionalistas en la facultad, que pregonaban el conocimiento y la profesión directamente volcadas a resolver los problemas del momento, lo que lo enfrentó a quienes, como E. G. Z., querían dotar de fuertes fundamentos básicos a la enseñanza de las ciencias aplicadas.

5 Ver la bibliografía de este trabajo.

6 Ver <https://fhce.edu.uy/historia-institucional/>). Sobre E. G. Z. se puede consultar: [La51]; [In95] (pp. 3-4); [ArP86] (pp. 1-2); [Te]LM99] (pp. 58-59); [Ma98] (pp. 46-47) y el artículo de la Gaceta de la Universidad, 6(1) [Ga96].

La introducción «Al lector» de Juan Monteverde resume bien el propósito de la publicación:

A pesar de todo el empeño que pusimos en una lucha continuada de cuatro meses en el Consejo de la Facultad de Matemáticas, los que constituíamos el año próximo pasado la minoría de esa Corporación, no pudimos evitar que fuesen aprobados los programas de matemáticas que propuso el ingeniero y profesor Sr. Eduardo García Zúñiga.

Involucrando el asunto de los programas con cuestiones de otro orden, la mayoría del expresado Consejo, esquivando toda discusión razonada de esos programas, impuso la aprobación de los propuestos por el profesor García de Zúñiga, negando a los profesores de matemáticas el derecho de presentar los de sus respectivas asignaturas: se llegó al absurdo de imponer textos escritos en alemán, desconociendo ese idioma los profesores y alumnos que debían aplicarlos.

Estas y otras irregularidades obligaron a la minoría del Consejo a presentar una protesta ante el Consejo Universitario en diciembre del año pasado, haciendo conocer la forma en que se habían aprobado los programas.

Por la publicación de estos artículos deseo facilitar a los miembros del Consejo Universitario y del de Matemáticas los elementos de juicio que deben tenerse en cuenta para apreciar los programas de la referencia del punto de vista de la enseñanza de ingeniería, tal como lo entienden los profesores y técnicos que son autoridad en la materia.

Es necesario, además que los que tienen el derecho de votar para la constitución del Consejo de Ingeniería conozcan las dos tendencias que están en pugna en nuestra Facultad, para que den su voto en las futuras elecciones a candidatos que respondan en primer término a los intereses bien entendidos de la Facultad, que no pueden ser otros que los de su enseñanza, que es la base del crédito de los profesionales que forma.

Los programas aprobados incluían los de la Enseñanza Preparatoria y los dedicados «para los alumnos de Ingeniería». Los programas para los alumnos de Ingeniería estaban distribuidos por año y subdisciplina:

- Programa de Análisis Superior (Primer Curso)
  - I. Funciones de variables reales
  - II. Funciones de variables Imaginarias
- Programa de Análisis Superior (Segundo Curso)
  - I. Aplicaciones del cálculo diferencial
  - II. Complemento y aplicaciones del Cálculo integral

- III. Ecuaciones diferenciales
- IV. Cálculo de las variaciones
- Programa de Geometría Analítico-Proyectiva
  - I. Introducción
  - II. Formas geométricas fundamentales
  - III. Cónicas
  - IV. Cuádricas
- Programa de Geometría Descriptiva (Curso Teórico)
  - I. Métodos de representación
  - II. Aplicaciones a las figuras planas, a las líneas curvas y a las superficies

El Programa de Ecuaciones diferenciales incluía las siguientes secciones, con un punteo muy detallado en cada una de ellas:

- 1.º Ecuaciones diferenciales de primer orden con dos variables
- 2.º Ecuaciones diferenciales de cualquier orden con dos variables
- 3.º Ecuaciones lineales de cualquier orden
- 4.º Ecuaciones diferenciales simultáneas
- 5.º Ecuaciones de derivadas parciales de primer orden
- 6.º Ecuaciones de derivadas parciales de segundo orden

Al final del Programa de Análisis Superior se indicaba: «Texto á consultar para la extensión: *Analyse infinitésimale*, por E. Rouché et L. Lévy». Al final de los programas para la Enseñanza Preparatoria, Monteverde incluyó:

Los textos de consulta que indica el señor García de Zúñiga son los siguientes:

- H. Weber und J. Wellenstein: *Encyklopadie der Elementar-mathematike*; B. G. Teubner, Leipzig, 1907-1909.
- F. Klein: *Elementar-mathematik vom hoheren Standpunkte aus*; B. G. Teubner, Leipzig 1908-1809.
- G. Vivanti: *Complementi di Matematica* Ulrico Hoepli, Milano 1903.
- R. S. Woodward: *Probability and Theory of Errors*; John Wiley and Sons, New York, 1906.
- G. B. Halsted: *Synthetic Projective Geometry*; John Wiley and Sons, New York, 1906.
- G. Peano: *Gli Elementi di calcolo geometrico*, G. Candeletti, Torino, 1891.
- G. Peano: *Calcolo geometrico preceduto delle Operaztoni della Logica deduttiva*, Fratelli Bocca, Torino, 1888.

- Padoa: *La Logique déductive*; Gauthier-Villars, París, 1912.
- L. Couturat: *Principes des Mathématiques*; Félix Alcan, París, 1905.
- K Lemoine: *Géométrie graphique*; G. Naud, París, 1912.
- J. Hadamard: «Notions élémentaires sur la Géométrie de situations» (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1909, pp. 193-235).

Corresponde destacar el nivel de los programas y la actualidad de la bibliografía. Los programas se mantuvieron con pocos cambios y con esas características durante decenios. A vía de ejemplo, en la publicación «Bibliografía correspondiente a los cursos dictados en la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas en el año 1934» [FIRA35] se consigna que en el curso de Álgebra Superior y Análisis

Para la parte de Análisis, se emplean, como texto, los Apuntes impresos del Prof. Ed García de Zúñiga. Para la Teoría de las Ecuaciones y los otros puntos del programa, además de las explicaciones orales y los apuntes manuscritos del Prof. Maggiolo, se consultan» y sigue una lista de 6 libros entre los cuales *Encyklopaedie der Elementar-Mathematik* de H. Weber y J. Wellstein y *Analisis Algebraica* de E. Cesàro. Para Cálculo Infinitesimal se usó *Mathématiques Générales* de H. Vogt, y en Mecánica Racional, entre más de 10 textos el *Calcul vectoriel* de Bricard y las *Leçons de Mécanique Rationnelle* de Painlévé.

Se pueden consultar las modificaciones que están consignadas en el informe del decano Vicente García (1943), y en general los diversos cambios de los planes de estudio en el Anexo I del libro de María Laura Martínez [MML14].

A partir de 1925 se produjeron visitas y conferencias de importantes figuras científicas. Indicamos algunas hasta los cuarenta: Julio Rey Pastor (*El Azar; Teoría de errores*, 1925, 1932); Albert Einstein (1925); Emile Borel (*Aplicación del cálculo de probabilidades al principio de Carnot y a los fenómenos irreversibles*, 14 de agosto de 1929); Francesco Severi (*La relatividad al alcance de las personas cultas; El valor de las hipótesis en las matemáticas*, 1930); Jacques Hadamard (*Psicología de la invención matemática y científica*, 1930); Beppo Levi (*Concepto de aproximación como medio de demostración y de cálculo; La noción del dominio deductivo y su importancia*, 1940).<sup>7</sup>

En ese ambiente fermental y polémico —pues continuaban las discusiones que habían comenzado por 1910—, en 1929 volvió Rafael Laguardia de París, donde había estudiado con Goursat, Picard, Borel, Julia,

7 Más adelante consignamos las de Beppo Levi y Georges D. Birkhoff, en 1942.

Denjoy, Montel. Fue autorizado a dictar un curso libre de «Funciones Analíticas y sus Aplicaciones» y se constituyó un grupo que estudiaba regularmente matemática, liderado por Rafael Laguardia e integrado por Antonio Petracca, Carlos A. Infantozzi, Luis Castagnetto y Mischa Cotlar (que habían nacido entre 1906 y 1915), al que en 1935 se incorporaron Julio Vales y José Luis Massera.

Las *Memorias del Decanato* (1939-1943) de Vicente García [Ga43] contienen importante información sobre los avances institucionales y en particular la creación del Instituto de Matemática y Estadística (IME) en 1942. He aquí algunas referencias particularmente interesantes:

- Nuevo ajuste de los Planes de Estudio Resolución del Consejo Directivo del 7 de mayo de 1942 (pp. 9-20).
- En 1940 «se realizó una nueva etapa del plan de intercambio de Profesores con la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físicas y Naturales de Rosario de Santa Fe [...] De la referida casa de estudios argentina vino a la nuestra a dictar conferencias el director de su Instituto de Matemáticas, doctor Beppo Levi, sabio italiano de universal renombre, quien nos ofreció los días 24, 25 y 26 de setiembre tres magistrales disertaciones, dos sobre “Concepto de aproximación como medio de demostración y de cálculo” y una sobre “La noción del dominio deductivo y su importancia”» (p. 123).
- 28 y 29 de julio de 1942: Conferencias del doctor Georges D. Birkhoff: «¿Es posible una medida estética?» y «La lógica moderna y las matemáticas» (p. 126).
- Creación del Instituto de Matemática y Estadística (pp. 131-136).
- Walter Hill, director del Instituto de Física, visitando la Johns Hopkins University: «Comprobé en la Biblioteca que no hay ejemplares de nuestro Boletín. En cambio, encontré ejemplares de *Notas Matemáticas*, de nuestro amigo el profesor Beppo Levi, lo que me produjo satisfacción» (p. 196).

La creación del IME marca un viraje fundamental en la enseñanza, la formación y la investigación en matemática en el país. Estableció un nuevo concepto, profesionalizado y moderno, del trabajo matemático. Laguardia —quien fue su director natural desde el primer momento— y Massera fueron los abanderados de ese proceso, con perfiles distintos, pero en estrecha colaboración. El período inicial abarca entre 1942 y 1951, según consigna Martha Inchausti con mucho detalle en su trabajo ([In95], pp. 19-39).<sup>8</sup> En ese período se incrementaron los

8 Ver también [ArP86] (pp. 2-4) y [Ma98] (pp. 47-50).

intercambios científicos,<sup>9</sup> se constituyó la biblioteca —que fue orgullo en Latinoamérica durante muchos años—, comenzaron a editarse las publicaciones del IME. Laguardia hizo estadías prolongadas entre 1943 y 1945 en la Universidad de Santa Fe, Argentina, y en las de Harvard, Princeton y Brown, mientras que Massera las realizó entre 1947 y 1948 en las de Stanford, Nueva York y Princeton. Las actividades de este período pueden ser consideradas las de comienzo de los trabajos en ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

En ese sentido, Mario Wschebor, luego de comentar que Massera y Laguardia «cumplían funciones complementarias en algunas acciones», continúa:

Los matemáticos lo que tenemos que agradecerle a Massera es el teorema de existencia porque en estos países como el Uruguay, pequeños, las tradiciones científicas comienzan a desarrollarse a partir de personas que son excepcionales desde el punto de vista de su talento [...], pero que también son excepcionales desde el punto de vista de su fuerza de voluntad y de su capacidad de enfrentar circunstancias totalmente adversas ([TeJLM99], pp. 78-80).

Luego de describirlas: aislamiento, la guerra, hostilidad del ambiente profesionalista de la Facultad de Ingeniería, falta de reconocimiento, culmina:

Ese fue el medio en el cual estas personas fundaron una escuela que nosotros, hijos de esa escuela, lo primero que tenemos que agradecerles es la existencia porque no habría matemática en el Uruguay si ellos no hubieran empezado de esa manera [...]. Hay una impronta personal muy fuerte de los fundadores que son Massera y Laguardia sin lugar a dudas [...] Los dos indiscutiblemente formaban una unidad para nosotros perfecta ([TeJLM99], pp. 78-80).

Vale la pena consignar que los dos primeros trabajos de Massera (1943, 1944) aparecieron en español en publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), de la Facultad de Ingeniería (Montevideo) y del IME. El siguiente (1949) en los *Annals of Mathematics* (Princeton).

9 Por ejemplo, Marshall Stone, que se había doctorado bajo la supervisión de George D. Birkhoff, dictó conferencias en español en 1943.

## 1945-1965. RESULTADOS DE MASSERA Y SCHÄFFER ¿UNA GENERACIÓN CIENTÍFICO-TECNOLÓGICA DEL 45?

Para entender la pregunta del título comenzamos recordando que en Uruguay se suele referir a una Generación del 45, especialmente de escritores y artistas. Juan Carlos Onetti que, con treinta y cinco años, ya era mayor era considerado en ese año —aunque rechazado y puesto en polémica por muchos— un patriarca. Nombramos a algunos —en orden alfabético— para colaborar en la comprensión de a qué nos referimos: Mario Arregui, Mario Benedetti, Amanda Berenguer, Domingo Bordoli, Sarandy Cabrera, José Pedro Díaz, Liber Falco, Manuel Flores Mora, José Luis Tola Invernizzi, Carlos Maggi, Carlos Martínez Moreno, Ángel Rama, Carlos Real de Azúa, Emir Rodríguez Monegal, María Inés Silva Vila, Armonía Somers, Idea Vilariño, Ida Vitale.

Entonces, en esta descripción del estado de situación de una rama de la matemática, y teniendo en cuenta otras figuras que convivieron con los de aquella generación, ¿por qué no incluir, nuevamente para recordar pocos nombres, a Eladio Dieste, Óscar J. Maggiolo, José Luis Massera, Julio Ricaldoni (*El Patriarca*), que impulsaron las ciencias exactas y la ingeniería en el país, como otra Generación del 45? Para que no se nos vea demasiado tendenciosos hacia nuestras disciplinas, algo parecido se podría decir de las ciencias médicas y la biología, etcétera.

En la conferencia que dictó en el Museo Nacional de Antropología de la Ciudad de México el 6 de marzo de 1998, Massera describía su propia formación y sus estudios entre 1930 y 1955 ([Ma95], pp. 45-53) y explicaba que había ido a Stanford atraído por las figuras de los húngaros George Polyá (1887-1985) y Gábor Szegő (1895-1985), pero

Paradojalmente, no fue en la Universidad, sino fuera de ella que encontré un motivo de gran interés profesional. Conocí una persona que había sido Oficial de alto rango de la Marina Zarista [...]. Él trabajaba entonces para la Marina de EE. UU. en problemas de estabilización de barcos en



mar agitados, y se apoyaba en estudios teóricos de matemáticos rusos sobre cuestiones de estabilidad, de los que tenía fotocopias y sabía que la Universidad de Nueva York había hecho una publicación en inglés. Conseguí un ejemplar de esta y como en el Uruguay había adquirido algunas nociones de ruso, mal que bien pude leer también las fotocopias de mi amigo el marino. [...] Estos temas me apasionaron.

Y luego de eso se había trasladado de la costa oeste de los Estados Unidos a Nueva York y Princeton ([Ma 98], pp. 49-50).<sup>10</sup>

Respecto de una segunda vertiente de resultados fundamentales de Massera, él mismo explica que

Cuando Schäffer volvió de Suiza, donde había recibido el título de Doctor, un día caminábamos conversando por el corredor del IME y yo le conté que había leído en el *Mathematische Annalen* de principios de siglo un pequeño trabajo de un gran matemático alemán, Perron, en que demostraba que si el segundo miembro de una ecuación diferencial era acotado, existía una solución también acotada; y le comentaba que seguramente existía una vasta «generalización de ese resultado»; él estuvo de acuerdo, y resolvimos «meterle el diente» trabajando en colaboración. Mi «olfato» no me había engañado, y relativamente pronto publicamos en la misma revista varios trabajos con generalizaciones sucesivas ([Ma 98], pp. 52-53).

En la carta en que Juan Jorge Schäffer (1930-2017) fundamenta el otorgamiento del Premio México de Ciencia y Tecnología 1997 [S97], y da detalles de esta colaboración y de las virtudes de Massera en la tarea investigativa, en particular, de tener «un juicio certero acerca de qué resultados pueden considerarse «importantes [...] y la modestia y el buen gusto [...] de publicar precisamente aquello que vale la pena de ser publicado» ([Ma98], pp. 21-25).

Wschebor no se dedicó a la rama matemática de Massera, pero se consideraba su alumno. Refiriéndose a su claridad expositiva manifestaba que ello

<sup>10</sup> Detalles de estos estudios de estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y los principales resultados en ese sentido se pueden ver en el capítulo 3 del libro coordinado por Markarian y Mordecki, redactado por Jorge Lewowicz, Roberto Markarian y José Vieitez ([MM10], pp. 103-124).



tiene que ver con las tradiciones culturales de cada época. [...] es una impronta cultural. Actualmente una forma de defender esta descomposición de la claridad del discurso es pretender que de alguna manera se opone a la heurística o al poder de la intuición, lo cual es una tontería. Massera era magistral y el poder de la intuición indudablemente estaba presente dentro de su discurso. Oponer ambas cosas, es simplemente como digo, una tontería ([TeJLM99], pp. 33-34).

Luego destaca otro rasgo distintivo: la unidad en la diversidad:

En un período de profesionalización de las ciencias donde la especialización puede ser muy destructiva, cada uno de estos personajes, ha sido por encima de todo una persona con una gran vastedad y multiplicidad de intereses en la actividad intelectual y en la cultura. Massera es matemático, naturalmente, también es un historiador de las ideas, no hay que olvidarlo. Y esto es casi parte integrante de su ubicación. Es difícil separar una cosa de la otra. Creo que en un momento cuando se habla de cosas multidisciplinarias o interdisciplinarias, muchas veces y con mucha rapidez, se cae en una superficialidad alarmante. De modo que esta visión de intelectuales más clásicos, común a ese grupo humano, es conveniente trasladarla a la experiencia intelectual de los más jóvenes y creo que algunos de los cortes, o de las fracturas culturales importantes de los últimos 30 años corresponden justamente a esta visión. No sé cómo llamarle, de riqueza, de complejidad. [...] No es un consejo. Es una reivindicación de una manera de mirar la cultura ([TeJLM99], pp. 33-34).

El propio Massera, comentando el discurso que dio al recibir el título de Doctor Honoris Causa de la Universidad de la República el 11 de noviembre de 1991, expresó que había puesto

el acento en las cosas que me preocupan y es que no haya entre la gente que empieza a cultivar la ciencia con cierta originalidad, un criterio que yo lo llamé de Pago Chico, es decir que se autolimitan a las cuestiones que se suscitan en el país. Entonces yo dije que [esto] era falso y que había que aspirar a superar los rangos mundiales y eso lo hacemos, lo seguimos haciendo. Lo hicimos antes, lo seguimos haciendo... ([TeJLM99], p. 134)

Una muestra de la importancia que estaba adquiriendo la matemática en Uruguay es que en diciembre de 1951 se llevó a cabo en Punta del Este un *Symposium sobre Algunos problemas matemáticos que se están*

*estudiando en Latino América*, «organizado en colaboración con el Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería de Montevideo» y bajo la presidencia de Laguardia, cuya variedad y actualidad temática dan cuenta de la gran circulación de ideas matemáticas en nuestro país. De allí, la Unesco publicó catorce ponencias, de las que destacamos por referirse al tema que abordamos en este capítulo las de Mischa Cotlar («Sobre los fundamentos de la teoría ergódica»), Guillermo Damkoehler («Definibilidad y reversibilidad en el cálculo de variaciones»), Gustav Doetsch y Godofredo García («La nueva teoría de la relatividad general»), Mario O. González («Problemas sobre ecuaciones diferenciales»), Alberto González Domínguez y Carlos Graef Fernández («La teoría de la gravitación de Birkhoff»), Paul Halmos, Francis D. Murnaghan («Sobre sistemas convenientes de parámetros para los grupos de rotación y unitario»), y Leopoldo Nachbin y Luis Santaló («Problemas de geometría integral»).<sup>11</sup>

Una segunda generación de matemáticos —que había estudiado en su totalidad en el exterior— se incorporó al IME en la primera mitad de los cincuenta. Uno de ellos, Alfredo Jones, decía «Yo me recibí de ingeniero y después hice Matemática en Illinois. Estamos infinitamente mejor ahora que cuando yo empecé en los sesenta. Entonces estábamos aislados y no podíamos viajar, hoy sí, con cierta frecuencia» ([Ch97], p. 192).

Cesáreo Villegas (que viajó a los Estados Unidos a estudiar Estadística Industrial en 1954-1955), Gunter Lumer (también viajó a ese país, fue profesor en la Universidad de Seattle y se radicó posteriormente en Bélgica) y Juan Jorge Schäffer, quien se doctoró en Ingeniería Eléctrica y Matemática en Zurich (1956), se recibió de licenciado en Matemática en 1953 y de ingeniero en 1957, y emigró a los Estados Unidos en 1968.<sup>12</sup>

Paul R. Halmos se refiere en el capítulo 10, «Montevideo», de su libro autobiográfico [Ha85] más de treinta páginas a su visita Uruguay entre setiembre de 1951 y mayo de 1952, y en ellas detalla una descripción del funcionamiento del IME y valora a cada uno de sus docentes.

En 1958, Jorge Lewowicz ingresó al IMERL junto con Enrique Cabaña y Alfredo Gandulfo. Fue el gran discípulo directo de Massera en los estudios e investigaciones en sistemas dinámicos —en la misma rama de la matemática, pero no en la misma subrama—, y sobre él señaló «uno no

11 Participaron también Cesáreo Villegas, Fernando Forteza, Günther Lumer y Juan Schäffer.

12 Información más detallada en [In97] y en [Ch97] (p. 192)..

aprendía solamente teoremas [...]. Aprendía conductas y un montón de otras cosas [...] mucho más que en el plano matemático, yo soy discípulo de él» ([TeJLM99], pp. 70-71).

En ese momento —en el que trabajaba con Schäffer obteniendo resultados sobre ecuaciones lineales y preparando el libro *Linear differential equations and function spaces*, [MaS66] Massera

estaba haciendo ecuaciones diferenciales lineales, y en un momento reconoció: «Pero vos sos no lineal». Fue una virtud brutal de Massera muy poco común en un profesor: reconocer que este alumno tiene una inclinación profunda, independiente, distinta. Él me dijo: «Sos autónomo», por razones que tienen connotaciones técnicas, pero además humanas.

Chiancone hace referencia a la formación de varios de los matemáticos que se incorporaron a finales de los años cincuenta y comienzos de los sesenta ([Ch97], p. 194):

Algunos (Lewowicz, Sebastiani y Wschebor), después de haber adquirido una preparación básica en la disciplina, pero sin haber terminado la carrera de Ingeniería, salieron del país para realizar estudios de posgrado. La formación adquirida en el IME, y las condiciones de trabajo allí reinantes, potenciaron el aprovechamiento de las salidas al exterior. Nos dijo Jorge Lewowicz al respecto:

No terminé Ingeniería; estaba en 5.º o 6.º año y ahí me fui a hacer un doctorado. En aquella época Ingeniería tenía muy poca formación matemática, nosotros empezamos a trabajar aquí en Sistemas Dinámicos, en el Instituto de Matemática. Sin embargo, el ambiente era tal, que uno se sentía rápidamente impulsado a investigar y mi primer trabajo de investigación fue publicado cuando tenía veinte años y con esos conocimientos. Eso tenía que ver con el ambiente, el diálogo con los profesores más experimentados. En ese momento uno no sabía razonar y veía que ellos cometían los mismos errores. La formación que adquiríamos en la Facultad de Ingeniería era más fuerte que la que había en otros lados y esa formación generaba cierta capacidad para enfrentarse a esos problemas. Era trabajo, curiosidad y fuente de placer, es un asunto muy importante esto del placer. Uno investiga más en la dirección en que hay más promesas de placer.<sup>13</sup>

13 En [ArP86] (pp. 3-6) hay información adicional sobre este período y el siguiente de este trabajo.

## 1965-1975: LEWOWICZ. CURSOS EN BUENOS AIRES EN 1974 Y 1975

Del *Laudatio Honoris Causa Jorge Lewowicz* que leyó Martín Sambarino el 15 de agosto de 2012, extrajimos estos trozos sobre la trayectoria, los aportes y la importancia de Jorge Lewowicz, que incluyen aspectos posteriores al período que estamos analizando.<sup>14</sup>

Jorge Lewowicz comenzó sus estudios de Ingeniería a mediados de la década del 50 e ingresa como ayudante del Instituto de Matemática y Estadística en el año 58. Bajo la orientación del Prof. José Luis Massera inició sus estudios sobre Ecuaciones Diferenciales y en 1961 publica su primer trabajo científico: Sobre un teorema de Szmydtowna. Posteriormente, mediante una beca Fullbright, viaja a Estados Unidos en 1964 y en 1966 obtiene su título de PhD en Matemática en Brown University.

Desde sus inicios Lewowicz se interesa por cuestiones de estabilidad y de dinámica topológica, temas que ha desarrollado y plasmado en más de una treintena de artículos científicos. Pero por sobre todas las cosas, es mayormente reconocido por su desarrollo de la teoría de sistemas expansivos, temas en los cuales Lewowicz hizo escuela. En el área de Sistemas Dinámicos, el Uruguay fue ampliamente reconocido por tener un grupo muy fuerte en dinámica de expansivos. Entre los reconocimientos académicos como científico, Lewowicz fue designado miembro de la Academia de Ciencias de Tercer Mundo, miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Argentina, y miembro de la Academia de Ciencias del Uruguay. [...]

Fiel a las tradiciones de la escuela matemática uruguaya, la formación y el estímulo a los jóvenes y a la iniciación de la investigación es y ha sido una de sus preocupaciones centrales. Fiel al rigor académico, estimuló con generosidad la salida de muchos estudiantes a realizar el doctorado

<sup>14</sup> El texto completo se encuentra en [PMU14].

en lugares de excelencia. Ha dirigido 6 tesis de doctorado (2 en Brasil, 4 en Uruguay) y 15 tesis de maestría (8 en Venezuela, 7 en Uruguay) y una decena de monografía de Licenciatura. Pero más allá de sus alumnos directos, Lewowicz ha influenciado el desarrollo como matemáticos e investigadores de otro tanto que no fueron sus doctorandos, tanto en el Uruguay como en el exilio. Hoy, nuestra Universidad cuenta con 17 investigadores en sistemas dinámicos y la conformación de este grupo se debe en gran o total medida a Jorge Lewowicz.

Lewowicz transmitió a lo largo de estos años, tanto en sus clases como en las célebres caminatas por el pasillo del IMERL y en diversas reuniones, valores fundamentales de la escuela matemática uruguaya: la investigación temprana, la calidad y rigurosidad científica, el desarrollo de un ámbito propicio para la discusión, la transmisión y creación de conocimiento, el compromiso social e institucional. Pero no solo dentro de la matemática, sino en la Facultad de Ingeniería y en la Universidad, estimuló, inspiró e influenció el quehacer científico de muchos jóvenes y no tan jóvenes, generación tras generación. Defendió y abogó por la calidad académica con estándares internacionales, tanto en la Facultad de Ingeniería como en nuestra Universidad, en particular desde la CSIC. La Facultad de Ingeniería es lo que es hoy en parte a la semilla del Instituto de Matemática y Estadística Prof. Rafael Laguardia, y de alguna forma el papel que jugaron Massera y Laguardia antes de la dictadura en la Facultad, lo desempeñó Jorge después de esta. [...]

Aquellos que tuvimos el privilegio de estar en una clase con Lewowicz, la disfrutamos minuto a minuto, incluso cuando luego de enunciar un resultado nos decía: «Señoras y señores, tienen 3 minutos para pensar la demostración», se hacía un silencio total y Jorge caminaba de lado a lado del salón. Y si alguien esbozaba alguna idea para la demostración, entonces Jorge la seguía, sin importar si había un camino más corto o más fácil: lo más importante era respetar la libertad y los caminos de pensamiento de cada uno.

Y como decía anteriormente, defendía la investigación temprana: uno no tenía que ser erudito para ser creativo, más aún, lo que había que estimular era la creatividad y en todo caso, la erudición venía de la mano de la necesidad de resolver y plasmar las ideas. Y así, les daba a los alumnos problemas abiertos o simplificaciones de estos, o incluso bajaba a tierra diversos problemas técnicos de sus investigaciones para que los alumnos los pudieran atacar. Y cuando alguien, fulano de tal, le hacía una pregunta de matemática que Lewowicz entendía que el mismo la

podía responder, decía, no exento de picardía: esa es una pregunta que debe responder fulano de tal.

Hablar de matemática con Jorge ha sido y es iluminador y un placer, aún para los más jóvenes, bien en el Instituto, bien en una reunión o bien en las visitas que recibe ahora en su casa. Y no solo de matemática, sino de lo que han sido sus preocupaciones durante toda su vida: la ciencia, la educación, la universidad, el país, el ser humano. Y también, como hicieron otros matemáticos que volvieron del exilio, a través de anécdotas e historias, nos fue pincelando las figuras de Laguardia y Massera y de la vida del Instituto previo a la dictadura del 73, de forma que las generaciones más jóvenes aprendimos a respetar y querer entrañablemente, a sentirnos parte de una historia y a generar el compromiso de continuarla...

A inicios de los setenta me incorporé a los estudios avanzados de sistemas dinámicos. Había ingresado como estudiante de la FING en 1964, como colaborador técnico del IME a comienzos de 1966, como asistente interino del IME en 1969 y había concursado junto con Rodrigo Arocena, Walter Ferrer y Jorge Gerszonowicz para cuatro cargos efectivos de asistente del IME en 1971. Los cuatro pasamos el concurso. En esos años se incorporó también José Vieitez, quien no se orientó al comienzo hacia los sistemas dinámicos. Massera, Lewowicz y todos los nombrados fueron destituidos de sus cargos con el golpe de Estado en Uruguay y la intervención de la Universidad de la República en setiembre de 1973. Muchos matemáticos emigraron poco después. Massera, Lewowicz, Markarian y Vieitez permanecieron en el país unos años más.

Ricardo Mañé (1948-1995) ingresó a la FING en 1967. Dos años después se incorporó como ayudante al IME y comenzó sus estudios en Sistemas Dinámicos bajo la orientación de Lewowicz, e impulsado por él en 1971 viajó a Río de Janeiro, donde, en 1973, se doctoró bajo la orientación de Jacob Palis en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), en el que desarrolló su carrera académica.

Juan Tolosa, doctorado en la Universidad de la Amistad de los Pueblos Patricio Lumumba de Moscú, URSS, en 1969 con una tesis sobre *Teoría asintótica de las soluciones periódicas de sistemas de ecuaciones de tipo neutro con parámetro pequeño*, trabajó en el IMERL entre 1971 y 1972. En este período tomó contacto directo con Lewowicz, con quien se volvió a encontrar en Venezuela, pues Tolosa trabajó en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, entre 1972 y 1984, y Lewowicz emigró a San Pablo en 1976. En conjunto, publicaron una media docena de trabajos. Luego, entre 1984 y 1986 fue profesor visitante en la Universidad de California, Berkeley, y, a

partir de 1986, fue docente en el Richard Stockton College of New Jersey, ahora Stockton University.

En 1974 Lewowicz fue contratado para dar un curso de «Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Sistemas Dinámicos» en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, con el que colaboré —entre setiembre y diciembre—, ya que estaba en Buenos Aires, en usufructo de una beca concedida por el Centro Regional de Matemática —con sede entonces en esa ciudad—, dirigido por Alberto González Domínguez. El curso, que se dictaba concentrado en los fines de semana, se interrumpió en octubre por el cierre de la Facultad en medio de la inestabilidad política que provocó la muerte de Juan Domingo Perón y la asunción de la presidencia de María Estela *Isabelita* Martínez de Perón, influida muy fuertemente por *El Brujo* José López Rega.

## 1973-1984: POCO EN URUGUAY, LA EMIGRACIÓN, LOS PRESOS

Sobre las consecuencias del golpe de Estado y la intervención de la Udelar,<sup>15</sup> escribió Chiancone:

Las posibilidades de inserción de estos matemáticos uruguayos en los países de destino (incorporándose a las estructuras nacionales de docencia e investigación, y manteniendo fuertes vínculos con el medio internacional) fueron favorecidas, quizás, por las características de la disciplina en que trabajaban». ([Ch97], p. 195)

Por su parte, Rodrigo Arocena recuerda que

[la Matemática] ha sido una excelente compañera de trabajo, en la cárcel y en el exilio, le debo excelentes amigos, excelentes profesores. Imagínate [las diferencias entre] un exiliado que es abogado y uno que es matemático...

A estas características de la disciplina se le sumaría la sólida formación en investigación con una fuerte exigencia de originalidad, adquirida en el IME (y esto a pesar de los diversos grados de formación y acreditación que existían en el grupo emigrante), sobre lo que Lewowicz declaró

La Matemática requiere un aporte creativo más interesante en cuanto a las ideas. Nosotros estamos formados en una exigencia de originalidad mayor que no quisiéramos perder. No lo digo para vanagloriarnos de esto, pero cuando tuvimos que salir, en Maracaibo, uno solo podía

<sup>15</sup> En [Ch97] (pp. 195-199, 204) y [Aro00] (pp. 70-73), se da información sobre la emigración de los matemáticos uruguayos como consecuencia del golpe de Estado y la intervención de la Universidad (27 junio y 28 octubre de 1973, respectivamente).



competir en el área internacional, sin saber qué estaba pasando en el mundo, por la originalidad de lo que uno hacía. Eso pasó en mi caso y en otros, en un ambiente académico más precario aún que este; pero la originalidad permitía la convivencia en el mundo internacional más allá de tener un retraso relativo respecto a lo que se producía en el mundo. No era esa la única razón...

¿Qué sucedió con quienes se habían quedado en el país? Jorge Lewowicz emigró a San Pablo en enero de 1976, José Vieitez a Buenos Aires en 1976. José Luis Massera (octubre de 1975) y Roberto Markarian (febrero de 1976) fueron apresados y torturados; liberados en marzo de 1984 y setiembre de 1982, respectivamente. Clandestinamente en prisión redactaron junto con Wladimir Turiansky y Elvio Accinelli unas notas simples sobre fundamentos de la matemática que se editaron unos años después [Ma85].

Lewowicz llegó a Maracaibo, Venezuela en 1976, y trabajó en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, Caracas, entre 1977 y 1985. En 1985 sufrió un importante percance de salud, y en 1986 volvió a Uruguay.

En 1978, en el marco de un convenio con el Banco Interamericano de Desarrollo (BID), Fidel Alsina [Al78] elaboró un informe que describe la situación de las ciencias básicas en Uruguay y destaca la escasez de recursos humanos. Si bien es útil como fuente de información, le da poca importancia a las razones políticas para el despoblamiento de científicos jerarquizando el drenaje de cerebros y el estancamiento posterior. Además, en otra muestra de su neutralidad respecto de la dictadura, adjudica la falta de vocaciones científicas a características del país: clima, facilidades económicas, rasgos del sistema educativo.

1982-1986: LOS ESTUDIOS EN URUGUAY EN 1980-1985.  
 EL PROGRAMA PARA EL DESARROLLO  
 DE LAS CIENCIAS BÁSICAS.  
 EL RETORNO DE LEWOWICZ. LOS NUEVOS DOCTORANDOS

Una lista de los docentes de matemática que trabajaron en la Universidad de la República antes de que terminara su intervención, vinculados a los estudios de sistemas dinámicos o geometría incluye a Carlos Asuaga, Eleonora Catsigeras, Heber Enrich, Gabriel Paternain, Miguel Paternain y Álvaro Rovella.

Otros docentes jóvenes —y algunos no tanto— de Matemática en los primeros años de la Universidad no intervenida fueron Eduardo Álvarez, Gustavo Balerio, Nelly Camporeale, Sylvia Dobyinski, Álvaro Herrera, Daniel Kofman, Ernesto Mordecki, Omar Paganini, Gonzalo Pérez, Alfredo Piria y Daniel Tasende.

La salida de prisión de Massera en marzo de 1984 significó un fuerte sacudón para quienes estaban retomando o querían estudiar matemática, por lo que una reunión con él en su casa en la calle Amsterdam es rememorada con afecto por quienes participaron de ella.

Los matemáticos que iban regresando al país del exilio encontraron a ese grupo de jóvenes egresados o estudiantes avanzados de matemática o de ingeniería que habían recibido una educación que ellos mismos consideraban deficiente. En el informe ya citado de Alsina [Al78], se dice que «la buena voluntad manifiesta puede alcanzar para orientar y seleccionar vocaciones, pero no parece bastante para darles formación científica global». Esos jóvenes, y muchos más, completaron sus estudios con los recién vueltos, siguieron sus orientaciones de compromiso con la ciencia, muchos salieron luego al exterior.

La exigencia de originalidad, compromiso y entusiasmo que se transmitía la expresó Lewowicz en la entrevista en 1994, que recomendamos releer al final de la Sección 2.

Uno de aquellos jóvenes, que luego sería uno de los puntales del desarrollo de los sistemas dinámicos, Álvaro Rovella, recuerda con orgullo los reflejos de esas enseñanzas:

es que aquí todo el mundo tiene una buena cabeza y dice que es importante hacer investigación, es importante que la Matemática se desarrolle como una ciencia, y ese acuerdo importante que los estudiantes aprendan a investigar. En todas esas cuestiones, no hay ninguno que quiera vivir sin trabajar, no hay ninguno que quiera hacerse el campeoncito. En otros lugares hay gente mediocre que está metida por ahí, mezclada... hay grupos organizados, con poder, que molestan... Acá no pasa eso ([Ch97], p. 183).

En 1985 estaban dadas las condiciones para dar un salto en el desarrollo de todas las ciencias, en particular la matemática. Diversos estudios universitarios, gubernamentales, de centros de estudios privados, analizan la problemática y proponen. En 1986 aparece un libro editado por el Ministerio de Educación y Cultura y por el Centro de Investigaciones Económicas (CINVE), prologado por la entonces ministra, Adela Reta, *Ciencia y Tecnología en el Uruguay*, [MEC86], donde se analiza la situación en las ciencias exactas y naturales y las ciencias sociales a la salida de la dictadura. Este libro contiene un trabajo de Arocena y Pérez [ArP86] en que se hace una «Reseña histórica» de la matemática en el Uruguay y un «Diagnóstico de la situación actual». También incluye un capítulo «Acerca de la problemática tecnológica en el Uruguay» que se continuó con el trabajo de Argenti, Filgueira y Sutz [ArFS88]). Arocena plantea reflexiones interesantes sobre el antes y el después de la dictadura para la matemática uruguaya, que se pueden aplicar —con las debidas adaptaciones y teniendo en cuenta las peculiaridades— al desarrollo de los sistemas dinámicos ([Aro0], pp. 73-75).

Desde antes del final de la dictadura se venía gestando lo que luego se llamaría Programa para el Desarrollo de las Ciencias Básicas (PEDECIBA). Su proceso de creación (1983-1986) está bien documentado en dos libros,<sup>16</sup> además de en múltiples artículos de prensa. Es interesante observar que en el «Seminario de evaluación de propuestas para el desarrollo programado de las ciencias básicas» (entre el 10 y el 20 de diciembre de 1984) participaron por el Área Matemática Enrique Cabaña (presidente), Rodrigo Arocena, Walter Ferrer, Alfredo Jones, Jorge Lewowicz,

16 Ver [Ch96] y [GV22].

---

Mario Wschebor, José Luis Massera, Julio Ricaldoni, Gonzalo Pérez, Roberto Markarian (secretario técnico), de quienes cuatro residíamos en Uruguay, cuatro en Venezuela y dos en Brasil. «Los de afuera» eran muy importantes.

El 3 de junio de 1985 la Comisión del IME, cuya dirección ejercía Gonzalo Pérez Iribarren le solicitó al Consejo de la FING que le diera el nombre de «Profesor Ingeniero Rafael Laguardia» a ese instituto. Así, el 20 de agosto elevó una «relación circunstancia de méritos» redactada por José Luis Massera y el 11 de setiembre el consejo resolvió (Res. n.º 1521) elevar al Consejo Directivo Central de la Udelar la designación del IME con ese nombre, lo que se votó favorablemente el 8 de octubre (Res. n.º 72).

## 1986-1998: CREACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS. LOS PRIMEROS DOCTORES. PRIMEROS CONGRESOS. AMPLIACIÓN DE LAS TEMÁTICAS

El proceso de creación de la Facultad de Ciencias (1986-1990) está documentado en varios trabajos de Mario Wschebor, uno de sus principales propulsores.<sup>17</sup> En 1989 la Universidad de la República le solicita al Consejo Nacional de Investigación, Ciencia y Tecnología (Conicyt) que incorpore en una solicitud ante el BID fondos para la conformación de una futura Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (que luego se llamaría Facultad de Ciencias). El informe elaborado para presentarle al Conicyt [CDC89], aprobado en general por el CDC en su sesión del 21 de agosto de 1989 es rico en información. En su «Introducción y antecedentes» da un rápido pantallazo (pp. 5-6) sobre la actividad universitaria predictadura, los primeros cambios luego de 1985 y consigna la participación de Massera en la comisión central que analizó los problemas generales de la creación y organización de la facultad. En el «Diagnóstico global del estado de las ciencias en Uruguay» se da primero una visión general (pp. 15-16) y en el análisis por áreas se incluye a la matemática (pp. 26-27). En la «Descripción general de las disciplinas» se destaca que en lo que llama Instituto de Matemática (p. 50) «existen grupos de investigación permanentes en las subáreas de Álgebra, Análisis Funcional, Probabilidades y Estadística y Sistemas Dinámicos», y se anota que tiene ocho docentes grados 5, tres grados 4, dos grados 3, siete grados 2 y doce grados 1.

Una vez puesta en funcionamiento la nueva facultad comenzaron las coordinaciones con las unidades asociadas, instituciones con finalidades semejantes a las de la FCIEN en otros servicios de la Udelar. En el caso de la matemática, esa coordinación se da entre el Centro de Matemática y el IMERL de la FING. Este proceso tuvo polémicas, algunas agrias, en

<sup>17</sup> Por ejemplo, en la *Memoria del Decanato* de Mario Wschebor [Ws98]) y en el libro de Chiancone [Ch20].

el primer decenio, que se atemperaron poco después. Esa coordinación entre ambos espacios se consolidó bastante tiempo después, por lo que el sistema al final del período analizado en estas notas funcionaba muy bien, y se ha extendido a la fecha de redacción de este documento entre las unidades radicadas en Montevideo y las que están fuera de la capital ([Ws98], pp. 19-21).

En 1988 comenzó a dictarse la Maestría de Matemática con diecisiete estudiantes, en el marco de un sistema de posgrados que impulsa el PEDECIBA.

Más allá de la influencia de Massera y de los vínculos esporádicos con Lewowicz antes de 1986, la actividad colectiva en sistemas dinámicos comenzó ya avanzado el año 1985. Al respecto, Vieitez recuerda: «La actividad comenzó con algunos cursos de J. Lewowicz (Sistemas Dinámicos y Teoría Ergódica) y Lázaro Recht (Geometría Riemanniana) a la vez que también participa Ricardo Mañé con cursos cortos, por ejemplo sobre Dinámica de Funciones Racionales».

El Seminario de Sistemas Dinámicos comenzó a funcionar en 1987, por lo que ese año puede ser considerado el de formación del Grupo de Sistemas Dinámicos y Geometría. Entre los integrantes iniciales, con la orientación general de Lewowicz, estaban Carlos Asuaga, Eleonora Catsigeras (se doctoró en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada [IMPA], Río de Janeiro, en 1995), Heber Enrich (IMPA, 1995), Roberto Markarian (IMPA, 1990), Miguel Paternain (IMPA, 1990), Gabriel Paternain (SUNY, Stony Brook, 1991), Álvaro Rovella (IMPA, 1991), Raúl Ures (IMPA, 1993) y José Vieitez (Udelar, 1992). A ellos se les irían sumando Marcelo Cerminara, Nancy Guelman (Udelar, 2003), Jorge Iglesias (Udelar, 2002), Ezequiel Maderna (ENS, Lyon, 2000), Matilde Martínez (CIMAT, Guanajuato, 2005), Richard Muñiz (CIMAT, Guanajuato, 2006), Aldo Portela (USP, San Pablo, 2004), Álvaro Rittatore y María Alejandra Rodríguez Hertz (Udelar, 1999), Federico Rodríguez Hertz (IMPA, 2001) y Martín Sambarino (IMPA, 1998).<sup>18</sup>

La mera enumeración de los lugares de estudio doctorales en el párrafo anterior indica la fuerte influencia que tuvo en los inicios el Grupo de Sistemas Dinámicos del IMPA, en especial por las orientaciones de Jacob Palis Jr. y de Ricardo Mañé, como también da cuenta de la apertura al exterior del grupo desde sus inicios, que se ha incrementado

18 Si no se indica lugar y fecha del doctorado entre paréntesis es que lo hicieron en otra área o no lo terminaron.

enormemente, para lo que alcanzaría con ver los institutos del mundo donde se han cursado estadías posdoctorales o de larga duración.

El 16 de noviembre de 1987, Jorge Lewowicz, entonces director del IME, le eleva al Consejo de la facultad una «Reseña de las actividades académicas proyectadas para 1988» que incluye las áreas de investigación, ya que se pensaba

continuar desarrollando las siguientes áreas a) Probabilidad y Estadística. b) Álgebra. c) Análisis. d) Ecuaciones Diferenciales. e) Historia y Filosofía de la Matemática. También queremos promover la formación de investigadores en áreas como Análisis numérico, Optimización, Investigación operativa, en los enfoques matemáticos de la Teoría de Control, Mecánica de Fluidos y otras aplicaciones.

En esa reseña se enumeraban cursos de la licenciatura y se destacaba la interacción con el Departamento de Matemática de la FHC, con el Centro de Matemática (creado por el CDC de en marzo de 1987 —en la FHC a comienzos de 1989, mientras se consolidaba la creación de la FCIEN) y con el Área de Matemática del PEDECIBA.

El 22 de noviembre de 1989, Lewowicz analizó las vinculaciones con lo que denominaba el Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (Imfcen) y destacaba que en Sistemas Dinámicos «hay un grupo numeroso de docentes jóvenes muy calificados y dos profesores (grados 5 y 4) de alto nivel. Sus vinculaciones podrían incluir prácticamente a todos los institutos de la Facultad», y algo semejante decía sobre la probabilidad y estadística.

La multifacética influencia de Massera, en muchos sentidos el padre del Grupo de Sistemas Dinámicos, fue altamente reconocida por la Universidad. Así, el CDC de la Udelar decidió otorgarle el título de Doctor Honoris Causa a José Luis Massera el 12 de marzo de 1991 (Res. n.º 34), lo que se concretó en la ceremonia del 11 de noviembre de 1991 en la que estuvieron presentes, entre otros, Paul Halmos, Marcos Sebastiani y Juan Jorge Schäffer, quien escribió y leyó la *laudatio* [S91].

Con los comienzos de la normalización de la actividad autónoma en la Universidad de la República el Seminario y el Grupo de Sistemas Dinámicos fueron creciendo, y su actividad se regularizó en el salón de seminarios del ya IMERL, los viernes a las 14.30 horas, frecuencia que se mantiene hasta hoy.

Vale la pena referirse a algunas trayectorias de docentes que se integraron en este período. Álvaro Rovella (Leva) estaba estudiando en la

Facultad de Humanidades y Ciencias dedicado al Análisis, se sumó a cursos y al seminario de Sistemas Dinámicos tempranamente y se fue al IMPA a estudiar con Mañé. Martín Sambarino se vinculó al seminario en 1989, hizo curso con Tolosa en 1991-1992 y fue al IMPA en 1994; fue de los últimos en doctorarse de esa camada primera posdictadura (1998, bajo la orientación de Jacob Palis). También Miguel Paternain participó mucho de esa época fundacional. Ezequiel Maderna se integró al Seminario en 1993 y se doctoró en 2000, bajo la orientación de Albert Fathi (ENS Lyon).

A continuación se ofrece alguna información en las áreas de Sistemas Dinámicos y Geometría en este período, ordenados según cursos de posgrado, actividad institucional y congresos.

## CURSOS DE POSGRADO

Comenzamos con algunos recuerdos personales que vale la pena consignar.

Eleonora Catsigeras:

Los cursos que recuerdo entre 1986 y 1991 fueron estos, a los que asistí: Jorge Lewowicz, Introducción a los sistemas dinámicos, que luego se llamó Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales y después, Ecuaciones Diferenciales II. Fue para muchos de nosotros casi el primer contacto con sistemas dinámicos. Antes había hecho un seminario para estudiantes de ecuaciones diferenciales en el que estudiamos algunos capítulos del libro de Coddington y Levinson. Creo que fue en 1986, casi enseguida que llegó Lewowicz de Venezuela.

Jorge Lewowicz, Teoría Ergódica;

Ricardo Mañé, Dinámica de Funciones racionales;

Ricardo Mañé, Mapas expansores;

Marcos Sebastiani, Topología Algebraica (1990 ¿o antes?);

Lázaro Recht: Geometría Riemanniana.

Hubo cursos de Análisis Funcional de Rodrigo Arocena, y de Procesos Estocásticos de Gonzalo Pérez

1990: 2.º sem. [E. Catsigeras y Heber Enrich]: Curso Ecuaciones Diferenciales II;



1991: Sistemas Dinámicos I. Jorge Lewowicz; Transformaciones del Intervalo (curso corto en el primer semestre de 1991, incluyó la Teoría de Sharkovskii de funciones en el intervalo. Juan Tolosa»

José Vieitez:

A esto se le sumó un curso de Rodrigo Bamón y otros de Ricardo Mañé, antes de 1993, pero no sé precisar el año [y hubo un] curso de Marcos Sebastiani sobre Espacios de Teichmüller, ya pasado 1994. Vino varias veces a Montevideo, siempre por ómnibus (TTL) pues temía subir en avión. Por no gastar el dinero de la Udelar se quedaba en un hotel modesto en Constituyente casi Eduardo Acevedo.

Sigue una lista reconstruida colectivamente y con el apoyo de la secretaria del PEDECIBA:

1992: Teoría Ergódica, R. Markarian;  
 1993: Geometría simpléctica y Métodos Variacionales, M. Paternain;  
 Grupos Topológicos, J. Lewowicz;  
 1995: Geometría riemanniana. Gabriel Paternain;  
 1997: Sistemas Dinámicos I, J. Lewowicz;  
 Dinámica de funciones racionales en la esfera de Riemann, A. Rovella;  
 Conexiones en fibrados, M. Paternain;  
 Teoría Egódica, E. Catsigeras.  
 1998: Flujos Geodésicos, G. Paternain; Sistemas Dinámicos I, J. Lewowicz;  
 Sistemas Dinámicos Expansivos, J. Lewowicz, M. Paternain, R. Ures, J. Vieitez.

#### ALGUNA INFORMACIÓN INSTITUCIONAL

En mayo de 1993 se eleva un informe conjunto sobre las actividades del Centro de Matemática de la FCIEN y del IMERL de la FING, cuyos directores eran Walter Ferrer (hasta el 16 de noviembre de 1991 y luego Enrique Cabaña en el CMat y Roberto Markarian en el IMERL).<sup>19</sup>

Se indicaba que en el CMat y en el IMERL, once de los profesores y estudiantes de posgrado (37) declaraban trabajar en áreas vinculadas a los

19 Había 8 profesores titulares en el CMat y 4 en el IMERL; 45 y 48 era el número total respectivo de docentes.

sistemas dinámicos. Al año siguiente, en el IMERL la relación era de doce en veintiuno, y la información relevada hasta el informe de 1997 indica cantidades semejantes.

Entre 1992 y 1994 los dinamistas uruguayos dictaron cursos en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA): Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales (1992, dictado por J. Lewowicz, R. Markarian y M. Paternain) y Sistemas Dinámicos I (1994, J. Lewowicz, R. Markarian, A. Rovella y R. Ures).<sup>20</sup>

## CONGRESOS

En marzo de 1995 se llevó a cabo en Montevideo el Congreso Internacional de Sistemas Dinámicos (Dynamical Systems International Congress), en memoria de Ricardo Mañé, fallecido en Montevideo el 9 de marzo del mismo año, con la participación de más de cien matemáticos y matemáticas. El comité científico estuvo integrado por Michael Herman, Jorge Lewowicz, Ricardo Mañé, John Mather, Sheldon Newhouse, Jacob Palis y Jacob Sinai. Por acuerdo de los anfitriones, ninguno de los participantes uruguayos dio conferencias, como reconocimiento a una lista de expositores que incluía a R. Bamón, M. Brunella, K. Burns, N. Chernov, G. Contreras, R. De la Llave, W. De Mello, L. Díaz, A. Fathi, A. Fomenko, J.-M. Gambaudo, C. Gutiérrez, S. Hayashi, Y. Ilyashenko, A. Katok, K. Kuperberg, R. Labarca, A. Lanford, P. Le Calvez, F. Ledrappier, C. Liverani, A. Manning, S. Newhouse, J. Mattei, C. Moreira, M. J. Pacífico, J. Palis, M. Pollicot, L. Polterovich, Ch. Pugh, K. Shiraiwa, M. Shub, N. Simanyi, R. Spatzier, G. Swiatek, M. Viana, C. Viterbo, H. Weiss, R. Williams, Z. Xia, M. Yakobson. Además de los que trabajaban en Uruguay, otros participantes: Â. Barone, R. Iturriaga, R. Krikorian, E. Pujals, F. Rodríguez.<sup>21</sup> El Congreso dio lugar a la publicación importante [LLN96].

Entre el 23 y el 25 de mayo de 1996 las facultades de Ingeniería y de Ciencias de la Udelar organizaron la Primera Conferencia

<sup>20</sup> Dirigió las tesis de licenciatura de la UBA de N. Guelman (*Propiedades estadísticas de medidas invariantes para transformaciones expansoras*, 1995) y de J. P. Lewinger (*Teorema de Oseledec*, 1995).

<sup>21</sup> Katok, Ledrappier y Chernov hicieron estadías más prolongadas.

Interdisciplinaria sobre Sistemas Caóticos en Uruguay en la cual científicos de Argentina, Brasil y Uruguay dictaron diecisiete conferencias. Su comité científico estuvo integrado por R. Budelli (biólogo), J. Lewowicz, R. Markarian (matemáticos), A. Sicardi (físico) y G. Tancredi (astrónomo).<sup>22</sup>

En setiembre de 1997, Viviane Baladi estuvo en Uruguay y dio curso.

---

22. Como resultado de esta conferencia se editó el libro *Caos en el Uruguay. ¿Qué hacen los investigadores uruguayos que trabajan en sistemas caóticos?* [MT97].

---

1998-2005

CURSOS DE POSGRADO DE SISTEMAS DINÁMICOS Y GEOMETRÍA  
DICTADOS EN ESTE PERÍODO

1999:

Teoría geométrica de la medida, Omar Gil

Análisis complejo II, A. Rovella

Introducción a los Sistemas Dinámicos, M. Sambarino

Teoría de Bifurcaciones, R. Markarian, R. Ures

2000:

Dinámica hiperbólica, Martín Sambarino

Estructuras geométricas, G. Paternain

2001:

Grupos topológicos, Jorge Lewowicz.

2002:

Geometría Riemanniana, Ezequiel Maderna

Dinámica de homeomorfismos expansivos, M. A. Rodríguez

Sistemas Dinámicos, F. Rodríguez

2003:

Homeomorfismos de superficies: clasificación según su clase de isotopía, R. Ures

Introducción a la Teoría Ergódica de Billares Caóticos, R. Markarian

Topología Algebraica, A. Rovella y J. Vieitez.

2004:

Conexiones en fibrados, Miguel Paternain

## Sistemas Dinámicos I, M. Sambarino

2005:

Sistemas Dinámicos. Teoría Ergódica, E. Catsigeras

Geometría Riemanniana, M. Sambarino

Topología Algebraica, J. Vieitez

Métodos variacionales en dinámica conservativa, E. Maderna

José Vieitez: «Hubo visita de François Beguin sobre 1998 creo recordar. Trabajamos en dinámica de flujos hiperbólicos en dim 3.»

2005, marzo: visita de Patrice Le Calvez, John Franks

2004: Congreso Internacional de Sistemas Dinámicos en homenaje a J. L. Massera, Montevideo 11-20 de marzo de 2004. El comité científico estuvo integrado por Anatole Katok (Penn State, Estados Unidos), Jorge Lewowicz (IMERL, Uruguay), Sheldon Newhouse (MSU, Estados Unidos), Jacob Palis (IMPA, Brasil), David Ruelle (CNRS, Francia), Alberto Verjovsky (UNAM, México), Jean Christophe Yoccoz (College de France). Participaron, entre otros V. Baladi; Ch. Bonatti; K. Burns; G. Contreras; L. Díaz; B. Fayad; J. Franks; Kolchi Hiraide, Z. Nitecki; P. Le Calvez; Carlos Gustavo *Gugu* Moreira; E. Pujals; M. Viana; S. Zanata.

XIV Escuela Latinoamericana de Matemática (ELAM) 2005: Se realizó entre 1.º y 9 de diciembre de 2005, en el balneario Solís, dedicada a Probabilidad y Estadística Matemática y Sistemas Dinámicos y sus interacciones. Su comité organizador estuvo integrado por Pablo Ferrari (USP, Brasil), Roberto Markarian (IMERL, Uruguay), Ernesto Mordecki (CMAT, Uruguay), Gonzalo Perera (IMERL, Uruguay), Martín Sambarino (CMAT, Uruguay), Marcelo Viana (IMPA, Brasil), Mario Wschebor (CMAT, Uruguay), Marcelo Cerminara (secretario, IMERL, Uruguay). Participó un centenar de alumnos y decenas de conferencistas. Hubo seis cursos:

- Pierre Collet. École Polytechnique, Francia: «Probability and Dynamical Systems»
- Konstantin Khanin. Heriot-Watt University, Edinburgh, Reino Unido: «Ergodic theory, continued fractions and renormalizations»
- Alain Chenciner. IMCCE y Université Paris VII-Denis Diderot, Francia: «Calculus of variations in the convex case: an introduction to Fathi's weak KAM theory and Mather's theory of minimal invariant measures»

- Michael Shub y Charle Pugh. University of Toronto, Canadá: «Introduction to hyperbolic and partially hyperbolic dynamical systems».
- Ravi R. Mazumdar. University of Waterloo, Canadá: «Applications of Probability to Traffic Modeling»
- David Nualart. Universitat de Barcelona, España: «Fractional Brownian Motion: Stochastic Calculus and Applications».

Excepto el de Mazumdar, no incluido «por razones de fuerza mayor», las «Notas de los cursos» (Facultad de Ciencias y Facultad de Ingeniería, Udelar, s. f.) constituyeron un libro de 320 páginas que estaba disponible al comenzar la escuela.

## BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES

- [AGU05] *Un pensamiento libre. Cartas de José Luis Massera* (edición a cargo de Vania Markarian). Montevideo: Archivo General de la Universidad de la República (AGU), 2005, 160 pp.
- [Al78] ALSINA, F. A. (1978). *Ciencias Básicas. Informe Final*. Montevideo: Programa Universidad-BID, Universidad de la República, 206 pp. (Convenio sobre Cooperación Técnica entre la República Oriental del Uruguay y el Banco Interamericano de Desarrollo, ATC/TF (SP)-1513-UR en el AGU.
- [An15] *Anales de la Universidad* 93 (1915). Creación de Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas y Programas de matemática. Recuperado de <https://anaforas.fic.edu.uy/jspui/handle/123456789/11252>
- [ArFS88] ARGENTI, G., FILGUEIRA, C., y SUTZ, J. (1988). *Ciencia y Tecnología: un diagnóstico de oportunidades*. Montevideo: Ministerio de Educación y Cultura-Centro de Informaciones y Estudios del Uruguay (CIESU), 256 pp.
- [ArP86] AROCENA, R., y PÉREZ, G. (1986). Matemática. En *Ciencia y Tecnología en el Uruguay* (pp. 71-94). Montevideo: Centro de Investigaciones económicas (CINVE)-Ministerio de Educación y Cultura. Recuperado de <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/gperez/documentos/arocena-perez.html>
- [Aro0] AROCENA, R. (2000). Ciencia y exilio en América Latina. El caso de los matemáticos uruguayos en Venezuela. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, VII (1 y 2), 67-78. Recuperado de <https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol7/arocena.pdf>
- [Che92] CHERONI, A. (1992). Eduardo García de Zúñiga. Un humanista militante. *Gaceta universitaria*, 6(1), 37-38. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/197889.pdf>
- [Ch96] CHIANCONE CASTRO, A. (1996). *La definición de políticas públicas en una situación de transición política: El caso del PEDECIBA en Uruguay*. Buenos Aires: Flacso-DAAD.
- [Ch97] CHIANCONE CASTRO, A. (1997). Los matemáticos uruguayos, una historia de migraciones. *Redes*, 4(10), 179-212. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90711303008>

- [Ch20] CHIANCONE CASTRO, A. (2020). *La creación de la Facultad de Ciencias. Un hito en la ciencia uruguaya*. Montevideo: DIRAC.
- [CDC89] Consejo Directivo Central (CDC). *Anteproyecto de instalación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*. Distribuido 663/89. Sesión 14/08/89. AGU, Archivo Mario Wschebor, caja 34.
- [FIRA35] Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas (1935). *Bibliografía correspondiente a los cursos dictados en la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas en el año 1934*. Montevideo: Peña & Cía. Impresores.
- [Ga96] CICALESE, V. O. (1992). Eduardo García de Zúñiga. Un consumado humanista. *Gaceta universitaria*, 6 (1), 39, 44-45. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/200473.pdf>
- [Ga43] *Memoria de lo actuado durante el período complementario 12 de Mayo de 1939 - 5 de Marzo de 1940 y el período 5 de Marzo de 1940-5 de Marzo de 1943 • Decanato del Profesor Ingeniero Civil Vicente I. García*. Montevideo: Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas, Universidad de la República Oriental del Uruguay 1943. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/199760.pdf>
- [GV22] GANÓN, V. (2022). PEDECIBA. *Los orígenes de una revolución científica y cultural en el Uruguay posdictadura (1985-1990)*. Montevideo: Editorial Palabra Clave.
- [GZ07] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1907). Sobre la medición de una distancia horizontal aplicando las propiedades de la Catenaria. *Revista de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos del Uruguay*, 1(6), 92-93. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/201319.pdf>
- [GZ11] BIBLIOGRAFÍA. ENRIQUE LEGRAND. — Sumaciones por una fórmula de Eulero Casa editora de Corú hermanos. Buenos Aires. *Revista de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos del Uruguay*, 5(37), 104. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/533763.pdf>
- [GZ14] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1914). Estudio sobre programas de matemática preparatorias y superiores. *Revista de la Asociación Politécnica del Uruguay*, 8, 97-120. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198160.pdf>
- [GZ28] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1928). Nota sobre el wronskiano. *Revista de Ingeniería*, 22(12), 690-694. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198165.pdf>
- [GZ32a] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1932a). *Curso de álgebra superior y análisis: Primeras lecciones de análisis matemático (Apuntes de clase)*. Montevideo: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/195326.pdf>
- [GZ32b] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1932b). Nota sobre el teorema de Bézout. *Revista de Ingeniería*, 26(1), 3-4. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/340746.pdf>



- [GZ35] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1935). Rafael Barrett, matemático. *Boletín de la Facultad de Ingeniería*, 1, 30-32. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198168.pdf>
- [GZ38] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1938). *Lección inaugural del Curso de Cálculos de Probabilidades*. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198162.pdf>
- [GZ90] GARCÍA DE ZÚÑIGA, E. (1990). Lecciones de historia de las matemáticas. Montevideo: FHCE, Universidad de la República. Publicadas entre 1924 y 1935. Con estudios previos de J. L. Massera y R. Laguardia. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/8515.pdf>
- [GG99] GERARD, E., y GERARD, A. (1999). La matemática en Ingeniería, revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería de Montevideo. *Llull*, 22, 107-144. Contiene lista de programas entre 1031 y 1940 (llamada [73], p. 144) con comentarios (pp. 125-126 y 133). Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=62220>
- [Ha85] HALMOS, P. R. (1985). *I want to be mathematician. An automathography*. Nueva York: Springer.
- [HoGZ53] Homenaje de la Facultad de Ingeniería al Prof. Ing. Eduardo García de Zúñiga (1953, mayo 14). *Revista de Ingeniería*, XLVII(541), 202-206. Discursos de Carlos E. Berta, Rafael Laguardia, Germán E. Villar. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/397026.pdf>
- [In95] INCHAUSTI, M. (1995). El IME en la Facultad de Ingeniería. Su dimensión científica. Montevideo: Publicaciones Matemáticas del Uruguay. Suplemento al Volumen 7, pp. 3-114. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/417495.pdf>
- [La51] LAGUARDIA, R. (1951). Eduardo García de Zúñiga. Algunos aspectos de su personalidad. *Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias*, 7. Reproducido en [GZ90]. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/198595.pdf>
- [Le09] LEGRAND, E. (1909). *Fórmula de Euler. Su aplicación a la resolución numérica de problemas de diverso orden, reducidos a sumaciones*. Montevideo: Talleres A. Barreiro y Ramos. Dedicado a Juan Pedro Lamolle (-1919, primer ministro de Obras Públicas, 1907). Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/431629.pdf>
- [Lew59] LEWOWICZ, J. (1959-1960). Sobre un teorema de Szmydtówna. Publicado sucesivamente en *Boletín de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de Montevideo*, 7(5), 139-147. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198649.pdf> y en *Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística*, 3(4), 125-133. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/198649-1.pdf> simultáneamente con Massera, José Luis. On the existence of “Lyapunov functions” en las dos revistas; por ejemplo, *Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística*, 3(4), 111-124. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/197397.pdf>

- [LLN96] International conference on dynamical systems (Montevideo, Uruguay, 27 March-1 April 1995). Edited by F. Ledrappier, J. Lewowicz, and S. Newhouse. Pitman Research Notes in Mathematics 362. Longman Scientific & Technical (Harlow, Reino Unido), 1996. Proceedings dedicated to Ricardo Mañé.
- [Ma85] MASSERA, J. L. y otros (1985). *Dialéctica y Matemática*. Colección Temas de Nuestro Tiempo. Montevideo: Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad de la República (1985)
- [Ma90] MASSERA, J. L. (1990). Los orígenes y el desarrollo de la Escuela Uruguaya de Matemáticas. *Interciencias*, 13(4), 177-182. Reproducido en [GZ90]
- [Ma98] José Luis Massera. *El científico y el hombre*. Premio México de Ciencia y Tecnología 1997. Montevideo: Universidad de la República, 1998. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/196037.pdf>
- [MaS66] MASSERA, J. L. y SCHÄFFER, J. J. (1966). *Linear differential equations and function spaces*. Nueva York: Academic Press.
- [MEC86] Ministerio de Educación y Cultura-Centro de Investigaciones económicas (CINVE) (1986). *Ciencia y Tecnología en el Uruguay*. Montevideo: Ministerio de Educación y Cultura-Centro de Investigaciones económicas (CINVE).
- [MM] Mucha información, fotos y publicaciones de y sobre José Luis Massera en [cmat.edu.uy/~mordecki/massera](http://cmat.edu.uy/~mordecki/massera)
- [MC96] MARTÍN DEL CAMPO, E. (1996). Transferencia de Tecnología y Conocimiento a través de científicos y tecnólogos latinoamericanos residentes en el exterior, presentado ante el *Simposio Internacional sobre Migraciones Científicas*, Bogotá.
- [MM10] MARKARIAN, R., y MORDECKI, E (Coords.) (2010). *José Luis Massera. Ciencia y compromiso social*. Montevideo: Orbe-PEDECIBA.
- [MML14] MARTÍNEZ, M. L. (2014). *75 primeros años en la formación de los ingenieros nacionales. Historia de la Facultad de Ingeniería (1885-1960)*. Montevideo: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/424436.pdf>
- [MT97] MARKARIAN, R., y TANCREDI, G. (Eds.) (1997). *Caos en el Uruguay. ¿Qué hacen los investigadores uruguayos que trabaja en sistemas caóticos?*. Montevideo: Facultad de Ciencias y Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- [Mo15] MONTEVERDE, J. (1915). La Enseñanza de las matemáticas en ingeniería. Los programas de matemáticas puras propuestos por el Profesor Ingeniero D. Eduardo García de Zúñiga. Montevideo: Talleres «La Razón», «El Siglo» y «El Telégrafo». Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/revistas/405085.pdf>

- [MV05] MARKARIAN, V. (Ed.) (2005). *Un pensamiento libre: Cartas de José Luis Massera*. Montevideo: Archivo General de la Universidad de la República. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/35142.pdf>
- [Ot88] OTERO, M. (1988). *Las matemáticas uruguayas y Rey Pastor*. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/586986.pdf>
- [PMU14] *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, 14, año 2013, «dedicated to the International Congress on Dynamical Systems held in Montevideo, Uruguay, from August 13th to August 17th, 2012 and the Doctor Honoris Causa to Jorge Lewowicz.» 246 + viii pp. Recuperado de <http://pmu.uy/pmu14/>
- [S91] SCHÄFFER, J. J.. Discurso en el Acto de entrega del Doctorado Honoris Causa a José Luis Massera. 11 de noviembre de 1991. Recuperado de <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/sobre/dhc-schaeffer.pdf>
- [S97] SCHÄFFER, J. J. Carta apoyando la candidatura de J. L. Massera al premio México. 8 de julio de 1997. Recuperado de <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/sobre/carta-schaffer.html>
- [Sa14] SAMBARINO, M. Laudatio Honoris Causa Jorge Lewowicz. en [PMU14] (pp. 2-5).
- [SAL51] *Symposium sobre Algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino America*, Punta del Este 19-21 diciembre 1951. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina. Montevideo. Unesco, 195?. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/16506.pdf>
- [Sc87] SCHOTT, Th. (1987). Scientific Productivity and International Integration of Small Countries: Mathematics in Denmark and Israel. *Minerva*, xxv(1-2), 3-20.
- [Si94] SILVEIRA, R. (1994). *Científicos uruguayos en el exterior: presente y perspectivas de uno de los problemas básicos de la comunidad científica nacional*. Montevideo [mimeo].
- [Te]LM99] *Testimonios para la experiencia de enseñar: José Luis Massera*. Montevideo-Buenos Aires: Universidad de la República-UBA, 1999. Recuperado de <https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/200839.pdf>
- [Ve96] VESSURI, H. (1996), La movilidad del Capital Humano desde la perspectiva de la ciencia latinoamericana, presentado ante el *Simposio Internacional sobre Migraciones Científicas*, Bogotá.
- [Ws98] WSCHEBOR, M. (1998). *Facultad de Ciencias: Los primeros siete años. Memoria del Decanato*. Montevideo: Dirac.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA SOBRE HISTORIA  
DE LA UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA,  
ALGUNOS DE SUS SERVICIOS E INVESTIGACIÓN<sup>23</sup>

- AGUIAR, C. (1986). *Formación superior y desarrollo científico en América Latina*. Montevideo: Equipos Consultores.
- ARDAO, A. (1950). *Espiritualismo y positivismo en el Uruguay*. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.
- (1950). *La Universidad de Montevideo*. Montevideo: Universidad de la República.
- ARDAO, A. (1962). *Racionalismo y liberalismo en el Uruguay*. Montevideo: Universidad de la República.
- ARES PONS, J. (1995). *Universidad: ¿Anarquía organizada?* Montevideo: FHCE, Universidad de la República.
- AROCENA, R., y SUTZ, J. (2005). Personajes en busca de un destino. Ciencia, tecnología e innovación en el Uruguay contemporáneo. En: G. CAETANO (Ed.), *Veinte años de democracia* (pp. 381-404). Montevideo: Taurus.
- BARBATO, C. (Coord.) (1994). *Universidad. El debate tras la fachada*. Montevideo: Fin de Siglo.
- BARREIRO, A. (1997). *La formación de recursos humanos para investigación en el Uruguay a partir de la experiencia del PEDECIBA*. Montevideo: Ediciones de la Banda Oriental.
- BAYCE, R. (1985-1988). *El sistema educativo uruguayo* (2 vols.). Montevideo: Ediciones de la Banda Oriental-CIEP.
- BENTANCUR, N., y CLAVIJO, E. (2016). Entre la dependencia de la trayectoria y la expansión institucional. Características del desarrollo de un sistema de educación superior en Uruguay (2005-2015). En: A. FÁVERO y G. TAUCHEN (Coords.), *Políticas de educação superior e docência universitária: diálogos sul-sul*. Curitiba: Editora CRV.
- BRALICH, J. (1987). *Breve historia de la educación en el Uruguay*. Montevideo: CEIP / Ediciones del Nuevo Mundo.
- (1993). *Historia de la Universidad*. Montevideo: Signos.
- CAETANO, G., MARTÍNEZ, M. L., DAVYT, A., y CHIANCONE CASTRO, A. (2011). *Fondo Bicentenario «José Pedro Barrán». Políticas científicas, tecnológicas y de innovación en el Uruguay contemporáneo, 1911-2011*. Montevideo: ANII.

<sup>23</sup> Extractado de la bibliografía de V. Markarian y otros (2024). Indicios. *Breve Historia de la Universidad de la República*, uno de los tres tomos publicados para los 175 años de la Universidad de la República. Recuperado de <https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/handle/20.500.12008/53902>

- CASTILLO, J., DUFRECHOU, H., JAUGE, M., SANGUINETTI, M., MESSINA, P., y GONZÁLEZ, V. (2015). El gasto en educación en Uruguay y su repercusión en las condiciones de trabajo de los docentes: una mirada histórica y comparada. *Contrapunto*, 6, 13-26.
- CENTRO LATINOAMERICANO DE ECONOMÍA HUMANA (CLAEH) (Ed.) (1985). *Universidad, transición y transformación. Apuntes para la discusión de una política universitaria* (2 vols.). Montevideo: CLAEH.
- CENTRO URUGUAY INDEPENDIENTE (CUI) (1986). *Movimiento estudiantil, resistencia y transición* (3 vols.). Montevideo: CUI.
- CHIANCONE CASTRO, A., y MARTÍNEZ LARRECHEA, E. (1996). El tránsito de la universidad al sistema de educación superior en Uruguay: aportes al estudio comparado de las políticas públicas de acreditación de instituciones. *Educación Superior y Sociedad*, 8(1), 23-40.
- D'AVENIA, L. (2022, junio). Ciencias sociales y modernización universitaria. La introducción del planeamiento universitario en la Universidad de la República en Uruguay en la década de 1960. *Nuevo Mundo Mundos Nuevos*.
- D'AVENIA, L. (2023, octubre). La dictadura y el crecimiento de la matrícula universitaria. *Hemisferio Izquierdo*.
- D'AVENIA, L., y JUNG, M. E (2022). Dos ensayos de nueva institucionalidad científica. En: R. MANDRESSI y V. MARKARIAN (Eds.), *Políticas de la ciencia* (pp. 131-144). Montevideo: Universidad de la República.
- DUFRECHOU, H., JAUGE, M., MESSINA, P., OROÑO, M., SÁNCHEZ, E., y SANGUINETTI, M. (2019). *El avance privatizador en la educación uruguaya: discursos y políticas*. Montevideo: Fenapes.
- FACULTAD DE CIENCIAS (ed.) (2015). *25 años. Facultad de Ciencias. Udelar*. Montevideo: Facultad de Ciencias, Universidad de la República.
- FACULTAD DE INGENIERÍA (Ed.) (2014). *Aportes para la historia del Instituto de Computación (1967-2012)*. Montevideo: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- FERNÁNDEZ, T. (2014). La metamorfosis de la educación superior en Uruguay 1984-2014. *Tópos, para un debate de lo educativo*, 6, 24-33.
- GONZÁLEZ VAILLANT, G. (2022, junio). Universidad en transición: Entre restauración y renovación. *Nuevo Mundo Mundos Nuevos*.
- JUNG, M. E. (2012-2013). *Antecedentes históricos de la Universidad en el interior del país: Cronología y selección documental* (2 vols.). Montevideo: Universidad de la República.
- (2018). *La educación superior entre el reclamo localista y la ofensiva derechista. El Movimiento pro-Universidad del Norte de Salto (1968-1973)*. Montevideo: Universidad de la República.

- 
- JUNG, M. E., MARTÍNEZ, M. L., y PAROLI, P. (Coords.) (2018). *50 años del Plan Maggiolo. Historia, testimonios y perspectivas actuales*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- KIRBERG, E. (1989). *Uruguay: transición democrática en la Universidad*. Santiago de Chile: LAR.
- LANDINELLI, J. (1989). La Universidad como problema político, 1968-1973. *Revista de Ciencia Política*, 3, 73-86.
- LANDINELLI, J. (Coord.) (1991). *Universidad: los desafíos de la modernización*. Montevideo: FCS, Universidad de la República.
- LICHTENSZTEJN, S. (1979). *La Universidad del Uruguay. Historia de una realidad autonómica y una vocación de cambio, 1958-1973*. Ciudad de México: UNAM.
- MAGGIOLO, Ó. (1977). *La Universidad uruguaya bajo la dictadura*. Ciudad de México: UNAM.
- (1988). *Universidad e investigación científica en el Uruguay: su deterioro acelerado (1973-1979)*. Montevideo: Universidad de la República.
- MARKARIAN, V. (1998). *Transición y reinstitucionalización democrática en la Udelar (1983-1985): Primera aproximación*. Montevideo: FHCE, Universidad de la República.
- (ed.) (2007). *Don Julio: Documentos del Archivo Ricaldoni*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- MARKARIAN, V. (Ed.) (2010). *Universidad, investigación y compromiso: Documentos del Archivo Maggiolo*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- (2011). Apogeo y crisis del reformismo universitario: Algunos debates en torno al «plan Maggiolo» en la Udelar. *Pensamiento Universitario*, 14, 91-104.
- (2019, junio). Córdoba en boca de los universitarios uruguayos (algunos de sus cambiantes significados entre los años cincuenta y sesenta del siglo XX). *Avances del Cesor*, XVI(20), 129-146.
- (2020). *Universidad, revolución y dólares. Dos estudios sobre la Guerra Fría cultural en el Uruguay de los sesenta*. Montevideo: Penguin Random House.
- (Coord.) (2023). *La universidad intervenida*. Montevideo: Universidad de la República.
- MARKARIAN, V., JUNG M. E., y WSCHEBOR, I. (2008). *1908: El año augural*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- (2008). *1918: En la hora americana*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- (2008). *1958: El cogobierno autonómico*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- (2008). *1968: La insurgencia estudiantil*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.

- MARKARIAN, V., JUNG M. E., y WSCHBOR, I. (2009). *1983: La generación de la primavera democrática*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- MARTÍNEZ, M. L. (2001). La Asociación Uruguaya para el Progreso de la Ciencia. *Galileo*, 23, 17-34.
- (2007). Noventa años después. El Instituto de Química Industrial del Uruguay y la investigación sobre el carburante nacional. *Revista de estudios sociales de la ciencia*, 13(25), 51-83.
- (2018). Universidad e investigación científico-tecnológica como motor del desarrollo. Propuesta de un Plan de reestructuración de la Universidad de la República (1967). *Em Construção*, 12, 198-216. <https://doi.org/10.12957/emconstrucao.2017.31836>
- (Ed.) (2020). *Mario H.: Documentos del Archivo Otero*. Montevideo: AGU, Universidad de la República.
- ODDONE, J. A., y PARÍS DE ODDONE, B. (2010 [1963]). *Historia de la Universidad de la República*. Vol. 1: La Universidad vieja (1849-1885). Montevideo: Universidad de la República.
- (2010 [1971]). *Historia de la Universidad de la República*. Vol. 2: La Universidad del militarismo a la crisis (1885-1958). Montevideo: Universidad de la República.
- OTERO, M. (1985): *La Facultad de Humanidades y Ciencias en el desarrollo cultural y científico del Uruguay: Documentos recientes*. Montevideo: Universidad de la República.
- PARÍS DE ODDONE, B. (Ed.) (1995). *Historia y memoria: Medio siglo de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, 1945-1995*. Montevideo: FHCE, Universidad de la República.
- (2008 [1958]). *La Universidad de Montevideo en la formación de nuestra conciencia liberal*. Montevideo: Universidad de la República.
- (2010). *La Universidad de la República desde la crisis a la intervención (1958-1973)*. Montevideo: Ediciones Universitarias.
- PETIT MUÑOZ, E. (1961). *El derecho de nuestra Universidad a darse su propio estatuto*. Montevideo: Editorial Ciencia.
- (1969). *Historia sintética de la autonomía de la enseñanza media en Uruguay*. Montevideo: FHC, Universidad de la República.
- QUEIJO, J., y JUNG, M. E. (2022, junio). Ideas y proyectos sobre la modernización de la Universidad en Uruguay (1950-1985). *Nuevo Mundo Mundos Nuevos*.
- REAL DE AZÚA, C. (1992). *La Universidad*. Montevideo: Celadu.
- RICO, Á. (2003). *La Universidad de la República desde el golpe de Estado a la intervención: Cronología de hechos, documentos y testimonios, junio a diciembre 1973*. Montevideo: CEIU, Universidad de la República.

- 
- RUIZ, E. (1997). *Memorias de una profesión silenciosa: Historia de la ingeniería en Uruguay*. Montevideo: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- SOLARI, A. (1966). La universidad en transición en una sociedad estancada: el caso del Uruguay. *Aportes*, 2, 4-51.
- SUTZ, J., y BIANCO, M. (Eds.) (2014). *Veinte años de políticas de investigación en la Universidad de la República: aciertos, dudas y aprendizajes*. Montevideo: Ediciones Trilce.
- UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA (Ed.) (1989). *Breve historia de la Universidad de la República*. Montevideo: Universidad de la República.
- (Ed.) (1998). *Breve historia de la Universidad de la República*. Montevideo: Universidad de la República.
- (Ed.) (2006). *Breve historia de la Universidad de la República*. Montevideo: Universidad de la República.
- WONSEWER, I. (1985). Una etapa de la transformación de la Universidad: el rectorado de Mario A. Cassinoni. *Hoy es historia*, 2, 8-22.



## APÉNDICES

RAFAEL OSWALDO RUGGIERO:  
RECORDANDO AL MAESTRO JORGE LEWOWICZ  
(CON CARÍÑO Y ADMIRACIÓN)

Escribir sobre el papel que tuvo Jorge Lewowicz en el devenir de mi trayectoria como matemático me parecía fácil. Imaginaba que podría expresar en algunas líneas, de forma muy precisa, la influencia determinante que tuvo en mis decisiones académicas. Pero ahora que me encuentro comenzando estas memorias, después de tanto tiempo de convivencia y vivencias con él, después de tanto tiempo de su partida (me parece tanto...), temo que los recuerdos y la admiración que siento por él se confundan y muestren un personaje que yo construí, una versión de la historia. Así que me permito contarles, con la venia de todos, mucho orgullo y nostalgia, mi versión (actual) de Jorge Lewowicz.

Lo conocí cuando estudiaba la Carrera de Matemáticas en la Universidad Simón Bolívar en Caracas, entre 1977 y 1982. Tomé mis primeros cursos de ecuaciones diferenciales y de topología general con él. Tenía un carisma notable y cautivante, la elegancia, la simplicidad y la objetividad con que exponía temas profundos, fundamentales, me impresionaba. Era mi primer contacto con un profesor uruguayo, posteriormente en la misma época llevé un curso de probabilidades con Mario Wschebor, otro uruguayo notable que componía, junto con Jorge y Enrique Cabaña, la representación del Uruguay en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar. Todos dejaron un fantástico legado en la formación de los matemáticos venezolanos de aquella época. En el caso específico de Jorge Lewowicz puedo mencionar a varios de mis excompañeros de estudio y posteriores generaciones que pasaron por sus clases: José Carlos Martín, Fernando Sánchez, Amran Tobelem,

Leonardo Mora, Víctor Sirvent, Carlos Morales, y pido disculpas si faltan nombres, porque con la edad la memoria me falla.

La convivencia con el profesor me fue revelando su personalidad uruguaya digamos así, por lo menos así lo sentía yo como venezolano y nacido en el trópico, en un país que era *rico por definición*, donde todo abundaba, todo era exuberante, donde la vida era *fácil* y nunca hacía frío. Tres cosas que me llamaban la atención en su carácter eran la austeridad de su forma de ser, su capacidad de síntesis, y un sentido del humor que yo no encontraba en la percepción de la realidad del trópico. Me despertó la curiosidad por conocer más a los uruguayos, y comencé a leer a Mario Benedetti. Siempre le seré grato a Jorge por haberme recomendado su lectura, uno de los mejores escritores que conozco, y en cuyos personajes encontré muchos de los rasgos *exóticos* que observaba en Jorge.

Sabía que estaba en la universidad por el olor de tabaco y café en los pasillos del departamento de matemática. Adquirí el vicio del café frecuentando su oficina para discutir sobre dudas y problemas de matemática, aprendí con él sobre política latino-americana en intervalos pautados por cafés y caminatas por los corredores y jardines de la universidad, me contaba sobre su experiencia en el exilio y su militancia por la causa contra la dictadura uruguaya. Y fue el primero que me contó sobre el IMPA...

En la Carrera de Matemáticas de la universidad era necesario redactar una monografía de final de curso, yo le propuse a Jorge que fuera mi orientador en esta actividad y me recomendó la lectura de un artículo que él había escrito recientemente con Eduardo Lima de Sá. Recuerdo el placer que tenía en descubrir como herramientas de geometría y topología diferencial se utilizaban para estudiar estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, era un trabajo sobre funciones de Lyapunov para flujos. Una vez, conversando sobre este trabajo, me dijo algo así como « si esto le parece fácil a Ruggiero, entonces tiene que dedicarse a los sistemas dinámicos, no son cosas consideradas sencillas». No me parecía fácil, solo estaba fascinado por los argumentos del artículo, cosa de novato tal vez. Este «deslumbramiento» se convirtió en admiración y disfrute permanente a medida que fui estudiando más sobre el contexto de la estabilidad topológica. Al terminar la carrera comencé la maestría bajo su orientación, y me propuso estudiar flujos geodésicos de superficies de curvatura no positiva. Fue mi primer contacto con el tema, hasta ahora es uno de mis temas de investigación. Me recomendó leer un artículo que escribió sobre formas de Lyapunov, un lindo trabajo donde mostraba que la forma de índice restringida a ciertos conos era una forma

de Lyapunov. Yo no entendía mucha cosa realmente. De hecho, varios de los prerrequisitos de geometría necesarios para leer este artículo los aprendí luego en el IMPA. Y unos meses antes de terminar la maestría me recomendó que me fuera al IMPA, donde había un exalumno suyo que sabía mucho más que él: Ricardo Mañé. Me fui a hacer el doctorado con el exalumno de Lewowicz.

Como alumno del IMPA leí varios trabajos de Jorge por consejo de Mañé, en especial el trabajo que considero el más importante de su bibliografía sobre los homeomorfismos expansivos de superficies compactas. Conversaciones con Miguel Paternain, alumno de Mañé también en la misma época, me mostraron el potencial de aplicaciones de las ideas de Jorge sobre el estudio de la dinámica expansiva. Sus trabajos sobre el tema influyeron en todo mi trabajo de investigación post-doctoral, desde 1992 hasta 2004, sobre flujos geodésicos expansivos y topológicamente estables.

Nos encontramos muchas veces después de mi salida de Venezuela, una vez en la Universidad Simón Bolívar en un congreso de sistemas dinámicos, en los workshops y escuelas del ICTP en Trieste, en el IMPA, en Montevideo después del retorno de Jorge a su país. Siempre conversábamos sobre matemática y sobre la vida, «mucho más complicada que la matemática» me decía. En la ocasión del congreso en homenaje a su obra, en Montevideo el año de 2013, me fui con la intención de proponerle escribir un artículo que extendía a dimensiones superiores su artículo sobre la forma de índice como forma de Lyapunov, finalmente yo había entendido la cosa [...] Lo encontré muy enfermo, no tuve valor para proponerle nada, escribí un *survey* sobre algunos de mis trabajos inspirados en los temas de investigación de Jorge, y en ese *survey* incluí la extensión de su trabajo. Está publicado en la revista *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, en un volumen especial dedicado a Jorge.

Volví a Río con un mal presentimiento, pocos meses después falleció Jorge. Desaparece físicamente, pero permanece su gran legado, no encuentro palabras suficientes para agradecerle todo lo que aprendí con él. Hace falta... (Rafael Oswaldo Ruggiero, Río de Janeiro, 2 de agosto de 2022)

## JUAN TOLOSA: EL MAESTRO JORGE LEWOWICZ

Conocí a Jorge en 1971, en mi corta estadía como profesor adjunto del IMERL, en 1971. Recuerdo una sesión del consejo del instituto, cuando se discutió la aprobación del viaje de su joven estudiante Ricardo Mañé a hacer estudios de posgrado en Brasil. El representante estudiantil objetó, citando la postura política fuertemente derechista de la familia Mañé. Jorge se puso muy enojado, argumentando que solo debían considerarse los méritos académicos del postulante, que eran más que suficientes. El viaje fue aprobado, y Mañé viajó a Brasil para estudiar bajo la dirección de Jacob Palis. Sin embargo, Ricardo consideró toda su vida a Jorge como su verdadero guía, y lo visitó cada vez que paraba en Montevideo, aún por breve tiempo.

En el instituto participé también en un seminario informal sobre sistemas dinámicos, al que asistieron Jorge y José Luis Massera; recuerdo que expuse resultados sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales en espacios métricos, siguiendo el hermoso libro de Stepanov-Nemytski.

Mi próximo contacto con Jorge fue unos años después, ya en la Universidad Simón Bolívar en Caracas, Venezuela. Fue entonces que me introdujo a sus fascinantes métodos geométricos para el estudio de los varios tipos de estabilidad (estructural, topológica) de sistemas dinámicos. Publicamos un primer trabajo juntos, también incluyendo a Eduardo Lima de Sá, que mostraba la esencia de las ideas de Jorge en el caso de sistemas autónomos en  $\mathbb{R}^n$ . En un primer estudio, este caso es ideal, porque no contiene las complicaciones técnicas que surgen, por ejemplo, al aplicar el método a sistemas en variedades diferenciables.

Hicimos también un segundo trabajo demostrando que los difeomorfismos expansivos que son  $C^0$ -ceranos a un Anosov, son conjugados a un Anosov. Se trataba de un resultado que inicialmente había publicado Gura, con una prueba equivocada.

En la Universidad Simón Bolívar se organizó un seminario de sistemas dinámicos, donde participaron también Lázaro Recht, Eduardo Lima de Sá, y varios estudiantes de Jorge. Jorge expuso sus resultados de estabilidad estructural y topológica para difeomorfismos en variedades. También en esos años logró aplicar con éxito su método de funciones de Lyapunov a flujos geodésicos en superficies, así como también a modelos analíticos de difeomorfismos pseudo-Anosov. Teníamos conversaciones interesantes, donde usualmente participaba Lázaro, que rayaban

en la filosofía. Por ejemplo, ¿cómo aceptar el hecho que, como mostró Smale, los difeomorfismos hiperbólicos no son estructuralmente estables? Subsecuentemente, hubo varios intentos de subsanar el asunto, como generalizar la idea de estabilidad (Shub, Pugh), pero la idea de Jorge fue muy interesante: el sistema no se mueve en realidad en una superficie lisa (variedad diferenciable), sino en un «bolillero,» un espacio discreto.

Luego viajé a Estados Unidos, primero a la Universidad de Berkeley, California, y luego a la Universidad de Stockton, New Jersey, pero seguí en contacto con Jorge. Nos comunicábamos con frecuencia y también nos encontramos en varias oportunidades, en congresos y otras reuniones de matemáticos.

Por esa época, Jorge concluyó un importante y delicado estudio sobre los homeomorfismos expansivos en superficies compactas, que le llevó varios años, llegando a probar que en la esfera no hay ninguno, y en el toro los únicos expansivos posibles son conjugados a los ya conocidos difeomorfismos de Anosov. El trabajo fue enviado a la prestigiosa revista *Annals of Mathematics*. Allí cayó en manos de un revisor que lo rechazó, aduciendo que era difícil de comprender y, peor aún, estaba equivocado porque, argumentaba, hay difeomorfismos pseudo-Anosov en la esfera que son expansivos. Jorge mostró que el argumento del revisor estaba equivocado, y la revista se disculpó con el comentario de que el revisor «era un matemático bien conocido». En resumidas cuentas, Jorge terminó enviando el trabajo a los *Anales de la Academia Brasileira de Ciencias*, donde fue publicado. En el ínterin otro matemático, Hiraide, publicó un resultado similar, y figuró así como el primero en mostrar que no hay nuevos expansivos. En justicia, Hiraide reconoció que el trabajo de Jorge era anterior, en su concepción, y ambos aclararon la independencia de sus resultados.

Gestioné con éxito su estadía como profesor visitante de la Universidad de Princeton, gracias al apoyo de John Mather. Viajé entonces varias veces a Princeton, donde Jorge conducía un seminario informal con algunos estudiantes, donde explicaba sus métodos. En esa época completamos un trabajo sobre genericidad de homeomorfismos cuyos conjuntos estables e inestables son conexos.

Recuerdo haber mencionado varias veces a Jorge la necesidad de reunir en un libro todos sus importantes resultados sobre estabilidad estructural y funciones de Lyapunov. Su respuesta invariable era «eso es para cuando seamos viejos». Lo más parecido que conseguí hacer fue una publicación detallando su método, y sus múltiples aplicaciones, en

*Contemporary Mathematics* en 2007, y otro publicado en línea en 2013, hecho junto con Jorge Lewowicz y Jorge Groissman.

El maestro se nos ha ido, pero está constantemente en nuestros recuerdos el *Gaúcho* Lewowicz, como lo llamaban con afecto varios de sus amigos, de su *barra*. He tenido la suerte de disfrutar muchos años de su compañía, su generosidad proverbial en compartir resultados matemáticos y, en general, compartir todo, su compañerismo, su sentido del humor, su integridad tanto científica como moral. Te extraño, maestro (Juan Tolosa, Stockton, New Jersey, 28 de junio de 2023).

## ELEONORA CATSIGERAS: CUATRO RAZONES

Eleonora Catsigeras y Heber Enrich, su esposo, estudiaron ingeniería, se recibieron (en 1981 y 1978, respectivamente) y trabajaron en ANTEL y en UTE (también respectivamente). Antes de recibirse ya daban clases de matemática en la FING. Ella narra así sus pasajes a la investigación en matemática:

No era ingeniera exitosa. No me gustaba el trabajo de ingeniera. Estaba deseando dejar Antel. Me recibí de ingeniera porque no tenía otra cosa más cercana a la matemática para estudiar en Uruguay en aquel entonces.

Cuando terminé las matemáticas y físicas de ingeniería y fui a preguntar, no me acuerdo en qué año (era en dictadura), a la Facultad de Humanidades y Ciencias sobre qué oferta de cursos de matemática había, terminaron ofreciéndome estudiar yo sola algunas materias y dar las clases yo, como docente, no como estudiante. Esa era la cuestión. No había cómo formarse en matemática. Así que renuncié al IME y me dediqué durante diez años a la ingeniería. pero muy a disgusto. Ganaba bien, pero pagaba yo un precio muy alto estando infeliz con mi trabajo. Se me hacía horrible. De todas formas puse lo mejor de mí en mi trabajo en ANTEL y conocí gente genial allí dentro. (entre ellos, Andrés Tolosa, con quien éramos compañeros de trabajo y que hace poco llegó a ser presidente de ANTEL, y fue junto a su señora Carmita a mi despedida del IMERL en diciembre pasado).

Pero dejar ANTEL y dedicarme a los sistemas dinámicos no fue ningún sacrificio, sino todo lo contrario. Yo dejé ANTEL recién en 1990 para irme al IMPA (aunque fuimos al IMPA recién en enero de 1991).

Durante los últimos años de trabajo de ANTEL ya estábamos estudiando las asignaturas de la Licenciatura en Matemática y dando los exámenes.

Después de la llegada de Lewowicz y de su curso de Introducción a los Sistemas Dinámicos, el factor más importante para mi decisión de dedicarme a los sistemas dinámicos fue el provocado por los cursos de Mañé en Montevideo. Mañé nos daba cursos cortos en diciembre cuando venía a visitar a su familia. Eran cursos de doctorado del IMPA. Nos introdujo a la teoría ergódica, dando un curso de transformaciones expansoras con la demostración del teorema de Ruelle. Casi siempre preguntaba ese tema en los exámenes de calificación del IMPA. Y los apuntes, escritos de puño y letra por Mañé, fueron muy inspiradores. Se volvieron un *best seller* entre los estudiantes del IMPA de la primera mitad de la década de 1990. Nos pedían prestados los apuntes de Mañé para fotocopiarlos, ya que de otra forma solo se podía estudiar el tema en los artículos originales, que eran muy difíciles de entender. Pero cuando Mañé nos lo enseñó en su curso en Montevideo en la segunda mitad de la década de 1980, nos entusias mó mucho, fue clarísimo, y disfrutable, a pesar de que recién estábamos por la mitad de la carrera de la licenciatura.

El tercer factor (primero, segundo y tercero en orden cronológico) fue nuestra ida al ICTP de Trieste en 1988. Fuimos a la Escuela de Sistemas Dinámicos y después al Workshop de Sistemas Dinámicos. Pudimos ir gracias a la recomendación de Lewowicz, que no sé cómo hizo para que nos aceptaran, porque solo éramos estudiantes de grado.

En Trieste hicimos tres cursos. Fueron muy intensos. Uno de Palis, sobre sistemas dinámicos. Zezé [María José Pacífico] daba las clases prácticas. A Palis ya lo conocíamos de una visita que había hecho él al IMERL (por ese entonces, IME). A Zezé la conocimos en esa oportunidad en Trieste. Estaba con Laurita, bebé de pocos meses de edad (la hija de Jacob y Zezé). El segundo curso que hicimos fue con Mañé sobre Teoría Ergódica. Recién acababa de escribir su libro, y ese curso fue magnífico. Viana, que por ese entonces era estudiante de doctorado del IMPA, daba las clases prácticas del curso de Mañé. Fue ahí donde conocimos a Marcelo Viana.

Hubo una cuarta motivación (cuarta en orden cronológico, pero no menos importante): conocer a Ruben Budelli y empezar a trabajar con él en 1989.

Budelli vino un día, creo que de 1989 —no recuerdo bien—, al seminario de Sistemas Dinámicos que organizaba Lewowicz. No expuso nada, pero quería conversar sobre un problema matemático de dinámica que

le había surgido en sus investigaciones de redes de neuronas biológicas. Budelli sabía el lenguaje matemático y cómo plantear el problema a nosotros, que no sabíamos nada de biología. Además de médico y biólogo, había estudiado matemáticas en la Facultad de Ingeniería.

Heber y yo nos enganchamos con el problema y en un par de semanas le llevamos la solución matemática. Budelli escribió el artículo en lenguaje para neurocientíficos, que fue coautorado con Heber y yo, y un cuarto coautor biólogo que había estado estudiando el problema con Budelli desde el punto de la neurociencias. Finalmente fue publicado en 1991 cuando ya estábamos haciendo el doctorado en el IMPA.

En 1988 o a comienzos de 1989, no recuerdo bien, terminamos la licenciatura Budelli siguió visitando el IME frecuentemente. Me explicó, con maravillosa claridad y precisión, de neurociencias, y el origen de sus problemas matemáticos. Después de unos meses me planteó varias preguntas abiertas. Las estudié, resolví, y finalmente mis resultados fueron mi tesis de Maestría, defendida creo que en diciembre de 1989 (Heber, José *Pepe* Vieitez, yo y no recuerdo quiénes más fuimos la primera generación en recibirse de la Maestría en Matemática del PEDECIBA)

Budelli me presentó a José Segundo, quien era un destacado neurocientífico uruguayo, profesor emérito en Estados Unidos, muy reconocido e influyente en los ámbitos académicos de todo el mundo.

Tuve varias reuniones con Segundo, pero el lenguaje que él usaba, propio de las neurociencias, me resultaba muy extraño y difícil de traducir a la matemática.

Cuando me fui a Brasil, y ya estaba haciendo el Doctorado en Matemática Pura en el IMPA, Segundo me mandó una invitación, que agradecí pero rechacé, para ir a Japón cuatro años a hacer doctorado en neurociencias. Creo que Segundo se había equivocado. Yo no estaba capacitada para investigar en neurociencias, sino solo en la matemática que podía quizás ayudar a resolver problemas de las neurociencias, si había alguien, como Budelli, capaz de hacer la traducción en un sentido y en el otro. Pero Budelli era único. No encontré en todas mis incursiones posteriores en la biomatemática a nadie capaz de hacer esa traducción como lo hacía Budelli.

Desde que me fui al IMPA en 1991, abandoné los problemas de Neurodinámica, hasta 2005, cuando los retomé. Y trabajé desde 2005 hasta 2017, en paralelo en matemática pura y en los problemas matemáticos de la neurociencias, cuando tratan de sistemas dinámicos (Eleonora Catsigeras. Montevideo, 16-18 de marzo de 2024).



## PANTALLAZOS

ESTUDIO DE LA CONJETURA DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA GLOBAL  
(AIZERMAN- KALMAN)

En la revista europea de resúmenes *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, 0040.1960 aparece un resumen del trabajo de M. A. Ajzerman: Über ein Problem, betreffend die Stabilität 'im Grossen' dynamischeer systeme. Lamberto Cesari, autor del resumen escribió: «La teoría de la regulación automática de sistemas dinámicos se relaciona con la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales [...] El autor indica unos resultados sugeridos por una serie de ejemplos, a pesar de que aún no se ha llegado a ninguna prueba matemática». La conjetura de Kalman es una versión más fuerte de la Aizerman y un caso especial de la conjetura de Markus-Yamabe.

Este problema, de enunciado sencillo, fue el primero planteado por Massera a Lewowicz. Este no avanzó en su resolución, pero manifestó que en el intento, maduró mucho en su experiencia de investigación. Poco después Massera le planteó otro problema más accesible cuya resolución dio lugar al primer trabajo publicado de Lewowicz [Lew59].

El problema fue parcialmente resuelto por Carlos Gutiérrez (Ayacucho, Perú, 1944-2008, São Carlos, Brasil) *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* Volume 12, Issue 6, November–December 1995, Pages 627-671 A solution to the bidimensional Global Asymptotic Stability Conjecture.

Trabajo completo en <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0294144916301470>

En Uruguay, ahora a propuesta de Jorge Lewowicz, el asunto fue retomado por Ezequiel Maderna:

yo logré un avance parcial en 1992, pero descubrí que a ese mismo avance habían llegado poco tiempo atrás Gasul Llibre y Sotomayor, por lo cual no dio para publicar nada. Y la solución sin hipótesis adicionales por Gutiérrez apareció en mayo de 1993 cerrando el asunto, al menos para mí. Pero es muy interesante que ese problema me llevó diez años más tarde a estudiar desde 2011 otro problema de estabilidad de puntos de equilibrio: el recíproco del teorema de Lagrange que dice que en un sistema mecánico, los mínimos de la energía potencial engendran equilibrios estables. Sigue abierto para potenciales analíticos (hay contraejemplos

no analíticos) en dimensión mayor a dos. Este trabajo finalmente dio frutos (JM Burgos, E Maderna, M Paternain: *On the Lyapunov instability in Newtonian dynamics*. *Nonlinearity* 34 (2021), 6719-6726)

RICARDO MAÑÉ Y ROBERTO MARKARIAN

Roberto Markarian nació el 12 de diciembre de 1946, y Ricardo Mañé el 14 de enero de 1948. Ingresaron a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República en 1964 y 1967, respectivamente.

A finales de los sesenta, actuaron en posiciones diametralmente opuestas en el Centro de Estudiantes de Ingeniería y Agrimensura (CEIA), en el que Markarian ocupó importantes cargos directivos. Las discrepancias más importantes eran en relación con la situación política tanto nacional como mundial. Continuaron durante gran parte del período de la dictadura uruguaya (1973-1985).

Habiendo estudiado con Jorge Lewowicz en Montevideo, Mañé fue invitado por Jacob Palis en 1971 a estudiar en IMPA, Río de Janeiro, donde se doctoró en 1973; pasó a ocupar un lugar prominente en el Grupo de Sistemas Dinámicos del IMPA. Terminada la dictadura, desde 1987, Mañé dictó varios cursos en Montevideo y Markarian comenzó a viajar regularmente a Río de Janeiro. Desde ese entonces (Mañé había fallecido en 1995) mantuvieron una relación amistosa, en particular en las veladas organizadas en la residencia carioca de Jacob Palis y María José Pacífico, Zezé.

El libro *Introdução à Teoria Ergódica* (Proyecto Euclides, 1ra Ed. 1983; traducido y en parte corregido como *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer, 1987) tiene secciones dedicadas a la teoría ergódica de billares, tema sobre el que versaban las investigaciones de Markarian. El libro está dedicado, entre otros, a Zezé, quien llevaba los asuntos domésticos de Mañé.

Mañé formó parte, en febrero de 1990, del tribunal que evaluó la tesis de doctorado de Markarian, integrado además por Jacob Palis (orientador), Wellington de Melo, Rafael Labarca y Jorge Lewowicz.

Biografía de ricrdo mañé con muchas opiniones de colegas: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mane/>

On Ricardo Mañé by Ricardo Mañé: Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática 29 (1) (1998), ii-vi. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Mane\\_auto/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Mane_auto/)

#### «LO QUE ESTÁ AL LADO DE ANOSOV»

Alrededor de 1997, Lewowicz les planteó a sus alumnos un problema abierto sobre el comportamiento de ciertos difeomorfismos con tangencias en el borde de Anosov, los que están «al lado de Anosov». Eleonora Catsigeras narra así una anécdota que puede ser considerada jocosa o típica de comportamientos entre matemáticos:

En 1997 o cerca de ese año —no recuerdo bien—, fui a un *workshop* de sistemas dinámicos en el IMPA. Cuando llegué al edificio del IMPA, había mucha gente, muchos matemáticos en el patio. Faltaban dos horas para que empezaran las conferencias. Veo a Palis llamándome con la mano entre la multitud para que me acercara. Estaba con Anosov. Pensé, ingenua yo, que quería presentarme a Anosov. Pero no. No me presentó a Anosov. Solo me dijo, en inglés, que lo llevara al Jardín Botánico, que Anosov quería visitarlo. Le di la mano a Anosov, le dije mi nombre y, como una perfecta guía turística, lo invité a seguirme.

Me llenó de emoción darme cuenta de que tendría a Anosov para mí sola durante dos horas. Y pensé que era un desperdicio no hablar de matemática con él. Pero nunca me animé, por temor a *meter la pata*, a hablar de matemática en los encuentros sociales con grandes matemáticos.

Así que con mi mayor gusto lo llevé a Anosov a recorrer el Jardín Botánico de Río de Janeiro. Él era grande y corpulento y caminaba muy rápido. Yo tenía casi que correr a su lado. Además era muy callado. No decía palabra alguna. Y yo tampoco.

Al llegar al Jardín Botánico compré las dos entradas. Él no hizo gesto de pagar la suya y no dijo gracias después que las hubiera comprado.

Durante la recorrida del parque, siempre caminando a velocidad máxima, me animé a decirle que yo había sido estudiante de Palis y que me había doctorado dos años antes. Y le conté un poquito sobre el tema de mi tesis. Creo que hasta ese momento él pensaba que yo era una empleada del IMPA. Él seguía calladito. Finalmente, creo que más por cortesía que por interés, me preguntó en qué estaba trabajando ahora. En los sistemas al lado de Anosov, le respondí. Y agregué «Como yo ahora».

En los enlaces encontrarán una muestra de la expectativa de algunos jóvenes por estudiar matemática poco después del fin de la dictadura. Eran años previos a que Eleonora Catsigeras y Heber Enrich dejaran de trabajar en ANTEL y UTE, respectivamente, y dedicarse a la matemática:

[https://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/Divulgacion/2017\\_LewowiczSalioAlPasillo.pdf](https://www.fing.edu.uy/~eleonora/Recopilacion/Archivos/Divulgacion/2017_LewowiczSalioAlPasillo.pdf)

<https://www.fing.edu.uy/biblioteca/bibliografias/568568.pdf>

#### BILLARES EN URUGUAY

La teoría matemática de billares caóticos a los que Roberto Markarian dedicó gran parte de su actividad de investigación era una temática exótica en América Latina en los años ochenta. Jorge Lewowicz fue un notorio especialista en el uso de funciones de Liapunov para estudiar fenómenos desordenados. José Luis Massera las había usado para estudiar fenómenos estables, ordenados. La posibilidad de aplicar funciones y formas cuadráticas de Liapunov para estudiar fenómenos caóticos desde el punto de vista probabilístico, en particular los modelos de billares derivados de la teoría de gases, había sido planteada por Anatoli Katok a Jorge Lewowicz a inicios de los ochenta.

Poco después de que Markarian volviera a la actividad matemática en 1984 (había estado en prisión entre inicios de 1976 y finales de 1982) y debía fijar tema para su tesis de maestría en la Universidad Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS), bajo la orientación de Artur Lopes. Lewowicz —quien en esa época estaba retornando a Uruguay— le sugirió estudiar formas cuadráticas de Liapunov para probar propiedades caóticas (exponentes de Liapunov no nulos) en sistemas diferenciables con singularidades. Estos temas fueron desarrollados por Markarian en sus tesis de maestría y de doctorado, defendidas en diciembre de 1986 y en febrero de 1991, respectivamente.

Un comentario en cierta medida jocoso es que luego del XVI Coloquio Brasileiro de Matemática (julio de 1987, IMPA) se realizó un II Coloquio de Sistemas Dinámicos (agosto de 1987, Universidade Federal de Río de Janeiro). En esta última Jacob Sinai dio una conferencia sobre teoría ergódica de billares —área, entre muchas otras, en que realizó y promovió trabajos seminales—. En ella elogió un trabajo de Roberto Markarian (basado en su tesis de maestría, que aparecería luego en *Communications*

*in Mathematical Physics*, 118 en 1988). Poco después de la conferencia preguntaron a Palis —orientador de la tesis de doctorado de Markarian— si podría no aceptarla cuando Sinai ya lo había declarado doctor.

En ese período, Armenia era una república de la URSS, y había quienes pensaban que Markarian (de apellido armenio) debía ser también de la escuela moscovita de Sinai.





En la portada se reproduce una imagen del llamado «Atractor de Lorenz». Otra representación del atractor, en blanco y negro, figura al comienzo del capítulo 5 (*La matemática del caos y otros caos*) de *La dimensión humana de la matemática* (Estuario editora, 2025). Sirva esta repetición como una muestra gráfica de la continuidad de este libro con aquel. Se trata de algunas trayectorias que resultan de resolver la llamada ecuación de Lorenz, explicada con más detalle en el mencionado capítulo de aquel libro. Cada línea en esta imagen es una curva solución del sistema, las que se acumulan en una extraña figura que recuerda las alas de una mariposa. El atractor es un objeto que vive en el espacio de tres dimensiones y la perspectiva de esta figura es distinta a la de la figura del libro anterior: aquí se le ve de frente y en la anterior el atractor es visto de perfil. Las líneas que atraviesan en diferentes sentidos son otras trayectorias que aún no han llegado cerca del atractor. Ambas figuras fueron realizadas con procedimientos computacionales por el colega Aubin Arroyo, de la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a quien mucho agradezco esta colaboración.

R. M.

