
BOLETIN
DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE
MONTEVIDEO



Profesores Titulares:

Ing. Civil	Amaro Aladino J. — Director del Instituto de Tecnología Industrial. Profesor de Tecnología Industrial II y de Instalaciones Industriales.
" "	Bentura Borgarelli Juan. — Profesor de Materiales de Construcción.
" "	Berta Carlos E. — Consejero, Profesor de Mecánica General.
" "	Buquet Lorenzo. — Profesor de Tecnología Industrial I.
" "	Buzzetti José L. — Profesor de Obras Marítimas y Fluviales.
Doctor	Coelli Antonio C. — Profesor de Legislación.
Ing. Civil	Coppetti Mario. — Profesor de Matemáticas (para Agrimensores).
" "	Costemalle Raúl. — Profesor de Economía Política y Administración.
" "	De Medina Félix. — Consejero, Director del Instituto de Máquinas, Profesor de Máquinas y de Resistencia de Materiales.
Agrimensor	Freire Lisandro J. — Profesor de Agrimensura Legal y Catastro.
Ing. Civil	Galli Celestino. — Profesor de Geometría Analítico-Proyectiva.
" "	García Vicente I. — Decano, Director del Instituto de Ensayo de Materiales y Profesor de Ensayo de Materiales.
Ing. Electric.	Gerszonowicz Segismundo. — Director del Instituto de Electrotécnica. "Ingeniero Clemente J. Vercesi" y Profesor de Electrotécnica.
Ing. Civil	Ginnatasio Luis. — Profesor de Ingeniería Sanitaria, de Higiene Industrial y de Procedimientos de Construcción.
" "	Hill Walter S. — Director del Instituto de Física y Profesor de Física.
Ing. Ind.	Laguardia Rafael. — Director del Instituto de Matemática y Estadística y Profesor de Análisis Matemático II.
Ing. Civil	Lúgaro Manuel E. — Profesor de Ferrocarriles.
" "	Maggi Agustín. — Consejero, Profesor de Caminos y de Puentes.
Ing. Ind.	Massera José L. — Profesor de Análisis Matemático I.
Quím. Ind.	Pastori Francisco. — Profesor de Química Industrial y de Análisis Industrial.
Ing. Civil	Pagani Julio. — Profesor de Topografía.
" "	Penadés Enrique. — Profesor de Hormigón Armado.
" "	Perelli Casaglia Osvaldo. — Profesor de Geodesia.
" "	Ramasso Juan M. — Profesor de Geometría Descriptiva.
" "	Ricaldoni Julio. — Consejero, Director del Instituto de Estática y Profesor de Estructuras Metálicas y de Madera.
" "	Stella Juan A. — Profesor de Hidráulica, de Instalaciones Hidro-eléctricas e Hidráulica Agrícola y de Ingeniería Edilicia.
" "	Terra Arocena Eduardo. — Profesor de Geología Técnica.
" "	Torrado Ponciano S. — Profesor de Cartografía.
Arquitecto	Vigouroux Rodolfo. — Profesor de Arquitectura de las Obras de Ingeniería.
Ing. Civil	Villar Germán E. — Director del Instituto de Química y Profesor de Química.



BOLETIN
DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA DE MONTEVIDEO

(PUBLICACION OFICIAL)

Director:

Prof. Ing. JULIO RICALDONI

SUMARIO:

	<u>Pág.</u>
Ing. Delia Maggiolo de Gerszonowicz: Sensibilidad del puente de Wheatstone	293
Prof. Ing. Felix de Medina: La madera como combustible industrial	310
Prof. Ing. Carlos E. Berta: Las funda- ciones del puente sobre el Río Negro en Paso del Puerto	374
Prof. Ing. Vicente I. García: Fatiga de los metales a la tracción por choque	389

FACULTAD DE INGENIERIA Y RAMAS ANEXAS

CERRITO 73 — MONTEVIDEO (URUGUAY)

Decano: Ingeniero Civil *Vicente I. Garcia*

Secretario: *Donato Chiacchio*

CONSEJO DIRECTIVO:

Presidente:	Profesor Ingeniero Civil	<i>Vicente I. Garcia</i>
Consejeros:	" " "	<i>Felix de Medina</i>
	" " "	<i>Julio Ricaldoni</i>
	" " "	<i>Agustin Maggi</i>
	" " "	<i>Carlos E. Berta</i>
	" " "	<i>Cayetano Carcavallo</i>
	" " "	<i>Gonzalo Garcia Otero</i>
	Ingeniero Industrial	<i>Luis A. Cagno</i>
	Agrimensor	<i>Germán Barbato</i>
"	<i>Alberto F. Castiglioni</i>	
Ingeniero Industrial	<i>Victor H. Campistrous</i>	

PROFESORES AD - HONOREM

Ingeniero Civil *Federico E. Capurro*

" " *Victor B. Sudriers*

" " *Eduardo Garcia de Zúñiga*

NOTAS

1. — La ordenación de los trabajos de este Boletín se hace de acuerdo con la fecha de entrega de los mismos.
2. — La Dirección no se hace responsable de los conceptos emitidos en este Boletín.

Sensibilidad del puente de Wheatstone

Ing. DELIA MAGGIOLO DE GERSZONOWICZ

I. — *Introducción.* Aunque existen numerosos estudios sobre el puente de Wheatstone, nos hemos decidido a publicar otro más a causa de que los datos que se encuentran en los libros de medidas eléctricas y en los artículos que hemos podido consultar sobre la sensibilidad de dicho puente son insuficientes; cuando no erróneos; la lectura de algunos trabajos recientes que resumen el tema ⁽¹⁾, en los que no figura el problema encarado como lo hacemos aquí, nos autoriza a pensar que este estudio es original.

Sabemos que al hacer la medida de una resistencia con un puente de Wheatstone el resultado está afectado de un error debido a que cuando creemos que el puente está en equilibrio pasa en realidad por la diagonal del galvanómetro una pequeña corriente que aquel es incapaz de revelar. Nos proponemos discutir ese error y encontrar como se deben elegir las resistencias de comparación y la d.d.p. aplicada al puente para realizar, en las condiciones que precisaremos en II, una medida con la mayor sensibilidad posible, es decir, para que, partiendo del puente en equilibrio, una variación ΔX de la resistencia a medir X produzca una desviación máxima del aparato de cero.

No queremos decir con esto que la elección de las resistencias deba hacerse siempre de acuerdo con las condiciones de ma-

(1) Por ejemplo: F. Wenner — Methods, apparatus and procedures for the comparison of precision standard resistors — Bureau of Standards Journal of Research, agosto 1940 — J. Krönert — Messbrücken und Kompensatoren — Oldenbourg, Berlin 1935.

yor sensibilidad. Aparte de que muchas veces esa sensibilidad no es necesaria, la medida posee un error propio inevitable, originado por los errores de calibración de las resistencias de comparación, y muy frecuentemente es inútil buscar un aumento de la sensibilidad del puente, que no se traducirá por una disminución sensible del error límite total.

Además las condiciones de mayor sensibilidad pueden imponernos la elección de alguna resistencia de comparación inconveniente por motivos prácticos, por ejemplo demasiado grande o demasiado pequeña, lo que trae como consecuencia que, si bien por un lado disminuimos el error de falta de sensibilidad, aumentamos por otro el error sobre X introduciendo nuevas causas. No insistimos sobre estas consideraciones, a pesar de su importancia fundamental, porque salen de los límites de este trabajo. Por supuesto ellas no disminuyen en nada el interés de este estudio, que es previo a la elección definitiva.

II. — *Planteo del problema.* La sensibilidad de una medida con un puente de Wheatstone depende de

a) sensibilidad en intensidad del galvanómetro utilizado como aparato de cero. Admitimos que el galvanómetro es siempre de cuadro móvil.

b) grado de amortiguamiento con que debe trabajar ese galvanómetro.

c) potencias que se pueden disipar en la resistencia a medir y en las resistencias de comparación.

En lo que respecta a la sensibilidad en intensidad del galvanómetro pueden presentarse dos casos: puede ser invariable o el galvanómetro puede poseer shunt magnético o cuadros intercambiables. Aquí nos limitaremos a estudiar el problema suponiendo que no se puede variar la sensibilidad del galvanómetro, es decir, estudiaremos las condiciones de máximo de la corriente i que pasa por el galvanómetro.

Durante mucho tiempo varios autores consideraron esencial que el galvanómetro trabajase en condiciones de amortiguamiento crítico. En realidad es posible trabajar perfectamente en condiciones bastante alejadas de las críticas, y por eso estudiaremos como varía la sensibilidad de la medida con el grado de amortiguamiento del galvanómetro.

Por último, en lo que se refiere a las potencias gastadas, su-

pondremos que la potencia límite de las resistencias de comparación no depende del valor de dichas resistencias, lo que a veces es sólo aproximado. El caso más general sería, por supuesto, aquel en que las potencias límites a gastar en las cuatro resistencias fueran distintas; pero, a nuestro entender, este caso carece de interés práctico. En realidad basta considerar los dos casos siguientes, que se presentan con frecuencia: 1.º medida de una resistencia que permite disipar una potencia Q , pudiéndose gastar en cada una de las otras tres resistencias del puente una misma potencia P . 2.º comparación entre sí de dos resistencias iguales que permiten disipar una potencia Q en cada una de ellas, pudiéndose gastar P en cada una de las otras dos resistencias del puente. Aquí trataremos solamente el primer caso; el estudio del segundo no presenta ninguna dificultad suplementaria.

Adoptaremos las siguientes notaciones: llamaremos X a la resistencia a medir y R , A y B a las resistencias de comparación, que están dispuestas como indica la fig. 1.

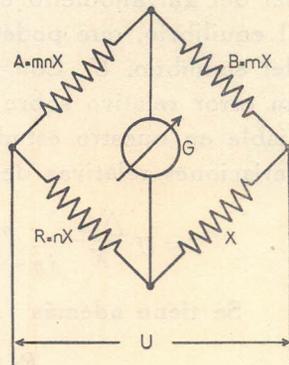


Fig. 1

En un estado de equilibrio dado las potencias gastadas en cada una de ellas serán P_X , P_R , P_A y P_B respectivamente. Llamaremos U a la d.d.p. aplicada en los bornes del puente en el momento del equilibrio, R_g a la resistencia interior del galvanómetro y R_t a la resistencia total del circuito del galvanómetro en el momento del equilibrio. Debemos además considerar la posibilidad de shuntar el galvanómetro con una resistencia S o agregarle en serie una resistencia T . En el apéndice demostraremos que en general no hay interés en shuntar ni en agregar resistencia en serie, de modo que en lo que sigue se supone $S = \infty$, $T = 0$.

Por comodidad de notación introduciremos los valores reducidos

$$\frac{R}{X} = \frac{A}{B} = n, \quad \frac{B}{X} = m, \quad \frac{R_t}{X} = r, \quad \frac{R_g}{X} = g$$

III. — Sensibilidad de la medida. La corriente que pasa por el galvanómetro cuando X varía en ΔX a partir de su valor de equilibrio (ΔX es la variación ficticia de X equivalente a la variación

real de la resistencia regulable) es, de acuerdo con el teorema de Thévenin

$$i = U' \frac{A/(A+B) - R/(R+X+\Delta X)}{R'_t}$$

donde R'_t es la resistencia del circuito del galvanómetro, después de alterado el equilibrio, con los puntos de alimentación en corto circuito, que podemos confundir con la resistencia del circuito en equilibrio, R_t , y U' es la d.d.p. aplicada al puente cuando la diagonal del galvanómetro está cerrada, también después de alterado el equilibrio, que podemos confundir con la d.d.p. en el momento del equilibrio, U . Con estas aproximaciones se puede escribir, con un error relativo sobre i menor que $\Delta X/X$, y por lo tanto despreciable en nuestro estudio, en el que sólo se consideran pequeñas variaciones relativas de X ,

$$i = U \frac{\Delta X}{X} \frac{n}{(n+1)^2} \frac{1}{R_t} = \sqrt{\frac{P_X}{X}} \frac{\Delta X}{X} \frac{n}{n+1} \frac{1}{r} \quad (1)$$

Se tiene además

$$R_t = R_g + \frac{AB}{A+B} + \frac{RX}{R+X}$$

que podemos escribir

$$\frac{R_t - R_g}{X} = r - g = \varrho = \frac{(m+1)n}{n+1} \quad (2)$$

llamando ϱ al valor reducido de la resistencia del puente visto desde los bornes de la diagonal del galvanómetro.

IV.— *Estudio de la sensibilidad máxima del puente con un galvanómetro dado y a grado de amortiguamiento dado.* Fijar el grado de amortiguamiento de un galvanómetro equivale a fijar R_t y por consiguiente ϱ . De modo que el problema de la obtención de la máxima sensibilidad en una medida consiste en la elección de los valores de P_X y n que hacen máximo i para un $\frac{\Delta X}{X}$ y un r dados, y dentro de la condición de que la potencia no pase del valor permitido en ninguna de las cuatro resistencias. Una vez determinado n , la relación (2) da m . Como m debe ser positivo, resulta de (2) que se debe cumplir

$$n < \frac{\varrho}{1-\varrho} \quad \text{si} \quad \varrho < 1 \quad (3)$$

Una simple inspección de (1) demuestra que i crece con P_X y con n . Entonces se presentan dos elecciones posibles:

a) elegir P_X máxima, es decir, $P_X = Q$, y n lo mayor que permitan los valores límites de las potencias gastadas en las otras resistencias

b) elegir $P_X < Q$, lo que permite obtener un n mayor que en el caso anterior.

Veremos más adelante (ver IV b) que si $k = P/Q \geq 1$ será siempre preferible elegir $P_X = Q$, mientras que si $k < 1$ será preferible elegir $P_X = P < Q$

a) Estudio de la sensibilidad cuando se elige $P_X = Q$. La condición de que la potencia gastada en las resistencias de comparación no pase de P impone que se cumplan las siguientes desigualdades

$$P_B \leq P \quad \therefore \quad \frac{1}{n} \geq \frac{k+1}{kQ} - 1. \quad \text{Como } n \text{ es positivo esa de-}$$

sigualdad se cumple siempre si $Q \geq \frac{k+1}{k}$; en

caso contrario debe cumplirse

$$n \leq \frac{1}{\frac{k+1}{kQ} - 1} \quad (4)$$

$$P_A \leq P \quad \therefore \quad n \leq \frac{k(Q-1)}{2} + \sqrt{\frac{k^2(Q-1)^2}{4} + kQ} \quad (5)$$

$$P_R \leq P \quad \therefore \quad n \leq k \quad (6)$$

Como el valor de n debe ser el mayor compatible con (4), (5) y (6), se elegirá igual al menor de los miembros de la derecha de esas relaciones. En esas condiciones siempre se cumple (3). Para hacer la elección deben estudiarse las tres funciones de Q , con k como parámetro

$$y_1 = \frac{1}{\frac{k+1}{kQ} - 1} \quad \text{para } Q < \frac{k+1}{k}, \quad y_2 = \frac{k(Q-1)}{2} + \sqrt{\frac{k^2(Q-1)^2}{4} + kQ}$$

$$y_3 = k$$

El problema se presenta de distinta manera según que k sea mayor o menor que 1. Para claridad de exposición hemos re-

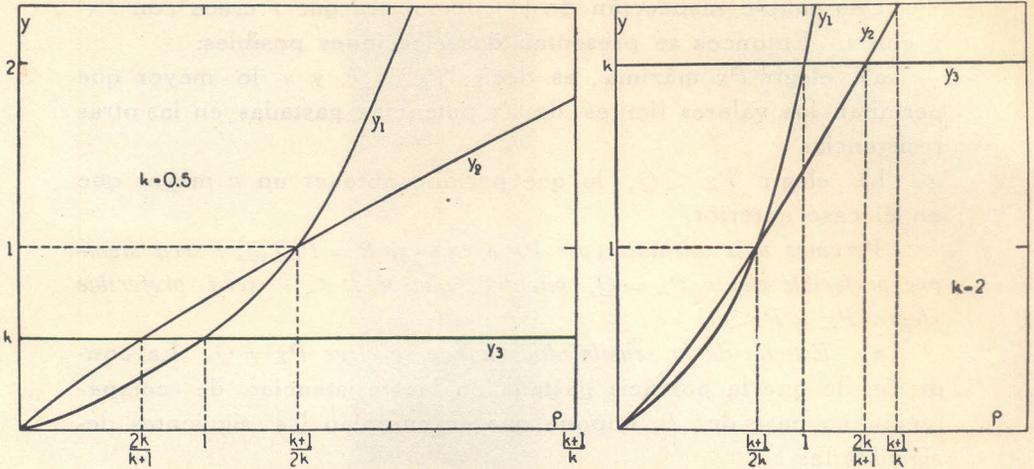


Fig. 2

presentado gráficamente y_1 , y_2 e y_3 en la fig. 2 en los dos casos. Todos los puntos interesantes se ven en la figura.

Se deduce del estudio que si

$$k > 1 \quad y_1 \text{ es menor que } y_2 \text{ e } y_3 \text{ para } \varrho < \frac{k+1}{2k}$$

$$y_2 \text{ es menor que } y_1 \text{ e } y_3 \text{ para } \frac{k+1}{2k} < \varrho < \frac{2k}{k+1}$$

$$y_3 \text{ es menor que } y_1 \text{ e } y_2 \text{ para } \frac{2k}{k+1} < \varrho$$

$$k < 1 \quad y_1 \text{ es menor que } y_2 \text{ e } y_3 \text{ para } \varrho < 1$$

$$y_3 \text{ es menor que } y_1 \text{ e } y_2 \text{ para } \varrho > 1$$

El problema de la elección óptima de n cuando $P_x = Q$ está así resuelto. La fórmula (2) nos permite determinar m y la fórmula (1) nos da i_{max} . Los resultados están resumidos en el cuadro I.

La fig. 3 representa gráficamente los valores óptimos de n en función de ϱ con k como parámetro y la fig. 4 representa

$i_{max} / \sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X} \frac{1}{r}$ en función de ϱ con k como parámetro. Sólo

hemos representado las curvas relativas a $k \geq 1$, dado que las otras no tienen interés práctico, como vamos a ver.

b) Estudio de la sensibilidad cuando se elige $P_x < Q$. Elegir $P_x < Q$ equivale a reemplazar en las fórmulas anteriores k por $k' = P/P_x$. Elijamos $P_x = Q/q$, es decir, hagamos $k' = kq$, donde $q > 1$.

CUADRO I

q	n	m	i_{max} $\sqrt{\frac{Q}{X} \frac{\Delta X}{X} \frac{1}{r}}$
$q < \frac{k+1}{2k}$	$\frac{1}{\frac{k+1}{kq} - 1}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{kq}{k+1}$
$q = \frac{k+1}{2k}$	1	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{k+1}{2k} < q < \frac{2k}{k+1}$	$\frac{k(q-1)}{2} + \sqrt{\frac{k^2(q-1)^2}{4} + kq}$	$\frac{(q-1)}{2} + \sqrt{\frac{(q-1)^2}{4} + \frac{q}{k}}$	$\frac{q}{\frac{q+1}{2} + \sqrt{\frac{(q-1)^2}{4} + \frac{q}{k}}}$
$q = \frac{2k}{k+1}$	k	1	$\frac{k}{k+1}$
$\frac{2k}{k+1} < q$	k	$q \frac{(k+1)}{k} - 1$	$\frac{k}{k+1}$
$q < 1$	$\frac{1}{\frac{k+1}{kq} - 1}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{kq}{k+1}$
$q = 1$	k	$\frac{1}{k}$	$\frac{k}{k+1}$
$1 < q$	k	$q \frac{(k+1)}{k} - 1$	$\frac{k}{k+1}$

$k \geq 1$

$k < 1$

Veamos si con dicha elección se puede conseguir una sensibilidad mayor que en el caso a).

Se pueden presentar varios casos según el valor de q . Estudiemos primero qué ocurre cuando $q \leq \frac{k+1}{2k}$ para $k \geq 1$ o $q \leq 1$ para $k < 1$. En esos casos, eligiendo $P_X = Q$ se tenía

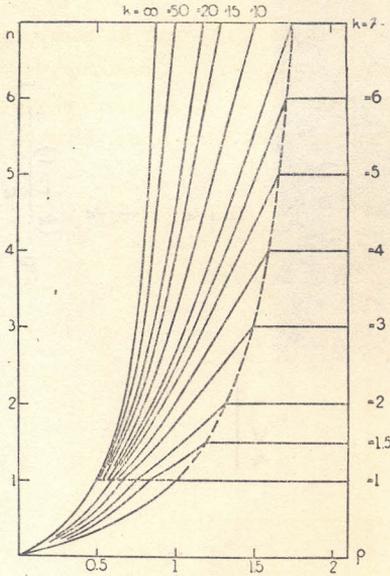


Fig. 3

$$i_{max} = \sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X} \frac{k}{k+1} \frac{q}{r} \quad (7)$$

Elijamos $q > 1$ tal que se siga cumpliendo $q \leq \frac{k^1+1}{2k^1}$ o $k^1 \leq 1$ respectivamente; se tendrá

$$i'_{max} = \sqrt{\frac{Q}{qX}} \frac{\Delta X}{X} \frac{kq}{kq+1} \frac{q}{r} \quad (8)$$

de modo que

$$\frac{i'_{max}}{i_{max}} = \frac{k+1}{k\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}} = f \quad (9)$$

Siempre que $f > 1$ convendrá elegir $P_X = \frac{Q}{q}$. Consideremos $f(q)$ para $q > 1$. Cuando $k > 1$, f es siempre menor que 1, mientras que para $k < 1$ hay un intervalo de valores de q para los cuales $f > 1$, siendo f máxima para $q = \frac{1}{k}$. Vemos pues que si $k \geq 1$ conviene elegir $P_X = Q$, mientras que si $k < 1$ conviene elegir $P_X = Qk = P$.

Los casos en que $q \geq \frac{2k}{k+1}$ si $k \geq 1$ y $q \geq 1$ si $k < 1$ se estudian en la misma forma, llegándose al mismo resultado.

Cuando $\frac{k+1}{2k} < q < \frac{2k}{k+1}$ si $k > 1$ se tiene

$$f = \frac{i'_{max}}{i_{max}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\frac{q+1}{2} + \sqrt{\frac{(q-1)^2}{4} + \frac{q}{k}}}{\frac{q+1}{2} + \sqrt{\frac{(q-1)^2}{4} + \frac{q}{kq}}}$$

que es siempre menor que 1.

Si cuando $k > 1$ elegimos un q tal que se pasa de una zona de valores de q a otra, se ve que la disminución de P_X es aún más desfavorable, porque i'_{max} será siempre menor que si hubieran seguido valiendo las curvas de la zona anterior. Cuando $k < 1$ nunca se llega, disminuyendo P_X , al caso $k' > 1$, porque el valor de q que realiza el máximo es precisamente el que hace $k' = 1$.

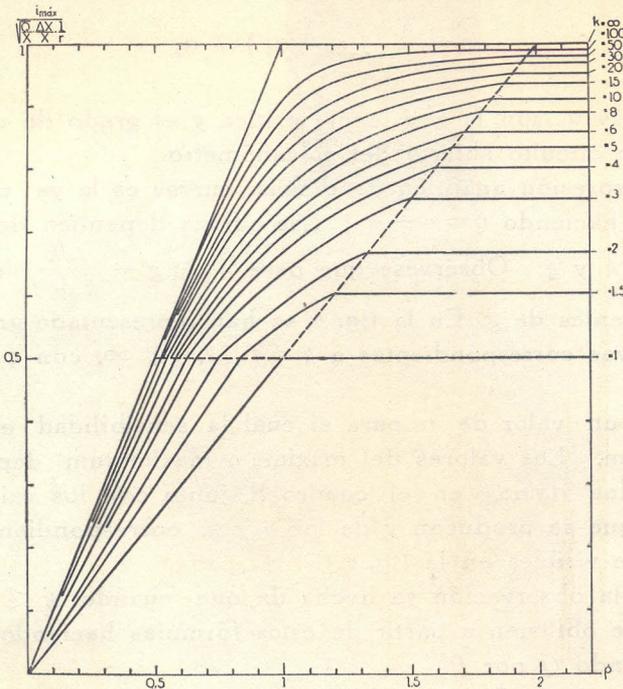


Fig. 4

Se deduce pues: si $k \geq 1$ se elegirá $P_X = Q$ y valdrán los resultados de la primera parte del cuadro I. En cambio, si $k < 1$ hay que elegir $P_X = P$ y son aplicables los resultados correspondientes a $k = 1$ del cuadro I, a condición de reemplazar Q por P en todas las fórmulas.

La tensión a aplicar a los bornes del puente se deduce de los resultados anteriores y es

$$U = \sqrt{P_X \bar{X}} (n + 1) \quad (10)$$

V. — *Estudio de la sensibilidad máxima del puente en función del grado de amortiguamiento para un galvanómetro dado.* Las curvas de la fig. 4 nos permiten hallar el i_{max} que se puede obtener imponiéndonos un amortiguamiento dado y con un galvanómetro dado, pero esas curvas no son las más expresivas; no nos permiten ver directamente como varía la sensibilidad del puente con el grado de amortiguamiento, que era uno de los problemas que nos propusimos resolver. Pero a ese efecto podemos trazar las curvas de sensibilidad máxima en función de r , ya que r determina el grado de amortiguamiento

$$\alpha = \frac{R_o}{r X} (1 - \alpha_o) + \alpha_o \quad (11)$$

donde R_o y α_o son la resistencia crítica y el grado de amortiguamiento en circuito abierto del galvanómetro.

La expresión analítica de dichas curvas es la ya vista en el cuadro I, haciendo $q = r - g$. Las curvas dependen de dos parámetros, k y g . Obsérvese que para $r \geq g + \frac{2k}{k+1}$ se hacen independientes de g . En la fig. 5 se han representado gráficamente las curvas correspondientes a $k = 1, 2, 10, \infty$, con g como parámetro.

Hay un valor de r para el cual la sensibilidad es máxima maximumum. Los valores del maximum maximumum dependen de k y g y los damos en el cuadro II, junto con los valores de r para los que se producen y de los n y m correspondientes. Son claramente visibles en la fig. 5.

Vale la observación ya hecha de que cuando $k < 1$ los resultados se obtienen a partir de estas fórmulas haciendo $k = 1$ y reemplazando Q por P .

El interés de las curvas de la fig. 5 es primordial, puesto que permiten deducir cual es el valor maximum maximumum de la sensibilidad que se puede alcanzar, el grado de amortiguamiento que le corresponde, y como varía la sensibilidad máxima con el amortiguamiento. Es imposible trazar en el mismo gráfico un número de curvas suficiente como para comprender todos los valores útiles de los dos parámetros k y g . Pero agregando a los gráficos ya trazados algunos más (por ejemplo los correspondientes

CUADRO II

g	r	$i_{max} / \sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}$	n	m
$g = 0$	$\frac{k+1}{2k}$	$\frac{k}{k+1}$	1	$\frac{1}{k}$
$g < \frac{1}{k}$	$g + \frac{k+1}{2k}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{g + \frac{k+1}{2k}}$	1	$\frac{1}{k}$
$g = \frac{1}{k}$	$\frac{k+3}{2k}$	$\frac{k}{k+3}$	1	$\frac{1}{k}$
$\frac{1}{k} < g < k$	$g + \frac{g + \sqrt{k g}}{1 + \sqrt{k g}}$	$\frac{1}{2 \sqrt{\frac{g}{k} + g + 1}}$	$\sqrt{k g}$	$\sqrt{\frac{g}{k}}$
$g = k$	$k \frac{(k+3)}{k+1}$	$\frac{1}{k+3}$	k	1
$g > k$	$g + \frac{2k}{k+1}$	$\frac{k}{k+1} \frac{1}{g + \frac{2k}{k+1}}$	k	1

a $k = 1,5, 3, 5, 50$), se comprenderían prácticamente todos los casos posibles con suficiente aproximación. No lo hemos hecho a causa del inconveniente de la escala, que sólo permite hacer lecturas precisas para un intervalo restringido de valores, mientras que los g y r que se pueden presentar varían por ejemplo entre 10^{-3} y 10^3 .

Pero es posible representar en un solo diagrama (fig. 6) un número de datos suficiente como para poder trazar una gráfica de la variación de i_{max} con r para cualquier k y g , que permite al mismo tiempo hacer lecturas precisas. Adoptemos escalas logarítmicas para representar las curvas $i_{max} = f(r, k, g)$ y hagamos las siguientes consideraciones, recapitulando las conclusiones del estudio anterior:

Cada curva $i_{max} = f(r, k, g)$, para un k y un g dados, está formada por tres partes, que responden a distintas ecuaciones, y que llamaremos, para claridad de exposición, partes a , b y c (ver el cuadro de la fig. 6). a responde a la ecuación

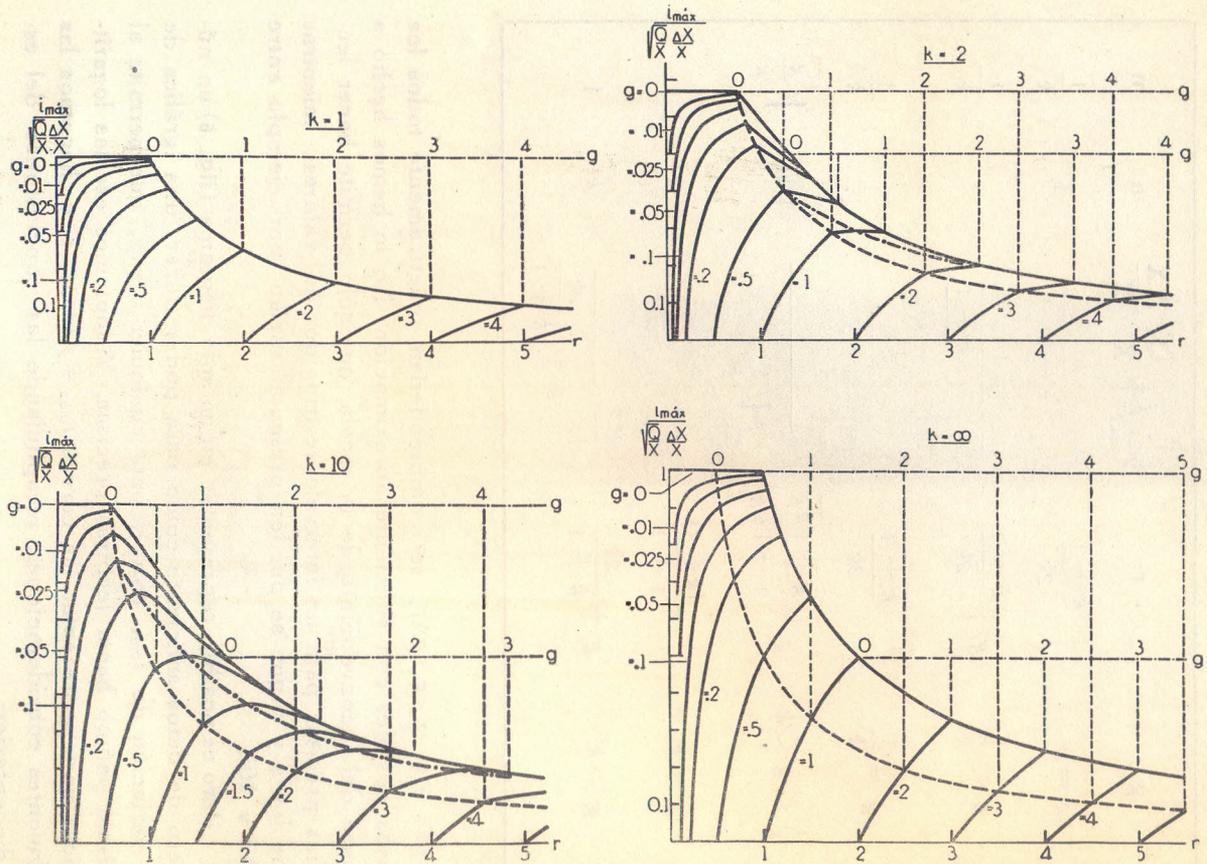


Fig. 5

$$\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}} = \frac{k}{k+1} \frac{r-g}{r}$$

y vale para

$$r \leq g + \frac{k+1}{2k}$$

b responde a la ecuación

$$\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}} = \frac{r-g}{\frac{r-g+1}{2} + \sqrt{\frac{(r-g-1)^2}{4} + \frac{r-g}{k}}} \frac{1}{r}$$

y vale para

$$g + \frac{k+1}{2k} \leq r \leq g + \frac{2k}{k+1}$$

y *c* responde a la ecuación

$$\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}} = \frac{k}{k+1} \frac{1}{r}$$

y vale para

$$r \geq g + \frac{2k}{k+1}$$

a y *b* se cortan en el punto *L* de abscisa

$$r_L = g + \frac{k+1}{2k}$$

y ordenada

$$\left[\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}} \right]_L = \frac{1}{2r_L}$$

b y *c* se cortan en el punto *M* de abscisa

$$r_M = g + \frac{2k}{k+1}$$

y ordenada

$$\left[\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X}} \right]_M = \frac{k}{k+1} \frac{1}{r_M}$$

Las curvas a , que dependen de los dos parámetros k y g , se obtienen todas por translación de la misma curva, según el eje de las r para una variación de g y según el eje de las i para una variación de k . De modo que representando una es fácil trazar la que se necesite en un caso dado. Nosotros hemos representado una familia para $g = 1$ y diversos k , para facilitar ese trazado. Para determinar la curva correspondiente a un k y un g dados, basta determinar la posición de un punto de la curva buscada; es particularmente conveniente elegir el punto L , que de todos modos es preciso ubicar. Este punto está situado sobre la recta

$$\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X} \frac{\Delta X}{X}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \quad (\text{o sea la curva } c \text{ para } k = 1). \quad \text{Para determi-}$$

narlo basta pues obtener su abscisa r_L . A este efecto, sobre la misma recta indicamos los puntos N de abscisa $r_N = \frac{k+1}{2k}$, para los diversos k , (que están en la parte de recta comprendida entre las ordenadas 0,5 y 1). Para obtener r_L basta sumar g a la abscisa del punto N correspondiente. Para facilitar la operación se ha representado una escala NN' de g . Como hay una escala para cada valor de k hemos trazado curvas pp' de igual g .

Las curvas c , que sólo dependen del parámetro k , constituyen una familia de rectas paralelas, que pasan por los puntos O de abscisas $r_0 = \frac{2k}{k+1}$ y ordenada $\left[\frac{i_{\max}}{\sqrt{\frac{Q}{X} \frac{\Delta X}{X}}} \right]_0 = \frac{1}{2}$. El punto M

se ubica sobre cada recta sumando g a la abscisa del punto O . Podríamos dar en el diagrama una escala OO' de g , que permitiese obtener inmediatamente la abscisa de M . Como todas las escalas correspondientes a diversos k se confundirían, por tener los puntos O la misma ordenada, hemos desplazado las diversas escalas según el eje de las i llevándolas a $O_1 O'_1$, en tal forma que las líneas de igual g , $p' p''$, sean rectas a 45° del eje de las r .

Falta por determinar las curvas b . Estas curvas presentan un máximo poco pronunciado (tanto menos pronunciado cuanto menor es k) cuando $\frac{1}{k} < g < k$ y son casi rectas en los otros casos. De modo que se pueden trazar "a sentimiento" con suficiente precisión, a condición de indicar la manera de ubicar el máxi-

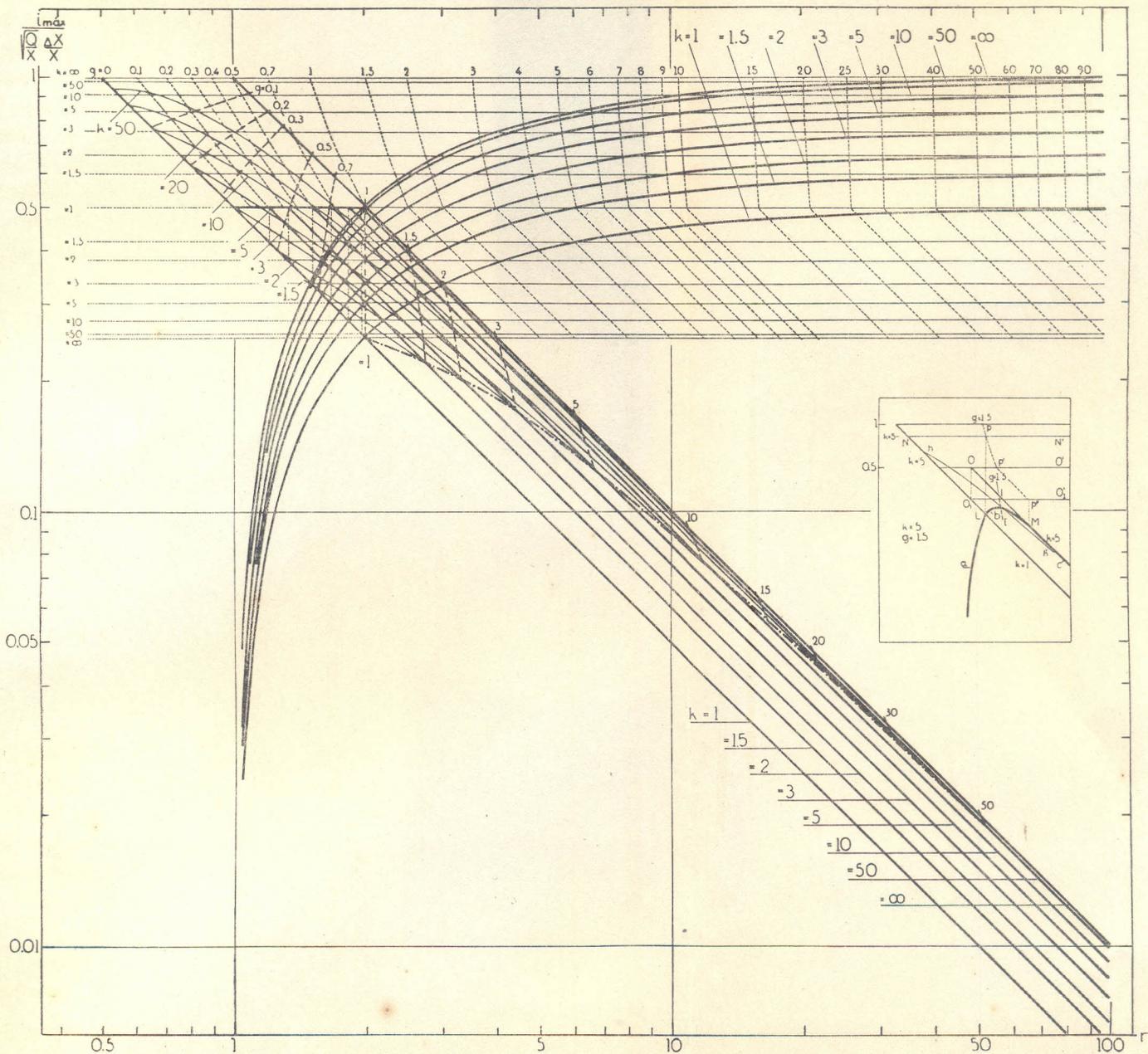


Fig. 6

mo cuando éste existe. El máximo es función de k y g y sus

coordenadas son
$$\frac{i_{max}}{\sqrt{\frac{Q}{X} \frac{\Delta}{X}}} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{g}{k} + g + 1}}, \quad r = g + \frac{g + \sqrt{k}g}{1 + \sqrt{k}g}$$

Hemos trazado las familias de curvas lugares del máximo a igual g (ll') y a igual k (hh'), de modo que para un k y un g dados la intersección de los lugares correspondientes nos ubica el máximo.

VI. — *Conclusiones.* 1) k y el galvanómetro impuestos. Las curvas de la fig. 6 (y eventualmente de la fig. 5) permiten ver como varía la sensibilidad con el grado de amortiguamiento del galvanómetro, determinado, para cada valor de r , por la relación (11). Estas curvas permiten pues una elección racional de r de acuerdo con las condiciones de cada medida particular. Salvo condiciones especiales, se podrá trabajar con grados de amortiguamiento comprendidos entre $\sim 0,3$ y $2,5$, y si lo que interesa es obtener la sensibilidad máxima se elegirá el grado de amortiguamiento comprendido en ese intervalo al que corresponde la mayor sensibilidad. En cambio, si no hay interés en realizar la sensibilidad máxima se elegirá un grado de amortiguamiento vecino al crítico.

2) k está impuesto y se dispone de varios galvanómetros. Las curvas de las figs. 5 y 6 dan la variación de la corriente i_{max} en el galvanómetro en función de r con g como parámetro, pero la elección definitiva depende también de otros dos factores: — a) de las sensibilidades en intensidad de los galvanómetros disponibles, puesto que lo que caracteriza la sensibilidad de la medida es $\Theta_{max} = S_i i_{max}$. Será pues necesario multiplicar las ordenadas de la fig. 5 por S_i o desplazar las ordenadas de la fig. 6 en $\log S_i$ (para fines comparativos se puede hacer el S_i de uno de los galvanómetros igual a 1) — b) de los valores de K_0 y α_0 de los galvanómetros: al mismo valor de r no corresponden en general los mismos grados de amortiguamiento en los distintos aparatos. De modo que habrá que determinar el intervalo útil de r para cada galvanómetro. Dentro de esas condiciones se compararán los valores de Θ_{max} que permiten obtener los distintos galvanómetros.

3) *Influencia de las potencias P y Q .* Cuando $k < 1$ i_{max} aumenta como \sqrt{P} , es decir, en forma marcada con P , de modo que conviene utilizar resistencias de comparación que permiten gastar la mayor potencia posible. En cambio, cuando $k > 1$, i_{max} sólo puede aumentar de 1 a 2 cuando k pasa de 1 a ∞ . No hay pues inte-

rés, desde el punto de vista de la sensibilidad, en elegir P mayor de cierto valor, por ejemplo $5Q$, puesto que la ganancia en sensibilidad es insignificante, y en cambio crece la potencia gastada en el puente (siempre es menor que $4P$) y la tensión aplicada en los bornes de aquel (la relación (10) y el cuadro I demuestran que en algunos casos las condiciones de sensibilidad máxima nos obligarían a aplicar al puente una tensión elevada.) De modo que aún cuando las resistencias permitan gastar una potencia mayor, será conveniente asignarles un P igual aproximadamente a $5Q$.

Cuando Q está comprendido sensiblemente entre P y $0,2P$, una cierta disminución de la potencia gastada en X no influye mucho sobre la sensibilidad, pero para Q menores la sensibilidad varía como Q .

Apéndice. — *Influencia del agregado de una resistencia en serie o en paralelo con el galvanómetro.* Si agregamos en serie con el galvanómetro una resistencia $T = tX$, la relación (2) se escribirá

$$r - g - t = \varrho = \frac{(m + 1)n}{n + 1} \quad (2a)$$

de modo que a r dado, ese agregado reduce ϱ , lo que es siempre perjudicial, salvo cuando ϱ permanece en la zona en que $\varrho > \frac{2k}{k + 1}$ en la que ese agregado es indiferente, porque la sensibilidad no depende de ϱ . Este resultado es casi evidente a priori.

Mucho menos evidente es la solución de este problema: ¿no sería preferible en algún caso obtener el grado de amortiguamiento deseado del galvanómetro shuntándolo, lo que, si bien reduce la corriente que pasa por él, permite aumentar ϱ ? Vamos a demostrar que la respuesta es negativa.

La corriente que pasa por el galvanómetro shuntado por la resistencia $S = sX$ cuando X varía en ΔX es, aplicando el teorema de Thévenin con las mismas aproximaciones que en (1)

$$i = \sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X} \frac{n}{n + 1} \frac{1}{r} \frac{s}{s + \varrho} \quad (1a)$$

Además (2) se escribe

$$r - g = \frac{s\varrho}{s + \varrho} = \varrho' \quad (2b)$$

donde representamos por q' la resistencia reducida del circuito visto desde los bornes del galvanómetro. De modo que

$$q = \frac{s q'}{s - q'} = \varphi q'$$

y (1a) se puede escribir

$$i = \sqrt{\frac{Q}{X}} \frac{\Delta X}{X} \frac{n}{n+1} \frac{1}{r} \frac{1}{\varphi} \quad (1b)$$

De modo que a r constante, q es mayor que si no se shuntara [$q = \varphi(r - g)$ con $\varphi > 1$], pero al mismo tiempo la corriente calculada por (1) queda dividida por φ . Se trata ahora de ver qué predomina, si el aumento de i debido a que q es mayor que sin shunt, o la disminución debida a que i queda dividida por φ . Un estudio de los distintos casos que se pueden presentar según el valor de $r - g$ nos dice que la i_{max} obtenida con shunt es siempre inferior a la obtenida sin shunt, salvo en la zona en que q , después de shuntar, es menor que $\frac{k+1}{2k}$, en que el resultado es el mismo.

Naturalmente pueden presentarse casos particulares en los que es conveniente shuntar o agregar resistencia en serie por otros motivos y las fórmulas anteriores nos permiten calcular la sensibilidad que se puede obtener.

Manuscrito recibido en Julio de 1942.