

# Expresión analítica aproximada de la curva $S_q(R)$ del balístico y su aplicación a algunas medidas rápidas

BR. DELIA MAGGIOLO DE GERSZONOWICZ Y PROF. S. GERSZONOWICZ

## Variación teórica de la sensibilidad del balístico en función de la resistencia de su circuito.

Sea  $S_i = \frac{\Theta}{I}$  la sensibilidad en intensidad,  $w_o = \frac{2\pi}{T_o}$  la pulsación propia,  $\alpha = \frac{b}{w_o} = \frac{A}{2\sqrt{KC}}$  el grado de amortiguamiento del aparato; cualquiera que sea el amortiguamiento, la sensibilidad en cantidad de electricidad está dada por la relación

$$S_q = S_i w_o e^{-bt_1} = S_i w_o e^{-\alpha\tau_1} = S_{q id} e^{-\alpha\tau_1} \quad (1)$$

haciendo

$$\tau_1 = w_o t_1 = 2\pi \frac{t_1}{T_o} \quad (2)$$

en que  $t_1$  es el tiempo que emplea el órgano móvil en alcanzar su primera elongación, y  $S_{q id} = S_i w_o$ . Explicitemos (1):

$$\alpha > 1 \text{ (movimiento aperiódico):} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} \\ S_q = S_{q id} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}} \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\alpha = 1 \text{ (movimiento aperiódico crítico)} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = 1 \\ S_q = S_{q id} \frac{1}{e} \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\alpha < 1 \text{ (movimiento periódico amortiguado)} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \\ S_q = S_{q id} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}} \end{array} \right. \quad (1c)$$

$$\alpha = 0 \text{ (movimiento no amortiguado: caso teórico)} \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{\pi}{2} \\ S_q = S_{q id} \end{array} \right. \quad (1d)$$

Las fórmulas (1a) a (1c) permiten trazar la curva  $S_q(\alpha)$  de la sensibilidad en cantidad de electricidad en función del grado de amortiguamiento (fig. 1). Es evidente que esta curva no es susceptible de determinación práctica más que entre

$\alpha = \alpha_o$  (galvanómetro en circuito abierto) y  $\alpha = \alpha_{co}$  (galvanómetro en corto circuito).

Es fácil pasar de  $S_q(\alpha)$  a  $S_q(R)$ . En efecto

$$\alpha = \alpha_o + \frac{\Phi_o^2}{2\sqrt{KC}} \cdot \frac{1}{R} \quad (3)$$

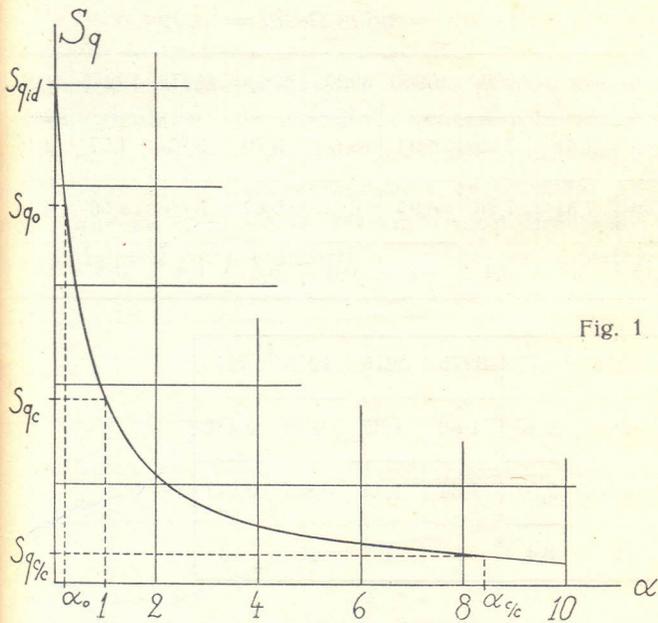


Fig. 1

fórmula que para un aparato dado hace corresponder un valor de  $\alpha$  perfectamente determinado

- a) para  $R = 0, \alpha = \infty, S_q = 0$  (caso teórico del galvanómetro de resistencia interior nula en corto circuito).
- b) para  $R = R_c, \alpha = 1, S_q = \frac{S_{q id}}{e} - \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\alpha_0^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0} = S_{q_0}$
- c) para  $R = \infty S_q = S_{q id} e$

La ecuación de la hipérbola

$$S_q = \frac{a R + b}{R + c} \tag{4}$$

se escribe, teniendo en cuenta las anteriores condiciones

$$S_q = S_{q_0} \frac{R}{R + m R_c} \tag{5}$$

en que

$$m = e \left( 1 - \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\alpha_0^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0} - 1 \right) \tag{6}$$

o sea, introduciendo el decremento  $\lambda_0$  (se supuso periódico el movimiento en circuito abierto):

$$m = e \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda_0} - 1 \right) \tag{6a}$$

Verificación experimental de la relación (5)

Se han hecho ensayos sobre dos galvanómetros de características muy diferentes:

a cada valor de  $R$ . La figura 9 nos muestra el aspecto de  $S_q (R)$ ; además los puntos de las figuras 2 y 3 definen  $S_q (R)$ , determinada experimentalmente para dos galvanómetros del Laboratorio de Medidas Eléctricas del Instituto de Electrotécnica de Montevideo. La curva  $S_q (R)$  es continua; de acuerdo con lo dicho su determinación experimental se limita al intervalo comprendido entre  $R = R_g (\alpha = \alpha_{oc}, \text{galvanómetro en corto circuito})$  y  $R = \infty (\alpha = \alpha_o, \text{galvanómetro en circuito abierto})$ .

Las relaciones (1a) a (1c) permiten, cuando no se dispone de la curva  $S_q (R)$ , determinar la relación de las sensibilidades  $S_q$  relativas a dos valores distintos de  $R$ , a condición de determinar  $\alpha$  en los dos casos.

Expresión analítica aproximada de  $S_q (R)$ .

El problema se simplifica considerablemente si se asimila  $S_q (R)$  a un arco de hipérbola sujeto a las siguientes condiciones:

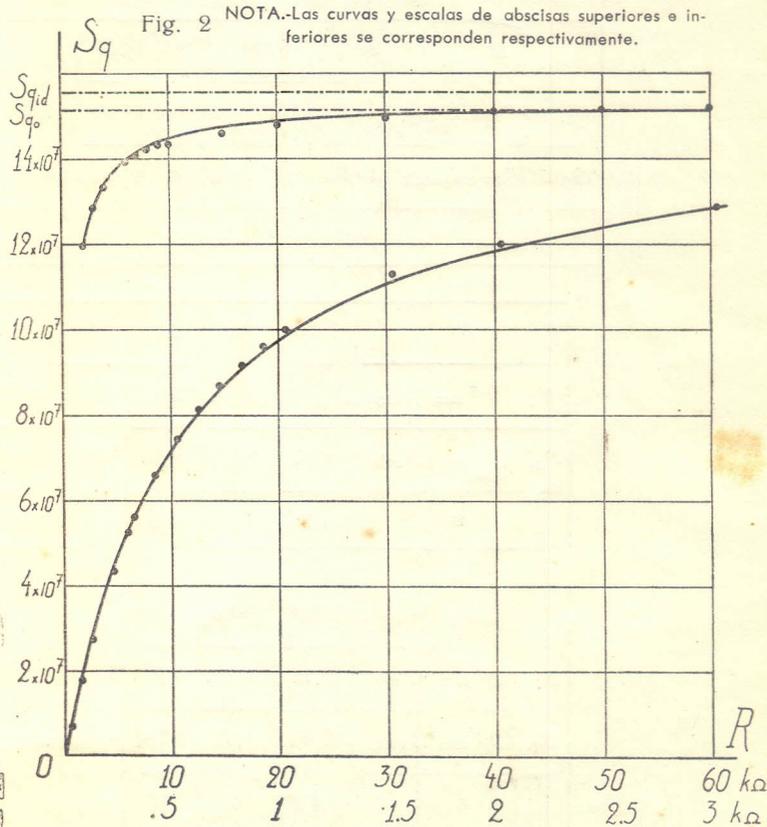


Fig. 2 NOTA.-Las curvas y escalas de abscisas superiores e inferiores se corresponden respectivamente.

1)  $T_o = 10,8 \text{ seg.}; R_g = 275 \Omega; S_i = 18,8 \times 10^8 \text{ mm/A}; R_c = 9640 \Omega; \lambda_o = 0,425.$

| $R$                               | $\infty$ | $10^6$ | 250300 | 100300 | 90300 | 80300 | 70300 | 60300 | 50300 | 40300 | 30300 | 20300 | 15275 | 12275 | 10275 |
|-----------------------------------|----------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_q. 10^{-8} \text{ mm/C exp.}$  | 9,00     | 8,85   | 8,62   | 8,06   | 7,97  | 7,86  | 7,68  | 7,51  | 7,29  | 6,94  | 6,50  | 5,70  | 5,07  | 4,57  | 4,16  |
| $S_q. 10^{-8} \text{ mm/C calc.}$ | 9,00     | 8,90   | 8,59   | 8,02   | 7,95  | 7,84  | 7,69  | 7,51  | 7,26  | 6,95  | 6,46  | 5,67  | 5,05  | 4,56  | 4,16  |
| $\varepsilon$                     | 0        | 0,55   | 0,35   | 0,4    | 0,25  | 0,25  | 0,15  | 0     | 0,4   | 0,2   | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,2   | 0     |

| $R$                               | 9275 | 8275 | 7275 | 6275 | 5275 | 4275 | 3275 | 2275 | 1275  | 775   |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| $S_q. 10^{-8} \text{ mm/C exp.}$  | 3,93 | 3,67 | 3,36 | 3,04 | 2,70 | 2,30 | 1,86 | 1,35 | 0,79  | 0,488 |
| $S_q. 10^{-8} \text{ mm/C calc.}$ | 3,94 | 3,69 | 3,41 | 3,10 | 2,75 | 2,38 | 1,94 | 1,44 | 0,867 | 0,547 |
| $\varepsilon$                     | 0,3  | 0,6  | 1,6  | 2    | 2    | 3,4  | 4    | 6    | 10    | 13    |

2)  $T_o = 21,05 \text{ seg.}; R_g = 14,2 \Omega; S_i = 5,35 \times 10^8 \text{ mm/A}; R_c = 348 \Omega; \lambda_o = 0,0804.$

| $R$                               | $\infty$ | 1.000.000 | 200.000 | 100000 | 90000 | 80000 | 70000 | 60000 | 50000 | 40000 | 30030 |
|-----------------------------------|----------|-----------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C exp.}$  | 15,30    | 15,29     | 15,28   | 15,28  | 15,28 | 15,25 | 15,21 | 15,19 | 15,14 | 15,10 | 14,96 |
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C calc.}$ | 15,30    | 15,29     | 15,25   | 15,20  | 15,18 | 15,16 | 15,14 | 15,12 | 15,10 | 15,06 | 15,01 |
| $\varepsilon$                     | 0        | 0         | 0,2     | 0,5    | 0,7   | 0,6   | 0,5   | 0,5   | 0,25  | 0,25  | 0,4   |

| $R$                               | 20030 | 15030 | 10030 | 9030  | 8030  | 7030  | 6030  | 5030  | 4030  | 3030  | 2030  | 1530  |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C exp.}$  | 14,78 | 14,60 | 14,35 | 14,30 | 14,22 | 14,07 | 13,93 | 13,75 | 13,34 | 12,86 | 12,00 | 11,30 |
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C calc.}$ | 14,89 | 14,74 | 14,48 | 14,39 | 14,30 | 14,16 | 13,99 | 13,74 | 13,41 | 12,88 | 11,97 | 11,17 |
| $\varepsilon$                     | 0,7   | 1     | 0,9   | 0,6   | 0,6   | 0,6   | 0,4   | 0,1   | 0,5   | 0,15  | 0,25  | 1,1   |

| $R$                               | 1030  | 930  | 830  | 730  | 630  | 530  | 430  | 350  | 330  | 300  | 230  |
|-----------------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C exp.}$  | 10,00 | 9,62 | 9,16 | 8,70 | 8,14 | 7,44 | 6,58 | 5,83 | 5,60 | 5,25 | 4,35 |
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C calc.}$ | 9,87  | 9,50 | 9,10 | 8,61 | 8,05 | 7,40 | 6,59 | 5,84 | 5,62 | 5,29 | 4,42 |
| $\varepsilon$                     | 1,3   | 1,3  | 0,5  | 1    | 1    | 0,5  | 0,2  | 0,2  | 0,4  | 0,8  | 1,7  |

| $R$                               | 130,6 | 80,6 | 30,6  |
|-----------------------------------|-------|------|-------|
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C exp.}$  | 2,75  | 1,79 | 0,705 |
| $S_q. 10^{-7} \text{ mm/C calc.}$ | 2,86  | 1,91 | 0,784 |
| $\varepsilon$                     | 4     | 6    | 10    |

NOTA.  $\varepsilon = \left| \frac{S_q. \text{ exp.} - S_q. \text{ calc.}}{S_q. \text{ exp.}} \right|$

Las curvas de las figuras 2 y 3 han sido trazadas según la fórmula (5); los puntos han sido determinados experimentalmente. Se ve que la sensibilidad calculada y la medida concuerdan perfectamente en tanto que no se desciende demasiado por debajo de la resistencia crítica; es de notar en efecto que el error en la determinación directa de la sensibilidad de un balístico nunca es inferior

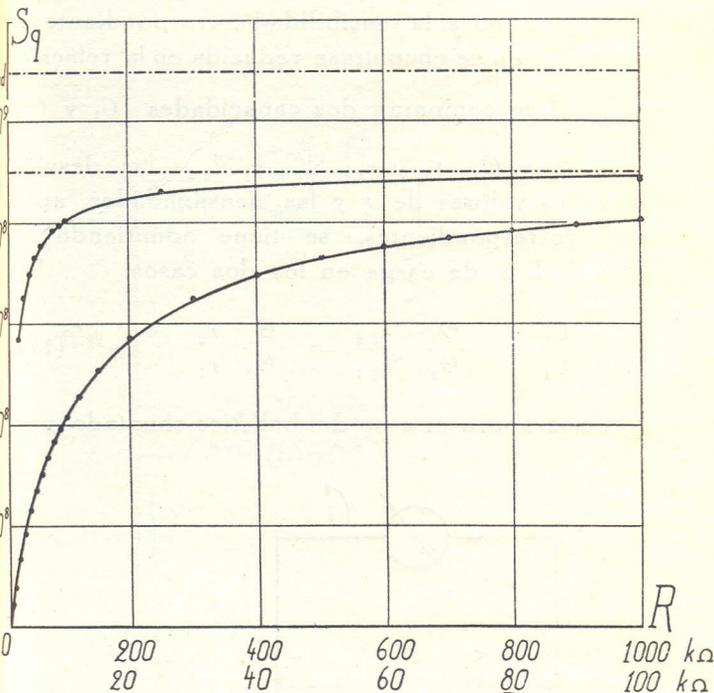


Fig. 3. NOTA. - Las curvas e escalas de abscisas superiores e inferiores se corresponden respectivamente.

a 0,5—1 %, y vemos que el error obtenido con la fórmula es del mismo orden, salvo en la vecindad del corto-circuito en cuyo caso llega al 10 %, pero aún este valor excepcionalmente alto es admisible en ciertas medidas en que solo interesa el orden de magnitud.

La aplicación de la fórmula (5) es cómoda porque  $S_{q0}$ ,  $R_c$  y  $R_g$ , que forma parte de  $R$ , en general se conocen; cuando no se les ha determinado previamente se pueden utilizar los datos suministrados por el fabricante, aunque su precisión no es siempre todo lo buena que debería ser. El único inconveniente es el término  $m$ , cuyo cálculo exige el conocimiento de  $\lambda_0$ . Es cierto que a menudo  $\lambda_0$  es lo suficientemente pequeño como para hacer

$$e^{-\frac{\lambda_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda_0}} \cong 1 - \frac{\lambda_0}{2}$$

o sea

$$m = e \left( 1 - \frac{\lambda_0}{2} \right) - 1 = 1,73 - 1,36 \lambda_0 \quad (7)$$

Ahora bien: en las medidas en que solo interesa el orden de magnitud bastaría hacer simplemente  $m = 1,73$ . La fórmula (5) toma entonces la forma de aplicación muy rápida

$$S_q = S_{q0} \frac{R}{R + 1,73 R_c} \quad (8)$$

Un error  $\frac{\Delta m}{m}$  sobre  $m$  produce sobre  $S_q$  un error

$$\frac{\Delta S_q}{S_q} = \frac{\Delta m}{m} \frac{m R_c}{R + m R_c} \cong \frac{\Delta m}{m} \frac{1}{\frac{R}{1,73 R_c} + 1} \quad (9)$$

que es inferior a  $\frac{\Delta m}{m}$ ; tomando  $m = 1,73$ ,  $\frac{\Delta m}{m}$  llega p. ej. al 10 % si  $\lambda_0 = 0,126$ .

Del mismo modo p. ej., un error  $\frac{\Delta R_c}{R_c}$  sobre  $R_c$  se traduce por

$$\frac{\Delta S_q}{S_q} = \frac{\Delta R_c}{R_c} \frac{m R_c}{R + m R_c}$$

de manera que podemos darnos cuenta de la aproximación obtenida utilizando (8) con valores aproximados.

**APLICACIONES.**

Analicemos el caso frecuente en que se busca reducir la sensibilidad del galvanómetro por inserción de resistencias.

1) **Comparación de capacidades.**

a) *Resistencia en serie con el galvanómetro.* — (fig. 4) No presenta interés porque toda la carga del condensador sigue atravesando el balístico,

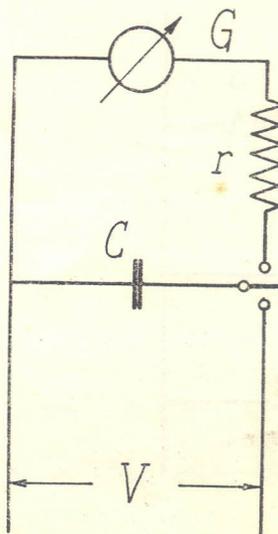


Fig. 4.

cuyo amortiguamiento es siempre el mismo, a saber el de circuito abierto. Solamente se modifica la ley de la descarga. La constante de tiempo aumenta con la resistencia; se deduce que la sensibilidad disminuye solo cuando esta resistencia es lo suficientemente grande como para que no se pueda admitir la descarga terminada en el momento en que empieza el movimiento. Observemos

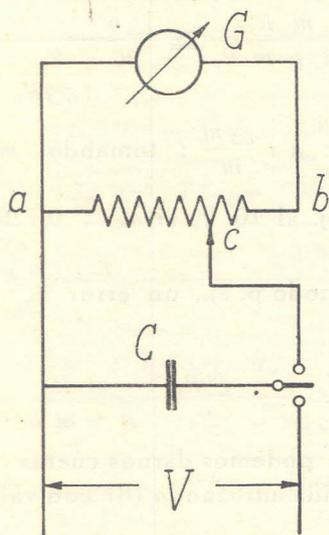


Fig. 5

de paso que esta disminución de sensibilidad se determina sin dificultad.

b) Resistencia en paralelo con el galvanómetro. — Hay que distinguir entre un shunt universal y uno común. En el caso del shunt universal (fig. 5) el amortiguamiento del balístico es siempre el mismo, y, siendo  $r$  la parte del shunt entre los bornes  $a$  y  $c$  que van al condensador,  $s$  la resistencia total del shunt entre  $a$  y  $b$ ,  $R_g$  la resistencia del

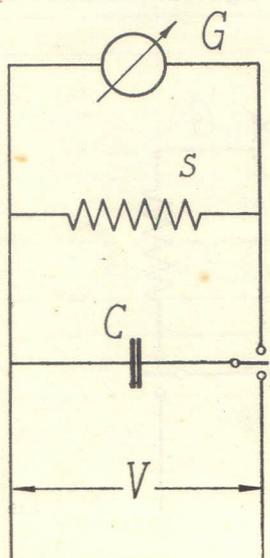


Fig. 6

galvanómetro,  $Q$  la carga del condensador y  $\theta$  la elongación

$$\theta = S_q Q \frac{r}{s + R_g} = S_q Q \frac{r}{R}$$

haciendo  $s + R_g = R$ , o sea

$$\frac{\theta}{Q} = S'_q = S_q \frac{r}{R} \tag{10}$$

todo pasa como si la sensibilidad correspondiente a la resistencia  $R$  se encontrase reducida en la relación  $\frac{r}{R}$ , y si se comparan dos capacidades  $C_1$  y  $C_2$ ,

siendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ,  $r_1$  y  $r_2$ ,  $S'_{q1}$  y  $S'_{q2}$  las desviaciones, los valores de  $r$  y las sensibilidades aparentes correspondientes, se tiene admitiendo la misma d. d. p. de carga en los dos casos

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{S'_{q2}}{S'_{q1}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{r_2}{r_1} \tag{11}$$

Veamos ahora el caso del balístico shuntado por

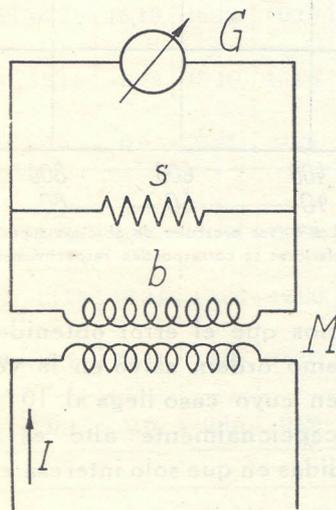


Fig. 7

una resistencia simple (fig. 6). La cantidad de electricidad que pasa por el balístico shuntado es

$$q = Q \frac{s}{R}$$

en lugar de  $q = Q$  en el caso en que no hubiese shunt. Por otra parte la elongación disminuirá por el hecho de que el amortiguamiento del galvanómetro se encuentra aumentado; sea  $S_{q0}$  la sensibilidad en circuito abierto,  $S_q$  la del balístico shuntado; resulta.

$$\theta = S_q \frac{s}{R} Q \tag{12}$$

todo pasa como si el aparato tuviese una sensibilidad aparente

$$S'_q = S_q \frac{s}{R} = S_{q0} \frac{S_q}{S_{q0}} \frac{s}{R} \quad (13)$$

según (5)

$$\frac{S_q}{S_{q0}} = \frac{R}{R + m R_c}$$

luego

$$S'_q = S_{q0} \frac{s}{R + m R_c} = S_{q0} \frac{s}{s + R_g + m R_c} \quad (14)$$

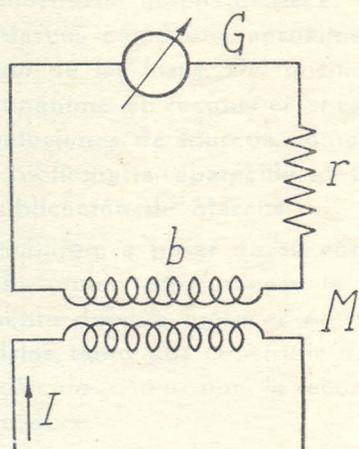


Fig. 8

Si se comparan  $C_1$  y  $C_2$ , el primero descargado en un balístico shuntado y el segundo en un balístico no shuntado, se tendrá, siendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  las desviaciones correspondientes

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \frac{S'_{q2}}{S'_{q1}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{R_g + s + m R_c}{s} \quad (15)$$

La relación puede dar buenos resultados si se

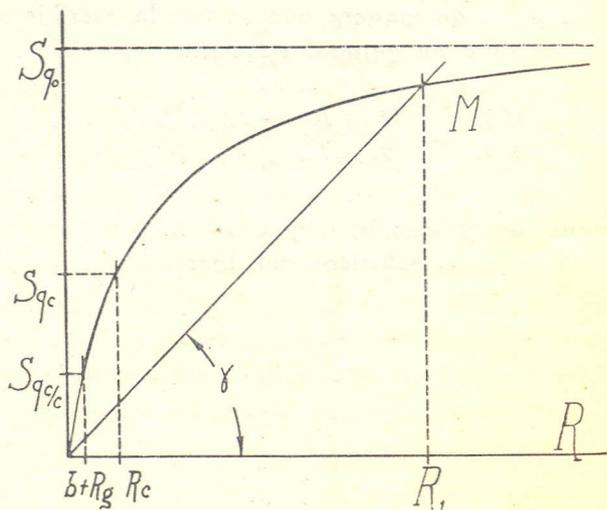


Fig. 9

conocen exactamente  $R_g$ ,  $R_c$  y  $m$ ; pero aún contentándose con los valores de  $R_g$  y  $R_c$  indicados por el fabricante, y haciendo  $m = 1,73$ , se obtiene una precisión suficiente en las medidas en que no se busca más que un valor aproximado.

2) Comparación de coeficientes de inducción mutua.

a) Shuntaje del balístico. (fig. 7). No es interesante; se puede ver fácilmente que la disminución de la sensibilidad aparente es algo importante solo si el valor del shunt es muy pequeño; el galvanómetro está entonces muy fuertemente amortiguado; además la resistencia de contactos y conexiones es apreciable con respecto a la del shunt. No estudiaremos este caso cuya discusión se haría por otra parte sin dificultad.

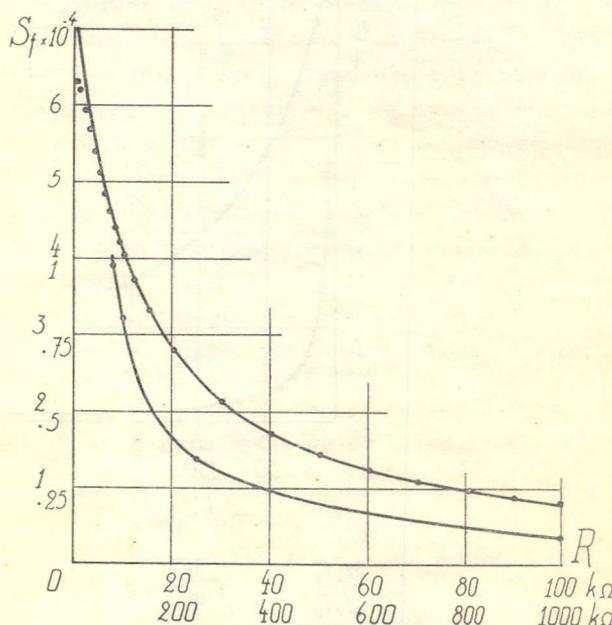


Fig. 10 NOTA. - Las curvas y escalas superiores e inferiores se corresponden respectivamente.

b) Resistencia en serie. (fig. 8). Sea  $R = b + r + R_g$  la resistencia del circuito; la elongación del balístico relativa a una variación  $\Delta\Psi$  del flujo es

$$\theta = S_q Q = S_q \frac{\Delta\Psi}{R} = S_f \Delta\Psi \quad (16)$$

introduciendo la sensibilidad en flujo

$$S_f = \frac{\theta}{\Delta\Psi} = \frac{S_q}{R} \quad (17)$$

Consideremos la curva  $S_q(R)$ ; sea  $M$  un punto de la curva relativo a la resistencia  $R$  del circuito, y unamos  $M$  al origen (fig. 9). El coeficiente

angular del rayo vector  $OM$  representa precisamente  $S_f$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{S_q}{R} = S_f \quad (18)$$

Se determina pues fácilmente  $S_f(R)$  a partir de  $S_q(R)$ ; en particular, aplicando (5)

$$S_f = \frac{S_q}{R} = \frac{S_{q0}}{R} \cdot \frac{S_q}{S_{q0}} = \frac{S_{q0}}{R + m R_c} \quad (19)$$

Las curvas de las figuras 10 y 11 representan

$S_f(R)$  trazadas según (19); los puntos han sido determinados experimentalmente; se ve que la concordancia es muy buena. La aplicación de (19) es inmediata; así si  $M_1, I_1, \Theta_1, R_1$  representan respectivamente los valores del coeficiente de inducción mútua, de la corriente primaria, de la elongación y de la resistencia total del circuito secundario en el primer ensayo, y  $M_2, I_2, \Theta_2, R_2$  los mismos valores en el segundo ensayo, resulta, suponiendo que se comparan  $M_1$  y  $M_2$  por interrupción de la corriente primaria en los dos casos:

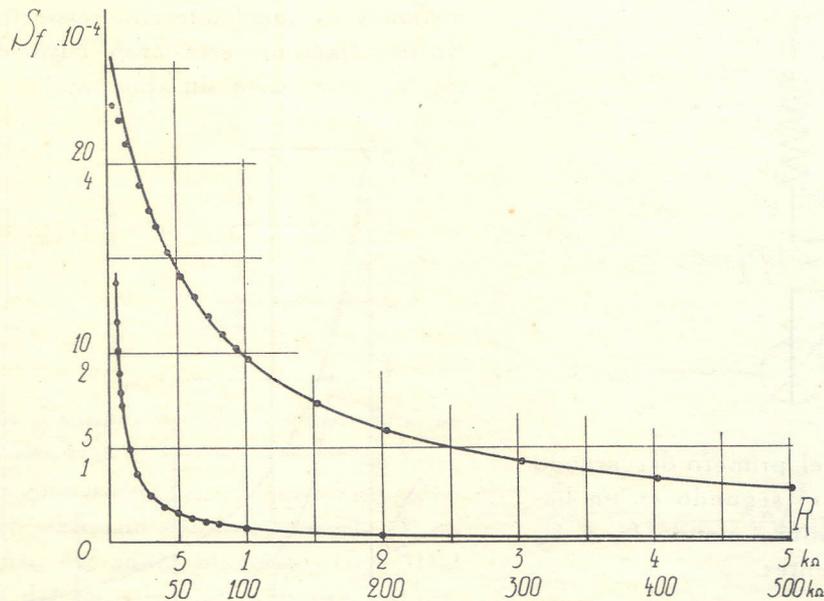


Fig. 11

NOTA.—Las curvas y escalas superiores e inferiores se corresponden respectivamente.

$$\frac{M_1 I_1}{M_2 I_2} = \frac{\Delta \Psi_1}{\Delta \Psi_2} = \frac{\Theta_1}{S_{f1}} \cdot \frac{S_{f2}}{\Theta_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{R_1 + m R_c}{R_2 + m R_c} \quad (20)$$

Un error de  $p$  % sobre  $m R_c$  trae como consecuencia un error de

$$p \cdot \left[ \frac{m R_c (R_2 - R_1)}{(R_1 + m R_c) (R_2 + m R_c)} \right] \%$$

sobre la relación  $\frac{\Delta \Psi_1}{\Delta \Psi_2}$ , casi siempre muy infe-

rior a  $p$  %, de manera que se puede escribir con una exactitud en general suficiente

$$\frac{M_1 I_1}{M_2 I_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{R_1 + 1,73 R_c}{R_2 + 1,73 R_c} \quad (21)$$

fórmula de aplicación muy cómoda, en particular en los ensayos balísticos del hierro.