A hombros de gigantes

Un paseo por la historia de la matemática sin salir del Parque Rodó

La biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República alberga un pequeño tesoro: una sección de libros clásicos que contiene fuentes históricas de la ciencia -sobre todo de la matemática- de un inmenso valor. En las páginas de esos libros es posible recrear varios episodios fundamentales de la historia de la ciencia. Aquí se invita al lector a seguir sólo uno de los muchos recorridos posibles.

UNA FUERTE intuición acompañó a los filósofos y a los matemáticos desde la antigüedad clásica hasta la primera modernidad: la idea de que una totalidad infinita es un absurdo, una contradicción.

Después de varios quebraderos de cabeza con el asunto, Aristóteles dictaminó en su momento que el infinito sólo puede ser entendido en forma negativa: como ausencia o privación; jamás en forma positiva, como existencia.

Infinito, desde el punto de vista aristotélico, es lo que crece o decrece sin término: lo que no acaba. La infinitud es entonces una potencialidad, no una realidad actual. Siempre será posible pensar, por ejemplo, un número más grande o más pequeño que cualquier número anteriormente dado y así sucesivamente, hasta alcanzar cantidades enormemente grandes o extremadamente pequeñas. En cada paso de ese proceso, sin embargo, nos detendremos en algún número finito, por muy grande o muy pequeño que sea. De este modo, la idea misma de un infinito en estado completo (un número, una figura, un objeto material) se vuelve absurda, porque lo infinito es por definición lo que no puede ser completado.

El pronunciamiento de Aristóteles trajo paz a las mentes durante casi 2 mil años, pero al final las cosas igual se fueron al diablo.

Los matemáticos de los siglos XVII, XVIII y buena parte del XIX poblaron sus tratados de cantidades infinitas -sobre todo infinitamente pequeñas-, aunque periódicamente los filósofos insistieron en que los infinitos sólo existen en potencia y jamás en acto consumado.

Los mismos filósofos denunciaron también inconsistencias en los conceptos, en los métodos y en las pruebas de la nueva matemática del infinito. Todo ello era cierto. Sin embargo, la matemática nunca antes avanzó y quizás nunca después haya vuelto a avanzar tanto como entonces. De lo anterior parece extraerse una enseñanza más bien sorprendente: no conviene hacerles caso a los filósofos, ni siquiera cuando llevan la razón. En cualquier caso, finalmente llegó el día en que las cantidades infinitas, que habían prestado un servicio tan alto a la causa matemática, fueron dadas de baja en forma deshonrosa.

Alrededor del círculo

La tentación de recurrir a totalidades infinitas como instrumento para resolver problemas específicos ganó primero a los matemáticos preocupados por el cálculo de áreas y volúmenes.

Resulta intuitivo y a la vez muy útil imaginar, por ejemplo, que el círculo es, en el fondo -aunque no lo parezca-, un polígono: el polígono regular de infinita cantidad de lados. De ese modo, sumando las áreas de infinitos triángulos de delgadez infinita sería posible calcular el área del círculo sin mayores dificultades. Para que la fórmula de cálculo no sea una mera aproximación, es decir, para que no incluya un cierto error, por pequeño que sea, es necesario que los triángulos efectivamente sean infinitos en número. Dicho de otro modo: no es suficiente pensar en un poliedro con una cantidad exorbitantemente grande de lados; es necesario que el poliedro tenga efectivamente un número infinito de lados. Pero ello es absurdo si entendemos que el infinito es sólo una mera potencialidad y nunca una realidad actual, como quería Aristóteles.

Es casi seguro que Arquímedes usó ese método, en el siglo III antes de Cristo, para averiguar la fórmula que permite calcular correctamente el área del círculo, aunque públicamente se limitara a demostrar su corrección (sin aclarar el modo en que la había obtenido) mediante el método lógicamente intachable de la reducción al absurdo (que exige tener la solución de antemano). Arquímedes, como cualquier otro matemático griego, no se hubiera permitido jamás concebir las figuras geométricas de la manera recién descrita y tener, por tanto, trato público con el infinito.

En el siglo XVII, el matemático italiano Bonaventura Cavalieri utilizó un método muy similar al de Arquímedes para obtener áreas y volúmenes, aunque no podía saber con certeza que había hecho tal cosa, porque el libro en que el matemático griego detalla su método de descubrimiento estaba perdido y no fue encontrado hasta los albores del siglo XX.

En su *Geometria indivisibilibus*, de 1635, Cavalieri sugirió que las figuras planas fueran concebidas como una colección de infinitas líneas paralelas, mientras que los sólidos fueran pensados como compuestos de infinitas láminas u hojas infinitamente delgadas. El italiano llamó a esos elementos constituyentes "indivisibles", en referencia y homenaje a los "átomos" de los antiguos físicos griegos. Con ese método, Cavalieri fue capaz de ofrecer fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de un alto grado de generalidad. Su método fue severamente cuestionado, entre otras cosas, porque un agregado de líneas no puede constituir un área, salvo que éstas tengan algún grosor, en cuyo caso no son "indivisibles", y otro tanto vale para las láminas y los volúmenes. En cualquier caso, sus resultados convirtieron a Cavalieri en una celebridad matemática: algo así como el Arquímedes del siglo XVII, a pesar de que ni una sola demostración acorde a los estándares de rigor de los antiguos geómetras griegos pueda ser encontrada en toda su obra.

Los escrúpulos griegos con el infinito todavía existían, pero empezaban a perder fuerza.

La segunda edición (corregida y mejorada) de la *Geometria* de Cavalieri, publicada en Bolonia en 1653 en la imprenta de Ducijs, es uno de los libros más antiguos que posee la biblioteca.

> “La segunda edición de *Geometria indivisibilibus* de Bonaventura. Cavalieri (Bolonia, 1653) es uno de los libros más antiguos que posee la biblioteca de la Facultad de Ingeniería.

Los fundadores

Esas cantidades extravagantes, capaces de ser algo (número o extensión) y aparentemente nada al mismo tiempo, pronto se revelaron útiles para pensar otro problema, además del cálculo de áreas y volúmenes: el cálculo de velocidades.

Si la velocidad media de un objeto es el cociente de -por una parte- la distancia que ha recorrido y -por otra- el tiempo que le insumió recorrerla, existe la tentación de pensar que la velocidad instantánea es la velocidad de ese objeto cuando el intervalo de tiempo considerado es sólo un instante, es decir, una cantidad de tiempo más pequeña que cualquier cantidad que podamos especificar. De este modo, un instante no será un segundo, ni una milésima de segundo, ni una millonésima de segundo, ni cualquier otra fracción de tiempo que podamos imaginar, por pequeña que sea. Cualquier cantidad finita de tiempo no será suficientemente pequeña para ser un instante, pues siempre será posible pensar una cantidad todavía más pequeña. Un instante debe ser, pues, una cantidad infinitamente pequeña. A su vez, la fracción de tiempo transcurrida tampoco puede ser nula, porque en tal caso no habría trascurrido tiempo alguno y sería absurdo pensar en la existencia de un movimiento que no transcurre en el tiempo. Un instante es, pues, un "átomo" o un "indivisible" temporal: una cantidad de tiempo más pequeña que cualquier cantidad finita pensable pero que, no obstante, tampoco es nula.

Esta intuición física está en la base de algunos desarrollos matemáticos del período. Por ejemplo, en las ideas matemáticas de Isaac Newton.

Newton concebía las cantidades geométricas como habiendo sido generadas en el tiempo a partir del movimiento. El movimiento de los puntos genera líneas (como la punta de una lapicera desplazándose sobre el papel) y de forma análoga ocurre con las líneas (cuyo movimiento genera planos) y con los planos (que generan volúmenes). La porción de línea que se genera en un instante -en un "átomo" o un "indivisible" temporal-, a partir del movimiento de un punto, es infinitamente pequeña. Otro tanto ocurre con los planos y los volúmenes.

Las cantidades infinitamente pequeñas también desempeñan un papel central en las ideas matemáticas de Gottfried Leibniz, pero en su caso las cantidades geométricas no son concebidas como generadas a partir del movimiento, sino dadas como una totalidad y descompuestas hasta obtener componentes de un tamaño infinitamente pequeño.

Newton y Leibniz descubrieron, en forma independiente, que el antiguo problema geométrico de hallar áreas encerradas por una curva y el problema de calcular velocidades (cuyo equivalente geométrico es el problema de trazar la tangente a una curva en un punto arbitrario) son problemas que están inversamente relacionados. A la rama de la matemática que se ocupa de la primera de estas cuestiones se le llama cálculo integral

Suplemento de cultura científica

Redactor responsable:
Marcelo Pereira
Edición:
Aníbal Corti
Colaboradores en este número:
Virginia Matos
Riardo Delgado
Amanda Muñoz
Corrección:
Ana Lía Fortunato
Edición gráfica:
Sandro Pereyra
Diagramación:
Florencia Lista
Ilustraciones:
Ramiro Alonso

Algunos ejemplares de la colección de libros clásicos iniciada por Eduardo García de Zúñiga en la biblioteca de la Facultad de Ingeniería. ✳ FOTO: NICOLÁS CELAYA

y a la segunda cálculo diferencial; el conjunto es conocido como cálculo infinitesimal. Este nombre recoge el término ("infinitesimal" o "infinitésimo") con que las cantidades infinitamente pequeñas eran conocidas en el siglo XVII.

Aunque Newton llegó primero al resultado fundamental (el que vincula ambos procesos, estableciendo que uno es el inverso del otro), Leibniz fue el primero en publicar.

El lector puede devolver a su estante el ejemplar de la *Geometria* de Cavalieri y tomar en su lugar el volumen que contiene el ejemplar de octubre de 1684 de *Acta Eruditorum* y leer la primera publicación sobre el nuevo cálculo: "Nova methodus pro maximis et minimis", un artículo que lleva la firma GGL (por Godefridi Guilielmi Leibnitii). *Acta Eruditorum* es una revista académica que se publicaba en Leipzig; una de las primeras en su género en el mundo. Antes de existir revistas especializadas, los letrados (sabios o eruditos) comunicaban sus descubrimientos mediante cartas o escribían tratados. Las revistas especializadas inauguraron un nuevo formato de comunicación: el artículo académico. Uno de los pequeños tesoros que alberga la biblioteca es una colección completa de esta revista.

En 1684, entonces, Leibniz comunicó al resto de los especialistas los rudimentos de su nuevo cálculo. Casi nadie entendió qué diablos era aquello, en parte porque el artículo era muy poco amable con el lector y en parte porque la edición estaba plagada de erratas. Puede decirse que Leibniz tuvo suerte. Su obra fácilmente podría haber caído en el olvido, si no fuera porque no pasó inadvertida para dos matemáticos excepcionales: los hermanos Jacques y Jean Bernoulli. Para 1690, una disciplina que no existía diez años antes había sido plenamente desarrollada -no ciertamente de la nada, pero sí a partir de elementos inconexos- sólo gracias al trabajo de tres personas: el propio Leibniz y los hermanos Bernoulli.

El lector puede asistir a esta historia fantástica sin tener que levantarse de su asiento para hacer otra cosa que tomar de su estante el siguiente tomo de la revista.

Lo sublime y lo obsceno

El avance fue tan vertiginoso que para fin de siglo ya existía un primer libro de texto del nuevo cálculo. El *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* fue publicado en 1696. En ese libro el cálculo diferencial (el libro no se ocupa del cálculo integral) es presentado en la forma de un sistema axiomático, con definiciones, postulados y teoremas. El postulado más importante del sistema es justamente el primero, que declara: "Se pide que puedan tomarse indistintamente la una por la otra dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña; o, lo que es lo mismo, que una cantidad que sólo se vea aumentada o disminuida en una cantidad infinitamente pequeña pueda considerarse que permanece siendo la misma".

Este postulado es sorprendente, no porque los matemáticos no se hubieran servido de este tipo de cantidades hasta entonces, sino porque casi nadie había osado poner tal cosa en letras de molde con tal naturalidad.

Como puede verse sin dificultad, el postulado define las cantidades infinitesimales como aquellas que, sumadas o restadas, no producen aumento ni disminución en otras cantidades, pero que, sin embargo, tampoco son cero. Con cierta razón, ambas condiciones fueron consideradas incompatibles: o bien una cantidad es nula, en cuyo caso no produce aumento ni disminución si es agregada o quitada a otras cantidades, o bien no lo es, en cuyo caso sí produce aumento o disminución.

La publicación del libro originó un pequeño escándalo matemático en París, pero las aguas finalmente se aplacaron y los infinitesimales, esas cantidades extrañas que agregadas o restadas a cualquier cantidad finita no la incrementan ni la disminuyen, pero que sin embargo tampoco son nulas, se abrieron paso sin mayores dificultades.

Toda vez que se le preguntó directamente a Leibniz cómo justificaba la existencia de semejantes monstruosidades y cómo salvaba la contradicción lógica que suponía, en las pruebas, considerar a esas cantidades a veces como no nulas (positivas o negativas) y otras veces como cero, el filósofo evadió una respuesta directa. En varias oportunidades adujo que eran meras ficciones útiles, es decir que no tenían existencia real, pero que resultaban efectivas como instrumentos de cálculo. Sin embargo, ello no explica cómo pueden resultar útiles en la práctica conceptos cuya propia naturaleza parece absurda.

Aunque Leibniz no creía en la existencia real de las cantidades infinitesimales -o, al menos, le producía gran culpa afirmar tal cosa, tanto en público como en privado-, todo indica que Jean Bernoulli sí creía fervientemente en su existencia.

Fue Bernoulli quien convirtió o inició en la nueva ciencia del infinito a los matemáticos de la siguiente generación. De hecho, el *Analyse* es el resultado de las clases particulares que dio en París a uno de sus discípulos, el Marqués de l'Hospital. La primera edición de ese libro no reconoce autoría alguna, pero a partir de la segunda el nombre del marqués aparece en la portada. Es precisamente un ejemplar de esa segunda edición, publicada en París por François Montalant en 1715, el que está a disposición de los investigadores en la Facultad de Ingeniería.

El más destacado de los discípulos de Bernoulli fue, sin dudas, Leonhard Euler. Si el lector deja en su estante el libro que l'Hospital escribió inspirado en las clases de su maestro y toma, en su lugar, el *Introductio in analysin infinitorum*, la obra monumental de Euler publicada en dos volúmenes en 1748, que la biblioteca posee en su traducción al francés de 1796 y también en el latín original en la edición de sus obras completas, podrá ser testigo del uso de los infinitesimales más fructífero y creador en la historia de la matemática.

Antonio José Durán, editor y anotador de la edición castellana, a cargo de la Real Sociedad Matemática Española, que incluye una edición facsimilar del original y que vio la luz en 2001, ha dicho de este libro: "De entre la ingente producción matemática de Leonhard Euler, la *Introductio in analysin infinitorum* destaca con luz propia. De ella alguien dijo que difícilmente se podía encontrar otra obra en toda la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor. Los protagonistas de la *Introductio* son, como reza en su título, los infinitos (grandes y pequeños): esas bestias que los griegos consideraron temibles hasta el punto de huir de ellos. En la *Introductio*, Euler no huyó, más bien al contrario, se acercó a los monstruos, les acarició el lomo y les unció un yugo que le permitió hacer fértiles campos antes estériles. [...] La *Introductio*, más que un texto de matemáticas, es en realidad una gran novela de amor: la de Euler y los infinitos. Una pasión que bien pudo sugerirle a Immanuel Kant su célebre categoría estética de lo sublime".

> *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* del Marqués de l'Hospital es el primer libro de texto de cálculo infinitesimal de la historia. La biblioteca posee la segunda edición (París, 1715).

Si Euler vivió con gran pasión su amor por los infinitos, otros matemáticos experimentaron un placer más bien culposo. Lagrange, por ejemplo, trató de deshacerse de ellos a como diera lugar en su *Théorie des fonctions analytiques,* de 1797, pero sólo obtuvo un éxito muy parcial. Cauchy lo consiguió en mayor medida, pero sólo para volver a entregarse a su pasión poco tiempo más tarde.

Todavía en Cauchy (esto no suele decirse en las historias de la matemática, pero es verdad) cada número finito está rodeado, como si se tratara de un halo fantasmal, de infinitos números, infinitamente pequeños e infinitamente próximos. Fue el matemático alemán Karl Weierstrass, en la segunda mitad del siglo XIX, quien demostró que ese halo fantasmal es prescindible: que se pueden reconstruir todos los resultados obtenidos por métodos infinitesimales desde Newton y Leibniz hasta Cauchy recurriendo en forma exclusiva a cantidades finitas. Bajo la égida de esa reconstrucción conceptual se escribieron todos los textos de cálculo en que, mientras el lector visita la sección de libros antiguos, cientos de estudiantes que están en la sala principal estudian para sus exámenes. La expulsión de los infinitesimales del universo matemático fue considerada, a fines del siglo XIX, un requisito imprescindible en el proceso de rigorización de la disciplina; pero los infinitesimales eran inocentes. Bernoulli, Euler y Cauchy no estaban equivocados: puede concebirse sin contradicción que cada número finito posee un entorno infinitesimal de infinitos números, infinitamente pequeños e infinitamente próximos.

Un cierto Abraham Robinson demostró que ello era posible. Pero ésa es otra historia y otra biblioteca.

Aníbal Corti

AGRADECIMIENTO

Por error, se omitió aclarar en el número pasado que la nota de portada tuvo su origen en varias charlas con Martín Graña, investigador del Instituto Pasteur de Montevideo, sin cuya valiosa colaboración nunca podría haber sido escrita. Vaya para él el agradecimiento del autor.