PUBLICACIONES MATEMATICAS DEL URUGUAY

VOLUMEN 1

ACTAS DEL COLOQUIO DE HOMENAJE A RAFAEL LAGUARDIA

REALIZADO EN MONTEVIDEO
EN OCTUBRE DE 1987

VOLUMEN 1

ACTAS DEL COLOQUIO DE HOMENAJE A RAFAEL LAGUARDIA

REALIZADO EN MONTEVIDEO
EN OCTUBRE DE 1987

PUBLICACIONES MATEMATICAS DEL URUGUAY

EDITADAS POR EL **CENTRO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA**, CON EL APOYO DEL PROGRAMA PARA EL DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BASICAS (PEDECIBA).

Montevideo, diciembre de 1988

Publicaciones Matemáticas del Uruguay

Impreso en el Departamento de
Publicaciones de la Universidad
de la República

Diseño de Carátula Fernando Algorta

PRESENTACION

Con este primer volumen de las *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* , que hoy presentamos, reiniciamos una larga marcha. Desde los años cuarenta, el Instituto de Matemática y Estadística de nuestra Facultad de Ingeniería - cuyo Director Fundador fuera Rafael Laguardia y que hoy lleva su nombre - editó sistemáticamente sus Publicaciones. En ellas se recogieron tanto trabajos de investigación y aplicación como artículos de inspiración didáctica. Esa labor, como tantas otras, se interrumpió a consecuencia de la intervención de la Universidad y la remoción de sus autoridades legales, perpetradas por el gobierno dictatorial en 1973.

Durante la dictadura, que duró de 1973 a 1985, nuestro pueblo soportó duros padecimientos a los que los científicos no fueron ajenos. En ese período, nuestra comunidad matemática recibió las muestras de solidaridad de numerosos colegas, de varias instituciones y de muchísima gente de buena voluntad, a lo largo y a lo ancho del mundo. A todos - demasiados para intentar siquiera mencionarlos - vaya nuestro emocionado reconocimiento.

Con la vuelta de la libertad al Uruguay, volvió a la vida la Universidad libre, autónoma y cogobernada, y se inició la tarea de su reconstrucción académica.

Como parte de esa tarea ha sido creado el Centro de Matemática que, con el apoyo imprescindible del Programa para el Desarrollo de las Ciencias Básicas, edita estas *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* . En su nombre nos dirigimos a todas las instituciones que antaño intercambiaban sus Publicaciones con las del Instituto de Matemática y Estadística - y que en muchos casos siguieron enviándolas aún sin recibir nada en cambio - para proponerles la reanudación de ese intercambio. Hacemos extensiva esta solicitud de canje a todos quienes deseen colaborar con la revitalización de la actividad matemática en este país.

Hemos creído adecuado iniciar esta nueva serie publicando los trabajos que desarrollan las exposiciones realizadas en el

Coloquio de Homenaje a Rafael Laguardia que tuvo lugar en octubre de 1987. Damos cuenta de esta forma de lo que se está haciendo aquí al iniciarse otra etapa del trabajo matemático, para cuyo desarrollo contamos, como siempre, con el apoyo de la comunidad científica internacional. Desde ya lo agradecemos.

El editor

FOREWORD

In the forties the Institute of Mathematics and Statistics of the School of Engineering - named today after its Founding Director, Prof. Rafael Laguardia - started its Mathematical Publications. They included research and application articles as well as papers of pedagogical nature. This publication (as well as many other mathematical activities) was interrupted as a consequence of the intervention of the University and the remotion of its legal authorities, perpetrated by the dictatorial government in 1973.

During the dictatorship, that lasted from 1973 to 1985, our people endured hard suffering, and our scientists were not an exception. During that period our mathematical community received the solidarity of several colleagues, institutions and people of good will, all over the World. They are too many to be individually mentioned, but to all of them goes our deep gratitude.

With the reinstallment of freedom in Uruguay, the democratically, self-governed University was recovered, and the task of its academic reconstruction began.

A part of that task has been the creation and development of the Mathematical Centre. With this first volume of *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* the Centre, with the aid of the Programme for the Development of the Basic Sciences (PEDECIBA), reinitiates a long path. We address to all the institutions that used to interchange its Publications with the Institute of Mathematics and Statistics - and that in many cases continued sending them even without receiving anything - to propose the renewal of that exchange. We extend this request to all other institutions that wish to collaborate with the revitalization of the mathematical activities in Uruguay.

We initiate this new series by publishing the expositions of the Colloquium in honor of Prof. Rafael Laguardia that took place in October 1987. In this way we share what is being done in Uruguay at the beginning of another stage of mathematical work. We count, as always with the support of the internacional scientific community. From now our thanks.

The Editor

Indice

Discurso del Ing. Enrique M. Cabaña en ocasión del homenaje realizado al Prof. Ing. Rafael Laguardia el viernes 2 de octubre de 1987 en la Universidad de la República

Se ha acordado que hable en esta ocasión en carácter de ex-alumno de Rafael Laguardia, para expresar nuestra adhesión a este homenaje que el Instituto del que fue fundador y que hoy lleva su nombre está rindiendo a su memoria, junto con el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, el Area de Matemática del Programa para el Desarrollo de las Ciencias Básicas, y el Centro de Matemática de la Universidad de la República. A esas instituciones nos unimos sus ex-alumnos, de manera individual, en este reconocimiento a la labor de quien creara, junto con sus colaboradores más inmediatos, las condiciones para el desarrollo de un ambiente de estudio e investigación matemática en nuestro país.

Voy a tratar de evocar, a través de mi experiencia personal compartida con los ex-alumnos de Laguardia, cuáles eran los aspectos de su personalidad que dejaban en sus discípulos las huellas más duraderas.

Mis primeras impresiones son de las clases del curso de Análisis Matemático II de la Facultad de Ingeniería, en 1956. Desde la primera clase de ese curso, con el pretexto de establecer algunas notaciones, nos planteó fluidamente un panorama entretenido, rico, aparentemente fácil y sumamente atrayente, en el que estaban incluidos varios resultados no triviales, que él extraía a partir de un trabajo en el que nos guiaba, y nos estimulaba a participar. Fue la primera vez que experimenté esa contagiosa sensación de libertad del matemático para elegir sus métodos, y para replantear sus problemas. Algunas veces nos hizo ver, con lo que ahora me resulta un evidente propósito desmitificador, hasta qué punto un teorema es una entidad maleable, cuyas hipótesis y conclusiones se pueden modificar de acuerdo a lo que resulta conveniente en cada caso.

Seguramente alguna parte de la mezcla de encanto y efectividad que irradiaban sus cursos, se debía a modalidades de su exposición, que más tarde nos comentaba a sus ayudantes de clase. Me refiero, por ejemplo, a que solía tratar algunos temas con especial cuidado y rigor, y otros de manera más ágil e informativa, logrando así un maravilloso equilibrio entre el cumplimiento de un programa ambicioso, y la enseñanza de métodos rigurosos de trabajo. O también a que medía cuidadosamente el tiempo que dedicaba a cada tema, cuando por algún motivo se atrasaba en el cumplimiento del programa, enseñándonos lo esencial sin ningún apuro aparente, de modo que no nos diéramos cuenta cuánto estábamos aprendiendo, para no intranquilizarnos, y lograr que la clase nos pareciera fácil.

La importancia que atribuia a las clases de ejercicios se manifestaba en que siempre participaba en ellas, logrando establecer una rápida comunicación con sus alumnos, a quienes sabía ayudarnos en el momento oportuno, con la sugerencia adecuada, que frecuentemente escribía en nuestros cuadernos, sentado con nosotros como un integrante más del grupo.

Su preocupación por nuestra formación no se limitaba a los aspectos directamente vinculados a los cursos regulares. Por el contrario, a medida que lograba despertar nuestro interés por la matemática, nos estimulaba a realizar estudios más avanzados, y a desarrollar nuestra capacidad creativa. El Seminario Elemental de Matemática, al que dio una importancia capital, y que él mismo atendía junto con algunos de sus colaboradores, fue una muestra de esa preocupación.

Informes del Instituto, o propuestas al Consejo de la Facultad, dan cuenta de la importancia que daba al descubrimiento precoz del talento matemático. Cuando detectaba en sus alumnos un genuino interés por continuar y profundizar sus estudios de matemática, los ayudaba a hacerlo, vinculándolos al Instituto. Aún sin disponer de rubros para otorgar becas, Laguardia encontraba la forma para que el Instituto abriera sus puertas a quienes mostraban interés y capacidad, como cuando promovió la formación de lo que hoy es una destacada generación de matemáticos, designándolos colaboradores técnicos del Instituto de Matemática y Estadística. Cuando existía la posibilidad de obtener nuevos cargos, hacía los llamados a aspiración abierta cuando le constaba que había suficientes aspirantes capacitados para llenar las vacantes. *No se debe construir un palomar hasta no tener las palomas* , solía decir a ese respecto; la formulación de sus ideas era tan clara, tan pedagógica, cuando se refería a cualquier aspecto de su actividad universitaria, como en sus clases de matemática.

Sus alumnos que tuvimos el privilegio de continuar trabajando junto a él, en el Instituto, recibimos, muchas veces sin darnos cuenta de ello, enseñanzas fundamentales sobre aspectos de la vida universitaria. Y muchos años después, en ambientes y circunstancias diversas, nos hemos sorprendido aplicando esas enseñanzas, y recordando sus propias frases, muchas veces tan pintorescas como ricas en contenido.

El trabajo con sus colaboradores del Instituto fue una prolongación de la enseñanza impartida en sus cursos. Con motivo de la preparación de material para las clases, nos ayudaba a superarnos, identificaba nuestras debilidades y nos apoyaba para vencerlas. Siempre estaba dispuesto a interrumpir sus ocupaciones para ayudarnos, cuando lo consultábamos. Nunca ejerció una supervisión formal sobre sus ayudantes; no lo necesitaba, pues nos conocía muy bien a través del trabajo conjunto, y del resultado de delegarnos responsabilidades.

No voy a historiar las acciones y los logros trascendentes de Laguardia, que tuvieron como consecuencia que pudiéramos disfrutar, en el pequeño ámbito de la actividad científica de un país no industrializado, de un ambiente de trabajo serio, intenso, fértil, como es y ha sido muy poco frecuente encontrar en el mundo. Sólo quiero mencionar a ese respecto que su labor no sólo requirió su capacidad como matemático, como organizador, como maestro. Fue también resultado de su perseverancia, su paciencia, su fuerza para oponerse a quienes no comprendían el acierto de sus iniciativas, y su habilidad para vencer los obstáculos. La lucha no fue fácil, pues tuvo adversarios poderosos, exponentes de un profesionalismo que, en el mejor de los casos, veía en el desarrollo de la ciencia básica un gasto inútil de recursos. Afortunadamente, también contó con el apoyo de universitarios que compartieron su lucha y sus principios. Junto a ellos, al tiempo que desarrollaba y profundizaba su obra en el Instituto de Matemática y Estadística, impulsó en la Universidad el respeto por el trabajo científico serio, luchó por el prestigio del régimen de dedicación total para los investigadores, participó como fundador de la Asociación Uruguaya para el Avance de la Ciencia, dió los primeros pasos para la creación de la Comisión de Tratamiento de la Información, de la que surgió el Centro de Computación de la Universidad de la República.

En 1970, Laguardia decidió abandonar la dirección del Instituto. Se ponía en marcha un nuevo reglamento de ordenación de los institutos de la Facultad de Ingeniería, por el cual pasaban a estar gobernados por una comisión. El Director dejaba desde ese momento su papel protagónico, y pasaba a ser el ejecutor de las decisiones de la Comisión del Instituto. Aún así, la tarea de asumir la dirección, que recayó sobre mí, me hubiera resultado impensable, de no haber sido por la presencia de Laguardia, y por su apoyo solícito, nunca impuesto, pero siempre oportuno. El haber contado en esa ocasión con su confianza y con su ayuda es sin duda el acontecimiento más gratificante que puedo recordar de mi vida universitaria.

Durante el invierno de 1980 viajé a Montevideo, en un período de vacaciones. Laguardia, a pesar de estar enfermo, me recibió con su afabilidad de siempre. Conversamos de los antiguos miembros del Instituto, le di noticias de muchos colegas que hoy están aquí presentes, y de otros que están desarrollando su actividad matemática en otras partes del mundo. En aquél momento estábamos casi todos fuera del país, continuando el trabajo iniciado en el Instituto.

Laguardia se alegró de saber que el Instituto no había muerto - esas fueron sus palabras - que continuaba viviendo en sus ex-alumnos y colaboradores, y que, tal vez, mantenía su unidad latente, a la espera de una oportunidad propicia para volver a reunir los esfuerzos individuales para entonces dispersos.

El recuerdo de esa conversación reafirma en mí la convicción de que el más auténtico homenaje que podemos hacerle sus alumnos es aunar nuestros esfuerzos para contribuir a que renazca la actividad matemática en nuestro país, para intentar recuperar aquél ambiente de trabajo científico cuyo cultivo demandó tanto esfuerzo, tanta imaginación, y tanto tiempo, y que la experiencia nos ha mostrado cuán rápidamente se puede destruir.

Parece conveniente describir, aunque sólo sea en grandes líneas, cuáles son los primeros pasos que estamos dando para lograr ese propósito.

Durante 1984 comenzó la larga gestación del Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas (PEDECIBA), por iniciativa conjunta de un grupo de científicos radicados en el país, y de los representantes de los organismos de las Naciones Unidas en Montevideo y sus colaboradores. Varios ex-alumnos de Laguardia que habíamos colaborado con él en el Instituto y para entonces trabajábamos en universidades de algunos de los países amigos que brindaron su hospitalidad a tantos uruguayos, viajamos a Montevideo en diciembre de 1984 para participar junto a los colegas que residían en el país en un seminario que fué el comienzo del PEDECIBA. Los integrantes de la comisión del área de matemática, todos ex-alumnos de Laguardia, ya declarábamos al terminar esa reunión, que nuestro propósito era no dejar perder su obra.

Al retornar la Universidad de la República a su cauce democrático, se dieron dos pasos fundamentales, desde el punto de vista que nos ocupa. Uno fue el comienzo de la recuperación del Instituto de Matemática y Estadística, que se abocó inmediatamente, con considerable esfuerzo, pero con merecido éxito, a devolver a la enseñanza de la Matemática en la Facultad de Ingeniería un nivel digno de su antigua trayectoria. Otro fue, frente a la constatación de que un importante grupo de jóvenes se había nucleado alrededor de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, interesados en el estudio de la disciplina, el apoyo que algunos matemáticos de muy sólida formación, dieron a la Licenciatura, que hoy es la opción natural de estudio para los jóvenes interesados en dedicarse a la matemática, y cuenta con un importante número de alumnos inscritos.

Paralelamente, principalmente desde fuera del país - lo que no debe extrañarnos porque de los doce investigadores del Area de Matemática del PEDECIBA, tres están aún en el extranjero, y siete son repatriados recientes - se venían proyectando los planes de maestría y doctorado, y cada vez cobraba más fuerza la idea de que resultaba imprescindible lograr una organización semejante a la del Instituto Central de Matemática, que ya había proyectado Laguardia, en el tiempo en que la Universidad trataba de reorganizarse dentro del marco del "Plan Maggiolo".

Hace un año se creó finalmente el PEDECIBA, por un convenio entre el Ministerio de Educación y Cultura y la Universidad de la República, con cuyos recursos el Area de Matemática ha comenzado a equiparse, especialmente en material bibliográfico. Por iniciativa de los integrantes del Area de

Matemática del PEDECIBA, la Universidad creó el Centro de Matemática, con el fin de desarrollar la investigación, el asesoramiento, la enseñanza de post-grado, y la preocupación por la enseñanza de la matemática a todos los niveles.

El Centro comenzó a funcionar formalmente en julio, y ha aprobado hasta el momento la adscripción de 10 investigadores cuyos planes esperamos que les resulten atractivos a los restantes docentes de matemática de la Universidad, y los estimulen a adscribirse también al Centro para elaborar y realizar juntos desde allí los proyectos comunes de estudio y de trabajo. Las sesiones de carácter académico realizadas ayer y hoy en el marco de este homenaje a Laguardia, pretenden dar cuenta de cuáles son los proyectos de investigación del personal del Centro. Los trabajos allí expuestos serán recogidos en el primer número de las *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* , destinadas a ser una continuación de las Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística que iniciara Laguardia. Ha sido precisamente el editor de las nuevas Publicaciones, el Prof. Rodrigo Arocena, un ex-alumno de Laguardia, naturalmente, el principal gestor de la idea de que una parte importante de las actividades a realizar en este homenaje a Laguardia, fueran las mencionadas sesiones de exposición de trabajos en curso.

Nos han acompañado en esas sesiones, y las han prestigiado con sus conferencias, tres distinguidos colegas de la región latinoamericana, los profesores Julio Bouillet de Argentina, Carlos Di Prisco de Venezuela, y Jacob Palis de Brasil. Nosotros vemos en su presencia entre nosotros, una muestra más del apoyo que en reiteradas instancias hemos recibido los matemáticos uruguayos de parte de nuestros colegas de Latinoamérica, en muy diversas circunstancias, muchas veces difíciles para nosotros. Al agradecerles su presencia y su participación en este encuentro, les agradecemos también ese apoyo gracias al cual parte de la vida matemática uruguaya pudo mantenerse latente.

Entre los profesores del Centro se encuentra la casi totalidad del cuerpo docente efectivo que acompañaba a Laguardia para el momento en que la Intervención de 1973 cerró su, y nuestro, Instituto. Esto señala de por sí un punto de partida auspicioso, pues traduce una decisión colectiva, suma de muchas decisiones individuales, de retornar para llevar adelante un proyecto común. Pero nuestras metas de hoy no son las mismas de 1973, ni podrían razonablemente serlo, ya que el país y la Universidad han cambiado, y también hemos cambiado todos nosotros. No podemos conformarnos con estar reunidos nuevamente buena parte de los ex colaboradores de Laguardia. Muchos jóvenes matemáticos se han formado y se están formando desde entonces, aquí y en el extranjero, y con ellos debemos integrarnos para orientar y organizar nuestro trabajo. Es responsabilidad de ellos participar en la tarea común, y también responsabilidad nuestra estimularlos para que lo hagan.

De las resoluciones adoptadas por la Comisión Directiva del Centro, quizá la más importante sea la aprobación del proyecto de Plan de Estudios de la Maestría, que actualmente está en consideración de las autoridades universitarias, y que esperamos poner en marcha en marzo de 1988. Hasta ahora no existía para los estudiantes uruguayos, la perspectiva de realizar estudios de postgrado dentro del país. Con el desarrollo de la Maestría, primero, y del doctorado en cuanto existan candidatos a iniciar los correspondientes estudios, facilitaremos a los estudiantes interesados en la matemática, la vía para obtener un título académico al mismo tiempo que contribuyen a afianzar nuestro ambiente de trabajo científico. De esta manera, saldrán a realizar estudios avanzados fuera de fronteras, en centros de alto desarrollo científico, cuando estén en las mejores condiciones para elegir el área de trabajo y aprovechar al máximo los recursos que se inviertan para su preparación.

Pero el postgrado, tendrá otra consecuencia no menos importante para nuestro medio. Está previsto que sea un vehículo de integración regional, pues esperamos que servirá para atraer estudiantes de la región, a los que se les ofrecerán becas de estudio financiadas con fondos del PEDECIBA, dará la oportunidad de invitar investigadores de la región o de fuera de ella para dictar cursos avanzados, y nos pondrá en contacto con otros centros de matemática a través de los viajes de tesistas de nuestro postgrado, que irán a ser asesorados por sus especialistas.

Por supuesto que los planes de integración regional de nuestro Centro no se limitan a lo que concierne a los cursos de postgrado. Aspiramos a participar en grupos de investigación mixtos para el estudio de problemas de interés mutuo, y a afianzar desde Montevideo, los vínculos fraternales que muchos de los integrantes del Centro establecimos con los colegas amigos que nos brindaron su hospitalidad en Argentina, Brasil, Chile, México, Venezuela. Sin duda, la oportunidad no buscada, pero en definitiva aprovechada de desarrollar nuestra labor en universidades o centros de otros países de la región, nos ha dado una perspectiva latinoamericana de nuestra actividad científica, a la que no queremos renunciar, sino, por el contrario, profundizar desde nuestro lugar de retorno.

Nos ha parecido oportuno este momento en el que acaba de integrarse el Area de Matemática del Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas, y en el que estamos intentando poner en marcha el Centro de Matemática y los cursos de postgrado, para detenernos a recordar a Laguardia, y a dedicarle la tarea que hemos emprendido.

No vamos a esperar a acumular resultados, que siempre van a parecernos parciales, incompletos, y nunca nos van a satisfacer como un homenaje suficiente. Vamos a dedicar a Laguardia, en cambio, sin ninguna limitación impuesta por nuestras capacidades o las circunstancias que nos rodeen, nuestros proyectos más ambiciosos. Y vamos también a juntar nuestras fuerzas, apoyándonos mutuamente, organizando nuestras acciones, evaluando qué es prioritario, tomando todas las previsiones necesarias para no desgastarnos en fricciones inútiles, para realizar nuestros proyectos entre todos, en una medida que podamos llegar a considerar digna del profundo respeto y del cálido afecto que guardamos por su memoria.

Problemas de filosofía de la matemática, de sus fundamentos y metodología.

J. L. Massera

Investigar, en resumidas cuentas, es hacerse preguntas - si es posible, interesantes - y tratar de contestarlas lo mejor que se pueda. Hace ya muchos años, me hice varias preguntas de matemática y aparentemente, algunas contestaciones que dí tuvieron interés.

Hoy me hago preguntas acerca de la matemática y mi trabajo de investigación tratará de darles respuesta. Hoy por hoy, todavía no tengo respuestas que me satisfagan plenamente, quizás de ninguna de las preguntas. Tampoco me satisfacen las respuestas que muchos filósofos y matemáticos han dado a ellas. la vida dirá si tengo algún éxito en la empresa que me he propuesto.

¿Qué preguntas? Son muchas y, para muchos, resultarán extrañas o sorprendentes.

¿Qué es la matemática? ¿cuál es la naturaleza de los objetos - llamémoslos así - matemáticos? ¿Existe la verdad en la matemática y, si existe, en qué consiste?

¿Cuál es la relación entre la matemática y la realidad material? ¿Es cierto que la matemática es adecuada para representarla? Si efectivamente es así, ¿por qué?

Para empezar, alcanza. Después se irán derivando muchas otras.

Son preguntas viejas, muy viejas. Se las han formulado muchos antes que yo. Y, sin embargo, como ya he dicho, no sólo tengo dudas acerca de mis posibles respuestas, sino que las que otros han dado tampoco me convencen mucho. En todo caso, estoy persuadido de que no es fácil contestarlas; dicho con mayor modestia, no creo que a mí me sea fácil contestarlas. Casi todos los grandes filósofos se han ocupado de la matemática y de estas preguntas; por algo será. Y también no pocos matemáticos, especialmente viejos, como yo.

Jean Dieudonné, a quien creo que, sin jactancia, puedo llamar mi buen amigo, y a quien admiro como matemático de primer nivel, y por su buen humor y buen sentido, típicamente franceses, ha dicho: "95 % de los matemáticos se burlan locamente de lo que puedan hacer todos los lógicos y todos los filósofos. Tales cosas no les interesan en absoluto. " A mí no me pasa eso, que me perdone Dieudonné; supongo que pertenezco al 5 % residual.

Una respuesta a las preguntas las da el célebre aforismo: " La matemática es la ciencia en que no se sabe de qué se está hablando ni si lo que se dice es cierto."

Pero, ¿el aforismo mismo es cierto? 'Pienso que nadie lo cree del todo... Y, sin embargo, como suele suceder con muchos aforismos de este tipo, seguramente encierra una parte de verdad no pequeña.

Entremos un poco más en materia. Creo que actualmente casi nadie discute que la matemática y sus conceptos iniciales tuvieron su origen en el enfrentamiento real de las sociedades primitivas con la realidad material, en operaciones concretas con objetos reales concretos. A ello apuntan claramente los estudios de la historia muy antigua y de la prehistoria. A la misma conclusión se llega por la vía - quizás equivalente - del estudio antropológico de tribus más o menos contemporáneas pero muy primitivas en su estadio de desarrollo. Ahí aparecen los primeros rudimentos del concepto de número natural - no casualmente enlazado al de correspondencia biunívoca o biyectiva entre conjuntos finitos - y de figuras geométricas, y a las más elementales operaciones con aquellos y propiedades de éstas. Citemos, como único ejemplo, el conocimiento, en Babilonia, del triángulo rectángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, que presupone un caso particular notable del teorema de Pitágoras o, más bien, de su nunca enunciado recíproco. Hay evidencias de que una cuerda anudada a intervalos iguales era utilizada por los constructores de la época para formar materialmente el triángulo y, por tanto, su ángulo recto, con obvias y útiles aplicaciones a la arquitectura.

Todo esto representa "saberes" auténticos de esas sociedades primitivas. Pero todavía no constituyen una ciencia. En todas las ramas del conocimiento humano se da un momento crucial, un salto cualitativo en que los "saberes" primigenios se generalizan organizan y estructuran en una ciencia propiamente dicha. Para la matemática, parece indiscutible que ese salto se produjo en Grecia (2) y que se manifestó probablemente, en una época muy antigua de su historia. "No ignoras que los expertos en geometría, cálculo y otros estudios de esta clase presuponen como conocidas, cuando investigan, nociones del tipo de lo par y lo impar, las figuras, las tres clases de ángulos, y otras similares. Y estas nociones son las que convierten en hipótesis, sin que estimen ya que sea necesario justificarlas ni a sí mismos ni a los demás, pues entienden que son evidentes para todos. Finalmente, a partir de estas hipótesisy descendiendo uno por uno todos los peldaños que quedan, llegan a la conclusión demostrada que se proponían hallar (...)" (3). Kant, en el prólogo a la segunda edición de la "Crítica de la razón pura" , planteó también el asunto con aguda visión: "La matemática ha marchado por el camino seguro de la ciencia , desde los tiempos más remotos que alcanza la historia de la razón humana, en el admirable pueblo griego. (...) ese cambio es de atribuir a una revolución que la feliz ocurrencia de un solo hombre llevó a cabo (...) pues encontró que no tenía que rastrear lo que veía en la figura o aun en el mero concepto de ella y, por decirlo así, aprender de ella sus propiedades, sino que tenía que producirla por medio de lo que, según conceptos, él mismo había pensado y expuesto en ella a priori (por construcción) y que, para saber con seguridad algo a priori , no debía atribuir nada a la cosa, a no ser lo que se sigue necesariamente de aquello que él mismo, conformemente a su concepto, hubiese puesto en ella." (4)

En otras palabras, se trataba de concebir la matemática como un sistema hipotético-deductivo, sobrentendiéndose que la deducción debía hacerse de acuerdo a las reglas de la lógica formal. Ese proyecto tuvo su culminación en los "Elementos " de Euclides (siglo III A. C), de una asombrosa perfección para la época,que permaneció como modelo casi insuperable durante más de dos milenios, hasta la ácida crítica de Hilbert en sus "Principia Mathematica" (1910). Esas críticas ajustaron muchos detalles, pero no hicieron cambios sustanciales en la concepción euclidiana básica.

Había, pues que partir de postulados o axiomas y, de ahí, construir la matemática por la aplicación estricta de la lógica formal.

Pero, entonces, surgen más preguntas. ¿Qué postulados? ¿De dónde surgen? ¿Cómo se eligen? El filólogo, historiador y filósofo húngaro contemporáneo A. Szabó ha dado una explicación de la selección de postulados que hace Euclides, que actualmente creo que es aceptada como correcta. Según él, los postulados son una respuesta "autoritaria" a las aporías de Zenón de Elea, que sumían en confusión y ponían en tela de juicio principios de las cosas e ideas que parecen evidentes. Ante la impotencia de la razón para refutar las aporías - lo que conduciría a la matemática racional a un callejón sin salida -, se decide tomar como punto de partida a algunos de aquellos principios "evidentes" para deducir de ellos, por el razonamiento, todos los teoremas matemáticos. La comparación del texto de algunos de los postulados euclidianos con las aporías pone de manifiesto, de una manera que salta a los ojos, la similitud de aquéllos con lo que podríamos llamar el "negativo" de éstas . De ese modo, se encuentra la manera de dar a la matemática una "solidez hipotética",valga la paradoja. Vale la pena señalar desde ya que este atajo de los postulados está esencialmente provocado por el carácter dialéctico, contradictorio, inherente a la idea del infinito, que es el corazón de las aporías de Zenón; esas contradicciones se intenta encerrarlas en la jaula de los postulados, para que no molesten más. Esta meta, ¿Realmente se ha logrado?

\- - - - - -

Vayamos a la otra vertiente del proceso, el razonamiento o la deducción, es decir, la aplicación de las reglas de la lógica formal (para precisar y para entendernos cómodamente, digamos "aristotélica"). Para muchos,estas reglas son a-históricas o, si se quiere, innatas al pensamiento humano. Discrepamos con esta opinión: ni ontológica ni filosóficamente el hombre razona siempre correctamente. Para citar un solo ejemplo, Platón, en casi todos sus diálogos, comete paralogismos más o menos groseros, que, a veces, desconciertan a sus comentadores. Lo importante, en realidad, no son los errores del individuo Platón - o Sócrates -, sino el hecho de que esos errores eran pasados por alto, aceptados o tolerados sin protesta por el amplio público culto ateniense.

Surgen, entonces, en tropel, una nueva y larga serie de preguntas: ¿qué es la lógica?, ¿qué es el razonamiento?, ¿cuál es su origen?, ¿en qué sentido - si es que existe alguno - puede decirse que la lógica es verdadera? Inclusive, vista la aparición, en los estudios de este siglo, de diferentes estructuras y concepciones lógicas, hay que preguntarse: ¿que lógica?, ¿cuál o cuáles son apropiadas a la matemática?,¿la estructura lógica de la matemática da a ésta garantías de certeza?, ¿qué clase de certeza?, ¿certeza de qué?

Decíamos antes que discrepamos con una concepción apriorística de la lógica. Estamos convencidos de que ésta es el resultado o la condensación de un larguísimo proceso acumulativo histórico de experiencias de la sociedad humana, que van decantando la validez, en determinadas circunstancias , de ciertas formas o reglas de la elaboración mental de los datos de la experiencia, y de su comprobación - o refutación - por la actividad práctica. Pero, aún compartiendo este punto de vista, todas las preguntas, esencialmente,siguen en pie.

Entre las determinadas circunstancias en que puede apostarse razonablemente a la validez de la lógica formal clásica, hay una ineludible: es preciso que las cosas, ideas, etc. de que se habla tengan una cierta fijeza, inmovilidad, ausencia de cotradicciones internas (¿existen realmente cosas o ideas que cumplan esta condición, por lo menos de una manera absoluta?). Ahora bien, precisamente los matemáticos sienten una pasión casi morbosa por el infinito. Es cierto que existe la matemática discreta, pero creo que es indiscutible que ella constituye una parte muy pequeña del gigantesco edificio matemático. Por otra parte, ¿aún ella está realmente vacunada contra el virus del infinito? Y el infinito, creo que todos convendrán en ello, no sólo Zenón, es esencialmente dialéctico, rezuma contradicciones.

Pensemos en los tiempos en que fue configurado, trabajosamente, el cálculo infinitesimal. ¡Cuántas imprecisiones, Cuántas ideas no del todo claras, cuántos apartamientos del uso estricto de la lógica formal! Cuando Euler afirma, sin molestarse en dar una "demostración" de su aserto, que $1 - 1 + 1 - 1 + . . . = 1/2$, cualquier simple estudiante universitario de matemática protestará airadamente contra semejante disparate; sólo aquel que prosiga suficientemente sus estudios aplicando conceptos modernos, de este siglo, sobre suma de series, llegará a convencerse de que Euler tiene razón, y hasta admirará, como todos nosotros, la intuición y audacia geniales del insigne matemático que le permitieron estampar semejante igualdad.

Aquella regla inicial es la que Marx consideraba la "mística" del cálculo infinitesimal, y creo que tenía razón. Tuvieron que transcurrir dos siglos para llegar a la "aritmetización" del análisis, a definiciones satisfactorias de número real, al ahora clásico método de ε-δ para tratar la continuidad, etc. En última instancia, estos métodos reducen la cuestión a un enfoque de teoría de conjuntos o de topología general. Ahora bien, precisamente en esos mismos años, Cantor plantea con total amplitud e irrestricta audacia el concepto general de conjunto y del infinito; es el más "infinitista" de todos los matemáticos. Vale la pena citar algunas palabras suyas; "Sin un pequeño grano de metafísica, no es posible, a mi juicio, fundar una ciencia exacta. La metafísica, tal como la concibo, es la ciencia de lo que es, es decir, de lo que existe, por lo tanto, del mundo tal como es en sí y no tal como se nos aparece." La más alta perfección de Dios es la posibilidad de crear un conjunto infinito y su inmensa bondad lo condujo a crearlo." (loc. cita en nota (1), pág. 59).

La tendencia general del proceso de rigorización de la matemática, más particularmente, del análisis, me parece evidente: relegar las dificultades de la dialéctica y sus contradicciones, en las más diversas ramas de la matemática, al ámbito de la teoría de los conjuntos. Y entonces florecieron en esta última, abundantemente, paradojas, antinomias, problemas desconcertantes; Zenón parece ingenuo ante estos "aprendices de brujo" modernos. Surgió entonces una tentativa, de segundo grado o nivel, podrímos decir, en que se trató de establecer sistemas axiomáticos para la propia teoría de los conjuntos, de los cuales el de Zermelo- Fraenkel (y Skolem) es el más generalmente aceptado. ¿Se logró, entonces, por este procedimiento en dos etapas, "encerrar los demonios de la dialéctica en la segura jaula de los axiomas de la teoría de los conjuntos"? Pienso que no, que tal empresa está, en esencia, condenada al fracaso, por la naturaleza misma, dialéctica, del pensamiento y de la idea del infinito; y creo que, en el fondo, muchos comparten este punto de vista. Russell mismo mostró que el propio universo cantoriano, el conjunto de todos los conjuntos, es contradictorio.

En esta situación, surgen dos tendencias opuestas. Una, de naturaleza conservadora, que inspira la corriente llamada "constructivismo" o "intuicionismo". En esencia consiste en poner vallas y establecer vetos a ciertas zonas de la matemática y a determinados procedimientos de su creación y entendimiento. Sin duda, estas ablaciones quirúrgicas limitan grandemente la zona de peligros dialécticos más virulentos, pero a costa de un considerable empobrecimiento del ámbito de la matemática. Dicho sea de paso, la cirugía intuicionista no se limita a la matemática, sino que incursiona en la propia lógica aristotélica; en particular, rechaza el tertium non datur, su lógica no es la lógica formal clásica. Aparte del ascetismo inmenso que importa esta postura, ¿el constructivismo elimina efectivamente la dialéctica y la contradicción interna? Estoy persuadido de que no, aunque no pueda quizás demostrarlo nunca (¿y que significa "demostrarlo". . . ?).

La otra corriente es la que abarca a la mayoría de los matemáticos, probablemente el 95 % de que habla Dieudonné, y ciertamente a otros, entre ellos yo, que si bien no entramos, quizás en el 95 % , nos sentimos confortablemente incluidos en esa gran mayoría. Su lema podría ser la célebre frase: "Nadie podrá expulsarnos del Paraíso que Cantor nos ha creado". Recuerdo que, hace casi 50 años, cuando estudiaba junto con Laguardia el libro estupendo y fermental de Lebesgue "Leçons sur l´intégration et la recherche des fonctions primitives". Laguardia manifestaba su simpatía por la posición abierta de Lebesgue sobre estos temas, que expresa en varios lugares del libro. (5)

Sin embargo, esta inmensa masa de pecadores que pretenden, pese a todo vivir en el Paraíso, ¿no deberían fijarse algunas reglas de conducta que les permitieran, si fuera posible, evitar las trampas ocultas de los más graves pecados mortales?, ¿cuáles podrían ser estas reglas?.

\- - - - - -

Pero retrocedamos, otra vez, un poco. En la época de oro de la axiomática, a comienzos de siglo, cuando todavía los Gödel y los Cohen no habían echado sobre ella sus correspondientes baldazos de agua fría, Russell soñaba con una total "logización" de la matemática, mejor dicho, consideraba ésta apenas como una derivación o desarrollo de la lógica. Del punto de vista de los contenidos, eso significa que, si se remplazan los nombres de los diferentes objetos matemáticos por sus definiciones in extenso, totalmente explícitas, todos los teoremas se transforman en meras tautologías (A es A), en que intervendrían sólo los conceptos fundamentales incluidos en los postulados. La conclusión - aun admitiendo que deba ser aceptada o que pueda serlo - sería, sin duda, decepcionante para todo matemático verdadero. ¿A quién puede apasionar una tautología? Pero esto promueve una pregunta más de nuestra larga lista: ¿esa conclusión es realmente correcta? Guiémosnos por una analogía tomada de la física: ¿la reducción - llevada a cabo por la teoría cinética de los gases, para hablar correctamente - de la termodinámica y de sus leyes específicas, a la mecánica y las leyes mecánicas, ¿implica la desaparición de la termodinámica como ciencia y de sus categorías principales, calor, temperatura, entropía?

Pienso que no es así. las definiciones de los objetos matemáticos - y, en nuestras primeras preguntas, estaba planteado el tema de cuál es su naturaleza, filosóficamente hablando - ¿no marca tipos determinados, nudos, puntos críticos, en el desarrollo de nuestra ciencia que indican, con su presencia, cosas auténticamente nuevas, que tienen una gerarquía especial, que no son meras abreviaturas, y que deben integrar, casi al mismo nivel de las nociones indefinidas básicas de los postulados, el elenco de los conceptos y categorías principales de tal o cual rama de la matemática? ¿Las largas, a menudo larguísimas, cadenas de pasos lógicos que conducen de los postulados a los teoremas, no implican, de acuerdo a una de las leyes de la dialéctica, un "tránsito de la cantidad a la calidad"? Cualquier matemático creador sabe, por agotadora y difícil experiencia, que aquellos objetos son a menudo extremadamente "duros" y "reacios", que constituyen verdaderas y sólidas "fortalezas" cuya conquista cuesta enormes esfuerzos a los andantes caballeros matemáticos. Algunas de estas fortalezas permanecen incólumes durante siglos - recordemos el teorema de Fermat, la larga historia de los intentos de demostrar el V Postulado de Euclides, y tantos otros casos - ; inclusive, pese al fracaso del objetivo mismo de aquella conquista, las "armas" ideadas para intentar alcanzarla han dado origen, muchas veces, a ramas enteras, nuevas e importantísimas de la matemática. Es bastante difícil reconciliar estas situaciones reales con la idea, casi mecánica y automática, de una tautología. ¿No hay que revisar a fondo el pensamiento russelliano para acercarse a una concepción más realista y auténtica de lo que es efectivamente la matemática, aun si se la concibe en el marco del esquema "clásico"? ¿Cómo hacerlo? ¿No exige esta empresa una consideración mucho más dialéctica de la matemática misma, insisto, aun de sus ramas más clásicas?

- - - - - -

Permítaseme, todavía, encarar uno o dos enfoques más de estos problemas. Por ejemplo, aquél que podríamos denominar de la "matemática creadora" y la "matemática expositiva", contradictoria y dialécticamente entrelazadas. ¿A qué me refiero? Cuando un matemático descubre un teorema o crea una teoría, el proceso de esta creación incluye, sin duda, momentos de deducción, de aplicación de la lógica formal;pero no se reduce sólo a ellos y es incluso probable que esos momentos sean sólo una fracción relativamente menor, en cantidad y en calidad, del proceso creador. Las otras partes, que muchas veces comprenden momentos decisivos del mismo, - aunque, en medidas de tiempo, pueden ser muy reducidos, a veces casi instantáneos - , están generalmente formados por una mezcla compleja y relativamente confusa de una cantidad de ingredientes: ensayos de comprensión reflexiva; juegos de hipótesis o conjeturas que se ponen a prueba, que puede resultar o no exitosa; trechos de inducción incompleta de estas experiencias mentales; calificación de resultados parciales "positivos" ya sólidamente adquiridos, con la búsqueda de "contraejemplos" que los acotan en su validez y dimensión o que sugieren nuevas indagaciones enriquecedoras; momentos súbitos de "inspiración" o de "iluminación" que, como un relámpago, ponen de relieve momentos esenciales de avance del conocimiento y que, en general, surgen en el cielo plomizo de largas búsquedas grises y aparentemente estériles; etc., etc. Pocos matemáticos hablan de su propia experiencia de estos alumbramientos, a la vez dolorosos y gozosos, a menudo confusos; sienten una especie de pudor vergonzoso de revelar tales intimidades, y es lástima que así sea. Son relativamente excepcionales y extraordinariamente instructivos relatos como el célebre de Poincaré sobre el proceso de su descubrimiento de las funciones fuchsianas y los intentos de explicación que él sugiere para los momentos cruciales del mismo. (6) Otros matemáticos importantes, como Polya, han intentado exponerlos en varios pequeños y sabrosos ensayos acerca de lo que llama el "razonamiento plausible"; últimamente parece despertarse un mayor interés sobre estos temas y hasta se intenta sistematizarlos en forma necesariamente muy poco "clásicas".

En general, lo que se expone a la consideración pública del mundo matemático es el fruto final, pulido y reluciente, inatacable, desarrollado bajo formas deductivas lógicamente impecables, de esos oscuros procesos de alumbramiento. No cabe duda de que, para el creador, es también motivo de legítimo orgullo poder exhibirlo así, acabado y perfecto, porque incluso este acabado muchas veces exige no pocos esfuerzos, que no son de poca importancia. Demostrar - en este sentido, que algo debe tener que ver con el origen de la palabra - implica la satisfacción de dominar el proceso creador y sus máculas de imperfección, lo que es también un juego apasionante, una segunda victoria, que importa algo de jactancia, como ocurre en toda victoria. Pero, ¿es realmente una victoria?, ¿es justo esconder el momento anterior, propiamente creador, y su "lógica" interna, que, por cierto, muchas veces tiene poco que ver con la lógica formal clásica? Es lo que Laguardia llamaba "retirar la escalera" que llevó al descubrimiento, lo que hace que éste aparezca, quizás demasiado despegado y aparentemente ajeno a la tierra nutricia que le dio nacimiento. Laguardia veía negativamente el hecho, pensado incluso desde el ángulo de una alta pedagogía científica.

Por último, unas pocas palabras sobre un tema muy amplio, complejo, sin duda muy difícil, el de la aplicación de la matemática al conocimiento de la realidad material y a las ciencias de la naturaleza. Se suele decir, inclusive, que la matemática es el lenguaje natural de la ciencia; o bien, que un conjunto de conocimientos sobre el mundo se puede considerar que es una ciencia recién cuando se logra expresarlos baj forma matemática.

¿que hay de cierto en esto? ¿Por qué la matemática sería este lenguaje adecuado a la ciencia? En el caso de la física, esa adecuación parece bastante evidente, y en ella puede, aún en los tiempos modernos, una interacción real entre ambas ciencias - estoy pensando, por ejemplo, en la función δ concebida por Dirac y la teoría de las distribuciones de Schwartz -. ¿Es igualmente cierto en el caso de otras ciencias? Algunos lo niegan. Pero incluso éstos piensan que ciertos brotes de ramas recientes o muy recientes de la matemática, muy alejadas del análisis clásico, puden dar solución al problema.

Ultimamente, esta relación tiende a pensarse no tanto en términos de aplicación de la matemática y de sus resultados al material fáctico de otras ciencias, como de "modelización" matemática de este material. Desde este ángulo, la mecánica racional, por ejemplo, incluso llevada al nivel de una axiomatización completa, o casi, de las leyes de la mecánica física, sería un modelo matemático de esta faceta de la realidad. En principio, esta manera de ver parece correcta y la explotación máxima de las posibilidades del modelo, en el sentido de extraer consecuencias matemáticas del mismo y contrastarlas con fenómenos reales, quizás aún no observados, es plausible y da, en muchos casos, resultados extraordinarios. El descubrimiento de Neptuno por Leverrier es un ejemplo clásico; otros abundan en la física del siglo XX. Pero aún en el caso de fracasos, es decir, de consecuencias del modelo que no se corresponden con la realidad, el resultado es aleccionante en el sentido de que, por lo menos, implica un toque de atención para examinar a fondo la relación de la realidad con el modelo, la posible inadecuación de éste, y eventualmente de las leyes naturales en que se basó la modelación. Por lo mismo, me parecen peligrosas ciertas tendencias, que creo observar, a absolutizar demasiado el método de la modelación como método de investigación de las ciencias fácticas. El modelo es y será siempre, necesariamente, una abstracción y una simplificación de la realidad o, expresándolo en sentido inverso, la realidad, infinitamente rica, tarde o temprano desbordará o incluso contradirá los modelos, los hará estallar. En estas crisis, ¿alcanzará con perfeccionar el modelo?,¿será necesario sustituirlo por otro radicalmente diferente? A estas preguntas subyacen otras interrogantes más graves: ¿será siempre posible encontrar un modelo matemático adecuado? Que es casi lo mismo que reiterar, de otro modo una pregunta anterior: ¿es cierto que, como decía Galileo, el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático? Lo que, a su vez, exige comprender claramente qué se quiere decir con esto. En cualquier caso, me parece que debe quedar fuera de cuestión que la ciencia fáctica, o sea, el conocimiento científico adecuado a la realidad debe siempre prevalecer y toca a la ulterior elaboración ideal del mismo, en particular, a la elaboración matemática, buscar una adaptación más completa.

Porque creo que lo fundamental, en estos problemas, es que están en juego dos procesos dialécticos, en principio independientes. Uno, es el de las ciencias fácticas, en su relación con la realidad material: cómo el conocimiento se modifica, gradualmente o a través de crisis más radicales, para reflejar adecuadamente lo real; aqui nos encontramos en el terreno implacablemente exigente de la teoría del conocimiento y de la verificación de éste en la actividad práctica. El otro, es el de la matemática o, más generalmente, de las ciencias formales, que tienen un "motor" dialéctico interno que provoca su desarrollo acelerado. Desarrollo que, por supuesto, también sigue teniendo poderosas motivaciones externas.

A propósito de ésto, surge otra pregunta: ¿debemos buscar conscientemente la supeditación de una de las dialécticas a la otra? el físico alemán contemporáneo H. J. Treder expresa esto de una manera incisiva en el título de uno de sus ensayos: "¿Geometrización de la física o "fisicalización" de la geometría?" (7) Digo bien, en el título, porque en el contenido del ensayo, y aunque parezca paradojal siendo su autor un físico, la parte final de la pregunta se borra poco después del comienzo de aquél y prevalece netamente la tendencia geometrizante. Nos parece que la experiencia histórica muestra la inconveniencia de volcarse hacia uno de los dos extremos. Todo indica que es conveniente, para el proceso general del conocimiento, que cada una de las dos dialécticas se desarrolle dentro de su propia autonomía, al mismo tiempo que, existe una tercer dialéctica, que conecta y enriquece a una y otra.

En última instancia, ¿no será el complejo juego de esta tercer dialéctica el que asegura la superación del artificial enfrentamiento entre las dos opciones anteriores? Dicho de otro modo, ¿que sea por ahí que resultará verdad, en definitiva, que la realidad se expresa en el lenguaje de la matemática?

****

Notas

(1) Penser les mathématiques, Ed. du Seuil, Paris 1982, pág. 16.

(2) Que tal viraje en el encaramiento de la matemática se haya dado en Grecia no parece razonable que pueda atribuirse a la mera casualidad. Parece natural vincularlo al arte de discutir, argumentar, convencer, que va unido a la vida política de la democracia griega y que determinó el auge que adquirió el movimiento de los sofistas y el desarrollo de la lógica. En "Las Leyes" (641 e), Platón, pone en boca del Ateniense la afirmación de que: "Todos los griegos tienen la impresión de que nuestra ciudad es amiga de los discursos y gusta de discurrir."

(3) Platón, "La República" (510 cd). A Platón, que estimaba mucho la matemática, no le satisfacía la dependencia de los teoremas de ésta de hipótesis que, a su juicio, no estaban plenamente justificadas: "(. . .) la psique se ve obligada a usar hipótesis sin ir directamente a un primer principio, porque no puede elevarse por encima de lo hipotético (. . .)."(ibid, 511 a). Por eso, le contrapone los resultados "firmes" que daría lo que llama la "dialéctica", en una acepción muy particular de esta palabra: "Debes entender también que por objetos inteligibles de segunda clase quiero señalar aquéllos que la razón misma aprehende a través de la dialéctica. En éstos, la razón no considera las hipótesis como sus primeros principios, sino como hipótesis en su sentido más estricto, esto es, como escalones y puntos de apoyo por los que se alcanza lo que se encuentra más allá de toda hipótesis - el primer principio de todo. Alcanzado este principio y siguiendo todas las todas las consecuencias que de él se derivan, la razón desciende hasta la conclusión sin hacer uso de ningún otro dato sensible sino que pasa de idea a idea para terminar tambien en una idea. "(ibid, 511 bc; debo agradecer al prof. J. Caño Guiral la traducción directa del griego de las tres citas): Demás está decir que semejante ciencia deductiva desprovista de hipótesis, salvo eventualmente, el misterioso "primer principio de todo", "que se encuentra más allá de toda hipótesis", es una pura quimera y, en ninguna parte de su dilatada obra puede Platón dar una versión coherente y concreta de la misma.

(4) M. Kant, "Crítica de la razón pura", 7a. Ed. Ed. Porrúa, México 1987; versión española de M. García Morente y m. Fernández Núñez; Prólogo de la segunda edición (1787), pág. 12; los subrayados son de MK. La traducción de García Morente es excelente. Sin embargo, he introducido algunos pequeños cambios, que me parecen preferibles, haciendo la comparación con el original alemán, I. Kant, "Kritik der reinen Vernunft", 3 Aufl., Riga 1790, S. X-XII.

(5) Ed. Gauthier-Villars, Paris 1928, segunda edición:

"La totalización de M. Denjoy utiliza esencialmente la recurrencia transfinita; me ha sido pues necesario emplear el transfinito más deliberadamente de como lo había hecho en la primera edición."; "Es con la misma timidez que había hablado de los números transfinitos."; "¿No habría cierta hipocresía en prohibir a los otros el empleo del infinitamente pequeño, tan cómodo y sugestivo, si uno mismo continúa utilizándolo para buscar razonamientos?" (Prefacio a la Segunda Edición, pág. XI).

"Empleo conscientemente la palabra convencer para destacar que, a mi juicio, las razones para declararse satisfecho por un razonamiento son de naturaleza psicológica, en matemática como en otras cosas. La lógica nos da razones para rechazar ciertos razonamientos, ella no puede hacernos creer en un razonamiento." (Nota (1) al pie de la pág. 328).

"No se podría considerar esto como una justificación del razonamiento por recurrencia transfinita. Este modo de razonamiento es nuevo, irreductible a los otros, y es precisamente por eso que es potente y útil." (Págs. 330-331).

(6) H. Poincaré, "Science et méthode", Flammarion, Paris 1920, págs. 50-54.

(7) H. J. Treder, "Grosse Physiker und ihre Probleme", Akad. Vlg., Berlin 1983, S. 204-220.

Some properties of solutions to $u_t = (A(u))_{xx}$ which are related to the zeros of $A'(u)$.

Julio E. Bouillet
Departamento de Matemática, FCEyN,
Universidad de Buenos Aires,(1428) Buenos Aires, and Instituto Argentino de Matemática (CONICET) (1055) Buenos Aires.

The interest in studying the behaviour of a solution $u(x, t)$ to the equation

$$u_t = A(u)_{xx}, \tag{1}$$

$A(.)$ a monotone non-decreasing function, at points where $A'(u(x, t)) = 0$ may be motivated by these two observations: first, at those values $u = u(x, t)$ the parabolic operator

$$u_t - A(u)_{xx} = u_t - A'(u)u_{xx} - A''(u)(ux)^2$$

degenerates, that is, loses the only derivative of the second order u_{xx}: one may expect some behaviour of the solution u resembling that of a first order equation where information from initial values is transported, at finite speed, along characteristics.

Second, from the dynamics of fluids in porous media the equation

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad m > 1, \tag{2}$$

became worthy of study some forty years ago. Clearly, $A(u) : u^m$ is such that $A'(u) = mu^{m-1}$ vanishes when $u = 0$. As the solution is always assumed positive, it is interesting to see what happens when u reaches its minimun value zero. Consider now an initial value problem on the line, $x \in R$: if $u(x,0) > 0$ for all x one can prove that $u(x,t) > 0$ for all x and $t > 0$ (the techniques for proving this are essentially used below). Therefore we are interested in initial values $u(x,0)$ whose support is bounded on the, at least on one side, or such that $u(x,0)$ vanish identically on a interval.

For the porous media equation extensive literature is available (cf. [A], [V], and their references), and the discussion of initial value problems on the line is quite complete. A main tool in the study is the availability of a self-similar solution - called the Barenblatt solution - to an initial value problem with $u(x,0) = M\,\delta(x)$, δ the unit mass located at $x = 0$ (Obiously, $u(x, t+k)$, $k > 0$, will have the function $u(x, k)$ for initial values). This solution has the form

$$u_B(x,t) = t^{-1/(m+1)} \left\{ \left(B - (m-1)\,(2m(m+1)\,)^{-1}(x/t^{1/(m+1)}\,)^2 \,\right)_+ \right\}^{1/(m-1)},$$

where $(\ .\ )_+ := \max(\ .\ ,0)$. $B > 0$ is determined by the condition that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = M.$$

Observe that for $m \to 1$ we formally get the Poisson kernel for the heat equation $u_t = u_{xx}$, i.e. $A(u) := u$. But in contrast with the Poisson kernel, the evolution of the unit mass at $x = 0$ now has compact support for all $t > 0$: the Barenblatt solutions have support

$$\left\{ \ x \in R : |x| \le B^{1/2}(\,2m(m+1)/(m-1)\,)^{1/2}\, t^{1/(m+1)} \ \right\}, \quad t > 0.$$

These solutions are not classical because $(u^{m-1})_x$ has jump discontinuities across the curves bounding the support above.

A variant of the Barenblatt solutions, namely

$$u(x,t)=(T-t)^{-1/(m+1)}\{(((m-1)/(2m(m+1)))\,(x/(T-t)^{1/(m+1)})^2)_+\}^{1/(m-1)},$$
$x \geq 0,$
$\qquad = 0$ for $x < 0, \quad 0 < t < T,$

furnishes an example of "waiting time" : during the lapse $(0,T)$ the support of the solution does not expand to the left, as compared to the support of the Barenblatt solutions. This is another striking difference between the behavior of solutions to (2) and those of the heat equation, at $u = 0$.

these two examples suggest that solutions of equations like (1) that degenerate at certain values of u may exhibit a behavior like those of a first order conservation law, take for example $u_t + (u^2)_x = 0$, with a non-negative initial value supported in $[0,1]$. Further connections can be found between conservation laws and the porous media equation (cf, [A], [V]); we shall comment only on the property of finite speed of propagation of the support of a solution of (1).

Another tool in the study of parabolic equations like (1) is the existence of comparison theorems, asserting, roughly speaking, that if u and v are two solutions and $u(x,0) \leq v(x,0)$, then $u(x,t) \leq v(x,t)$ for all x and $t > 0$. For example, if $u(x,0) > 0$ for all x, then $u(x,t) \geq 0$, a weaker statement, similar to the one made above.

As mentioned before, the properties of a non-negative solution of (2) are very well known. when we consider instead the general equation (1) we realise that there is no analogue of the Barenblat solution due to the fact that the only scaling that we can perform - leaving (1) invariant- is $x \to kx, \ \ t \to k^2 t$. So we are left with self-similar solutions of the type $u = u(x/t^{1/2})$, admitting two initial values

$$u(x,0) = C_s \quad \text{for} \quad x < 0, \qquad\qquad u(x,0) = C_d \quad \text{for} \quad x > 0.$$

Although a unique solution can be found for any pair C_s, C_d (this amounts to solving a boundary value problem in $(-\infty,+\infty)$ for

$(-y/2)u'(y) = (A(u(Y)))''$, $y = x/t^{1/2}$), these self-similar solutions are less useful than Barenblatt's, because their "total mass" $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = \infty$.

Our purpose in this lecture is to describe some results on bounded support for solutions of (1) using comparison with certain solutions of an ad hoc equation

$$u_t = A(t\,u)_{xx}, \tag{3}$$

Here the coefficients vary with $t > 0$, and become highly degenerated at $t = 0$.

Our results are not restricted to non-negative solutions : in fact, if $A'(C) = 0$, we may study the evolution of initial values $u(x,0)$ such that $u(x,0) - C$ be of compact support, or exhibit intervals where $u(x,0) \equiv C$. Several values of C may exist that verify $A'(C) = 0$: we shall restrict attention to the case of only one C that we may assume to be zero by the change of unknown $u \to u - C$.

Consider the following solution to equation (3) :

$$w(x,t) = (1/t)\,v(x/t),$$

where $v = v(r)$ is an even function of $r \in R$ implicitely given by

$$r^2 = 2\int_v^{v(0)} dA(s)/s\,, \tag{4}$$

the value $v(0)$ - may be negative - is related to the "total mass"

$\int_{-\infty}^{+\infty} v(r)dr = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)dx$, a parameter to be determined.

We see from this definition that $w(x,t)$ has compact support in x for fixed $t > 0$ if and only if

$\int_{0+} dA(s)/s < +\infty$ (or $\int^{0-} dA(s)/s > -\infty$ in case $v(0) < 0$

By a standard argument we see that $\lim_{t\to 0_+} w(x,t) = \text{constant}.\delta(x)$.

Solutions of (1) that take both positive and negative values display a novel feature : negative initial values may evolve keeping their support bounded, while positive initial values may lose the compact support property. We anticipate that for solutions with initial values of compact support finite speed of expansion of the support of $u+$ or $u-$
will be related to existence of integrals like

$$\text{(i)} \int_{0+} dA(s)/s\,, \text{ and } \quad \text{(ii)} \int^{0-} dA(s)/s \qquad (5)$$

and this existence depends only on the behavior of the monotone function $A(s)$ near $s = 0$.

To be specific, assume

$$\text{(i)} \int_{0+}^{h} dA(s)/s = +\infty, \ \text{(ii)} \int_{-h}^{0-} dA(s)/s > -\infty, \text{ for certain } h > 0. \quad (6)$$

Assume that the initial values $u(x,0)$ of the solution u to (1) be such that support $u(x,0) \subset [a,b]$, and $u(x,0) > 0$, $u(z,0) < 0$ for $a < x < a' < b' < z < b$, i.e., $u(x,0)$ is positive near $x = a$ and negative near $x = b$.

We shall show that $u(x,t) > 0$ for $x < a$ and small $t > 0$, and that the support of $u(x,t)$ is bounded to be right by $b + (t+1)(2\int_0^{v(0)} dA(s)/s)^{1/2}$, for certain $v(0) < 0$ and small $t > 0$.

To prove the first proposition, introduce

$U(x,t) := \int_{-\infty}^{x} u(x,t)dx$, formally a solution to

$$U_t = A(U_x)_x ,$$

with initial values

$U(x,0) = \int_{-\infty}^{x} u(x,0)dx$, $U(x,0) = 0$ for $x < a$.

Consider $Z(x,t) := \int_{-\infty}^{x/t} v(r)dr$, where $v(r)$ is the function introduced in (4), and $Z_x(x,t) = w(x,t)$. Z is the solution of

$$Z_t = A(tZ_x)_x$$

with initial values $Z(x,0) = \text{constant}.H(x)$, a Heaviside function with saltus at $x = 0$ (we shalltake the liberty of placing the origin wherever is convenient to us, and for righ now we need $a < 0 < a'$). Due to the hypothesis (6)(i) $v(r) > 0$ for all r, and thus $Z(x,t) > 0$ for all x.

We want to show that, for a suitable choice of $v(0)$, $Z(x,t) \leq U(x,t)$ for small $t > 0$ and $x < a$: this implies $u(x,t) > 0$ for all $x < a$. Assuming the contrary amounts to have $U(x,t) = 0$ for small $t > 0$ and all $x \leq$ certain $a(t)$ (Remark : our hypothesis imply that U is monotone inreasing for $x < a$ and for $x > b$, by comparison with constants). Therefore there must be, for each small positive t, a value $x(t)$ such that $Z > U$ for $x < x(t)$ and $Z(x(t),t) = U(x(t),t)$. Integrating the identity

$$(Z - U)_t = \{ A(tZ_x) - A(U_x) \}_x$$

gives

$$0 < \int_{-\infty}^{x(t)} (Z - U)(x,t)dx = \int [A(tZ_x) - A(U_x)]_{x=-\infty}^{x=x(t)} dt =$$

$$= \int [\, A(tZ_X) - A(U_X)\,]\,(x(t),t)dt.$$

Now $0 \le Z_X(x(t),t) \le U_X(x(t),t)$, and therefore $tZ_X(x(t),t) \le U_X(t),t)$ because we can take $0 < t < 1$.- It follows that the right-hand side above is ≤ 0, a contradiction.

The same trick gives the right bound for the support of u under assumption (6)(ii) : this time we need a negative v centered at $x = b$, and

$$Z(x,t) = \int_{x/(t+1)}^{\infty} v(r)dr$$

for small $t > 0$, to show that $U(x,t) \ge Z(x,t)$ and now Z has support bounded to the righ as stated.

this result can be slightly improved. The technique can be used to show that if $u(x,0) \equiv C$ in an interval [a,b] and both integrals in (5) are finite, then $u \equiv C$ on a region abutting [a,b] with $0 < t <$ certain T.
However, if either integral in (5) is infinite then this existence of a waiting time for the solution of (1) with initial values $u(x,0) \ge 0$, say, identically zero for $x \ge 0$, provided (5)(i) is finite : we define a comparison barrier

$$w(x,t) = (1/(T-t))\, v(x/(T-t)),$$

with $v(r)$ given by

$$r^2 = 2\int_0^v dA(s)/s \quad , \quad \text{for} \quad r > 0, \quad v > 0,$$

$v = 0$ for $r \le 0$. Assume now that for a certain $T > 1$,

$$1/T)\, v(x/T) \ge u(x,0) \ge 0.$$

Then for all $t > 0$ such that $T - t \ge 1$ we have $w(x,t) \ge u(x,t) \ge 0$, thus furnishing an example of positive wating time for a solution $u \ge 0$ of equation (1).

The condition for waiting time for an end-point of support of $u(x,0)$ where $u(x,0) < 0$ is related to the finiteness of the integral (5)(ii), of course.

In the preceding description of results that hold for solutions of $u_t = A(u)_{xx}$ that take values both above and below a critical value $u = C$, $A'(C) = 0$, we have avoided all reference to existence, regularity of solutions , assumption of initial values and even the meaning of the word solution : we remark here that existence of side limits for the solution $u(x,t)$ is needed in the comparison proof, and that if $u(x,t)$ takes the initial values in $L^1_{loc}(R)$, say, then $U(x,t) \to U(x,t)$ point-wise, and uniformily on compact sets.

Besides the present lecture, part of these results were reported in [B 1,2].

REFERENCES.

[A] D.G. Aronson, The porous Medium Equation, in Nonlinear Diffusion Probems, A. Fasano and M. Primicerio, Editors.
Lecture Notes in Mathematics 1224, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

[b1] J.E. Bouillet, Equations of conduction-diffusion type with singularities in the coefficients, Semestericht Funktionalanalysis Tübingen, Sommer-Semester 1987.

[B2] J.E. Bouillet, Evolution under $u_t = \alpha(u)_{xx}$ of compact perturbations of the constant state (Spanish) Comm. to the XXXVII Reunión Anual UMA, B. Blanca, Sep. 1987, to appear in Rev. Un. Mat. Argentina.

[V] J.L. Vázquez, Hyperbolic aspects in the theory of the porous medium equation, in Mètastability and incompletely posed problems, Proc. Workshops, Minneapolis Minn 1984/1985. IMA Vol. Math. Appl. 3 , 1987.

LA CLASE DE CONJUNTOS DE UNICIDAD CERRADOS PARA SERIES TRIGONOMETRICAS

Carlos Augusto Di Prisco
Departamento de Matemáticas.
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (I.V.I.C.).
Apartado 21827. Caracas 1020A
Venezuela

y

Carlos Enrique Uzcátegui
California Institute of Technology
Department of Mathematics
Pasadena . California
U.S.A.

INTRODUCCION

En estas notas expondremos un resultado. debido independientemente a R. Solovay y a R. Kaufman. que muestra cómo algunas técnicas e ideas de la teoría de conjuntos han arrojado luz sobre ciertos problemas clásicos de la teoría de series trigonométricas.

Como es bien conocido. el desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor surgió precisamente del análisis de problemas de convergencia de series trigonométricas y por lo tanto resulta reconfortante ver que resultados y técnicas de la teoría de conjuntos. aparecidos muy posteriormente. tengan interés para aquellas personas que se dedican al estudio de las series trigonométricas.

Sin duda alguna. el desarrollo reciente de la teoría de conjuntos ha sido explosivo y la teoría ha tomado su propio rumbo. Esto ha sido criticado algunas veces ya que los problemas de fundamentación de las matemáticas que originaron el estudio de la teoría de conjuntos se perdieron de vista en algunas ocasiones. Sin embargo. los problemas propios de esta teoría son. en si. problemas matemáticos de gran interés. y las técnicas que se han desarrollado para resolverlos (o al menos para atacarlos) son técnicas de una gran riqueza conceptual y estética. Por otra parte. como muestran los

resultados a ser expuestos a continuación, junto con otros resultados recientes, hay todavia una estrecha relación entre la teoria de conjuntos y problemas muy básicos de fundamentación de análisis matemático.
No prentendemos ningún tipo de originalidad en este trabajo, nuestro objetivo es simplemente ayudar a divulgar algunos resultados recientes que consideramos interesantes. Esta exposición está basada en el excelente y completo libro de A.S. Kechris y A. Louveau sobre el tema [Ke.Lo]. Este libro constituye una fuente invalorable de información y de problemas abiertos relativos a los conjuntos de unicidad de series trigonometricas. El presente trabajo habrá cumplido sus objetivos si el lector se siente estimulado a consultar el libro de Kechris y Louveau. Hemos consultado para la elaboración de este trabajo, además de las obras citadas en la bibliografia, las notas de una conferencia dictada en 1984 por R. Solovay en el marco del "Logic Colloquium 1984", llevado a cabo en la Universidad de Manchester, Inglaterra.

NOCIONES BASICAS DE LA TEORIA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Dado un espacio polaco E (es decir, un espacio métrico, separable y completo), podemos clasificar sus subconjuntos de acuerdo a la complejidad topológica.

Los borelianos son los subconjuntos que se obtienen cerrando la clase de los abiertos bajo las operaciones de complementacion y de unión numerable. Los borelianos, entonces, pueden organizarse en una jerarquia de ω_1 niveles (donde ω_1 es el primer cardinal no numerable). Usando la notación ya usual motivada por nociones de definibilidad, llamamos Σ^0_1 a la clase de los conjuntos abiertos de E, y Π^0_1 a la clase de los conjuntos cerrados de E., y en general,

$$\Sigma^0_\alpha = \{\bigcup_{n\in\omega} P_n | \forall n\in\omega . P_n \in \Pi^0_{\alpha_n} \text{ para algun } \alpha_n < \alpha\}$$

$$\Pi^0_\alpha = \{E - P \mid P \in \Sigma^0_\alpha\}.$$

DEFINICION: Un subconjunto $P \subseteq E$ se llama analitico si es la imagen de un boreliano por una función continua, es decir, si existe un espacio polaco X y una función continua $f: X \rightarrow E$ tal que para algún boreliano $B \subseteq X$ se tiene $f[B] = P$. Los complementos de conjuntos analíticos se llaman coanalíticos. Usamos la siguiente notación:

Σ^1_1: clase de los conjuntos analíticos

Π^1_1: clase de los coanalíticos.

Se puede demostrar que un conjunto $A \subset E$ es analítico si y sólo si A es la proyección a E de un boreliano de $E \times F$ para un espacio polaco F cualquiera.

A partir de estas clases, podemos construir otras (que incluyen conjuntos más complejos) tomando imágenes por funciones continuas y complementos:

$$\Sigma^1_1 \subsetneq \Sigma^1_2 \subsetneq \quad \cdots \quad \subsetneq \Sigma^1_n \subsetneq \cdots$$

$$\Pi^1_1 \subsetneq \Pi^1_2 \subsetneq \quad \cdots \quad \subsetneq \Pi^1_n \subsetneq \cdots$$

Donde,

$$\Sigma^1_{n+1} = \{f[A] \mid A \text{ es } \Pi^1_n \text{ y } f \text{ continua}\}.$$

$$\Pi^1_{n+1} = \{E - A \mid A \in \Sigma^1_{n+1}\}.$$

Estas clases se llaman clases proyectivas y forman una jerarquia estrictamente creciente.

Para cada n, $\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$

A continuación enunciamos varios resultados cuyas demostraciones se pueden encontrar en [Je], [Mo] o [Ku.Mo].

TEOREMA (Suslin):

$$\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1 = \text{clase de los borelianos.}$$

Este teorema es una herramienta muy importante para demostrar que un conjunto es boreliano.

TEOREMA: Todo conjunto analitico tiene las propiedades siguientes:

(i) Es medible Lebesgue (Lusin).

(ii) Tiene la propiedad de Baire (Lusin-Sierpinski)

(iii) Si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto. (Suslin).

(OBSERVACION: La teoria de cardinales grandes ha permitido extender estos resultados a los conjuntos proyectivos).

TEOREMA: Hay conjuntos Π_1^1 que no son borelianos (y por lo tanto, hay conjuntos analiticos que no son borelianos).

Un espacio polaco que nos será util considerar es el espacio de Cantor, $2^{\mathbb{N}}$, de las sucesiones de ceros y unos con la topologia producto cuyos abiertos basicos son los conjuntos de la forma $U_s = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid s$ es un segmento inicial de $\alpha\}$ donde s es una sucesión finita de ceros y unos.

TEOREMA (de representación de conjuntos coanalíticos):

Un conjunto $A \subset E$ es coanalítico (Π^1_1) si y sólo si existe un conjunto F_σ $B \subset E \times 2^N$ tal que

$$x \in A \Longleftrightarrow \forall \alpha \ (x, \alpha) \in B.$$

SERIES TRIGONOMETRICAS Y CONJUNTOS DE UNICIDAD

Una serie trigonométrica es una expresión de la forma

$$\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Por la periodicidad de la función e^{inx}, tomaremos $x \in [0, 2\pi]$ identificando 0 y 2π.

El problema de la unicidad, propuesto por Riemann el siglo pasado, se puede enunciar de la manera siguiente:

Si $\qquad \Sigma_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \Sigma_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} \qquad$ para todo $x \in [0, 2\pi]$

entonces, ¿ es cierto que $c_n = d_n$ para todo n?

Cantor dió una respuesta afirmativa al problema : incluso demostró algo más fuerte:

TEOREMA: Si $\Sigma c_n e^{inx} = \Sigma d_n e^{inx}$ para todo x fuera de un conjunto cerrado numerable entonces $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
(o, de otra manera, si $\Sigma c_n e^{inx} = 0$ para todo x fuera de un cerrado numerable, $c_n = 0$ para todo n).

DEFINICION: Un conjunto $E \subseteq [0, 2\pi]$ es un conjunto de unicidad si para toda serie trigonométrica $\Sigma c_n e^{inx}$ tal que $\Sigma c_n e^{inx} = 0$ para todo $x \notin E$, se tiene $c_n = 0$ para todo n.

En caso contrario se dice que E es un conjunto de multiplicidad.

Dada una serie trigonométrica S. definimos el soporte de S, Sop(S). como la clausura de $\{x\in[0.2\pi] \mid S$ converge en x y $S(x)\neq 0\}$.
Entonces tenemos:

PROPOSICION: Si E es cerrado, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) E es de multiplicidad

(ii) Existe una serie trigonométrica $S\neq 0$ tal que $Sop(S)\subseteq E$.

DEFINICION: La serie de Fourier de una función f es la serie trigonométrica

$S(f) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx}$. donde

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}dx$$

Ahora enunciaremos algunos de los resultados de la teoría clásica que llevaron a la formulación moderna de la teoría de conjuntos de unicidad desarrollada en los años '50 por Piateckii y Shapiro.

PRINCIPIO DE LOCALIZACION (para series de Fourier):

Sea $f\in L^1([0.2\pi])$. Si f se anula en un intervalo abierto I entonces $\Sigma\hat{f}(n)\, e^{inx}$ converge a cero para todo $x\in I$.
Demostración: Ver [Kat] p. 54.

Como consecuencia inmediata tenemos:

PROPOSICION: Si $P\subseteq[0.2\pi]$ es un conjunto de unicidad medible, entonces $\lambda(P) = 0$ (donde λ es la medida de Lebesgue).
Demostración:

Supongamos $\lambda(P)>0$, entonces existe un cerrado $C\subseteq P$ tal que $\lambda(C)>0$. Sea S la serie $\Sigma\widehat{X}_C(n)\, e^{inx}$ (la serie de Fourier de la función característica de C). Por el principio de localización, la serie converge a cero fuera de C, y como C es un conjunto de unicidad (por estar contenido en un conjunto de unicidad), entonces $\widehat{X}_C(n) = 0$ para todo n. Pero, $\widehat{X}_C(0)=\int_0^{2\pi} X_C(x)dx = \lambda(c)>0$. Contradicción

Otros resultados clásicos son:

LEMA: (Riemann-Lebesgue): Si $f\in L^1([0,2\pi])$ entonces $\widehat{f}(n)\to 0$ con $|n|\to\infty$.

Demostración: Ver [Kat] p.13.

LEMA (Cantor-Lebesgue): Si $\Sigma c_n e^{inx}=0$ es un conjunto de medida positiva, entonces $c_n\to 0$ cuando $|n|\to\infty$.

Demostración: Ver [Zy] :Trigonometric Series 2nd Ed.

Esto nos permite demostrar lo siguiente :

TEOREMA (Piateckii-Shapiro): Un conjunto $E\subseteq[0,2\pi]$ es un conjunto cerrado de multiplicidad si y sólo si existe una serie trigonométrica

$$S\sim\Sigma_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},\ S\neq 0 \text{ tal que } c_n\to 0 \text{ cuando } |n|\to\infty \text{ y } Sop(S)\subseteq E.$$

Demostración: Una de las implicaciones ya fue demostrada, para la otra, supongamos que E es un conjunto cerrado de multiplicidad y consideremos dos casos:

(a) Si $\lambda(E) > 0$, entonces tomamos $\chi_E\in L^1([0,2\pi])$. Por el teorema de Riemann-Lebesgue, $\widehat{\chi}_E(n)\to 0$ cuando $|n|\to\infty$ y $T\sim\Sigma\widehat{\chi}_E(0)=\lambda(E))$. Además, $Sop(T)\subseteq E$ porque χ_E se anula fuera de E y el complemento de E es abierto (el principio de localización implica que T converge a cero fuera de E).

(b) Si $\lambda(E)=0$, entonces como E es de multiplicidad, existe $S\neq 0$ tal que $Sop(S)\subseteq E$ pero el lema de Cantor-Lebesgue implica que $S(n)\to 0$ cunado $|n|\to\infty$ (donde $S(n)$ es el n-ésimo coeficiente de la serie S).

Los lemas anteriores también constituyen herramientas importantes para demostrar el siguiente teorema de Cantor:

TEOREMA (Cantor 1870): Todo cerrado numerable es de unicidad.

Otros resultados clásicos son:

TEOREMA:(BARY) La unión de una colección numerable de conjuntos cerrados de unicidad es un conjunto de unicidad.
(Una demostración de este teorema se puede encontrar en [Zy] Vol.I p.349)

En consecuencia tenemos que todo conjunto numerable es un conjunto de unicidad. También se obtiene como corolario un resultado de W.H. Young:

TEOREMA (YOUNG:1909): Si $C\subseteq[0,2\pi]$ es un conjunto sin subconjuntos perfectos entonces C es de unicidad.
Demostración: Supongamos que $S\sim\Sigma c_n e^{inx}$ es una serie trigonométrica que se anula fuera de C. Entonces $B=[0,2\pi]$ - $\{x\in[0,2\pi] \mid \Sigma c_n e^{inx}=0\}\subseteq C$. Además B es boreliano, ya que
$x\notin B\longleftrightarrow\forall k\ \exists N\ \forall p>N\ |\Sigma_{-p}^{p} c_n e^{inx}| < 1/k.$

Por uno de los resultados de Suslin citados anteriormente, sabemos que un Boreliano sin subconjuntos perfectos es numerable. Pero entonces B es un conjunto de unicidad, y como S converge a cero fuera de B, $c_n = 0\ \forall n$, es decir $S=0$.

Uno de los problemas de la teoría de conjuntos de unicidad es determinar en términos de propiedades estructurales de un conjunto P, si P es de unicidad o no. Incluso el problema de caracterizar la clase de conjuntos cerrados de unicidad está abierto. Un ejemplo del tipo de caracterización que se desea está dado por un resultado de Salem y Zygmund (1955). Este resultado constituye una respuesta parcial al problema de la caracterización de los conjuntos cerrados de unicidad. Más adelante daremos una versión más general de este resultado, pero ahora enunciamos un caso particular:

Denotemos por E_ξ al conjunto simétrico de radio de disección ξ, construido como el conjunto de Cantor pero conradio de disección $0<\xi<1/2$. Es decir, E_ξ es el subconjunto de $[0,2\pi]$ que se obtiene del modo siguiente: para cada intervalo $[a,b]$, la disección de $[a,b]$ con radio ξ $(0< \xi <1/2)$ es el conjunto $[a,a+\xi(b-a)] \cup [b-\xi(b-a),b]$.

El conjunto E_ξ es el que se obtiene comenzando con $[0,2\pi]$ y disecando con radio ξ para obtener E_1, disecando a continuación cada uno de los intervalos cerrados que componen E_1 con radio ξ para obtener E_2, etc. Finalmente $E_\xi=\bigcap_{i\in N}E_i$ (El conjunto de Cantor se obtiene con radio de disección $1/3$).

Salem y Zygmund demostraron que E_ξ es de unicidad si y sólo si $1/\xi$ es un número de Pisot (un número de Pisot es un entero algebraico de módulo mayor que 1 cuyos conjugados son todos de módulo menor que 1).

El libro de N.K. Bary [Ba] constituye una buena referencia de consulta sobre estos problemas de unicidad y otros aspectos relacionados con seres trigonométricas.

Resultados recientes de Solovay (1983, no publicado) y de Kaufman(1984) [Kau] (obtenidos independientemente) muestran que cualquier caracterización será más compleja de lo que se esperaba ya que la clase de los cerrados de unicidad, en el espacio de los cerrados de $[0,2\pi]$, es un conjunto coanalítico pero no boreliano.

De aquí se deduce que no habrá una caracterización suficentemente "descriptiva" de los cerrados de unicidad.

Para mostrar que un conjunto coanalítico no es boreliano basta, por ejemplo, mostrar que es Π^1_1-completo, es decir, que cualquier otro conjunto Π^1_1 se puede reducir a él mediante una función de Borel.

DEFINICION: $P \in \Pi^1_1 (P \subseteq Y)$ es Π^1_1-completo si para cada $A \in \Pi^1_1 (A \subseteq X)$ existe una función de Borel $f: X \to Y$ tal que $A = f^{-1}[P]$ (es decir, $x \in A \longleftrightarrow f(x) \in P$).
En vista de que hay conjuntos Π^1_1 no borelianos, todo conjunto Π^1_1-completo es de este tipo.

Sabemos que un conjunto cerrado E es de multiplicidad si y solo si
$\exists\ s \in c_0 (s \neq 0$ y $\mathrm{Sop}(\Sigma s(n) e^{inx}) \subseteq E)$

(donde c_0 es el conjunto de las sucesiones s en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tales que $s(n) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$). (Esto sigue del teorema de Piateckii-Shapiro).
Para probar que la colección de cerrados de multiplicidad es Σ^1_1 usaremos algunos resultados del análisis funcional:

DEFINICION:
c_0 es el espacio de las sucesiones $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ $d_n \in \mathbb{C}$, tales que $\lim_{|n| \to \infty} d_n = 0$. Provisto de la norma del supremo, c_0 es un espacio de Banach.
ℓ^1 es el espacio de las sucesiones $\{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $\Sigma |a_n| < \infty$. Con la norma $\|\{d_n\}\| = \Sigma_n |d_n|$, ℓ^1 es un espacio de Banach.
ℓ^∞: espacio de las sucesiones acotadas con la norma del supremo.

Es bien conocido que $(c_0)' = \ell^1$ y $(\ell^1)' = \ell^\infty$, es decir, ℓ^1 es el dual topologico de c_0 y ℓ^∞ es el dual de ℓ^1.

Denotando por M la clase de los conjuntos cerrados de multiplicidad podemos escribir

$$E\in M \Leftrightarrow \exists\, S\in \ell^{\infty} \left(\lim_{|n|\to\infty} S(n) = 0.\ S\neq 0 \text{ y } \mathrm{Sop}(S) \subseteq E\right)$$

y más aún:

$$E\in M \Leftrightarrow \exists\, S\in B_1(\ell^{\infty}) \left(\lim_{|n|\to\infty} S(n) = 0.\ S\neq 0 \text{ y } \mathrm{Sop}(S) \subseteq E\right).$$

$B_1(\ell^{\infty})$ es la bola unitaria en ℓ^{∞}. pero como ℓ^{∞} es el dual de ℓ^1. y en el dual podemos definir la topología débil* $B_1(\ell^{\infty})$. Por el teorema de Banach-Alaoglu. $B_1(\ell^{\infty})$ con esta topología es un espacio métrico separable y compacto. es decir. un espacio polaco compacto.

Dado un espacio polaco compacto P. se denota por K(P) al espacio de los cerrados en el espacio P con la topología de Hausdorff dada por la distancia definida así:

$\delta(K.L) = \sup\{\max\{d(x.L).\ d(y.K)\}\mid x\in K.y\in L\}$ si $K.L\neq\phi$ y $\delta(K.L)$ = diam (P) en caso contrario.

PROPOSICION: $\{(S.E)\mid S\in (B_1(\ell^{\infty}).\ E\subseteq [0.\ 2\pi]$ E cerrado. Sop $S\subseteq E\}$ es cerrado en $B_1(\ell^{\infty})\times K[0.\ 2\pi])$.

(La demostración usa resultados de Piateckii-Shapiro que caracterizan Sop(S) en términos de funciones cuya serie de Fourier es absolutamente sumable. ver [Ke.Lo]).

Además. $\{S\mid S(n)\to 0$ cuando $(n)\to\infty\}$ es boreliano en la topología debil-* (ya que $S(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall k \exists N \forall p>N\ |S(p)| < 1/k$). pero $\{S \mid |S(p)| < 1/k\}$ es cerrado en la top ω^*. porque la función $S \mapsto S(p)$ es continua en la topologia débil* (como función de $B_1(\ell^\infty) \to \mathbb{C}$) puesto que es una evaluación:

$S(p) = \langle X_p, S\rangle$ donde

$X_p \in \ell^1$ está dada por $X_p(m) = 0$ si $m \neq p$

$X_p(m) = 1$ si $m = p$.

Como $\{S | S \neq 0\}$ es abierto, hemos mostrado que M es la proyección de un boreliano de $B_1(\ell^\infty) \times K([0,2\pi])$ al espacio $K([0,2\pi])$ y por lo tanto es Σ^1_1.

Entonces U la colección de los conjuntos cerrados de unicidad, es Π^1_1 en el espacio $K([0,2\pi])$.

Para demostrar que es Π^1_1 - completo invocamos un resultado de Hurewicz:

TEOREMA (Hurewicz, 1928)[Hu]:

Sea $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap [0,1]$,el conjunto de los racionales en $[0,1]$, entonces,

$K(\mathbb{Q}') = \{K \in K([0,1]) | K \subseteq \mathbb{Q}'\}$ es Π^1_1-completo en $K([0,1])$.

La demostracion que sigue es la que aparece en el libro de Kechris y Louveau, y es particularmente interesante ya que utiliza conceptos de la teoria de juegos infinitos y en particular un resultado sobre determinacion de conjuntos borelianos. El lector puede obtener más informacion sobre estos conceptos en [Je] o [Mo].

Demostración: Trabajaremos primero en $2^{\mathbb{N}}$. Sea Q un conjunto <u>denso</u> numerable en $2^{\mathbb{N}}$.

Para cada conjunto F_σ $B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ consideremos el siguiente juego infinito:

I II

$\delta(0)$

$\varepsilon(0)$

$\delta(1)$

$\varepsilon(1)$

El jugador I juega $\delta(0)\in\{0,1\}$, el jugador II juega $\varepsilon(0)\in\{0,1\}$, despues I juega $\delta(1)\in\{0,1\}$, etc. hasta formar dos sucesiones infinitas δ y ε.

donde $\delta(i), \varepsilon(i) \in\{0,1\}$y

I gana si $\delta\notin B\longleftrightarrow\varepsilon\in Q$

II gana si $\delta\in B\longleftrightarrow\varepsilon\in Q$.

Claramente, el conjunto que determina el juego es

$\{(\delta,\varepsilon)\in 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}} \mid \delta\notin B\longleftrightarrow\varepsilon\in Q\} = (2^{\mathbb{N}}\setminus B)\times Q\cup B\times(2^{\mathbb{N}}\setminus Q)$

y por lo tanto es boreliano y, por el teorema de Martin [Ma], es un conjunto determinado, es decir uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora. Expliquemos lo que esto quiere decir.

Una estrategia para el jugador I es un regla que indica al jugador cual debe ser su próxima jugada, dependiendo de las jugadas anteriores de ambos jugadores. Análogamente se define una estrategia para II. Decimos que una estrategia es ganadora para un jugador, si ese jugador gana cada vez que usa su estrategia independientemente de las jugadas del otro jugador.

Una estrategia ganadora para el jugador I determina una funcion continua $f:2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}$ definida como sigue: si ε es la sucesión que resultó de las jugadas de II, entonces $f(\varepsilon)=\delta$ donde δ es la sucesión que resultó de las jugadas de I indicadas por la estrategia.. Entonces, en ese caso, tenemos que

$$f(\varepsilon)\notin B \Longleftrightarrow \varepsilon\in Q$$

Así, $f^{-1}[2^{\mathbb{N}}\setminus B]=Q$ (hemos reducido Q al complemento de B.)
Pero como B es F_σ, entonces $2^{\mathbb{N}}-B$ es $\mathfrak{G}_\delta$ y entonces $Q = f^{-1}(2^{\mathbb{N}}\setminus B)$ sería un $\mathfrak{G}_\delta$ denso. Y como Q s numerable, su complemento, Q^c.es tambien denso y $\mathfrak{G}_\delta$. Esto contradice el Teorema de Categoría de Baire ya que $2^{\mathbb{N}} = Q \cup Q^c = (\bigcap_n\theta_n)\cup(\bigcap_n\nu_n)$ donde θ_n y ν_n son abiertos densos para todo n. Entonces, $2^{\mathbb{N}} = (\bigcup_n P_n)\cup(\bigcup_n F_n)$
con
$P_n = (\theta_n)^c$ y $F_n = (V_n)^c$. Los P_n, F_n son cerrados nunca densos.
Esta contradicción indica que, como B es determinado, II tiene una estrategia ganadora
y por lo tanto existe una función continua

$$F:2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}} \text{ tal que}$$

$$\forall\delta\in 2^{\mathbb{N}} \qquad \delta\in B \Longleftrightarrow F(\delta)\in Q.$$

Esto es, $F^{-1}[Q] = B$. (Hemos reducido B a Q vía F).
Veamos que esto implica que K(Q) es Π^1_1-completo. Sea $P\in\Pi^1_1$ $(P\subseteq 2^{\mathbb{N}})$. Por el teorema de representación para conjuntos coanalíticos que enunciamos al principio, existe un conjunto F_σ $B\subseteq 2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}$ tal que

$$x\in P \longleftrightarrow \forall\varepsilon\in 2^{\mathbb{N}} [(x,\varepsilon)\in B]$$

ya que $2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$, existe una funcion continua $G:2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ tal que $F^{-1}(Q) = B$. La función G se obtiene componiendo el homeomorfismo con la función F de arriba.

Definamos $F_1:2^{\mathbb{N}}\to K(2^{\mathbb{N}})$ por $F_1(x) = G[\{x\}\times 2^{\mathbb{N}}]$ (notar que $G[\{x\}\times 2^{\mathbb{N}}]$ es cerrado porque $2^{\mathbb{N}}$ es compacto). F_1 es continua (¡demostrarlo!) y ademas,

$$x\in P \Longleftrightarrow \forall\varepsilon\in 2^{\mathbb{N}} \ ((x,\varepsilon)\in B)$$

$$\Longleftrightarrow G[\{x\}\times 2^{\mathbb{N}}] \subseteq Q$$

$\Longleftrightarrow F_1(x) \in K(Q)$

Esto muestra que $K(Q)$ es Π^1_1-completo.

Ahora, para terminar la demostración, tomemos como el conjunto Q a la colección de sucesiones eventualmente periódicas en $2^{\mathbf{N}}$.

Reduciremos

$$K(Q) \text{ a } K(Q')$$

mostrando así que $K(Q')$ es Π^1_1-completo.

Sea $g: 2^{\mathbf{N}} \to [0,1]$

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^n}$$

g es continua y

$$\alpha \in Q \Longleftrightarrow g(\alpha) \in Q'$$

Pongamos

$G: K(2^{\mathbf{N}}) \to K([0,1])$

$G(K) = \{g(x) \mid x \in K\}$

$= g[K]$

G es continua y

$K \in K(Q) \to G(K) \in K(Q')$. Esto termina la demostración del teorema de Hurewicz.

Usaremos ahora el anunciado teorema de Salem-Zygmund:

Se denota por $E(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ al conjunto homogéneo perfecto construido como sigue: Se generaliza la construcción del conjunto E_ξ indicada anteriormente tomando

$0=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_k<\eta_{k+1}=1$ y $\xi = 1-\eta_k$ tales que $\xi<\eta_{i+1}-\eta_i$ para cada $i<k$.

Para cada intervalo $[a,b]$ con $\ell=b-a$ consideramos los intervalos cerrados disjuntos $[a+\ell\eta_i, a+\ell\eta_i+\ell\xi]$ para $i=0,\dots,k$. Sea E su unión. Decimos que E resulta de $[a,b]$ por disección de tipo $(\xi,\eta_1,\dots,\eta_k)$. Ahora, análogamente a lo hecho anteriormente, definimos $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ comenzando con $[0,2\pi]$ y haciendo disecciones de tipo $(\xi,\eta_1,\dots,\eta_k)$ a cada intervalo del conjunto anterior.

$E(\xi,\eta_1,\dots,\eta_k) = \bigcap_{i\in N} E_i$

TEOREMA (Salem-Zygmund):
El conjunto $E((\xi,\eta_1,\dots,\eta_k)$ es de unicidad si y sólo si $1/\xi$ es un número de Pisot y $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k \in \mathbb{Q}(1/\xi)$.
Demostración: ver [Ka. Sa]

Para terminar la demostración de que la colección U de conjuntos cerrados de unicidad es Π^1_1-completo, definimos una función continua que reduce U a $K(\mathbb{Q}')$, el cual, ya sabemos, es Π^1_1-completo.

Consideremos $E(1/4;\ x/9 + 3/8,\ 3/4\ )$. La función $f:[0,1] \rightarrow K[0,2\pi]$ dada por $x \rightarrow E(1/4;\ x/9 + 3/8,\ 3/4\ )$ es continua.

Definamos
$F: K([0,1]) \rightarrow K([0,2\pi])$
$F(K) = \bigcup_{x\in K} f(x)$ F es también continua.

Si $K \subseteq \mathbb{Q}'$ entonces $F(K)$ es una unión numerable de conjuntos cerrados de unicidad (por el teorema anterior) y por el teorema de Bary es, a su vez, un conjunto de unicidad.

Si $K \not\subseteq \mathbb{Q}'$, entonces $F(K) \in M$ ya que si $x \notin \mathbb{Q}'$, $f(x)$ es de multiplicidad (Salem-Zygmund). Luego, $K \subseteq \mathbb{Q}' \Longleftrightarrow F(K) \in U$.

$$K \in K(\mathbb{Q}') \Longleftrightarrow F(K) \in U.$$

Luego U es Π^1_1-completo.

En conclusión:

TEOREMA (Solovay, no publicado, y Kaufman [Ka]):
La colección U de conjuntos cerrados de unicidad es un conjunto Π^1_1-completo en el espacio $K([0,2\pi])$ de los conjuntos cerrados de $[0,2\pi]$ con la topologia de Hausdorff.

REFERENCES

[Ba] Bary, N.K.: A Treatise on Trigonometric Series. Two volumes, Macmillan (1964).

[Hu] Hurewicz, W.: Relative perfekte Teile von Punktmengen und Mengen(A), Fund. Math. 12, 78-109 (1928).

[Je] Jech, T.: Set Theory. Academic Press (1978).

[Ka.Sa] Kahane, J-P and Salem, R.: Ensembles Parfaits et Séries Trigonometriques, Hermann, Paris (1963).

[Ke.Lo] Kechris, A. and Louveau, A.: Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness. Cambridge University Press. London Mathematical Society, Lecture Notes Series 128 (1987).

[Kau] Kaufman, R.:. Fourier Transforms and Descriptive Set Theory. Mathematika 31, 336-339 (1984).

[Kat] Katznelson, Y.: An Introduction to Harmonic Analysis. John Wiley and Sons, Inc. (1968).

[Ku.Mo] Kuratowski. K. and Mostowski. A.: Set Theory. North Holland. (1976).

[Ma] Martin. D.A. A purely inductive proofs of Borel Determinacy. In Recursion Theory. Proc. Symposia in Pure Math. Vol.42. Amer. Math. Soc. Providence. 303-310 (1985).

[Mo] Moschovakis. Y. Descriptive Set Theory. North Holland (1980).

[Zy] Zygmund. A. . Trigonometric Series. Cambridge University Press Second Edition. Vols. I and II (1968).

Bifurcações Homoclínicas e Dimensões Fracionárias

J. Palis

Dedicado a
José Luis Massera

Tal vez tenha sido uma das poucas vezes (senão a única) que Poincaré manifestou, em sua notável obra, enorme surpresa em relação a um conceito matemático como o fez com respeito a órbitas homoclínicas: simples de definir, de existência frequente em muitos sistemas dinâmicos (em particular, da Mecânica) e, no entanto, acarretando grande riqueza da estrutura de órbitas do sistema . Em seu "Memoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar II de Suéde", Poincaré fala pela primeira vez de órbitas homoclínicas no contexto de do problema de três corpos [10] . Em seguida, em "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste" [11], ressalta vivamente a complexidade do fenômeno e convida o leitor a tentar desenhar as variedades invariantes (linhas em dimensão dois, pois considerou uma seção transversal ao campo vetorial) .

Quando a órbita homoclínica é transversal, os trabalhos de Birkhoff [2], e Smale [12], dentre outros, dão uma boa descrição da dinãmica adjacente: existe sempre um conjunto invariante e hiperbólico que contém a órbita homoclínica e, também, uma infinidade de órbitas periódicas - de fato um subconjunto denso delas - e, além disto, para o qual é possível dar uma descrição via dinãmica simbólica . Estes são os ingredientes do que chamamos hoje uma "ferradura", devida a Smale, sobre a qual faremos breves comentários no que se segue (veja [2] , [12] , [13] , [8]) . De imediato, salientamos que trata-se de um dos modelos básicos de peças transitivas (i.e. subconjuntos fechados que contém órbitas densas) do conjunto limite de um sistema dinãmico e que é persistente ou estável por pequenas perturbações do sistema (veja por exemplo [3] , [8]).

Quanto à bifurcação de uma órbita homoclínica tangente, tornando-a transversal, provoca-se imensas alterações na dinâmica e, embora vários aspectos destas alteração já sejam compeendidos, outras tantas questões relevantes permanecem em aberto e têm merecido bastante atenção. Alguns destes resultados (vários deles recentes) e questões serão discutidas a seguir, após definições e fatos básicos necessários .

<u>Definição</u>. Seja p um ponto fixo de $f : M \to M$, f de classe C^r, $r \geq 1$, e M uma variedade de classe C^∞. Dizemos que p é hiperbólico se a derivada de f em p tiver todos autovalores de norma diferente de um .

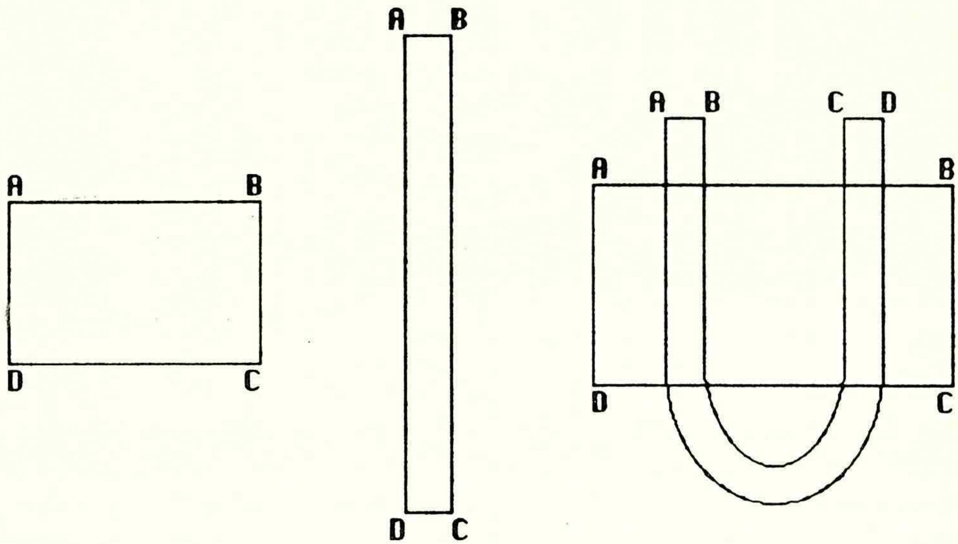
Isto é, existe uma decomposição $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$ tal que E_p^s e E_p^u são invariantes por Df_p e Df_p restrito a E_p^s é contrativo e restrito a E_p^u é expansivo . Similar para uma órbita periódica : se $f^n(p) = p$, então consideramos Df_p^n. Mais geralmente, se Λ é compacto e invariante por f, dizemos que Λ é hiperbólico se para qualquer métrica riemanniana em M, existirem constantes $0 < \lambda < 1$ e $C > 0$ tais que :

a) $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, E^s e E^u invariantes por Df. Os subfibrados E^s, E^u são contínus.

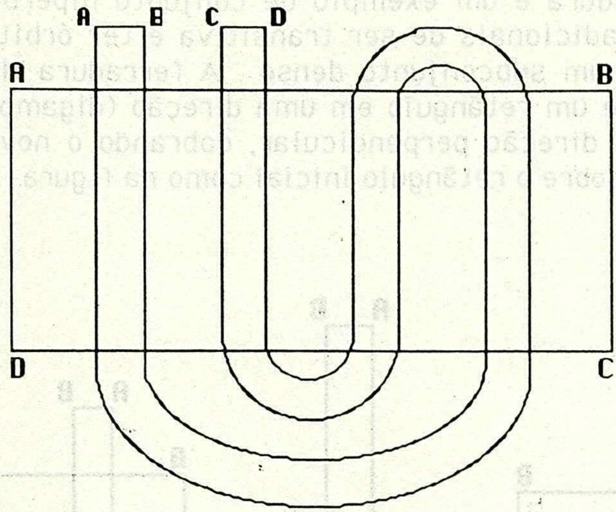
b) $\| Df_x^n v \| \leq C\lambda^n \| v \|$, $v \in E_x^s$ e $n \geq 0$

$\| Df_x^n w \| \leq C\lambda^n \| w \|$, $w \in E_x^u$ e $n \leq 0$

A ferradura é um exemplo de conjunto hiperbólico, com as propiedades adicionais de ser transitiva e ter órbitas periódicas constituindo um subconjunto denso . A ferradura linear é obtida contraindo-se um retângulo em uma direção (digamos horizontal), expandindo a direção perpendicular, dobrando o novo retângulo e colocando-o sobre o retângulo inicial como na figura .



Podemos perturbar (e bastante) esta figura, mantendo uma expansão e contração uniformes e a dobra do "novo Retangulo", e ainda assim o conjunto $\bigcap_{n\in Z} f^n(Q)$ é um conjunto hiperbólico com as características acima (transitividade, densidade de órbitas periódicas) . Poderíamos também ter feito várias "dobras", ou ainda



repetir a construção em qualquer dimensão.

Um fato importante é que por um ponto fixo hiperbólico p passa uma subvariedade W_p^s, invariante, tangente a E_p^s, difeomorfa a um espaço euclidiano e formada por pontos cujas órbitas positivas comvergem a p. Analogamente pelos pontos de um conjunto hiperbólico Λ passam subvariedades formadas por pontos cujas órbitas são positivamente assimptóticas às dos pontos do conjunto hiperbólico. O conjunto destas folhas forma uma folheação contínua (Hölder) $\mathcal{F}^s(\Lambda)$, cujas folhas são C^r e o difeomorfismo f envia folha em folha (veja [3]). Analogamente, definimos variedade instável W_p^u de um ponto fixo ou de um ponto qualquer de um conjunto básico. A folheação instável denota-se por $\mathcal{F}^u(\Lambda)$, Λ um conjunto hiperbólico. Cabe aqui ressaltar o seguinte fato relevante: se f é de classe C^2 e a folheação estável (ou instável) tem codimensão um então ela pode ser estendida a uma folheação de classe C^1 em uma vizinhança de Λ. Assim para ferraduras Λ em dimensão dois, $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ e $\mathcal{F}^u(\Lambda)$ são de classe C^1 no sentido acima descrito.

Definição. Seja p um ponto fixo (ou periódico) hiperbólico. Se $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$, $x \neq p$, então dizemos que x é homoclínico e sua órbita é dita homoclínica.

Em 1980, Poincaré observou que toda órbita homoclínica transversal é acumulada por outras órbitas homoclínicas transversais.

Teorema. (Birkhoff [2], 1935). Toda órbita homoclínica transversal é acumulada por órbitas periódicas.

Teorema. (Smale [12], 1965). Toda órbita homoclínica transversal é parte de um conjunto hiperbólico (uma ferradura) em que as órbitas periódicas forman um subconjunto denso.

Vejamos agora o que pode-se dizer da dinâmica de f_μ, μ sendo um parâmetro real, supondo-se que $f_{\mu=0}$ tem uma órbita homoclínica tangente que torna-se transversal para $\mu > 0$. Sem outros dados de caráter global, so faz sentido perguntarmos pela dinâmica de f_μ restrita a uma vizinhança do fecho da órbita homoclínica tangente. Esta questão, simples de ser formulada, é de difícil resposta, mesmo que parcial. Na verdade, as mudanças na dinâmica de f_μ quando $\mu \to 0$ são tantas que nem é possível dar-se uma resposta completa à pergunta já em dimensão dois. Esta questão tem sido muito considerada nos últimos anos e o caso $f_\mu(x, y) = (1+\mu_1 y - \mu_2 x^2, x)$, conhecido como família (quadrática) de Henón, tornou-se famoso. Neste caso, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ é bidimensional, mas o que mais se procura até agora é o comportamento de f_μ para μ_1 muito pequeno e μ_2 próxima a dois. É claro que podemos fixar um dos parâmetros (digamos μ_1)

e estudar a dependência da dinâmica de f_μ em relação a μ_2. Além disto, como uma tangência homoclínica para f_0 é acumulada por tangências homoclínicas para f_{μ_n}, para alguma sequência $\mu_n \to 0$, as mudanças na dinâmica (bifurcações) ocorren também para cada valor do parâmetro $\mu_n > 0$ desta sequência e não apenas para $\mu = 0$!

Antes de explicarmos estas bifurcações homoclínicas, introduziremos o conceito de dimensão fracionária de um espaço métrico compacto, que é muito útil no nosso contexto, especialmente quando aplicado a conjuntos de Cantor.

Definição. Seja K um conjunto compacto de um espaço métrico. Para cada $d > 0$, considere

$$H(d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \Big(\sum_{V_i \in \mathcal{U}} r(V_i)^d \Big)$$

onde, para cada $\varepsilon > 0$, o ínfimo é considerado para todas as possiveis coberturas $\mathcal{U}$ de K cujos elementos têm diâmetro inferior a ε. A dimensão de Hausdorff HD(K) é definida como $\inf\{ d ,\ H(d) = 0 \}$. Outro conceito muito útil é o de capacidade limite $c(K) = \lim\sup_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$, onde $N(\varepsilon)$ é o número mínimo de bolas de radio ε que necessitamos para cubrir K. Generalmente, $HD(K) < c(K)$ mas no nosso contexto de bifurcações homoclínicas tangentes bidimensionais, teremos $HD(K) = c(K)$ onde K será un subconjunto de Cantor da reta que é regular. Para o conjunto de Cantor " α-terço do meio ", temos $HD(K_\alpha) = c(K_\alpha) = \log 2/\log 2 - \log(1 - \alpha)$. Por outro lado, é fácil ver que tais conjuntos de Cantor são precisamente os conjuntos que obtém-se interceptando uma folhiação estável ou instável das ferraduras lineares mais simples. Em geral as ferraduras não são lineares, mas ainda assim tais interseções são conjuntos de Cantor para os quais a dimensão de Hausdorff é igual à capacidade limite. Além disto, se a folheação é de classe C^1 (como no caso bidimensional, ou mais geralmente de codimensão um), <u>não importa que seção transversal</u> tomamos : <u>estas dimensões</u> (<u>Hausdorff, capacidade limite</u>) <u>são invariantes por homeomorfismos Lipschitzianos</u> .

Voltemos a considerar uma família f_μ de difeomorfismos de uma superfície .. Suponhamos que para $\mu = 0$ cria-se uma órbita homoclínica (tangente) associada a um ponto fixo p (ou periódico) de uma ferradura Λ para f_0 . Denotemos por $\mathcal{F}^s(\Lambda)$ e $\mathcal{F}^u(\Lambda)$ as folheações estável e instável de Λ e por d^s e d^u suas capacidades limites (transversais). Também suporemos que a tangência homoclínica desdobra-se genericamente, criando-se órbitas homolínicas transversais para $\mu > 0$. Também que a norma do determinante de $\mathbf{D}f_0$ em p é menor que um .

<u>O que pode-se dizer da dinâmica de</u> f_μ , <u>para</u> $\mu > 0$ <u>e pequeno, em uma vizinhança da órbita homoclínica</u> ? Pode-se ver pelos resultados abaixo que há uma grande riqueza de bifurcações, caracterizando-se um grau de complexidade que nos levou a dizer acima que é impossível dar uma resposta completa á questão . É interessante observar que frequentemente na literatura recente (especialmente em trabalhos de físicos e biólogos), o desdobramento de órbitas homoclínicas tangentes é indicativo de " cáos ".

<u>Teorema</u> (Newhouse [4], 1979). Existem intervalos arbitrariamente pequenos e próximos a $\mu = 0$ no espaço de parâmetros, e subconjuntos genéricos destes intervalos (em particular densos) para os quais f_μ tem uma infinidade de poços, isto é pontos periódicos atratores .

Teorema (Palis- Takens [5] , [6] , 1985-87) . Se $d^s + d^u < 1$, então frequentemente, próximo a $\mu = 0$ no espaço de parâmetros, a dinâmica de f_μ é hiperbólica, isto é o conjunto limite ou não-errante de f_μ é hiperbólico .

Podemos precisar um pouco mais a afirmativa acima. Indiquemos por $H_\delta \subset [0, \delta]$ o conjunto de valores do parâmetro μ para os quais existe uma vizinhança $\mathcal{U}(\mu)$ do fecho da órbita homoclínica tangente tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}(\mu))$ é hiperbólico. O resultado acima diz que $\lim_{\delta \to 0} \frac{H_\delta}{\delta} = 1$

<u>Conjectura 1</u>. Se $d^s + d^u > 1$, então para famílias genéricas teremos $\lim_{\delta \to 0} \sup \frac{H_\delta}{\delta} < 1$.

<u>Teorema</u> (Palis-Yoccoz, a aparecer). Para famílias genéricas f_μ como acima, se $d^s + d^u > 1$ então $\lim_{\delta \to 0} \inf \frac{H_\delta}{\delta} < 1$.

A grosso modo, a conjectura e o resultado acima afirmam que se $d^s + d^u > 1$
então há muitos valores de bifurcação para f_μ para μ próximo a zero.
Ao contrário, pelo teorema anterior, se $d^s + d^u < 1$ então estes pontos de bifurcação tem medida relativa muito pequena - mas não nula pelo teorema de Newhouse.

Finalmente pode-se preguntar por outro tipo de bifurcações neste contexto. Por exemplo, sobre a frequência, sempre no espaço de parâmetro, de atratores não hiperbólicos ("estranhos") para f_μ em uma pequena vizinhança da órbita homoclínica de μ próximo a zero.

Conjectura 2. Para qualquer $\delta > 0$, o conjunto de valores de μ em $[0, \delta]$ para os quais existe atrator estranho para f_μ tem medida positiva.

A propósito da conjetura 2, Benedicks e Carleson [1] anunciaram uma resposta positiva para a família de Hénon

$$f_{\mu_1, \mu_2}(x, y) = (1 + \mu_1 - \mu_2 x^2, x)$$

para μ_1 fixo bem pequeno e μ_2 próximo a dois.

Referências

[1] M. Benedicks, L. Carleson - Strange attractors and the Hénon mapping, a ser publicado.

[2] G. D. Birkhoff - Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei 1 (1935), 85-216.

[3] M. Hisch, C. Pugh - Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14 (1970), Am. Math. Soc.

[4] S.Newhouse - The abundance of wild hyperbolic sets and non smooth stable sets for diffeomorphism, Publ. Math. IHES 50 (1979), 101-151.

[5] J. Palis, F. Takens - Cycles and frontera of bifurcation sets for two-dimensional diffeomorphisms, Invent. Math. 82(1985), 397-422.

[6] J. Palis, F. Takens - Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, Annals of Math. 125 (1987), 337-374.

[7] J. Palis, F. Takens - Homoclinic bifurcations and hyperbolic dynamics, XVI Colóquio Brasileiro de Matemática . IMPA (1987).

[8] J. Palis, W. de Melo - Geometric theory of dynamical systems, Springer- Verlag (1982).

[9] J. Palis, J. C. Yoccoz - Homoclinic bifurcations and large Hausdorff dimensions, a ser publicado.

[10] H. Poicaré - Sur le problème des trois corps et les équations de dynamique, Acta Math. 13 (1980), 1-270 .

[11] H. Poincaré - Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Gauthiers-Villars (1899).

[12] S. Smale - Diffeomorphisms with many periodic points, Diff. and Comb. Topology, Princeton Univ. Press (1965).

[13] S. Smale - Differentiable dynamical systems, Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), 747-817 .

Commutative unitary extensions of isometries

Rodrigo Arocena

Abstract We give conditions for the existence of commutative unitary extensions of two isometries with domains and ranges in a Hilbert space, a problem related to the existence of solutions of moment problems in $\mathbb{Z}^2$

I- INTRODUCTION: STATEMENT OF THE PROBLEM AND MAIN RESULT

In order to state our problem we fix the following terminology: all the linear spaces considered are assumed to be complex Hilbert spaces, and a subspace means a closed subspace; an isometry V that acts in a space E is a closed linear operator that preservs inner products and such that its domain D and range R are subspaces of E; also, $\mathbf{L}(H)$ denotes the set of all the linear bounded operators in a space H and P_S the orthogonal projection of H onto the subspace S.

We use the following definition: a commutative unitary extension of a pair (V_1,V_2) of isometries acting in E is any pair of unitary operators $(U_1,U_2) \subset \mathbf{L}(F)$ such that $U_1U_2 = U_2U_1$, $F \supset E$, U_1 extends V_1 and U_2 extends V_2. When that happens we say that $\{U_1,U_2,F\}$ belongs to the family $\mathcal{U}$.

Our problem is to give conditions ensuring that $\mathcal{U}$ is non-void.

In section II we sketch the relation of the subject with moment problems in $\mathbb{Z}^2$. Our approach is based on the theory of characteristic functions of isometries with scale subspaces, a short summary of which is given in section III. With that tool a solution of the above posed problem when V_1 is a unitary operator is worked out in section IV. It allows us to prove in section V the following

Theorem A **Let V_1, V_2 be isometries acting in the Hilbert space E, with domains D_1,D_2 and ranges R_1,R_2,**

respectively. For $j = 1,2$ call N_j and M_j the respective orthogonal complements in E of D_j and R_j. The family $\mathfrak{U}$ of all the commutative unitary extensions of (V_1,V_2) is non-void if:

(1) $V_2P_{D_2}V_1P_{D_1}(I-zP_{N_2}V_1P_{D_1})^{-1}P_{D_2} =$

$$P_{R_2}V_1P_{D_1}(I-zP_{M_2}V_1P_{D_1})^{-1}V_2P_{D_2} \quad , \quad |z| < 1$$

.

If one of the conditions

(2) $V_1{}^nD_2 \subset D_1$, $n = 0,1, \ldots$; $\quad V_1{}^{-n}D_2 \subset R_1$, $n = 0,1, \ldots$

.

and one of the conditions

(3) $V_1{}^nR_2 \subset D_1$, $n = 0,1, \ldots$; $V_1{}^{-n}R_2 \subset R_1$, $n = 0,1, \ldots$.

hold, then (1) is a necessary and sufficient condition for $\mathfrak{U}$ to be non-void.

II- ON MOMENT PROBLEMS

Moment problems constitute one of the main influences in the developement of operator theory and, conversely, the operator theory approach to moment problems is one of the most powerful ways to solve them. A recent account of the relation between those two subjects is [S-2], where we can read: *Typically one finds that a moment problem is associated in a natural way with a Hilbert space operator and that solving the moment problem amounts to finding a suitable extension of the corresponding operator.*

Now, when two variable moment problems are considered, the corresponding statemente could be the following: the problem is associated in a natural way with a pair of Hilbert space operators and solving the problem amounts to finding suitable commuting extensions of those operators.

For example, let a function $k: \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2: |m|\leq a, |n|\leq b\} \to C$ be given, where C denotes the set of complex numbers and a,b are fixed positive numbers. We want to know when k is the Fourier transform of a finite positive measure m in $\mathbb{T}^2$. Consider the vector space E of all the finitely supported functions from $\mathbb{Z}^2$ to C and set, for any $h,h' \in E$,

$$\langle h,h'\rangle = \Sigma\{k(s-t)h(s)\bar{h}'(t): s,t \in \mathbb{Z}^2\}$$

If $k = \hat{m}$ and $m \geq 0$, then $\langle h,h\rangle \geq 0$ for every $h \in E$, so we assume that this property holds. Then E and $\langle\ ,\ \rangle$ generate a Hilbert space H; the shifts in E given by $S_1h(m,n) \equiv h(m-1,n)$ and $S_2h(m,n) \equiv h(m,n-1)$ generate two isometries, V_1 and V_2, acting in H. The problem can be solved if and only if there exists a commutative unitary extension (U_1,U_2) of (V_1,V_2), in which case the solution is given by the corresponding spectral measure E.

In that way we may prove the discrete version of a sufficient condition due to Livsic for the existence of solutions of the above posed problem (see [B]). An analogous approach gives a $\mathbb{Z}^2$ generalization of the Nagy-Foias lifting commutant theorem [N-F] which, via Sarason's general interpolation theorem [S.1], can be seen as a very general result concerning moment problems. Details are in [A].

III- UNITARY COLLIGATIONS AND EXTENSIONS OF ISOMETRIES

In this section we follow a survey of Brodskii [B] and a note of Arov and Grossman [A-G], adapting their notation to the problem we are interested in.

An **operator colligation** is a set

$$\delta = \{H_1,H_2,H_0; (A_{jk})_{j,k=1,2}\}$$

with H_1,H_2,H_0 Hilbert spaces and (A_{jk}) the matricial expression of a bounded operator $A: H_0 \oplus H_1 \to H_2 \oplus H_0$. The **characteristic function** θ_δ of δ is an holomorphic function defined in a neighbourhood of the origin in C and with values in $\mathcal{L}(H_1,H_2)$, given by

$$\theta_\delta(z) = A_{12} + zA_{11}(I - zA_{21})^{-1}A_{22}$$

The idea is that all the information concerning δ that can be obtained by means of the spaces H_1 and H_2 is embodied in the function θ_δ. This is natural if we think of δ as a linear system with response function θ_δ (see for example [F]).

The relation between operator colligations and their characteristic functions allow a description of the unitary extensions of an isometry in terms of analytic functions, in the way we now sketch.

We say that an holomorphic function ϕ: $\mathbb{D} \to \mathbf{L}(H_1H_2)$, with $\mathbb{D} = \{z \in C: |z| < 1\}$, belongs to the set $\mathbf{B}(H_1H_2)$ of **contractive analytic functions** if $||\phi(z)|| \leq 1$ holds for every $z \in \mathbb{D}$. When A is a unitary operator, δ is called a unitary colligation. In that case, from the formula

$$I - \theta_\delta(z)^*\theta_\delta(z) = (1 - |z|^2)A_{22}{}^*(I - \bar{z}A_{21}{}^*)^{-1}(I - zA_{21})^{-1}A_{22}{}^*$$

it follows that $\theta_\delta \in \mathbf{B}(H_1H_2)$. A basic fact is the validity of the converse statement: Brodskii and Schvartsman [B-S] have proved that if $\phi \in \mathbf{B}(H_1H_2)$ then there exists a unitary colligation δ such that $\theta_\delta = \phi$.

If N and M are the orthogonal complements of the domain D and the range R, respectively, of an isometry V acting in a space E (i.e., the so-called defect subspaces of V), a unitary operator that extends V, $B: E\oplus M \to N\oplus E$, is given by

$$B(e\oplus m) = P_N e\oplus(m+VP_D e) \quad , \quad \forall\ (e,m) \in E \times M .$$

If L is any subspace of E, let $L^\perp$ be its orthogonal complement and $B^{(L)} = (B^{(L)}{}_{jk})$ the matricial expression of B as an operator from $L^\perp\oplus(L\oplus M)$ to $(N\oplus L)\oplus L^\perp$. That is:

$$B^{(L)}{}_{11} = P_N|_{L^\perp} \oplus P_L VP_D|_{L^\perp} \,,\ B^{(L)}{}_{12} = P_N|_L \oplus (P_L|_M + P_L VP_D|_L)$$

$$B^{(L)}{}_{21} = P_{L^\perp} VP_D|_{L^\perp} \quad , \quad B^{(L)}{}_{22} = P_{L^\perp}|_M \oplus P_{L^\perp} VP_D|_L \quad .$$

Then $\delta^{(V,L)} := \{L\oplus M, N\oplus L, L^\perp; B^{(L)}\}$ is a unitary colligation; its characteristic function, denoted $S^{(V,L)}$, is the so-called **characteristic function of the isometry V with scale subspace L**.

Two colligations $\delta(i) = \{H_1,H_2,H^{(i)}{}_0; (A^{(i)}{}_{jk})\}$, $i = 1,2$, are considered equivalent when there exists a unitary operator $\tau \in \mathbf{L}(H^{(1)}{}_0,H^{(2)}{}_0)$ such that $(I_{H_2}\oplus\tau)A^{(1)} = A^{(2)}(\tau\oplus I_{H_1})$, in which case we write $\delta(1) \approx \delta(2)$, and $\theta_{\delta(1)} = \theta_{\delta(2)}$ holds. A converse of the last statement is obtained by considering the principal part of δ which, by definition, is the colligation $\delta' = \{H_1, H_2, H'_0; (A'_{jk})_{j,k=1,2}\}$, with H'_0 the orthogonal complement in H_0 of the biggest subspace H''_0 invariant by A_{21} and such that the corresponding restriction is unitary, while A' denotes the restriction of A to $H'_0 \oplus H_1$. When $\delta = \delta'$ it is said that δ is a simple colligation, and in that case it is determined by its characteristic function. More precisely: $\theta_{\delta(1)} = \theta_{\delta(2)}$ iff $\delta(1)' \approx \delta(2)'$.

Each unitary extension U of V to a space F that contains E defines a unitary colligation $\delta^{(U,L)}$ with characteristic function $S^{(U,L)}$. Set $F' = \vee\{U^n L: n \in \mathbb{Z}\}$ - i.e., F' is the smallest subspace of F that contains $U^n L$ for every $n \in \mathbb{Z}$ - , $U' = U|_{F'}$ and call G the orthogonal complement of L in F', then $\{L, L, G; U'^{(L)}\}$ is the principal part of $\delta^{(U,L)}$ and consequently it is determined by $S^{(U,L)}$. Now, a classical type formula, going back to the work of Nevanlinna and Schur (see [G]) gives all the functions $S^{(U,L)}$ in terms of $S^{(V,L)}$.

Let us remark that $S^{(V,L)}(z) \in \mathcal{L}(L \oplus M, N \oplus L)$ is given by a matrix with entries:

$$S_{L,N}^{(V,L)}(z) = P_N(I - zP_{L^\perp} VP_D)^{-1} I_L \, , \quad S_{M,N}^{(V,L)}(z) = P_N P_{L^\perp}(I - zVP_D P_{L^\perp})^{-1} I_M$$

$$S_{L,L}^{(V,L)}(z) = P_L VP_D(I - zP_{L^\perp} VP_D)^{-1} I_L \, , \quad S_{M,L}^{(V,L)}(z) = P_L(I - zVP_D P_{L^\perp})^{-1} I_M \, .$$

When V is unitary (i.e., $M = N = \{0\}$), $S^{(V,L)}$ may be identified with $S_{L,L}^{(V,L)}$ and

$S^{(V,L)}(z) = P_L(I - zVP_{L^\perp})^{-1} V|_L \equiv [P_L(I - zV)^{-1} V|_L]^{-1} P_L(I - zV)^{-1} I_L$.

In a note without proofs, Arov and Grossman [A-G] have stated that the formula:

(1) $S^{(U,L)} = S_{L,L}^{(V,L)} + S_{M,L}^{(V,L)} \theta (I_N - S_{M,N}^{(V,L)} \theta)^{-1} S_{L,N}^{(V,L)}$,

$\theta \in \mathbf{B}(N,M)$,

establishes a surjective correspondence from $\mathbf{B}(N,M)$ onto the set of all the characteristic functions $S^{(U,L)}$, with U a unitary extension of V. In order to be complete, we offer in an appendix a proof of that statement.

The following interpretation of the above formula is important. Given $\theta \in \mathbf{B}(N,M)$ let $\delta = \{N,M,X; (A_{jk})\}$ be a unitary colligation such that $\theta \equiv \theta_\delta$; then $U := A \oplus V$ is a unitary operator in $F := X \oplus N \oplus D \approx R \oplus M \oplus X$, with $F \supset E$ and $U|_D = V$, such that $S^{(U,L)}$ and θ satisfy (1).

IV- A SOLUTION OF THE PROBLEM WHEN ONE OF THE OPERATORS IS UNITARY

In this section we assume that V_1 is unitary. If V_2 is defined in the whole space (i.e., $D_2 = E$), the problem can be solved iff $V_1 V_2 = V_2 V_1$; in the general case V_1 should be replaced, in the left side of the above equa- lity, by something representing it in R_2, and in the right side by something representing it in D_2. That is precisely what the characteristic functions of V_1 with the corresponding scale subspaces do. In this way we are lead to the following

Theorem B **Let $V_1 \in \mathcal{L}(E)$ be a unitary operator and V_2 an isometry acting in E. The family $\mathcal{U}$ of all the commutative unitary extensions of (V_1, V_2) is non-void if and only if**

(1) $$S^{(V_1,R_2)}(z)\, V_2 = V_2\, S^{(V_1,D_2)}(z) \quad , \quad \forall z \in \mathbf{D} .$$

Proof Condition (1) is equivalent to

(2) $$[P_{R_2}(I-zV_1)^{-1}V_1|_{R_2}]^{-1}[P_{R_2}(I-zV_1)^{-1}|_{R_2}]V_2 =$$
$$= V_2[P_{D_2}(I-zV_1)^{-1}V_1|_{D_2}]^{-1}[P_{D_2}(I-zV_1)^{-1}|_{D_2}].$$

Assume that there exists $(U_1,U_2,\Gamma) \in \mathcal{U}$. Then

$[P_{R_2}(I-zV_1)^{-1}|_{R_2}]V_2 = P_{R_2}\Sigma\{z^nV_1{}^n: n\geq 0\}V_2 = P_{R_2}U_2\Sigma\{z^nU_1{}^n|_{D_2}: n\geq 0\} = P_{R_2}(V_2P_{D_2} + U_2P_{N_2})(I-zV_1)^{-1}|_{D_2} = V_2[P_{D_2}(I-zV_1)^{-1}|_{D_2}]$, because $P_{R_2}U_2P_{N_2} = 0$ since U_2N_2 is orthogonal to $U_2D_2 = R_2$. Analogously, $[P_{R_2}(I-zV_1)^{-1}V_1|_{R_2}]V_2 = V_2[P_{D_2}(I-zV_1)^{-1}V_1|_{D_2}]$. Thus, if $\mathcal{U} \neq \phi$, (2) holds.

It has been shown that $S^{(V_1,R_2)}(z)\ V_2 \equiv V_2\ S^{(V_1,D_2)}(z)$ is a necessary condition for $\mathcal{U}$ to be non-void. In order to prove that it is also sufficient, we consider both members of that identity as the characteristic functions (**cf** in the sequel) of appropriated unitary colligations.

In fact, since $S^{(V_1,D_2)}$ is the cf of $\delta^{(V_1,D_2)} = \{D_2,R_2,N_2;V_1{}^{(D_2)}\}$ and V_2 the one of $\{D_2,R_2,\{0\};V_2\}$, it follows from the basic propertie of the pro- duct of colligations (see [B]) that $V_2\ S^{(V_1,D_2)}$ is the **cf** of $\alpha := \{D_2,R_2,N_2;(A_{jk})\}$, with (A_{jk}) the matricial expression of $(V_2\oplus I_{N_2})V_1 : N_2\oplus D_2 \to R_2\oplus N_2$. In the same way we see that $S^{(V_1,R_2)}(z)\ V_2$ is the **cf** of $\beta := \{D_2,R_2,M_2;(B_{jk})\}$, with (B_{jk}) the matricial expression of $V_1(I_{M_2}\oplus V_2): M_2\oplus D_2 \to R_2\oplus M_2$. Consequently, (1) holds if and only if the principal parts α' and β' of α and β are equivalent.

Now, since $A_{21} = P_{N_2}V_1|_{N_2}$, it is easy to see that $\alpha' = \{D_2,R_2,N'_2;(A'_{jk})\}$, with N'_2 the orthogonal complement of D_2 in $\vee\{V_1{}^nD_2: n \in \mathbb{Z}\}$ and (A'_{jk}) the matrix of $(V_2\oplus I_{N'_2})(V_1|_{N'_2\oplus D_2})$. Also, $\beta' = \{D_2,R_2,M'_2;(B'_{jk})\}$, with M'_2 the orthogonal complement of R_2 in $\vee\{V_1{}^nR_2: n \in \mathbb{Z}\}$ and (B'_{jk}) the matrix of $(V_1|_{M'_2\oplus R_2})(I_{M'_2}\oplus V_2)$. Thus, $\alpha' \approx \beta'$ iff there exists a unitary operator $\tau' \in \mathbf{L}(N'_2,M'_2)$ such that

(3) $$(V_2\oplus\tau')(V_1|_{N'_2\oplus D_2}) = (V_1|_{M'_2\oplus R_2})(\tau'\oplus V_2)$$

If $d \in D_2$ and $n \in \mathbb{Z}$ then $(V_2\oplus\tau')V_1{}^nd = V_1{}^n(V_2\oplus\tau')d = V_1{}^nV_2d$, so τ' is well determined:

(4) $\tau'(P_{N'_2}V_1^n d) = P_{M'_2}V_1^n V_2 d$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $d \in D_2$.
Moreover, if $(U_1,U_2,F) \in \mathcal{U}$, then $U_2V_1^n d = U_1^n U_2 d = V_1^n V_2 d$, thus $U_2(N'_2 \oplus D_2) = M'_2 \oplus R_2$, so there exists τ' as in (3) and U_2 extends $V_2 \oplus \tau'$.
Consequently, in order to solve the problem, it is necessary to extend $V_2 \oplus \tau'$. In particular, that can be done without leaving E i.e., V_2 can be extended to a unitary operator $U_2 \in \mathcal{L}(E)$ that commutes with V_1 - iff (1) holds and the subspaces $\vee\{V_1^n D_2: n \in \mathbb{Z}\}$ and $\vee\{V_1^n R_2: n \in \mathbb{Z}\}$ have the same codimension.

Let us see that the validity of (3) implies that $\mathcal{U}$ is non void. Replacing V_2 by $V_2 \oplus \tau$ we may assume that $V_1 D_2 = D_2$, $V_1 R_2 = R_2$ and $V_2 V_1|_{D_2} = V_1 V_2$. We set $F = E \oplus M_2 \oplus N_2 \oplus M_2 \oplus N_2 \oplus \ldots$ and denote with μ_j, η_k the elements of M_2, N_2, respectively. Now, for $e \in E$ and $d \in D_2$, set:
$U_2(d + \eta_1 \oplus \mu_1 \oplus \eta_2 \oplus \ldots) = V_2 d + \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \eta_1 \oplus \mu_3 \oplus \eta_2 \oplus \ldots$
$U_1(e \oplus \mu_1 \oplus \eta_1 \oplus \ldots) = V_1 e \oplus V_1 \mu_1 \oplus V_1 \eta_1 \oplus \ldots$
Then:
$U_1 U_2(d + \eta_1 \oplus \mu_1 \oplus \eta_2 \oplus \ldots) = V_1 V_2 d + V_1 \mu_1 \oplus V_1 \mu_2 \oplus V_1 \eta_1 \oplus V_1 \mu \oplus \ldots =$
$V_2 V_1 d + V_1 \mu_1 \oplus V_1 \mu_2 \oplus V_1 \eta_1 \oplus V_1 \mu_3 \oplus \ldots =$
$U_2(V_1 d + V_1 \mu_1 \oplus V_1 \mu_2 \oplus V_1 \eta_1 \oplus V_1 \mu_3 \oplus \ldots) = U_2 U_1(d + \eta_1 \oplus \mu_1 \oplus \eta_2 \oplus \ldots)$.

The proof is over.

(5) <u>Corollary</u> When $V_1 \in \mathcal{L}(E)$ is a unitary operator and V_2 is an isometry acting in E the following conditions are equivalent:

a) $\mathcal{U} \neq \phi$

b) $P_{R_2}(V_1 P_{M_2})^m V_1 V_2|_{D_2} = V_2 P_{D_2}(V_1 P_{N_2})^m V_1|_{D_2}, m = 0, 1, \ldots$

c) $(P_{R_2} V_1^n|_{R_2}) V_2 = V_2 (P_{D_2} V_1^n|_{D_2})$, $n = 0, 1, \ldots$

d) $\langle V_1^n V_2 d, V_2 d' \rangle = \langle V_1^n d, d' \rangle$, $d, d' \in D_2$, $n = 0, 1, \ldots$

e) If θ is the spectral measure of V_1, for every $d \in D_2$ and every Borel set $\Delta \subset \mathbb{T}$, the angles of d and $V_2 d$ with the subspace $\theta(\Delta)$ are equal.

Proof. The Taylor developement of (1) gives (5.b), which is then equivalent to (5.a). If the last holds, (5.d) is obviously true and (5.c) follows. Assuming this property, it can be shown that $V'_2(V_1^n d) = V_1^n V_2 d$ defines a unitary operator from $\vee\{V_1^n D_2: n \in \mathbb{Z}\}$ onto $\vee\{V_1^n R_2: n \in \mathbb{Z}\}$, so there exists a unitary operator $\tau' \in \mathbf{L}(N'_2, M'_2)$ such that (3) is verified. Finally, it is clear that (5.d) is the same as

$$\int_{\mathbb{T}} e^{int} d\langle\theta(t)V_2 d, V_2 d'\rangle = \int_{\mathbb{T}} e^{int} d\langle\theta(t)d, d'\rangle \quad , \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

$d, d' \in D_2$, which in turn is equivalent to the validity of $\langle\theta(\Delta)V_2 d, V_2 d'\rangle = \langle\theta(\Delta)d, d'\rangle$ for every Borel set $\Delta \subset \mathbb{T}$, $d, d' \in D_2$, and from polarization it follows that this identity holds iff (5.e) does.

Q.E.D.

It is not difficult to give a direct proof of the fact that (5.b) implies (5.c).

V- PROOF OF THE MAIN THEOREM

Theorem B implies the following

Theorem C In the same conditions and with the same notation of
theorem A set:

$a = S_{D_2, D_2}(V_1, D_2)$, $b = S_{M_1, D_2}(V_1, D_2)$, $c = S_{M_1, N_1}(V_1, D_2)$,
$d = S_{D_2, N_1}(V_1, D_2)$, $a' = S_{R_2, R_2}(V_1, R_2)$, $b' = S_{M_1, R_2}(V_1, R_2)$,
$c' = S_{M_1, N_1}(V_1, R_2)$, $d' = S_{R_2, N_1}(V_1, R_2)$.

Then the set $\mathcal{U}$ is non-void iff

(1) $\exists\ \theta \in \mathbf{B}(N_1, M_1)$ such that, for every $z \in \mathbb{D}$,
$$V_2\{a(z)+b(z)\theta(z)[I_{N_1}-c(z)\theta(z)]^{-1}d(z)\} = \{a'(z) + b'(z)\theta(z)[I_{N_1}- c'(z)\theta(z)]^{-1}d'(z)\}V_2 .$$

Proof.

If $\exists\ (U_1,U_2,F) \in \mathcal{U}$ the extension problem can be solved for U_1 V_2 considered as isometries that act in the space F, so theorem B says that $V_2S^{(U_1,D_2)}(z) \equiv S^{(U_1,R_2)}(z)V_2$. Now, since U_1 extends V_1 there exists a unitary operator $A \in \mathbf{L}(X\oplus N_1, M_1\oplus X)$ such that $U_1 = A\oplus V_1$. Let θ be the cf of the colligation $\delta = \{N_1, M_1, X, (A_{jk})\}$, then for any subspace $L \subset F$, $S^{(U_1,L)}$ and θ satisfy a formula like (III.1) In this way we get expressions for $S^{(U_1,D_2)}$ and $S^{(U_1,R_2)}$ that establish formula (1) in the above statement.

Conversely, if the last holds, let $U'_1 \in \mathbf{L}(F')$ be the unitary extension of V_1 to F' that is related with θ in the way described at the end of section I.
Then $V_2S^{(U'_1,D_2)}(z) \equiv S^{(U'_1,R_2)}(z)V_2$, so there exists a commutative unita- ry extension of the isometries U'_1 and V_2 that act in F', and consequently $\mathcal{U} \neq \phi$.

Q.E.D.

We now turn to the proof of theorem A. Setting, in (1), $\theta \equiv 0$ we see that $\mathcal{U} \neq \phi$ whenever V_2 intertwines $S_{D_2,D_2}{}^{(V_1,D_2)}$ and $S_{R_2,R_2}{}^{(V_1,R_2)}$, i.e.

(2) $$V_2P_{D_2}V_1P_{D_1}(I-zP_{N_2}V_1P_{D_1})^{-1}P_{D_2} = P_{R_2}V_1P_{D_1}(I-zP_{N_2}V_1P_{D_1})^{-1}V_2P_{D_2},$$

whenever $|z| < 1$, so the first assertion of that theorem is proved. Condi- tion (2) is not only sufficient but also necessary for $\mathcal{U} \neq \phi$ when in (1) the second terms of the sums contained in $\{\ldots\}$ equal zero. So theorem A will be proved if we show, with notations as in theorem B, that:

$V_1^n D_2 \subset D_1$, $n = 0,1, \ldots$ implies $d \equiv 0$

$V_1^{-n} D_2 \subset R_1$, $n = 0,1, \ldots$ implies $b \equiv 0$

$V_1^n R_2 \subset D_1$, $n = 0,1, \ldots$ implies $d' \equiv 0$

$V_1^{-n} R_2 \subset R_1$, $n = 0,1, \ldots$ implies $b' \equiv 0$.

Now, these assertions follow from:

<u>Lemma</u> If V, D, R, N, M and L are as in section III then

$$S_{L,N}(V,L)(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{D} \iff V^n L \subset D, \ \forall n \geq 0 \quad ;$$

$$S_{M,L}(V,L)(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{D} \iff V^{-n} L \subset R, \ \forall n \geq 0 .$$

<u>Proof</u>. $S_{L,N}(V,L)(z) \equiv 0$ iff

(i) $P_N(P_{L^\perp} V P_D)^n \equiv 0$

while $V^n L \subset D$ holds for every $n \geq 0$ iff

(ii) $P_N(VP_D)^m|_L \equiv 0$.

Assume that $P_N(VP_D)^m|_L = 0$ if $0 \leq m < n$; then $P_N(VP_D)^n|_L =$
$P_N(VP_D)^{n-1}(P_{L^\perp} + P_L)VP_D|_L = P_N(VP_D)^{n-1}(P_{L^\perp}VP_D)|_L = \ldots$
$= P_N(VP_D)(P_{L^\perp}VP_D)^{n-1}|_L = P_N(P_{L^\perp}VP_D)^n|_L$. So we see that (i) and (ii) are equivalent; the first assertion of the lemma has been established. If g is an operator-valued analytic function, set $\tilde{g}(z) \equiv g(\bar{z})^*$; now, if $g = S_{M,L}(V,L)$ and $V' = V^{-1}$, the second assertion follows from $\tilde{g} = S_{L,M}(V',L)$.

Q.E.D.

Note that (2) is equivalent to

(3) $V_2 P_{D_2} V_1 P_{D_1} (P_{N_2} V_1 P_{D_1})^n P_{D_2} = P_{R_2} V_1 P_{D_1} (P_{M_2} V_1 P_{D_1})^n V_2 P_{D_2}$, $n \geq 0$,

so it is easy to see that $V_2 P_{D_2} V_1 P_{D_1} = V_1 P_{D_1} V_2 P_{D_2}$ is a sufficient condition for $\mathfrak{U} \neq \phi$. The same result can be obtained by applying to $V_1 P_{D_1}$ and $V_2 P_{D_2}$ Ando's theorem on the existence of the unitary dilation of a commutative pair of contractions (see [N-F]).

APPENDIX

In what follows we sketch a proof of the Arov-Grossman formula (III.1), based on the interpretation of colligations as linear systems.

Lemma Let $\beta = \{Y_1 \oplus K, K \oplus Y_2, Y; \tau\}$ be a unitary colligation with cf $\Sigma = (\Sigma_{jk})$, $j,k = 1,2$, $\omega: Y \oplus Y_1 \to Y_2 \oplus Y$ a unitary operator and $\lambda: Y \oplus Y_1 \to K$ a bounded operator such that

$$\tau[y, y_1, \lambda(y, y_1)] = [\lambda(y, y_1), \omega(y, y_1)]$$

holds for every $(y, y_1) \in Y \times Y_1$. Then the characteristic function σ of the colligation $\beta' = \{Y_1, Y_2, Y; \omega\}$ is given by

$$\sigma = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}(I - \Sigma_{12})^{-1}\Sigma_{11}$$

Proof Given a sequence $y_1 = \{y_1(n): n \geq 0\} \subset Y_1$, we define three other sequences $k \subset K$, $y \subset Y$ and $y_2 \subset Y_2$ by :

$$y(0) = 0\ ,\ k(n) = \lambda[y(n), y_1(n)]\ ,\ y(n+1) = P_Y \tau[y(n), k(n), y_1(n)]\ ,$$

$$y_2(n) = P_{Y_2} \tau[y(n), k(n), y_1(n)]\ ,\quad \text{if } n \geq 0.$$

Then $k(n) = P_K \tau[y(n), k(n), y_1(n)]$. Thus, when $0 \in Y$ is the initial state of the system β, if it receives the "inputs" $\{y_1(n), k(n)\}$, the corresponding "outputs" are $\{k(n), y_2(n)\}$. Setting $\phi_1(z) = \Sigma\{z^n y_1(n): n \geq 0\}$,

$\phi_2(z) = \Sigma\{z^n y_2(n): n \geq 0\}$ and $\psi_1(z) = \Sigma\{z^n k(n): n \geq 0\}$, it follows that

(i) $\Sigma_{11}\phi_1 + \Sigma_{12}\psi = \psi$

$\quad \Sigma_{21}\phi_1 + \Sigma_{22}\psi = \phi_2$.

On the other hand, with initial state $0 \in Y$ the system β' "answers" $\{y_1(n)\}$ with $\{y_2(n)\}$, so

(ii) $\quad \phi_2 = \sigma\phi_1$.

From (i) and (ii) the result follows.

Proof of the Arov-Grossman formula

With the same notation as in section III, given $\theta \in \mathbf{B}(N,M)$ let $\delta = \{N,M,X; A\}$ be a unitary colligation such that $\theta \equiv \theta_\delta$ and $U = A \oplus V \in \mathbf{L}(X \oplus E)$ the corresponding unitary extension of V.

We consider the direct sum $\delta_1 = \{L\oplus N, L\oplus M, X; A_1\}$ of the colligations δ and $\{L,L,\{0\}; I_L\}$; its cf is given by the matrix $[g_{jk}]$ with $g_{11} = I_L$, $g_{12} = 0$, $g_{21} = 0$, $g_{22} = \theta$; also, $A_1(x,l,n) \equiv [l, A(x,n)]$. Now, let β be the product of the colligations $\delta^{(V,L)} = \{L\oplus M, N\oplus L, L^\perp; B^{(L)}\}$ and δ_1 ; thus, $\beta = \{L\oplus N, N\oplus L, L^\perp \oplus X; \gamma\}$, with $\gamma = (B\oplus I_X)(I_{L^\perp}\oplus A_1)$, and its cf is given by the matrix $[h_{jk}]$, with:

$h_{11} = S_{L,N}{}^{(V,L)}$, $h_{12} = S_{M,N}{}^{(V,L)}\theta$, $h_{21} = S_{L,L}{}^{(V,L)}$, $h_{22} = S_{M,L}{}^{(V,L)}\theta$.

If $(g+x+l+n) \in L^\perp \oplus X \oplus L \oplus N$ then $(I_{L^\perp} \oplus A_1)(g+x+l+n) = g+l+A(x+n) = P_N(g+l) + P_D(g+l) + A(x+n) \in N \oplus D \oplus M \oplus X$; if $(n+d+m+x)$ belongs to the last space then $(B\oplus I_X)(n+d+m+x) = n + Vd + m + x \in N \oplus E \oplus X$. Consequently,

$\gamma(g+x+l+n) = P_N(g+l) + VP_D(g+l) + A(x+n) = P_N(g+l) + U[P_D(g+l) + x + n]$.

In particular, $\gamma[g+x+l+P_N(g+l)] = P_N(g+l) + U(g+l+n)$ holds for every $(g+x) \in L^\perp \oplus X$, $l \in L$. Applying the lemma with $\beta' = \delta^{(U,L)}$, $\omega = U$ and

$\lambda: L^\perp \oplus X \oplus L \to N$ given by $\lambda(g+x+l) = P_N(g+l)$, formula (II.1) is obtained.

References

[A-G] D.Z.Arov and L.Z.Grossman: *Scattering matrices in the theory of dilations of isometric operators* , Soviet Math. Doklady 27 (1983),518-522.

[A] R.Arocena: *On the extension of a class of translation invariant positive forms* , to appear in J. Op. Theory..

[B-S] V.M.Brodskii and Ja.S.Shvartsman: *On invariant subspaces of contractions* , Soviet Math. Doklady 12 (1971), 1659-1663.

[B] M.S.Brodskii: *Unitary operator colligations and their characteristic functions* , Russian Math. Surveys 33 (1978), 159-191.

[F] P.A.Fuhrmann: "**Linear systems and operators in Hilbert space**", McGraw-Hill, New York, 1981.

[G] J.B.Garnett: "**Bounded analytic functions**", Academic Press, New York, 1981.

[N-F] B.Sz.-Nagy and C.Foias: "**Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space**", North-Holland, Amsterdam, 1970.

[S.1] D.Sarason: *Generalized interpolation in H^∞* , Trans. Amer. Math. Soc.127 (1967), 180-203.

[S.2] D.Sarason: *Moment Problems and Operators in Hilbert Space* , Proc. Symp. in Appl. Math., Vol. 37 (1987), 54-70.

Campos aleatorios y ecuaciones en derivadas parciales estocásticas.

Enrique M. Cabaña
Centro de Matemática, Universidad de la República, Montevideo.

0. Introducción.

La estrecha vinculación que existe entre el proceso de Wiener en R^2 y la ecuación de la cuerda vibrante forzada por ruido blanco se conoce por lo menos desde 1970 ([3]). Sin embargo, no ha sido suficientemente explotada para obtener una descripción del comportamiento del proceso de Wiener biparamétrico. En este trabajo vamos a exponer algunas consecuencias que pueden obtenerse de dicha vinculación, en particular a través de una *propiedad de Markov fuerte* referida a la cuerda vibrante, que da lugar a *principios de reflexión*.

Las elongaciones de una cuerda vibrante a partir de un instante t quedan completamente determinadas cuando se conocen las posiciones de los puntos de la cuerda en el instante t, las derivadas temporales de esas posiciones (o velocidades iniciales), y, naturalmente, los esfuerzos a los que será sometida la cuerda desde t en adelante. Esto hace esperar que el proceso consistente en las posiciones y velocidades de los puntos de la cuerda, sea de Markov, cuando los esfuerzos externos constituyen un *ruido*, es decir, un proceso aleatorio en el que valores correspondientes a subconjuntos disjuntos del dominio constituyen variables independientes.

Sin embargo, en el caso en que el estímulo externo que se aplica es un *ruido blanco gaussiano*, las posiciones de la cuerda son casi seguramente no diferenciables en ningún punto, y el proceso de velocidades resulta ser un proceso generalizado, con valores en un espacio de distribuciones.

Para establecer una propiedad de Markov, sin salir del marco de los procesos con valores reales, se introducen las *componentes de onda* del proceso solución de la ecuación de la cuerda vibrante. Estas componentes son procesos ordinarios, a diferencia de las derivadas temporal o espacial de la elongación de la cuerda, y contienen la misma información que las posiciones y velocidades. En §3 se muestra que el proceso consistente en las componentes de onda, posee la propiedad fuerte de Markov, y se aprovecha esta propiedad para obtener principios de reflexión. En §4 se describen algunas aplicaciones de esos principios. Previamente, se han descrito en §1 y §2 los principales elementos con los que se va a trabajar.

No vamos a detallar técnicas; indicaremos, en cambio, referencias donde éstas pueden consultarse. Los resultados nuevos que exponemos no aparecen aquí por primera vez, sino que están tomados de [2] y [4].

1. Procesos de Wiener de parámetro multidimensional.

El proceso de Wiener típico W con parámetro en $[0,1]$, es el proceso gaussiano caracterizado por $E(W(t))=0$, $E(W(s)W(t)) = s \wedge t$, para todo s, t en $[0,1]$. Las propiedades de las trayectorias de W son bien conocidas; en particular, casi seguramente parten de $W(0) = 0$, son continuas en todo punto pero no diferenciables en ninguno, y tienen variación no acotada en qualquier intervalo contenido en el dominio. A menudo conviene considerar el proceso $\tilde{W}$ parametrizado en la familia de los subintervalos $(s,t]$ de $[0,1]$, definido por $\tilde{W}((s,t]) = W(t) - W(s)$. Inversamente, el proceso original W se calcula a partir de $\tilde{W}$ por medio de $W(t) = \tilde{W}((0,t])$. La ley gaussiana de $\tilde{W}$ está caracterizada por $E(\tilde{W}(A)) = 0$, $E(\tilde{W}(A)\tilde{W}(B)) = \lambda(A \cap B)$, donde λ es la medida de Lebesgue.

Es posible definir una integral (estocástica) respecto del proceso de Wiener, de modo que cuando el integrando es la función indicatriz $\mathbf{1}_A$ de un intervalo $A=(s,t]$, entonces $\iint \mathbf{1}_A \, dW = \tilde{W}(A)$; de la manera acostumbrada, la integral se extiende por linealidad a integrandos más generales aunque la extensión no es trivial debido a que la medida $\tilde{W}$ es muy irregular y a que el integrando puede ser aleatorio, pero no vamos a extendernos sobre ese punto (ver por ejemplo [7,9]).

A la derivada formal de W con respecto a la medida de Lebesgue se la llama habitualmente *ruido blanco gaussiano* , y la denotaremos $W^{\bullet}$. De manera formal, podemos escribir también $\tilde{W}(A) = \int \mathbf{1}_A W^{\bullet} dt$

Se define una extensión del proceso de Wiener al dominio $[0,1]^d$, que denotaremos también W, caracterizándola como un proceso gaussiano tal que para todo $s, t \in [0,1]^d$, se cumple $E(W(t))=0$, $E(W(s)W(t))= |s \wedge t|$, con $|(s_1,\dots,s_d)\wedge(t_1,\dots,t_d)| = (s_1 \wedge t_1)\dots(s_d \wedge t_d)$. Si ahora denotamos por $(s, t]$ al intervalo generalizado $(s_1,t_1] \times \dots \times (s_d,t_d]$, extendemos $\tilde{W}$ definiéndolo como la función de conjunto aditiva sobre la familia de los subintervalos de $[0,1]^d$ que satisface $\tilde{W}((0,t]) = W(t)$ para cada $t \in [0,1]^d$

La integral estocástica respecto de W o de $\tilde{W}$ se define ahora de modo que para cada intervalo $A = (s, t]$ se cumpla igualmente $\int \mathbf{1}_A dW = \tilde{W}(A)$. También en el caso d-dimensional, W tiene trayectorias casi seguramente continuas pero no diferenciables. A la derivada formal $W^{\bullet}$ se la llama también ruido blanco gaussiano, y podemos escribir como antes $\tilde{W}(A)= \int \mathbf{1}_A W^{\bullet} dt$

El dominio del proceso de Wiener de parámetro unidimensional puede extenderse a R^+ yuxtaponiendo procesos definidos sobre intervalos unitarios. Conviene hacerlo con el proceso parametrizado sobre los intervalos, pues basta tomar una sucesión $(\tilde{W}_n)$, $n \in Z^+$, de copias independientes de $\tilde{W}$, y definir $\tilde{W}(A) = \sum_n \tilde{W}_n (A \cap (n, n+1] - n))$. Luego se obtiene W mediante la misma ecuación $W(t) = \tilde{W}((0, t])$. Asimismo, la extensión puede hacerse a todo R, de manera similar. Para extender $\tilde{W}$ basta reemplazar Z^+ por Z en la construcción anterior. Luego, para obtener W, se usa la misma fórmula cuando $t > 0$, y $W(t) = -\tilde{W}((t, 0])$ cuando $t < 0$. Esta convención implica mantener vigente la condición $W(0) = 0$.

La extensión de W en $[0,1]^d$ a todo $(R^+)^d$ se hace de manera semejante: se definen copias independientes de $\tilde{W}$ asociadas a cada cubo unitario, y se extiende $\tilde{W}$ como en dimensión uno. Se define nuevamente $W(t) = \tilde{W}((0,t])$, lo que corresponde a imponer $W(t)=0$ cuando alguna componente de t es cero. Es claro que la extensión de $\tilde{W}$ a todo R^d no ofrece ninguna novedad respecto de lo que precede, y tampoco la de W, que puede hacerse mediante

$$W(t) = (\mathrm{sgn} \prod_{j=1}^{d} t_j)\, \tilde{W}((t \wedge 0, t \vee 0]),$$

donde supremo e ínfimo se toman coordenada a coordenada.

Para terminar esta colección de notaciones, vamos a indicar que se suele llamar *proceso de Wiener respecto de una medida* (de Radon) μ al que resulta de reemplazar en las expresiones que caracterizan la distribución de $\tilde{W}$, la medida de Lebesgue por la medida μ, es decir, se cumple $E(\tilde{W}(A)) = 0$, $E(\tilde{W}(A)\tilde{W}(B)) = \mu(A \cap B)$. La existencia de tal proceso no es trivial, ni siquiera cuando μ es la medida de Lebesgue, aún cuando este caso es más sencillo.

Un contexto en el que los procesos de Wiener aparecen de manera natural, es el del cálculo de las distribuciones asintóticas de procesos empíricos. Cuando F_n es la función de distribución empírica de una muestra aleatoria simple de la distribución uniforme en $[0,1]$, el proceso z_n en $[0,1]$ definido por $z_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t) - t)$ converge débilmente a un proceso de Wiener típico W condicionado por $W(1) = 0$. Si, en cambio, F_n es la distribución empírica asociada a una muestra de la distribución uniforme en $[0,1]^d$, entonces $\sqrt{n}\,(F_n(t) - \lambda((0,t]))$ converge débilmente al proceso de Wiener típico W en $[0,1]^d$, condicionado por $W(1,1,\ldots,1)=0$. A un proceso con la distribución condicional de W dado $W(1,1,\ldots,1)=0$, que coincide con la de $W(t) - (\prod_{j=1}^{d} t_j)\, W(1)$, se lo llama *puente Browniano* (ver [10]).

NOTA. Probablemente, la manera más simple de definir y construir el proceso de Wiener bi-paramétrico es aplicando dos veces el desarrollo en funciones ortonormales de Haar de Lévy-Ciesielski. Llamemos $\mathbb{D}_0=\{1\}$, $\mathbb{D}_n=\{k/2^n;\ k=1,3,5,\ldots,2^n-1\}$ $(n=1,2,\ldots)$ al conjunto de los *racionales diádicos con índice n* en $(0,1]$, y $\mathbb{D}$ al conjunto $\bigcup_0^\infty \mathbb{D}_n$ de todos los *racionales diádicos* en $(0,1]$.

El sistema ortonormal completo en $\mathbb{L}^2(0,1)$ de las *funciones de Haar* $\{H_r : r\in\mathbb{D}\}$ se define por

$H_1(t)=1 \quad (0<t\leq 1)$ y

$H_r(t)=2^{(n-1)/2}\,\mathrm{sgn}(r-t)\mathbf{1}_{\{|r-t|<2^{-n}\}}$, para $r\in\mathbb{D}_n$, $n=1,2,\ldots$, y las *funciones de Schauder* $\{S_r : r\in\mathbb{D}\}$ son las integrales

$$S_r(T)=\int_0^T H_r(t)\,dt .$$

La construcción de Lévy-Ciesielski ([6]) del proceso de Wiener de parámetro unidimensional w es

$$w(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r\in\mathbb{D}_n} Z_r S_r(t),$$

donde $\{Z_r : r\in\mathbb{D}\}$ es una familia de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas gausianas típicas. De esta representación en serie se puede concluir que w tiene casi seguramente trayectorias continuas (porque la serie converge uniformemente casi seguramente) y se puede deducir la distribución de w, a saber, que $\{w(t): t\in[0,1]\}$ es una familia gausiana y $Ew(t)=0$, $Ew(s)w(t)=s\wedge t$ para todo s, $t\in[0,1]$.

Consideremos ahora una familia de procesos de Wiener de parámetro unidimensional independientes $\{w_r : r\in\mathbb{D}\}$. El proceso de Wiener de parámetro bidimensional W en $[0,1]^2$ se puede construir por medio de

$$W(x,y)==\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r\in\mathbb{D}_n} w_r(x)S_r(y),$$

y los mismos argumentos usados en el primer caso para deducir la continuidad de las trayectorias y la distribución de w, se aplican ahora para deducir la continuidad casi segura de $W(x,y)$ como función de (x,y), y también que $\{W(x,y):(x,y)\in[0,1]^2\}$ es una familia gausiana con $EW(x,y)=0$, $EW(x,y)W(x',y')=(x\wedge x')(y\wedge y')$.

2. Ecuación de las ondas forzada por ruido blanco y proceso de Wiener de parámetro bidimensional.

Así como el proceso de Wiener de parámetro unidimensional se puede utilizar para describir el movimiento de una partícula sujeta a solicitaciones aleatorias estacionarias, con independencia entre los esfuerzos actuantes en intervalos disjuntos del tiempo, es conocido desde hace muchos años que el proceso de Wiener de parámetro bidimensional proporciona un modelo que describe las oscilaciones de una cuerda vibrante sometida a esfuerzos aleatorios para los cuales hay completa independencia entre lo que ocurre en lugares y/o instantes diferentes ([3]). En lo que sigue, vamos a detenernos a considerar este último modelo.

Dado que la solución $u(t,z)$, $0<t$, $z \in R$ de la ecuación de la cuerda vibrante infinita ($t \geq 0$, $z \in R$)

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial z^2 + f(t,z)$$

con condiciones iniciales

$$u(0,z) = \partial u(0,z)/\partial t = 0$$

es

$$u(t,z) = \iint_{C(t,z)} f(\tau,\zeta)\, d\tau\, d\zeta$$

con

$$C(t,z) = \{(\tau,\zeta) : 0 \leq \tau \leq t,\ |\zeta - z| \leq t - \tau\}, \qquad (1)$$

resulta natural escribir la solución $u(t,z)$, $0<t$, $z \in R$ de la ecuación de la cuerda vibrante infinita forzada por ruido blanco gaussiano típico

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial z^2 + W^{\bullet}$$

con las mismas condiciones iniciales

$$u(0,z) = \partial u(0,z)/\partial t = 0$$

en la forma

$$u(t,z) = \tilde{W}(C(t,z)),$$

que se obtiene reemplazando f por $W^{\bullet}$ (c.f. [3,8,11])

Cuando el ruido actúa sobre un subconjunto compacto N de R'×R, es decir, cuando la nueva ecuación es

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial z^2 + W \bullet \mathbf{1}_N \qquad (2)$$

la solución estará dada por

$$u(t,z) = \tilde{W}(A(t,z)) \qquad (3)$$

con $A(t,z) = C(t,z) \cap N$.

Si la solución se observa sólo sobre un compacto $K \subset$ R'×R, es claro que el ruido que actúa fuera de $\tilde{K} = \bigcup_{(t,z) \in K} C(t,z)$ no tiene ningún efecto sobre el resultado observado, por lo tanto el conjunto N donde actúa el ruido (que podría ser todo R'×R) se puede reemplazar por $N \cap \tilde{K}$.

Supondremos en lo que sigue que $\tilde{W}$ actúa sobre un compacto N, sea porque el fenómeno a modelar tiene esa propiedad, o porque va a ser observado en un compacto y se aplica la observación precedente.

Definimos *componentes de onda* de u de la manera siguiente ([4])

Para cada t, introducimos

$$F_t(z) = \tilde{W}(\{(\tau,\zeta): 0 \le \tau \le t,\ \zeta + \tau \le z + t\} \cap N) - \tfrac{1}{2}\tilde{W}(\{(\tau,\zeta): 0 \le \tau \le t\} \cap N) + \gamma \qquad (4)$$

y

$$G_t(z) = \tilde{W}(\{(\tau,\zeta): 0 \le \tau \le t,\ \zeta - \tau \ge z - t\} \cap N) - \tfrac{1}{2}\tilde{W}(\{(\tau,\zeta): 0 \le \tau \le t\} \cap N) - \gamma \qquad (4')$$

donde γ es una constante, posiblemente aleatoria, que se elegirá convenientemente.

Es fácil verificar que la solución (virtual) $u_{(t)}$ de la ecuación

$$\partial^2 u_{(t)}(\tau, z) / \partial t^2 = \partial^2 u_{(t)}(\tau, z) / \partial z^2 + W \bullet \mathbf{1}_N \mathbf{1}_{\{\tau \le t\}}$$

es

$$u_{(t)}(t+s, z) = F_t(z+s) + G_t(z-s)$$

para $s \ge 0$. De otra manera, F_t y G_t representan las ondas que recorrerían la cuerda a partir del instante t si se extinguiera el ruido desde ese momento.

Cuando se conocen $u(t,\circ)$ y $\partial u(t,\circ)/\partial t$ ambas componentes de onda se deducen de

$$u(t,z) = F_t(z) + G_t(z) \qquad (5)$$

$\partial u(t,z)/\partial t = F'_t(z) + G'_t(z)$.

Este sistema de ecuaciones permite obtener F_t y G_t a menos de una constante aditiva, pero de (4) y (4') resulta además $F_t(+\infty)-\gamma = G_t(-\infty)+\gamma$ y esta condición determina la constante γ. Recíprocamente, (5) muestra que u, $\partial u/\partial t$ se deducen de F_t y G_t.

Los procesos F_t y G_t tienen valores reales, mientras que $\partial u/\partial t$ es un proceso generalizado con valores en el espacio de distribuciones de Schwartz. Por este motivo preferimos describir la evolución de la cuerda por medio de F_t, G_t en vez de u, $\partial u/\partial t$, con lo que evitamos trabajar con procesos generalizados.

3. Propiedad fuerte de Markov, y Principio de Reflexión.

Llamemos $\mathcal{A}_t = \sigma\{u(\tau, z) : 0 \le \tau \le t, z \in R\}$ a la σ-álgebra generada por las posiciones de la cuerda hasta el instante t.

Si T es un tiempo de parada respecto de la filtración $\{\mathcal{A}_t : t > 0\}$, se introduce

$\mathcal{A}_{T^+} = \{A : A \cap \{T < t\}$ es $\mathcal{A}_t$-medible para todo $t\}$.

Es inmediato verificar que cuando se reemplaza T^+ por una constante t, entonces $\mathcal{A}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$.

La *propiedad fuerte de Markov* expresa lo siguiente:

Teorema 1. *Condicionado a* $\{T < \infty\}$,

(i) $u^{(T)}(t,z) = u(T+t,z) - F_t(z+t) - G_t(z-t)$, $(t,z) \in R^+ \times R$ *es independiente de* $\mathcal{A}_{T^+}$ *y tiene la misma distribución que* $u = u^{(0)}$,

(ii) $F_t^{(T)}(z) = F_{T+t}(z) - F_T(z+t)$ *y* $G_t^{(T)}(z) = G_{T+t}(z) - G_T(z-t)$ *son independientes de* $\mathcal{A}_{T^+}$ *y tienen la misma distribución que* $F_t = F_t^{(0)}$ *y* $G_t = G_t^{(0)}$.

Este teorema es una generalización del Teorema de Dynkin-Hunt para el proceso de Wiener de parámetro unidimensional, y se puede demostrar de manera similar. (Ver [2], por ejemplo).

La propiedad fuerte de Markov, implica el siguiente Principio de Reflexión.

Teorema 2. *Con* $m(t) = \max F_t + \max G_t$ *y* $M(T) = \max_{s \le t} m(s)$, *se cumple* $P\{M(t) > c\} \le 2\, P\{m(t) > c\}$ *para cada constante positiva* c.

Demostración. Introducimos la variable $T = \sup\{t : M(t) < c\}$, que es un tiempo de parada, y observamos que cuando ocurre $\{M(t) < c\} = \{T < t\}$, entonces $m(t) = c$ y existen dos puntos aleatorios Z_1 y Z_2 tales que $F_T(Z_1) + G_T(Z_2) = c$.

Dado que $F^{(T)}{}_{t-T}(Z_1 - t + T) + G^{(T)}{}_{t-T}(Z_2 + t - T)$ es una variable centrada e independiente de $\mathcal{A}_{T^+}$, deducimos

$$P(\{T < t\} \cap \{F^{(T)}{}_{t-T}(Z_1 - t + T) + G^{(T)}{}_{t-T}(Z_2 + t - T) > 0\}) = (1/2)\, P\{T < t\} = (1/2)\, P\{M(t) > c\}. \tag{6}$$

Por otra parte,

$$\{T < t\} \cap \{F^{(T)}{}_{t-T}(Z_1 - t + T) + G^{(T)}{}_{t-T}(Z_2 + t - T) > 0\} = \{T < t\} \cap \{F_t(Z_1 - t + T) + G_t(Z_2 + t - T) > c\} \subset \{m(t) > c\} \subset \{T < t\},$$

y esto implica

$$P(\{T < t\} \cap \{F^{(T)}{}_{t-T}(Z_1 - t + T) + G^{(T)}{}_{t-T}(Z_2 + t - T) > 0\}) \le P\{m(t) > c\}. \tag{7}$$

De las desigualdades (6) y (7) se obtiene el enunciado. Aunque la desigualdad (7) puede ser muy grosera, $P\{M(t) > c\}$ y $P\{m(t) > c\}$ son infinitésimos del mismo orden para c grande, debido a la inclusión trivial $\{m(t) > c\} \subset \{M(t) > c\}$.

4. Dos aplicaciones.

4.1. Estimación de las colas de la distribución del supremo del proceso de Wiener biparamétrico en $[0,1]^2$.

Si el ruido actúa exclusivamente sobre el conjunto N de la Figura 1, se verifica fácilmente que

$$P\{m(\sqrt{2}) > a\} = P\{\sup_{x,y} W(x,1) + W(1,y) - W(1,1) > a\}$$

donde W denota cualquier proceso de Wiener típico.

Un cálculo de covariancias muestra que $W(.,1)$+ $W(1,.)$ son independientes, conditionadas a $W(1,1)$, y esto conduce a un cálculo sencillo del valor numérico de $g(a) = 2\,P\{m(\sqrt{2}) > a\}$. (Ver [4])

La inclusión obvia $\{\sup_z u(t,z) > a\} \subset \{M(t) > a\}$ y nuestro Principio de Reflexión implican

$$P\{\sup_{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1} W(x,y) > a\} \le g(a). \qquad (8)$$

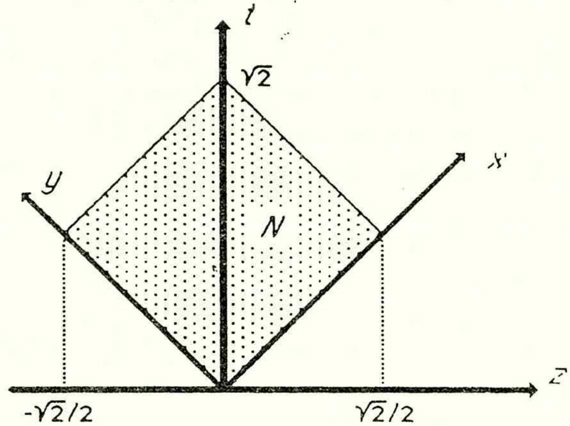


Figura 1

La distribución exacta de $\sup_{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1} W(x,y)$ no se conoce, pero en la bibliografía ([5]) hay cotas para el término de la izquierda de (8).

Nuestra cota en (8) es grosera, y no mejora la de [5], pero esto ocurre porque la familia de conjuntos

$$\mathfrak{R} = \{(0,x) \times (0,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

sobre la que se evalúa $\widetilde{W}$ no se adapta al contexto presente. La nueva familia

$$\mathfrak{S} = \{A(x,y,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le \sqrt{2}\}$$

donde cada $A(x,y,t)$ es el par ordenadó de subconjuntos de $(0,1) \times (0,1)$

$$A(x,y,t) = (\{(x',y') : 0 \le x' \le x,\ 0 \le y' \le y,\ x'+y' \le t\},$$
$$\{(x',y') : x \le x' \le 1,\ y \le y' \le 1,\ x'+y' \le t\}),$$

y la ley de evaluación

$$\widetilde{W}((A_1, A_2)) = \widetilde{W}(A_1) \quad \widetilde{W}(A_2)$$

nos permite considerar una situación nueva para la cual nuestro Principio de Reflexión da resultados más precisos:

Teorema 3. *Se cumple la desigualdad*

$$P\{\sup_{A \in \mathbf{S}} \widetilde{W}(A) > a\} \leq g(a). \qquad (9)$$

El enunciado precedente proporciona una desigualdad del mismo tipo que (8), que utiliza la información contenida en una familia de conjuntos sobre los que se evalúa el proceso $\widetilde{W}$, que es mucho más rica que la que se utiliza en (8), y tiene por lo tanto la ventaja de extraer más información de las muestras. Tiene también la correspondiente desventaja de que el cálculo de los supremos requiere mayor esfuerzo.

4.2. Problema de barrera para la cuerda finita fija en los extremos.

Las posiciones $u(t,z)$ de la cuerda finita ($t \geq 0$, $a \leq z \leq b$) de longitud $L = b - a$ con condiciones iniciales nulas y condiciones de contorno $u(t,a) = u(t,b) = 0$ para todo $t \geq 0$, se puede obtener por el método de las imágenes de Lord Kelvin, que consiste en reemplazar la cuerda por otra infinita, a la que se aplica una acción externa que resulta de extender la acción f inicialmente definida para $t \geq 0$, $a \leq z \leq b$ a todo $R^+ \times R$ por medio de $f(t,a+\zeta) + f(t,a-\zeta) = f(t,b+\zeta) + f(t,b-\zeta) = 0$ $(t,\zeta \geq 0)$. Esta regla implica $u(t,a) = u(t,b) = 0$, por simetría, y la restricción de la solución para la cuerda infinita a $a \leq z \leq b$ es la solución de la ecuación de la cuerda finita.

Se verifica fácilmente que, al proceder de esta forma, resulta como solución $u(t,z)$ la suma de las integrales de f sobre cada uno de los rectángulos de la Figura 2 multiplicadas respectivamente por 1 o -1, de acuerdo a lo indicado en la misma figura.

Cuando f se reemplaza por $W^{\bullet}$, encontramos para $u(t,z)$ la suma de las evaluaciones de $\widetilde{W}$ sobre cada uno de los mismos rectángulos, con el signo ya indicado.

Una notación formal para $u(t,z)$ es

$$u(t,z)=\sum_h \widetilde{W}(R_h(t,z)\cap \mathrm{R}^+\times \mathrm{R}) - \sum_h \widetilde{W}(S_h(t,z)\cap \mathrm{R}^+\times \mathrm{R})$$

con

$$R(t,z) = C(t,z)\setminus(C(t-z+a,a)\cup C(t+z-b,b)),$$
$$S(t,z) = R(t-b+a,\ a+b-z)$$
$$R_h(t,z) = R(t-2hL,\ z),\quad S_h(t,z) = S(t-2hL,\ z)$$
$$h = 0,1,2,\ldots .$$

Ambas sumas son finitas, porque las intersecciones son vacias para h grande.

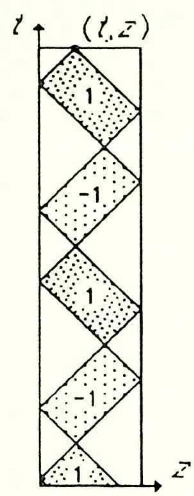


Figura 2 Región de integración para el cálculo de $u(t,z)$

La descripción de u resulta más sencilla a partir de la figura que de la fórmula. Por ese motivo describimos los procesos F_t y G_t, que son las correspondientes componentes de onda de

$u(t,z)$, por medio de la Figura 3. Para verificar que son efectivamente las componentes de onda, observamos que

$$F_t(z) + G_t(z) = u(t,z), \tag{10}$$

para $a \le z \le b$. Para $b \le z \le b+L$, por la simetría de la solución extendida correspondiente al método de las imágenes, $u(t,z) = -u(t,2b-z)$, $(a \le 2b-z \le b)$, por lo tanto, $u(t,z) = -F_t(2b-z) - G_t(2b-z)$ y la ecuación (10) sigue valiendo cuando F_t y G_t se extienden para $z \in (b, b+L)$ por medio de las ecuaciones

$$F_t(z) = -G_t(2b-z)$$
$$G_t(z) = -F_t(2b-z).$$

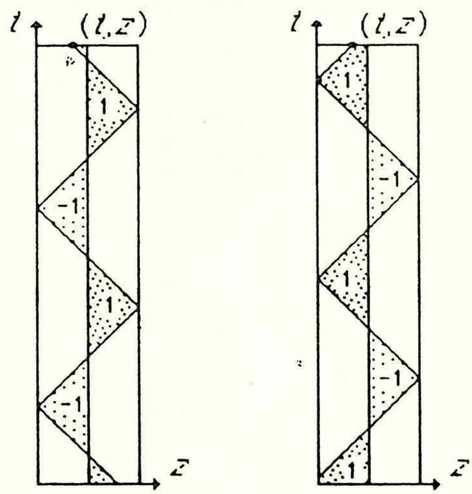


Figura 3. Regiones donde se evalúa $\widetilde{W}$ para calcular F_t, a la izquierda, y G_t, a la derecha.

Dado que u es periódica con período $2L$, extendemos F_t y G_t periódicamente, con el mismo período, y este procedimiento nos da las dos componentes de onda de la solución extendida u. Se observará que, en particular, para $a-L \le z \le a$, se cumplen las ecuaciones

$$F_t(z) = -G_t(2a-z)$$
$$G_t(z) = -F_t(2a-z),$$

tal como lo mostraría directamente un argumento de reflexión con respecto a a en vez de b.

Si se extingue el ruido a partir de t, los conjuntos de valores de la onda $\{F_{t+s}(a): 0 \leq s \leq L\}$ y $\{F_t(z): a \leq z \leq b\}$ coinciden (porque $F_{t+s}(a) = F_t(a+s)$), y también coinciden $\{F_{t+s}(a): L \leq s \leq 2L\}$ y $\{-G_t(z): a \leq z \leq b\}$. Por lo tanto, si un nuevo proceso v se define mediante $v_t(s) = F_{t+s}(a)$, $0 \leq s \leq 2L$, donde F_{t+s} se calcula a partir de la suposición de que el ruido se suprime a partir de t, entonces, cuando s describe el intervalo $0 \leq s \leq 2L$, $v_t(s)$ describe todos los valores de $F_t(z)$, $z \in \mathrm{R}$.

Dado que los valores de G_t, $z \in \mathrm{R}$, coinciden con los de $-F_t(z)$, $z \in \mathrm{R}$, se cumple

$$m(t) = \max_{0 \leq s \leq 2L} v_t(s) + \max_{0 \leq s \leq 2L} (-v_t(s)) = \max_{0 \leq s \leq 2L} v_t(s) - \min_{0 \leq s \leq 2L} (v_t(s)).$$

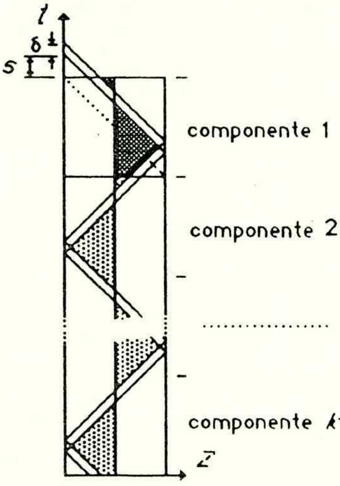


Figura 4. Esquema para el cálculo de $E(F_s\ F_{s+\delta})$

El Principio de Reflexión del Teorema 2 es aplicable cuando la distribución del máximo $m(t)$ se conoce. Obtener exactamente esa distribución no parece fácil, pero para cada valor particular de t es posible al menos estimarla por simulación.

Para algunos valores particulares de t , a saber, para los múltiplos de L , la distribución de $m(t)$ se puede describir de manera relativamente simple. El teorema siguiente muestra que la distribución de $m(kL)$ se obtiene fácilmente a partir de la de $m(L)$ para cada entero k .

Teorema 4. *Para cada entero k,* $P\{m(kL) > \sqrt{k}\, c\} = P\{m(L) > c\}$.

Basta verificar que v_{kL} y $\sqrt{k}\, v_L$ tienen la misma distribución, o bien que $Ev_{kL}(s)\, v_{kL}(s+\delta) = k\ Ev_L(s)\, v_L(s+\delta)$. El área de la región sombreada de la Figura 4 es $Ev_{kL}(s)\, v_{kL}(s+\delta)$. Esta región se obtiene como unión de k componentes congruentes entre si. La que está indicada con una sombra más obscura, corresponde a $k=1$, y de allí se deduce la conclusión requerida.

Un cálculo directo del área sombreada muestra que

$$Ev_L(s)\, v_L(s+\delta) = (L - |\delta|)^2/4 \quad (|\delta| \leq 2L).$$

En [2] se indican estimaciones de $h(c) = P\{m(1) > c\}$ basadas en la simulación del proceso de covariancia parabólica v .

REFERENCIAS

1. Billingsley, P. *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.

2. Cabaña. A and Cabaña. E.M., *Strong Markov property for the vibrating string forced by white noise and one application*, en trámite de publicación.

3. Cabaña, E.M., *The Vibrating String forced by White Noise*, Z.W. 15 (1970) 111-130.

4. Cabaña, E.M., *On two-parameter Wiener Process and the Wave Equation*, por aparecer en Acta Científica Venezolana.

5. Cabaña, E.M. and Wschebor, M., *The two-parameter Brownian Bridge Kolmogorov inequalities and upper and lower bounds for the distribution of the maximum*, Ann. Prob. 10 (1982) 289-302.

6. Ciesielski, Z., *Hölder condition for realization of Gaussian processes*. Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961) 403-413.

7. Friedman, A., *Stochastic differential equations and applications*, 3 v., Acad. Press, 1975-1976.

8. Kannan, D., *Random integrodifferential equations*, en A. T. Bharucha-Reid, ed. *Probabilistic Analysis and related topics*, Vol I, New York - London, Academic Press, 1978, pp. 87-167.

9. McKean, Henry P. Jr., *Stochastic Integrals*, New York - London, Academic Press, 1969.

10. Pyke, R. *Multidimensional empirical processes: Some comments in statistical inference and relatied topics*. (M.L. Puri Ed.), New York, Academic Press, 1975 pp. 45-48.

11. Walsh, J.B., *An introduction to Stochastic Partial Differential Equations*, Lecture Notes on Math. 1180 (1986) 256-437.

Algunos Comentarios Sobre los Conceptos de Grupo Linealmente Reductivo y Grupo Geométricamente Reductivo

Walter Ricardo Ferrer Santos.
Universidad de la República. Facultad de Humanidades y Ciencias.
Montevideo. Uruguay

Diciembre de 1987

1 Introducción

En este trabajo anunciaremos una generalización de los conceptos de grupo algebraico linealmente reductivo y geométricamente reductivo, conceptos éstos que en el caso *clásico* han sido estudiados extensivamente en la literatura (ver por ejemplo: [3] , [8] o [7]). Esta generalización nos permite a su vez, generalizar algunos resultados clásicos sobre generación finita de anillos de invariantes y existencia de cocientes afines.

Más que desarrollar en detalle las aplicaciones de estos conceptos, trataremos de relacionarlos con los conceptos *clásicos* y de mostrar que su introducción permite una reinterpretación de resultados conocidos. Demostraciones detalladas de los resultados aquí mencionados aparecerán próximamente.

En la Sección 3 se complementan los Teoremas mencionados con algunos resultados debidos a H. Borsari que están en proceso de ser publicados. Aprovecho la oportunidad para agradecer a la Profa. Borsari el permitirme mencionarlos aquí.

Las notaciones que usaremos son las de [4] y [6]. En particular las variedades algebraicas que consideramos son afines y definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Las representaciones de grupos algebraicos serán localmente finitas y polinomiales, o sea serán representaciones racionales.

2 Acciones Linealmente Reductivas y Geométricamente Reductivas

Sea K un grupo algebraico afín definido sobre k y sea X una variedad afín en k^n cuya algebra de funciones polinomiales será denotada como $P(X)$. Una acción polinomial de K en X a la izquierda induce una acción de K en $P(X)$ a la derecha que hace de $P(X)$ un K módulo racional.

Si $f \in P(X)$, $g \in K$ y $x \in X$ esta acción está dada por: $(f.g)(x) = f(g.x)$. Además esta acción lineal de K en $P(X)$ induce en $P(X)$ una estructura de $P(K)$ comódulo.

Definición 2.1 *([8]) Decimos que K es linealmente reductivo si para todo par de K módulos racionales $N \subset M$ con N de codimensión uno en M; existe T, K submódulo de M, tal que $M = N \oplus T$*

Definición 2.2 *([7]) Decimos que K es geométricamente reductivo si para todos los pares de M y N como antes existe n entero positivo y un K submódulo de $S^n(M)$, que llamamos T, tales que : $NS^{n-1}(M) \oplus T = S^n(M)$.*

En la definición anterior $S^n(M)$ indica la enésima componente homogenea del álgebra simétrica construída sobre M. Si en la Definición 2.2 ponemos $n = 1$ obtenemos la Definición 2.1.

Indicamos por $\mathbf{M}(K)$ la categoría de los K módulos racionales (la acción de K la consideramos del lado derecho). Si X es una variedad afín en la que K actúa de forma polinomial indicamos por $\mathbf{M}(K, X)$ la categoría de los $(K, P(X))$ módulos racionales.

Recordemos que M es un $(K, P(X))$ módulo si es un K módulo y también un $P(X)$ módulo de modo que si $g \in K$, $f \in P(X)$ y $m \in M$ se verifica que $(fm).g = (f.g)(m.g)$.

Es fácil ver que las Definiciones 2.1 y 2.2 son equivalentes con las Definiciones 2.3 y 2.4 respectivamente.

Definición 2.3 *Decimos que un grupo algebraico K es linealmente reductivo si para todo $M \in \mathrm{M}(K)$ y para toda $f \in \mathrm{M}(K)$, $f : M \to k$ sobreyectiva; existe $m \in M^K$ tal que $f(m) = 1$.*

Definición 2.4 *Decimos que un grupo algebraico K es geométricamente reductivo si para todo M y f como antes, existe n entero positivo y $m \in S^n(M)^K$ tales que $S^n(f) = 1$.*

Esto nos conduce de forma natural a las siguientes definiciones.

Definición 2.5 *Decimos que K actúa en X de forma linealmente reductiva si para todo $M \in \mathrm{M}(K, X)$, para todo J ideal K estable de $P(X)$ y para toda $f \in \mathrm{M}(K, X)$ con $f : M \to P(X)/J$ -f sobreyectiva- ; existe $m \in M^K$ tal que $f(m) = 1 + J$.*

Definición 2.6 *Decimos que K actúa en X de forma geométricamente reductiva si para todo M, J y f como antes, existen n natural y $m \in (P(X) \otimes S^n(M))^K$ tales que $\overline{S}^n(f)(m) = 1 + J$.*

En esta definición denotamos por $\overline{S}^n(f)$ al morfismo obtenido mediante la composición de la aplicación $id \otimes S^n(f)$, inducida por f en $P(X) \otimes S^n(M)$, con la multiplicación en $P(X)/J$. Así $\overline{S}^n(f) : P(X) \otimes S^n(M) \to P(X)/J$.

Es claro que la Definición 2.6 con $n = 1$ es la Definición 2.5. Además , si X se reduce a un punto la acción de K en X es linealmente reductiva si y sólo si K es linealmente reductivo y lo mismo para geométricamente reductivo. Es claro también que se K es linealmente reductivo, K actúa en cualquier variedad de forma linealmente reductiva y lo mismo para geométricamente reductivo.

El Teorema que sigue explicita estos conceptos en un caso de particular interés.

Teorema 2.1 *Sea G un grupo algebraico afín y K un subgrupo cerrado de G. La acción por traslaciones izquierdas de K en G es linealmente reductiva si y solo si es geométricamente reductiva y $P(G)^K$ es finitamente generado como k álgebra. Además esto sucede si y sólo si K es exacto en G.*

Recordemos (ver [2]) que K es exacto en G si y sólo si el functor inducción de K módulos en G módulos es exacto y eso a su vez es equivalente con cualquiera de las condiciones que siguen.

- Para todo $M \in \mathbf{M}(K)$ se verifica que $\mathbf{H}^1(K, P(G) \otimes M) = 0$
- $P(G)$ es injectivo como K módulo.
- La variedad algebraica G/K es afín.

Vale también el siguiente "Teorema de Transitividad ".

Teorema 2.2 *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo algebraico afín K y sea X una variedad afín en la cual K actúa polinomialmente. Si la acción de K en X es geométricamente reductiva y la acción de H en K es linealmente reductiva entonces la acción de H en X es geométricamente reductiva.*

Usando los resultados de Haboush y Nagata sobre la equivalencia entre reductividad geométrica y reductividad concluimos el siguiente resultado clásico sobre grupos reductivos, que en nuestro contexto aparece como un caso particular del "Teorema de Transitividad ".

Corolario 2.1 *Sea K un grupo algebraico reductivo y H un subgrupo cerrado de K. Entonces H es reductivo si y sólo si el cociente K/H es afín.*

Demostración. Como H es reductivo es también geométricamente reductivo. Esto implica que H actúa en cualquier variedad (en particular en K) de forma geométricamente reductiva. El Teorema 1 emplica en este caso que K/H es afín porque es sabido que los anillos de invariantes son finitamente generados.

Recíprocamente, si K/H es afín observamos anteriormante que H actúa en K de forma linealmente reductiva. Al ser K reductivo, K actúa en k de forma geométricamente reductiva. El Teorema de Transitividad asegura que H actúa en k de forma geométricamente reductiva. Luego H es reductivo. □

El siguiente teorema, cuya formulación puede generalizarse sustancialmente, extiende resultados clásicos de Nagata y otros. De la misma forma que en [8] puede usarse para concluir resultados sobre la estructura de cocientes.

Teorema 2.3 *Si K actúa en X de forma linealmente reductiva el álgebra $P(X)^K$ es finitamente generada sobre k.*

3 Acciones Linealmente Reductivas e Integrales

En los comienzos del desarrollo de la teoría de la cohomología racional Hochschild, en [5], hizo notar la necesidad de probar que si K es un grupo afín y H un subgrupo cerrado normal, entonces $P(K)$ es inyectivo como H módulo. Este resultado fue demostrado para cuerpos algebraicamente cerrados de característica arbitraria en [2] que de hecho probaron el siguiente resultado más general.

Teorema 3.1 *(Cline, Parshall y Scott). El H módulo $P(K)$ es inyectivo si y sólo si K/H es una variedad afín.*

En el mismo artículo los autores prueban que si H es unipotente, las condiciones del Teorema anterior se verifican si y sólo si existe un morfismo de H módulos $\sigma : P(H) \rightarrow P(K)$ tal que $\sigma(1) = 1$. De hecho, en el artículo citado los autores prueban un resultado del tipo mencionado en el caso de un grupo actuando en una variedad afín arbitraria.

El resultado que enunciamos a continuación generaliza los resultados anteriormente mencionados y da una condición necesaria y suficiente para la inyectividad de $P(X)$ como K módulo. Este resultado es debido a H. Borsari .

Teorema 3.2 *(Borsari, Heloísa) Las siguientes propiedades para la acción de un grupo algebraico K en una variedad afín X son equivalentes.*

a) *La acción de K en X es linealmente reductiva.*

b) *$P(X)$ es inyectivo como K módulo.*

c) *Existe un morfismo de K módulos σ tal que : $\sigma : P(K) \rightarrow P(X)$ con $\sigma(1) = 1$.*

En el caso en que X consiste de sólo un punto, el Teorema anterior generaliza resultados clásicos sobre integrales en grupos linealmente reductivos.

Referências

[1] Borsari, Heloísa Daruiz. *(A aparecer).*

[2] Cline, E., Parshall, B., Scott, L. *"Induced Modules and Affine Quotients"* , Mathematische Annalen , 1977, Vol 230, pp. 1-14 .

[3] Haboush, W. *"Reductive Groups are Geometrically Reductive; a proof of the Mumford Conjecture"* , Annals of Mathematics , 1975, Vol 102, pp. 67-84.

[4] Hochschild, G. *"Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras"*, Springer-Verlag, 1981, Vol 75, Graduate Texts in Mathematics, New York.

[5] Hochschild, G. *"Rationally Injective Modules for Algebraic Linear Groups"* , Proceedings of the American Mathematical Society, 1963, Vol 14, N. 6, pp. 880-883.

[6] Humphreys, J. E. *"Linear Algebraic Groups"* , Springer-Verlag , 1978 , Vol 21, Graduate Texts in Mathematics , New York.

[7] Mumford, D. *"Geometric Invariant Theory"* , Springer-Verlag , 1965 ,New York.

[8] Nagata, M. *"Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert"* , Tata Institute of Fundamental Research , 1965 , Lectures on Mathematics and Physics , Bombay.

Nonparametric regression estimation in models with weak error's structure

by

Ricardo Fraiman and Gonzalo Pérez Iribarren

Centro de Matemática. Universidad de la República.

Abbreviated tittle: Nonparametric Regression Estimation.

SUMMARY

In this preprint we propose nonparametric estimates of the regression function and its derivative when it is only assumed a weak error's structure. We study their local and global asymptotic behaviour when we observe dependent trajectories.

1. Introduction. A classical statistical problem is the estimation of a regression function g(x). Typically, g(x) is assumed to belong to a parametric family $g(x, \Theta)$ and parameters are estimated via least square methods.

AMS 1980 Subject Classification: 62G05.

Key words and phrases: Nonparametric regression models, growth curves, a-mixing processes, locally weighted averages.

As noted by Gasser et al.(1984) these parametric models are,for growth curves,motivated more in "methodological methods than in biological reasoning". That is one of the reasons why nonparametric techniques seem more natural in order to obtain evidence which allows us to understand the dynamics of the problem.

In this preprint we consider the problem of estimating the function g(x) that verifies a general nonparametric regression model,

$$Y(x)=g(x)+e(x), \qquad E(e(x))=0$$

from a discrete set of observations of the process $Y(\cdot)$, defined on a probability space $(\Omega,\mathcal{A},P)$, at the points $\{x_i / 1\leq i\leq n\}$.

This problem has been considered by several authors, Rosenblatt (1971), Priestley and Chao (1972), Benedetti (1977), Clark (1977), Gasser and Müller (1979), Gasser el al. (1984), Härdle and Luckhaus (1984) and Georgiev (1985) are some references.

However, it is quite often required that to the process e(x) verifies $E(e(x_i)e(x_j))=0$ for $x_i\neq x_j$, or to impose a more restrictive condition, namely, that the "errors" given by the sequence $\{e(x_i),\ i\geq 1\}$ be independent. This case corresponds mainly to measurement errors, and it cannot reasonably be applied to other situations as, for example, the case of some growth curves models where the observable response of each individual may be better modeled as a sampling path $Y(x,\omega)$, $\omega\in\Omega$ of a process $Y(x)$ with expected value $g(x)$. Moreover, square mean continuity of the observable process $Y(x)$ entails that the variables $e(x)$ and $e(x')$ are strongly correlated if x' is near to x. For example in some biological phenomena as the growth of individuals (or populations) $Y^{(j)}(x,\omega)$ will be the growth curve of the j-individual, $e^{(j)}(x,\omega)$ the measurement of the deviation from the mean growth $g(x)$ of the response of the j-individual and $\{x_i\ /1\le i\le n\}$ the points where measurements are taken. In this case the individual responses will be often independent, occasionally *m*-dependent, as in the case when we are dealing with individuals with the same progenitors. Moreover, in practice sometimes the observed responses in different individuals are also correlated. For instance, in hidrology, many phenomena may be represented by a sequence of responces curves $\{Y^{(j)}(x), j\ge 1\}$ with an intrinsic dependence structure, such as mixing conditions.

As in Hart and Wehrly (1986), we consider a nonparametric approach to regression problems in which a random sample of m experimental units of a response variable is available at the points $x_1,\dots,x_n$, of a controlled variable. For this model Hart and Wehrly (1986) studied the asymptotic square mean error of a kernel estimator assuming that the $e^{(j)}(x_i)$ are zero mean random variables satisfying $cov(e^{(j)}(x_i),e^{(k)}(x_h))=\sigma^2\rho(x_j-x_h)$ for j=k and zero elsewhere (for a smooth correlation function ρ), and obtained results concerning the optimum choise of a bandwidth. (See also Möcks et al. (1984)).

We will denote by $Y^{(j)}(x_i)$ the j-th response at the point x_i, where $1 \le j \le m$, $1 \le i \le n$ and m is the number of experimental units. In order to allow dependence we will assume that the sequence $\{e^{(j)}(.), j \ge 1\}$ is an (non-necessarily stationary) α-mixing process.

In section 2, we propose nonparametric estimates of the function g(x) (population mean response) and of its derivative g'(x) based on locally weighted averages. For the derivative, instead of the derivative of the estimate of g(x), i.e. the derivative of a "smooth" version of g(x), we consider a smooth version of a numerical derivative of g(x), that is a locally weighted average of the increments rate of the observed process. In this way we include nearest neighbor weights (which are not differentiable) and we also obtain - in general - a non-degenerate asymptotic joint distribution of the estimators of g and g'.

Section 3 is divided into three parts. In the first one we show the consistency of the proposed estimates; in the second one we obtain their asymptotic distribution at a given point x and the asymptotic finite dimensional distributions. In the third one we give the asymptotic distribution of the corresponding processes on C[0,1], (the space of continuous functions on the interval [0,1]) related to each one of the considered estimates.

2. Some nonparametric estimates for g(x) and g'(x). We will consider the following model

$$Y(x) = g(x) + e(x) \qquad (2.1)$$

where $\{e(x): x\in[0,1]\}$ is a zero mean stochastic process defined on a probability space $(\Omega,\mathcal{A},P)$ which -in general- will take values on the space $C[0,1]$, and $g:[0,1]\to R$ is a continuous function. $Y(x)$ will represent the individual response (sampling path) which will be observable at a discrete set of points $x_i=x_{in}$, $1\le i\le n$, belonging to the unit interval. These measurements will be denoted by $Y^{(j)}(x_1),\ldots,Y^{(j)}(x_n)$, $1\le j\le m$, $1\le i\le n$, where the index j will correspond to the j-th response.

We are interested in estimating the value of the function $g(\cdot)$ at a given $x\in[0,1]$ and its derivative $g'(\cdot)$ (when this last one does exist).

The classic growth curve model takes just m=1, but makes strong assumptions on the structure of the errors process e(x) such as the independence of $e(x_1),\ldots,e(x_n)$. As noted in the introduction there are many situations where this is an unrealistic assumption. For instance, mean square continuous sampling paths imply a strong correlation between e(x) and e(x') when x' is near to x. Our main interest is to avoid as far as possible any assumptions on the error's structure.

In order to allow some dependence between individuals we will establish the following assumptions:

H1. The sequence $\{e^{(j)}(x),\ j\geq 1\}$ is an α-mixing sequence on $(\Omega,\mathcal{A},P)$ with the same distribution as $e(x)$, i.e., Rosenblatt (1956), there exists a nonincreasing sequence of nonnegative numbers $\{\alpha(j),\ j\geq 1\}$ with $\lim_{j\to\infty}\alpha(j)=0$ such that for any integer j $|P(AB)-P(A)P(B)|\leq\alpha(j)$ for all $k\geq 1$, $A\in M^{k}{}_{1}$, $B\in M^{\infty}{}_{k+j}$ where $M^{v}{}_{u}$ is the σ-field generated by $\{e^{(j)}(x)/\ u\leq j\leq v\}$.

A nonparametric estimate of $g(x)$ can be obtained as a local average of the response variables $\{Y^{(j)}(x_i),\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m\}$. More precisely for each $x\in[0,1]$ let $w_{ni}(x)=w_{ni}(x,x_1,\dots,x_n)$ $1\leq i\leq n$ be a measurable weight function verifying the following design assumption:

H2. (i) $0\leq w_{ni}(x)$ for $1\leq i\leq n$, and $n\in N$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x)=1$

(iii) $\lim_n \sup_{0\leq x\leq 1} \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x)\,1_A=0$ for all $\delta>0$, where $A=A(n,x,\delta)=\{i/\,|x_i-x|>\delta,\ 1\leq i\leq n\}$ and 1_A denotes de indicator function of the set A.

The estimator of the function $g(x)$ is defined by

$$g_{n,m}(x)=m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x)\,Y^{(j)}(x_i)\,. \tag{2.2}$$

In order to estimate the velocity $g'(x)$ instead of the derivative of $g_{n,m}(x)$ we will use

$$Dg_{n,m}(x)=m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x)(Y^{(j)}(x_{i+1})-Y^{(j)}(x_i))/(x_{i+1}-x_i) \tag{2.3}$$

where $x_{n+1}=1$. That is, instead of a derivative of a smooth version of $g(x)$ we use a smooth version of a "numerical derivative" of $g(x)$.

3. Asymptotic Results .

In this short version we will omit some proofs.

A. Consistency. Let $\{Y(x): x\in[0,1]\}$ be defined as in (2.1), and let $g_{n,m}$ and $Dg_{n,m}$ be the estimates considered in (2.2) and (2.3) respectively.

Lemma 3.1. Under H2 we have that:

(i) $\lim_n \sup_{0\le x\le 1} |E(g_{n,m}(x)) - g(x)| = 0.$

(ii) If in addition $g'(x)$ is continuous on $[0,1]$, then

$$\lim_n \sup_{0\le x\le 1} |E(Dg_{n,m}(x)) - g'(x)| = 0$$

Proposition 3.1. If $\{e^{(j)}(.), j\ge 1\}$ is a stationary sequence, under H1 and H2 we have that

(i) $P(\lim_n \lim_m g_{n,m}(x) = g(x))=1.$

(ii) If in addition the process $e(x)$ has continuous paths a.s.

$$P(\lim_m \lim_n g_{n,m}(x) = g(x)) = 1.$$

(iii) If $g'(x)$ is continuous at x

$$P(\lim_n \lim_m Dg_{n,m}(x) = g'(x)) = 1.$$

(iv) If the derivative process $e'(x)$ is continuous with zero mean and $g'(x)$ exists

$P(\lim_m \lim_n Dg_{n,m}(x) = g'(x)) = 1.$

The following theorem establishes the uniform mean square convergence of our estimates, with the only requirement on m and n that $\min(m,n) \to \infty$.

Theorem 3.2 Assume that H1,H2, $\sup_x E(|e(x)|)^{2+\theta}) \leq K < \infty$ for some $\theta > 0$, and $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k)^{\theta/(2+\theta)} < \infty$ hold. Then

$$\lim_{\min(n,m)\to\infty} \sup_x E((g_{n,m}(x)-g(x))^2)=0.$$

The uniform convergence of $E((g_{n,m}(x)-g(x))^2)$ implies the following corollary. **Corollary 3.1.** Under the assumption of Theorem 3.2

$$\lim_{\min(n,m)\to\infty} E\int_0^1 |g_{n,m}(x)-g(x)|^2 dx=0$$

holds, and therefore $\int_0^1 |g_{n,m}(x)-g(x)| dx$ converges to zero in probability as $\min(n,m)\to\infty$.

For the derivative of g(x) we have the following result:

Theorem 3.3 Assume H1,H2 $E(\sup_x |e'(x)|^{2+\rho}) \leq L < \infty$ for some $\rho > 0$ and $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k)^{\rho/(2+\rho)}$. If g(x) has a continuous derivative g'(x) for all $x \in [0,1]$ we have

$$\lim_{\min(n,m)\to\infty} \sup_x E((Dg_{n,m}(x)-g'(x))^2)=0.$$

Corollary 3.2 Under the hypotheses of Theorem 3.3

$\lim_{\min(n,m)\to\infty} E\int_0^1 |Dg_{n,m}(x)-g'(x)|^2 dx=0$ holds,and therefore $\int_0^1 |Dg_{n,m}(x)-g'(x)|dx$ converges to zero in probability as $\min(n,m)\to\infty$.

Theorem 3.4. Assume H1,H2 and that the mixing coefficients are geometric. Then we have that

(i) If there exists $L>0$ such that $|e(x)|<L$ a.s, then $P(\lim_{\min(n,m)} g_{n,m}(x)=g(x))=1$.

(ii) If $e'(x)$ is bounded, then $P(\lim_{\min(n,m)} Dg_{n,m}(x)=g'(x))=1$.

B. Asymptotic distribution for a fixed x. In order to obtain the asymptotic distribution of the estimates, it will be necessary to relate n and m by considering $n=n(m)$. The asymptotic bias will depend on the asymptotic behaviour of $S_{1m}(x)=m^{1/2}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x)(g(x_i)-g(x))$ for which we will need some considerations on the design and on the relationship between n and m.

Let H3 and H4 be the following assumptions:

H3. The function g verifies a Lipschitz condition of order one.

H4. There exist $\theta>0$, $K>0$ and $0<a<1$ such that:

(i) $\sup_x E(|e(x)|^{2+\theta})<K<\infty$.

(ii) The mixing coefficients verify $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k)^{(1-a)\theta/(2+\theta)}<\infty$.

Lemma 3.2. Under H2 and H3 and for any sequence $n=n(m)$ such that there exists a sequence δ_n for which $m^{1/2}\delta_n \to 0$ and $m^{1/2}\alpha_n/\delta_n^2 \to 0$ as $m\to\infty$, we have $\sup_x S_{1m}(x) \to 0$ as $m\to\infty$.

From now on $n=n(m)$ will be chosen satisfying the conditions of Lemma 3.2.

Theorem 3.5. Assume H1 to H4 and that for each $\delta>0$ there exists $\eta=\eta(\delta)$ verifying $\sup_{|h|\le\delta} E((e(x_0+h)-e(x_0))^2)\le\eta(\delta)$ where $\eta(\delta)\to 0$ as $\delta\to 0$.

Then $m^{1/2}(g_{nm}(x_0)-g(x_0))\xrightarrow{w} Z_1$, where $\xrightarrow{w}$ stands for weak convergence, Z_1 has a normal distribution with zero mean and variance $\sigma^2=\sigma^2(x_0)=$ $\lim_m E((\sum_{j=1}^{m} e^{(j)}(x_0))^2)/m$, assuming that $\sigma^2>0$. In the stationary case,

$$\sigma^2 = E(e^{(1)}(x_0)^2) + 2\sum_{j=1}^{\infty} E(e^{(1)}(x_0)e^{(j+1)}(x_0)).$$

Proof. For each $x_0\in[0,1]$

$$m^{1/2}(g_{n,m}(x_0)-g(x_0))=m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x_0)e^{(j)}(x_i)+$$

$$+m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x_0)(g(x_i)-g(x_0)) \tag{3.3}$$

Lemma 3.2 provides the limit of the second term in the right hand side member of (3.3).

On the other hand

$$m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x_0)e^{(j)}(x_i)=m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} T^{(j)}(x_0)+m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} e^{(j)}(x_0)$$

(3.4)

with $T^{(j)}(x_0)=\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x_0)(e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x_0))$.

As $E(T^{(j)}(x_0))=0$, and $m^{-1}E((\sum_{j=1}^{m} T^{(j)}(x_0))^2)\le m^{-1}$ $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |E(T^{(j)}(x_0)T^{(k)}(x_0))|$ we will majorize $|E(T^{(j)}(x_0)T^{(k)}(x_0))|$ in order to prove that $m^{-1}\sum_{j=1}^{m} T^{(j)}(x_0)$ converges to zero in probability. For each $\delta>0$ we have

$|E(T^{(j)}(x_0)T^{(k)}(x_0))|\le\sum_{(i,h)\in B} w_{ni}(x_0)w_{nh}(x_0)\min(\eta(\delta),C\alpha(|j-k|)^{\theta/(2+\theta)})$

$+\sum_{(i,h)\in B^c} w_{ni}(x_0)w_{nh}(x_0)C\alpha(|j-k|)^{\theta/(2+\theta)}\le\min(\eta(\delta),C\alpha(|j-k|)^{\theta/(2+\theta)})+$

$2\lambda(\delta)\ C\alpha(|j-k|)^{\theta/(2+\theta)}\le$

$(\eta(\delta)^a C^{1-a}\ \alpha(|j-k|)^{(1-a)\theta/(2+\theta)})+2\lambda(\delta)C\alpha(|j-k|)^{\theta/(2+\theta)}$

where $B=\{(i,h)/i\in A^c(n,x_0,\delta),h\in A^c(n,x_0,\delta)\}$ with A defined in H2 (iii), C given by Corollary 2.1 of Davydov (1968), $\lambda(\delta)$ obtained from H2 (iii), and a,θ given in assumption H4. Therefore,

$m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |E(T^{(j)}T^{(k)})|^2\le 2C^{1-a}\eta(\delta)^a\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha(j))^{(1-a)\theta/(2+\theta)}+$

$4\lambda(\delta)C\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha(k))^{\theta/(2+\theta)}$ which can be made arbitrarily small if we first choose δ

such that $\eta(\delta)$ be small, and for this δ we choose m large enough so that $n=n(m)$ makes $\lambda(\delta)$ arbitrarily small.

The conclusion of Theorem 3.5 finally follows from Corollary 1 of Herrndorf (1984), i.e., the Central Limit Theorem for α-mixing sequences.

Theorem 3.6. Under the assumptions of Theorem 3.5, if g' verifies a Lipschitz condition of order one, $E(e'(x_0))=0$, $\sup_x E(|e'(x)|^{2+\theta})<\infty$ and $\sup_{|h|\le\delta} E((e'(x_0+h)-e'(x_0))^2) \le \eta(\delta)$ we have that $Z_m(x_0)=m^{1/2}((g_{nm}(x_0)-g(x_0)), (Dg_{nm}(x_0)-g'(x_0)))^t \xrightarrow{w} Z$; where Z is a normal random vector with zero mean and covariance matrix $\Lambda=((\lambda_{ij}))$ $1\le i,j\le 2$, λ_{11} is given in Theorem 3.5, $\lambda_{22}=\lim_m E(\sum_{j=1}^{m} e'^{(j)}(x_0))^2/m$, $\lambda_{12}=\lim_m E((\sum_{j=1}^{m} e^{(j)}(x_0))(\sum_{j=1}^{m} e'^{(j)}(x_0)))/m$ if $\lambda_{11}>0$, $\lambda_{22}>0$. In the stationary case, λ_{11} is given in Theorem 3.5, $\lambda_{22}=E((e'^{(1)}(x_0))^2)+2\sum_{j=1}^{\infty} E(e'^{(1)}(x_0)e'^{(j+1)}(x_0))$ and

$\lambda_{12}=E(e^{(1)}(x_0)e'^{(1)}(x_0))+\sum_{j=1}^{\infty}(E(e^{(1)}(x_0)\, e'^{(j+1)}(x_0))+$

$E(e'^{(1)}(x_0)e^{(j+1)}(x_0)))$.

The following result can be proved in the same way.

Theorem 3.7 If the assumptions of Theorem 3.6 holds for some fixed real numbers $t_1,t_2,\ldots,t_p$, $t_i\in[0,1]$ $1\le i\le p$ we have that

$m^{1/2}(g_{nm}(t_1)-g(t_1),\ldots,g_{nm}(t_p)-g(t_p),Dg_{nm}(t_1)-g'(t_1),\ldots,Dg_{nm}(t_p)-g'(t_p))^t$

$\xrightarrow{w} Z$ where Z is a normal random vector with zero mean and covariance matrix Σ

with p-dimensional submatrices Σ_{ij}, $1\le i,j\le 2$, determined in a similar way that those of the preceding theorem.

C. Asymptotic distribution on C[0,1] of the processes $\{g_{nm}(x), x\in[0,1]\}$ and $\{Dg_{nm}(x), x\in[0,1]\}$. Let us now assume that for each $n\in N$ the weight functions $w_{ni}(x)$ $1\le i\le n$, are continuous functions of x and the sequence $\{e^{(j)}(x), x\in[0,1], j\ge 1\}$ has continuous paths. Therefore $\{g_{nm}(x), x\in[0,1]\}$ is a random element on the space C[0,1] of real valued continuous functions on the interval [0,1]. On these conditions we are able to show the following result.

Theorem 3.8. Assume H1 to H3 and suppose that the following additional conditions are fulfilled:

(i) There exist $\theta>0$ and $0<a<1$ such that $E(|e(0)|^{(2+\theta)})<\infty$ and $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k)^{(1-a)\theta/(2+\theta)}<\infty$.

(ii) There exist real constants $K_1>0$ and $a_1>(a\beta)^{-1}$ such that $E(\sup_{|x-x'|\le\delta}|e(x)-e(x')|^{2+\theta})\le\eta(\delta)=K_1\delta^{a_1}$, where a is given in (i) and $\beta=2/(2+\theta)$.

(iii) It can be choosen $n=n(m)\to\infty$ such that $m\delta_n^{b_1}\to 0$ and $m\alpha_n/\delta_n^2\to 0$ as $m\to\infty$ for some sequence $\{\delta_n\}$ with $\lim_n\delta_n=0$, and $b_1=\min(2,a_1\beta)$.

Then $m^{1/2}(g_{nm}(x)-g(x)) \xrightarrow{w} \Upsilon(x)$, where $\Upsilon(x)$ is a gaussian process with p-dimensional distributions with zero mean and covariance matrix Σ_{11} given by Theorem 3.7.

Note that assumption (ii) excludes some well known processes such as the Brownian motion. However, in this case, the independent increments structure can be used in order to obtain consistent estimators,(see,for instance, Ibragimov et al.(1986)).

Proof. Define

$$S_{1m}(x)=m^{1/2}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x)(g(x_i)-g(x))$$

$$S_{2m}(x)=m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m} e^{(j)}(x) \quad \text{and}$$

$$S_{3m}(x)= m^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x)(e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x))$$

Since (iii) implies the design assumption of Lemma 3.2 $\sup_x|S_{1m}(x)|$ converges to zero as $m\to\infty$. Thus, the proof will be complete if we show that (a) $S_{2m}(x)\xrightarrow{w}\Upsilon(x)$ and (b) $\sup_x|S_{3m}(x)|$ converges to zero in probability as $m\to\infty$.

(a) From Theorem 3.7 we know that the p-dimensional distributions of $S_{2m}(x)$ are asymptotically normally distributed. On the other hand as

$$E(m^{-1/2}[\sum_{j=1}^{m} e^{(j)}(t_2)-e^{(j)}(t_1)]^2)=m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} E(e^{(j)}(t_2)-e^{(j)}(t_1))(e^{(k)}(t_2)-e^{(k)}(t_1))\le m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\min(K_1{}^{\beta}|t_2-t_1|^{a_1\beta},C\alpha^{\theta/(2+\theta)}(|j-k|))\le$$

$m^{-1}K_1{}^{a\beta}|t_2-t_1|^{a_1 a\beta} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \{C\alpha^{\theta/(2+\theta)}(|j-k|)\}^{(1-a)} \le C_1|t_2-t_1|^{a_1 a\beta}$ where

$C_1=2K_1{}^{a\beta}C^{(1-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^h(k)$ and $h=(1-a)\theta/(2+\theta)$

Therefore (a) holds since Theorem 12.3 of Billingsley (1968) implies that the sequence $S_{2m}(x)$ is tight.

(b) Define $V^{(j)}=\sup_x \sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x)|e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)|$. Then we have that

$$E(\sup_x|S_{3m}(x)|^2) \le m^{-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} E(V^{(j)}V^{(k)})$$

(3.6)

with

$$E(V^{(j)}V^{(k)})=E(\sup_{x,y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} w_{ni}(x)w_{nh}(y)|e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)||e^{(k)}(x_h)e^{(k)}(y)|) \qquad (3.7)$$

Let $B^C=\{(i,h) \,/\, i\in A(n,x,\delta_n)\}\cup\{(i,h) \,/\, h\in A(n,y,\delta_n)\}$ with $A(n,x,\delta)$ defined in H2

We have that

$E(\sup_{x,y}\sum_{(i,h)\in B^C} w_{ni}(x)w_{nh}(y)\, |e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)||e^{(k)}(x_h)-e^{(k)}(y)|) \le$

$2E(\sup_x \sum_{i\in A} w_{ni}(x)|e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)| \sup_y \sum_{h=1}^{n} w_{nh}(y)\, |e^{(k)}(x_h)-e^{(k)}(y)|) \le$

$2\sup_x \sum_{i\in A} w_{ni}(x) \sup_y \sum_{h=1}^{n} w_{nh}(y)\, E(\sup_x|e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)| \sup_y|e^{(k)}(x_h)-$

$e^{(k)}(y)|) \le 2\sup_x \sum_{i\in A} w_{ni}(x)\, [C\alpha^{\theta/(2+\theta)}(|j-k|)+L^2(\sup_{y,h}|e(x_h)-e(y)|] \le$

$2\lambda_n[C\alpha^{\theta/(2+\theta)}(|j-k|)+\eta(1)^{\beta/2}]$ where $\lambda_n=\lambda(\delta_n)=\sup_x \sum_{i\in A} w_{ni}(x)$ and (ii) implies that

$E(\sup_{x,y}\sum_{(i,h)\in B} w_{ni}(x)w_{nh}(y)\,|e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)|\,|e^{(k)}(x_h)-e^{(k)}(y)|) \le E(\sup_D |e^{(j)}(x_i)-e^{(j)}(x)|\,|e^{(k)}(x_h)-e^{(k)}(y)|) \le \eta(\delta_n)^{\beta}$, where $D=\{(x,y,x_i,x_h)/\ |x_i-x|\le\delta_n,\ |x_h-y|\le\delta_n,\ 1\le i,h\le n\}$.

Finally (3.6) and (3.7) imply that

$$E(\sup_x|S_{3m}(x)|^2)\le m^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(2\lambda_n[C\alpha^{\theta/(2+\theta)}(|j-k|)+\eta(1)^{\beta/2}]+\eta(\delta_n)^{\beta})\le 4C\lambda_n\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{\theta/(2+\theta)}(k)+m\eta(1)^{\beta/2}\Big]+m\,\eta(\delta_n)^{\beta}$$

and the design assumption (iii) entails that $m\,\eta(\delta_n)^{\beta}=K_1{}^{\beta}m\delta_n{}^{a_1\beta}\to 0$ and

$m\lambda_n\le m\alpha_n/\delta_n{}^2\to 0$

as $m\to\infty$ which concludes the proof.

Remark 3.1. In the case of independence the proof is quite simpler and the regularity conditions on Theorem 3.8 can be reduced to

$E(|e(x)-e(x')|^2)\le K_1|x-x'|^{a_1}$ with $a_1>0$ and

$\lim_{\delta\to 0}E(\sup_{|x-x'|\le\delta}|e(x)-e(x')|^2)=0.$

The design assumptions in this case are just those required in Lemma 3.2.

Remark 3.2. If for instance $w_{ni}(x)=C^n{}_i x^i(1-x)^{n-i}$, $x_i=x_{i,n}=i/n$, $0\le i\le n$ we have that $\alpha_n\le 1/(4n)$ and choosing $n=m^3$ the sequence $\delta_n=n^{-1/4}$ satisfies (iii) if $a_1>5/3$ and $\theta=1/2$.

Theorem 3.9. Assume H1, H2 and the following conditions:

i) The function $g(x)$ is continuously differentiable with derivative $g'(x)$ and $e(x)$ has a derivative $e'(x)$ for each x with continuous path process $e'(x)$.

ii) There exist $\theta_1>0$ and $0<a<1$ such that $E(|e'(0)|^{2+\theta_1})<\infty$ and

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)^{(1-a)\theta_1/(2+\theta_1)}<\infty.$$

iii) There exist $K_2>0$ and $a_2>(a\beta)^{-1}$ such that

$E(\sup_{|x-x'|\le\delta} |e'(x)-e'(x')|^{2+\theta_1})\le K_2\delta^{a_2}$ with a given in (ii) and $\beta=2/(2+\theta_1)$.

iv) It can be choosen $n=n(m)\to\infty$ such that $m\delta_n^{b_2}\to 0$ and $m\alpha_n/\delta_n^2\to 0$ as $m\to\infty$ for some sequence $\{\delta_n\}$ with $\lim_n \delta_n=0$, and $b_2=\min(2,a_2\beta)$.

Then $m^{1/2}(Dg_{nm}(x)-g'(x)) \xrightarrow{w} \gamma_1(x)$ where $\gamma_1(x)$ is a gaussian process with p-dimensional distributions with zero mean and covariance matrix Σ_{22} given by Theorem 3.7.

Proof. The proof can be obtained by substituting $e'(x)$ for $e(x)$ in the proof of Theorem 3.8 and using

$$\sup_x m^{1/2} \sum_{i=1}^{n[m]} w_{ni}(x)\ [(g(x_{i+1})-g(x_i))/(x_{i+1}-x_i) - g'(x)] \to 0 \text{ as } m\to\infty,$$

with $x_{n+1}=1$

i.e. an analogous result to Lemma 3.2.

References.

Benedetti, J. On the nonparametric estimation of regression functions. *J. Roy Statist.Soc. Ser. B, 39*, 248-253 (1977).

Billingsley, P. Convergence of probability measures. *J.Wiley, New York* (1968).

Clark, R. Nonparametric estimation of a smooth regression function. *J. Roy. Statist Soc., Ser. B, 39*, 107-113 (1977).

Davydov, J. Convergence of distribution generated by stationary stochastic processes. *Th. Prob. Appl. 13*, 691-696 (1968).

Doukhan, P., Leon, J. and Portal, F.. Vitesse de convergence dans le théoreme central limite pour des variables aléatoires mélangeantes á valeurs dans un espace de Hilbert. *C.R. Acad. Sc., Paris, t.298, Série I, 13*, 305-308 (1984).

Gasser, Th. and Müller, H.G. Kernel estimation of regression functions. *In Smoothing Techniques for Curve Estimation. Lectures Notes in Mathematics, 757*, 23-68. (Th. Gasser and M. Rosenblatt eds.) Springer, Berlin (1979).

Gasser, Th., Müller, H.G., Köhler, W., Molinari, L. and Prader, A. Nonparametric regression analysis of growth curves. *Ann. Statist. 12*, 210-229 (1984).

Georgiev, A. Propiétés asymptotiques d'un estimateur functionnel nonparamétrique. *C.R. Acad. Sc. Paris, t.300,Série I, 12*, 407-410 (1985).

Härdle,W. and Luckhaus, S. Uniform consistency of a class of regression function estimators. *Ann. Statist.*, *12*, 612-623 (1984).

Hart, J.D. and Wehrly, T.E. Kernel regression estimation using repeated measurements data. *J.A.S.A.*, *81*, 1080-1088 (1986).

Herrndorf, N. A functional central limit theorem for weakly dependent sequences of random variables. *Ann. Prob.*, *12*, 141-153 (1984).

Ibragimov, I.A., Nemirovskii, A.S. and Khas'minskii, R.Z. Some problems on nonparametric estimation in Gaussian white noise. *Th. Prob. Appl.*, *31*, 391-406 (1986).

Möcks,J., Tuan, P.D., and Gasser, T. Testing for homogeneity of noisy signals evoked by repeated stimuli. *Ann. Statist.* *12*, 193-209 (1984).

Priestley, M.B. and Chao, M.T. Nonparametric function fitting. *J.Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, *34*, 385-392 (1972).

Rosenblatt, M. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, *42*, 43-47 (1956).

Rosenblatt, M. Curve estimates. *Ann. Math. Statist.*, *42*, 1815-1841 (1971).

Stone, C. Consistent nonparametric regression. *Ann. Statist.* 5, 595-645 (1977).

Expansive homeomorphisms of surfaces

Jorge Lewowicz

INTRODUCTION

In this pre-print we consider the topological classification of expansive homeomorphisms of compact oriented surfaces and the persistence of their dynamics.

Let M be a compact metric space and $f: M \to M$ an homeomorphism; f is expansive if there exists $\alpha > 0$ such that $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$, $n \in Z$, implies $x = y$. The subshifts in K^Z (K a finite set) are expansive homeomorphisms, as well as the restriction of a diffeomorphism to a compact invariant hyperbolic set. Anosov diffeomorphism and the smooth models of pseudo Anosov maps [4], [9], are examples of expansive diffeomorphisms of smooth manifolds. While Anosov diffeomorphisms are hyperbolic, the non-wandering set of a Pseudo Anosov map is not topologically hyperbolic.

Let f, M, α be as above; it is easy to show that if $\alpha > 0$, then there exists a C^0 - neighbourhood N_δ of f such that for $g \in N_\delta$ we have that $\text{dist}\,(g^n(x), g^n(y)) < \alpha$, $n \in Z$, implies $\text{dist}(g^n(x),g^n(y)) < \delta$, $n \in Z$. When $\delta < 1/2\,\alpha$, $\{(x,y) \in M \times M : \text{dist}(f^n (x), f^n(y)) < \alpha,\ n \in Z\}$ is an equivalence relation, say T, and the induced $\hat{g} : M/T \to M/T$ is an expansive homeomorphism of the compact metrizable space M/T. (Thus, except for the identification of points whose entire trajectories are very close, expansivity is a C^0 – open property).

An homeomorphisms f is persistent if for every $\varepsilon > 0$ there exists a neighbourhood $N\varepsilon$ of f such that for g in that neighbourhood and $x \in M$, there exists $y \in M$ with the property dist($f^n(x)$, $g^n(x)$) $\leq \varepsilon$, $n \in Z$. Let f be expansive and persistent, $\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$, $\delta < \varepsilon$ and $g \in N_\varepsilon \cap N_\delta$; then f is conjugate to the restrictions of $\hat{g}$ to K_g/T where K_g is the compact g-invariant subset of M that consist of those y such that for some $x \in M$ dist($f^n(x)$, $g^n(y)$) $\leq 2\varepsilon$, $n \in Z$. When $K_g = M$ for every g, f is topologically stable. Clearly, at expansive persistent homeomorphism, topological entropy has a relative minimun.

It is well known that Anosov diffeomorphisms are topogically stable while pseudo Anosov maps are not. However pseudo Anosov maps are persistent [8].

Let M be now a compact oriented surface. In [10] it was shown that if M has positive genus then there are expansive homemorphisms of M. We prove, theorem 3.2, that there is no expansive homeomorphism of S^2.

As for the topological classification, in sections 4 and 5 we show, among other things, that and expansive f is conjugate to an Anasov or pseudo Anasov map. Consequently, every expansive homeomorphism of M is persistent.

1. Stable and unstable sets

Consider an expansive homeomorphism f of a compact connected oriented surface M, endowed with some riemannian metric. Let $\alpha > 0$ be an expansivity constant for f, i.e., $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ for every $n \in Z$ implies $x = y$. Call $(\hat{M}, \phi)$ the suspension of f, $p: M \times R \to \hat{M}$ the canonical proyection, and M_t the manifold $p(M \times \{t\})$, $t \in R$; we shall frequently identify M to M_0. Let $U, \dot{U}, \ddot{U}$ be Lyapunov functions for the suspension flow as in [7, p.203]: $U, \dot{U}, \ddot{U}$ are continuous real functions defined on a neighbourhood of the diagonal in $\bigcup_{t \in R} M_t \times M_t$ that vanish on the diagonal, and such that

$$\dot{U}(\xi, \eta) = \lim_{t \to 0} 1/t\,(U(\phi(\xi,t), \phi(\eta,t)) - U(\xi, \eta)), \quad \xi, \eta \in M_t,$$

$t \in R$; $\ddot{U}$ being defined analogously with $\dot{U}$ instead of U. According to [7] we may assume $U(\xi, \eta), \ddot{U}(\xi, \eta) > 0$ if $\xi \neq \eta$, $\xi, \eta \in M_t$, $t \in R$.

Let δ_1, δ_2, k, $0 < \delta_1 < \delta_2 < \alpha$, $k > 0$ be chosen in such a way that for every $x \in M$,

$$B_{\delta_1}(x) = \{ y \in M : \mathrm{dist}(x,y) \leq \delta_1 \} \subset \{ y \in M : U(x,y) < k \} \subset B_{\delta_2}(x).$$

Lemma 1.1. Let $A \subset M$ be an open set, $x \in A \subset B_{\delta_1}(x)$. Then there exists a compact connected set C, $x \in C \subset \overline{A}$, $C \cap \partial A \neq \phi$ such that for every $y \in C$ and every $n \geq 0$, $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta_2$.

Proof. Assume this is the case. Then there exists $N > 0$ so that for every compact connected $D \subset \overline{A}$ joining x to ∂A there exists $z \in D$ and n, $0 \le n \le N$, such that $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(z)) > \delta_2$. For otherwise we could find for $n \ge 0$, compact connected sets $D_n \subset \overline{A}$, joining x to ∂A, such that for every $y \in D_n$, $\mathrm{dist}(f^\nu(x), f^\nu(y)) \le \delta_2$, $0 \le \nu \le n$. But then,

$$D_\infty = \bigcap_n^\infty \mathrm{clos}(\bigcup_{n=j}^\infty = D_j)$$

will satisfy the thesis of the lemma; a contradiction.

Let $\xi = p(x, 0)$ and $K_t = \{ \eta \in M_t : U(\phi (\xi, t), \eta) < k \}$, $t \in R$. For arbitrarily large T, the boundary of the connected component of K_t that contains $\phi(\xi, T)$ must have points η such that $\dot{U}(\phi (\xi, T), \eta) < 0$ because if this were not so, by taking limits as $t \to \infty$ we would get on account of the continuity of $\dot{U}$, that any y that belongs to $\omega(x)$ _ the ω-limit set of x would be a stable point of f^{-1}, which is impossible according to lemma 2.7 of [8] since f^{-1} is also expansive.

Choose $T > N$ with the property mentioned in the previous paragraph; then there exists an arc a $[0, 1] \to K_t$ such that $a(0) = \phi (\xi, t)$ and $\phi (a(1),t) \in \overline{k}_t$ for some t, $-T < t < 0$. Let s_0 be the supremum of those $s \in [0,1]$ such that $\phi (a(s),t) \in K_t$ for $t \in [-T,0]$ and $\phi (a(s), -T) \in A$. Then $s_0 < 1$, and as $\dot{U} > 0$ we have that $\phi (a(so), t) \in K_t$, $-T \le t \le 0$. Thus, $\phi (a(s_0), -T) \in \partial A$ and the set $D = \{ \phi (a(s), -T) : 0 \le s \le s_0 \}$ has the property that for any $y \in D$, $\mathrm{dist}(f^n(x), f^n(y)) \le \delta_2, 0 \le n \le N$, a contradiction.

For $\delta > 0$, $\delta < \alpha$, and $x \in M$, let $S_\delta(x)$, the δ-stable set of x, be

$$S_\delta(x) = \{ y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(x)) \leq \delta, \quad n \geq 0 \}.$$

<u>Lemma 1.2.</u> For any $\delta' < \delta$, $0 < \delta'$, it is possible to choose $\sigma > 0$ such that if $y \in S_\delta(x)$ and $\operatorname{dist}(x, y) < \sigma$, then $y \in S_{\delta'}(x)$

<u>Proof</u>. Take $k > 0$ such that $U(x, y) < k$ implies $\operatorname{dist}(x, y) < \delta'$. Since $y \in S_\delta(x)$, by [7, p.200] $U(\phi(x, t), \phi(y, t)) < 0$ for $t \geq 0$; we have that $U(\phi(x, t), \phi(y, t)) < k$, $t \geq 0$, provided $U(x, y) \leq k$. Choose σ such that $B_\sigma(x) \subset \{ y : U(x, y) \leq k \}$ for every $x \in M$.

From now on we shall assume that α is so small that any set of diameter σ is contained in the domain of a coordinate map of M; also we shall consider these subsets as subspaces of the metric spaces R^2 or S^2 and talk about coordinate axis, straight lines, etc.

let $C_\delta(x)$ be the connected component of $S_\delta(x)$ that contains x.

<u>Lemma 1.3</u> . $C_\delta(x)$ is locally connected at x.

<u>Proof.</u> We shall argue again by contradiction. Let $\sigma > 0$ be so small that

i) for $y \in B_\sigma(x)$ there is a connected set joining y to $\partial B_\sigma(x)$ and contained in $B_\sigma(x) \cap S_{\delta/2}(y)$ (lemma 1.1) and

ii) if $y \in S_\delta(x)$, $y \in B_\sigma(x)$, then $y \in S_{\delta/2}(x)$ (lemma 1.2).

Let D_x be the connected component of $B_\sigma(x) \cap C_\delta(x)$ containing x and if $y \in C_\delta(x)$ let as call D_y the connected component of $C_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$ containing y; because of the choice of σ, both, D_x and D_y, meet the boundary of $B_\sigma(x)$.

Arguing by contradiction we may assume that there are $y \in C_\delta(x)$ arbitrarily close to x and such that $D_x \cap D_y$ is empty. Let $\tilde{S}$ be the straight line segment joining x to y. There is a first point z in $\tilde{S}$ that belongs to the D_y and a point u in $D_x \cap \tilde{S}$ such that the segment $S \subset \tilde{S}$ joining u to z meets D_y only in z and D_x only in u. Analogously there is a small arc A of the circumference $\partial B_\sigma(x)$ that meets $D_x \cup S \cup D_y$ only in two points, one in D_x and the other in D_y. As $D_x \cup S \cup D_y$ is connected, $D_x \cup S \cup D_y \cup A$ separates R^2 (see [6], p. 506), but since neither D_x nor D_y separate R^2, for otherwise f would have a stable point, no union of three of the four D_x, D_y, S, A separates R^2 as it may be shown by repeated application of theorem 7 of [6], p. 507. Therefore any component of the complement of $H = H_y = D_x \cup D_y \cup S \cup A$ must contain in its boundary the circumference arc A; it follows easily that there are only two components of the complement of H, one of them contains the exterior of $B_\sigma(x)$ while the other, say $G = G_y$, is bounded.

On account of the compactness of Dx it is easy to see that there exists $\gamma > 0$ with the following property : if u, $v \in D_x$, $\operatorname{dist}(u, v) \geq \sigma/8$, then $\operatorname{dist}(U_{\delta/2}(w), u) > \gamma$ for any w, $\operatorname{dist}(w, v) \leq \gamma$. Here $U_{\delta/2}(w)$ denotes the $\delta/2$-unstable set of w.

Take such a $\gamma < \sigma/8$, and choose $\rho > 0$ such that if $\mathrm{dist}(x, y) < \rho$, the corresponding component G_y is contained in the set of points whose distance to D_x is less than γ. The existence of such a ρ may be shown in the following way : each $z \in B_\sigma(x)$, $z \in D_x$, may be joined to the exterior of $B_\sigma(x)$ by a compact arc a contained in the complement of D_x; since any connected set that contained in $S_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$ must be includeded in D_x, for y close enough to x, $y \in C_\delta(x)$, $D_y \cap D_x = \phi$, the corresponding H_y does not meet a. Thus z has a neighbourhood disjoint to G_y ; then, a compactness argument on the set of $z \in B_\sigma(x)$, $\mathrm{dist}(z, D_x) \geq \gamma/2$ permits to find such a ρ. Pick $y \in C_\delta(x)$, $D_y \cap D_x = \phi$, such that $\mathrm{dist}(G_y, D_x) < \gamma$, and call again G this G_y.

Let P be a poligonal line of sides parallel to be coordinate axes, that joins an interior point of S to an interior point of A and is contained in G except for its end points. Let Q be a straight line such that

i) $\mathrm{dist}(Q, S \cup A) > \sigma/4$.

ii) $Q \cap P \neq \phi$ but $Q \cap P$ contains no vertex of P.

iii) Q separates S from A.

If $w \in Q \cap G$, $U_{\delta/2}(w)$ does not cut $S \cup A$ because there exists $v \in D_x$, $\mathrm{dist}(v, w) \leq \gamma$ and then $\mathrm{dist}(v, x) \geq \mathrm{dist}(x, w) - \mathrm{dist}(v, w) \geq \sigma/4 - \gamma \geq \sigma/8$; similarly $\mathrm{dist}(v,u) \geq \sigma/8$ for $\{u\} = D_x \cap A$.

Q cuts P in a finite set; the number of points in this set must be odd for otherwise S and A would be in the same component of the complement of Q. On the other hand $Q \cap G$ consists of a union of disjoint open segments of Q and one of them must contain an odd number of points of P. Assume that one of the end points of such a segment belongs to D_x. Then we claim that the other must lie on D_y. To see this consider $H_1 = D_y \cup P \cup S_1 \cup A_1$, where $S_1 \subset S$, $A_1 \subset A$, are segments with one end point in D_y and the other in P. Since D_x is connected and does not meet H_1, if both end points of the segment belonge to D_x they would belong to the same component of the complement of H_1, but this is impossible since each time the segment meets P it changes the component of the complement of H_1. Thus, we have found an open segment $\overline{M}$ contained in G whose end points belong to D_x and D_y.

Let $\overline{M}_1$ be the subset of $\overline{M}$ that consist of those points whose $\delta/2$-unstable set does meet D_x; $\overline{M}_1$ is open and since, because of expansivity, the end point of $\overline{M}$ that belong to D_y has this property, it is also non void. Similarly $\overline{M} - \overline{M}_1$ consists of those points whose $\delta/2$-unstable set does not meet D_y and is also open and non void. (Recall that, by previous arguments, these unstable sets do not meet $S \cup A$). Thus, we reach a contradiction.

Assume now that $\delta < \alpha/3$ and let $y \in C_\delta(x)$; then $C_\delta(x) \subset C_{2\delta}(y)$. By the previous lemma, $C_{2\delta}(y)$ is locolly connected at y, and therefore for any $\sigma > 0$ and $z \in C_\delta(x)$, z close enough to y, there exists a compact connected set C joining y to z, $C \subset B_\sigma(y) \cap C_{2\delta}(y)$. The union $C_\delta(x) \cup C \subset C_{2\delta}(y)$ and so, $C_\delta(x) \cup C$

can not separate R^2. Consequently, by [6, p.506] the intersection $C_\delta(x) \cap C$ must be connected; thus $C_\delta(x) \cap C$ is a connected set joining y to z within $B_\sigma(y)$. we have proved then, the following corollary.

Corollary 1.4 For any $x \in M$, $C_\delta(x)$ is compact connected and locally connected.

In the sequel arc will mean a homeomorphic image of $[0,1]$.

Ccrollary 1.5 For any $x \in M$ and any two points $p, q \in C_\delta(x)$ there is an arc, contained in $C_\delta(x)$, joining p to q.

Proof. See [6; & 50].

2. Local product structure.

Let σ, δ, $0 < \sigma < \delta < \alpha$, be so that for any $x \in M$ and $z \in B_\sigma(x)$, the intersections $S_{\delta/2}(z) \cap \partial B_\delta(x)$ and $U_{\delta/2}(z) \cap \partial B\sigma(x)$ are not empty, and such that if $z \in S_\delta(x)$, then $z \in S_{\delta/2}(x)$. Call $C = C(x, \sigma)$ the connected component of $C_\delta(x) \cap B_\delta(x)$ that contains x; from the previous arguments it follows that C is locally connected and that any two points on C may be joined, within C, by an arc.

Consider the family $\mathcal{A}$ of all arcs contained in C and having their origins at x and their end points on $\partial B_\sigma(x)$. When two arcs of $\mathcal{A}$ meet at a point different that x, they have in common an arc through x because C does not separate R^2 and has empty interior. Among the arcs of $\mathcal{A}$ we define an equivalence relation according to which the arc a is equivalent to the arc b if $a \cap b$ strictly contains $\{x\}$.

Lemma 2.1. There are only a finite number of equivalence classes.

Proof. Let $\rho > 0$ be so that

$$\operatorname{dist}(U_\delta(x) \cap \partial B_\delta(x),\ C \cap \partial B_\sigma(x)) > \rho ,$$

and assume that for two non-equivqlent arcs a, $b \in \mathcal{A}$, their end points determine on $\partial B_\sigma(x)$ a compact arc c with diameter less than ρ. Then $U_\delta(x)$ does not cut c. Let X be the union of the curve $a \cup b \cup c$ with its interior and D the connected component containing x of $U_{\delta/2}(x) \cap X$. There is an open connected neighbourhood N of D in X, such that for every z in the closure of N, $U_{\delta/2}(z) \cap c$ is void. By [6, p. 437] the boundary B of the connected component of $X - N$ that contains c, is connected ; $x \in' B$ and also, the intersections $B \cap a$ and $B \cap b$ are not empty. Since for $z \in B$, $U_{\delta/2}(z) \cap \partial B_\sigma(x) \neq \phi$ and $U_{\delta/2}(z) \cap c = \phi$, $U_{\delta/2}(z)$ must cut either a or b. Then the points of B may be classified according to whether the $\delta/2$-unstable sets through them meet a or b; both classes are open and non-void, which is absurd. Thus, any sét of end points of representatives of different classes must be finite.

Assume now that, at x, there are at least two equivalence classes of arcs of $\mathcal{R}$. Then it is easy to see that there are non-equivalent arcs $a, b \in \mathcal{R}$ such that for some arc $c \subset \partial B_\sigma(x)$, $a \cup c \cup b$ is a Jordan curve and C meets c only at its end points. Call again X' the union of $a \cup b \cup c$ with its interior and D the connected component of $U_{\delta/2}(x) \cap X$ that contains $\{x\}$.

Lemma 2.2. D separates X and therefore there is an arc in D joining x to a point of c.

Proof. If D does not meet c we may repeat the connectedness argument in the proof of the previous lemma to reach a contradiction. The last assertion follows from the results of the preceding section applied to f^{-1}.

Let c_1, c_2 be arcs contained in c so that c_1 begins at the end point of a, c_2 ends at the end point of b, and $D \cap (c_1 \cup c_2) = \phi$. Let N be an open connected neighbourhood of x in X such that for $y \in N$ the connected component of $S_{\delta/2}(y) \cap c$ that contains $\{y\}$ is, in turn, included in $c_1 \cup c_2$. Moreover, we choose N and c_1, c_2 such that the $\delta/2$-unstable set through any point of N does not meet c in points that belong to $c_1 \cup c_2$. Let Q be the subset of N that consist of those y such that

i) There is an arc $s(y)$ through y, $s(y) \subset S_{\delta/2}(y)$ that intersects c_1 and c_2,

ii) There is an arc $u(y)$ through y, $u(y) \subset U_{\delta/2}(y)$, that meets c and $\partial B_\sigma(x) - c$.

In the sequel, we shall say that $y \in M$ has a local product structure if there is a homeomorphism of R^2 onto an open neighbourhood of y such that it maps horizontal (vertical) lines onto open subsets of local stable (resp. unstable) sets.

<u>Lemma 2.3</u>. Q is open and non-void and every $y \in Q \cap \mathrm{int}(x)$ has a local product structure.

<u>Proof</u>. Let us firstshow that $x \in Q$. In the presence of two non-equivalent arcs a and b, it is clear that we can find a set X', similar to X, bordered by arcs a', b', c', a', $b' \subset S_{\delta/2}(x)$, $c' \subset \partial B_\sigma(x)$, and such that c' and c have no interior point in common. By lemma 2.2, there exists $D' \subset X'$, $D' \cap D = \{x\}$ and an arc contained in D' and joining x to an interior point of c'. This proves that x satisfies ii); as i) is obviously true for x, we get $x \in Q$.

Now we show that Q is open in N. Let $y \in Q$; for z close to y, $z \in u(y)$, the arguments of the previous paragraph may be applied to get that the connected component of $S_{\delta/2}(z) \cap B_\sigma(x)$ that contains $\{z\}$ meets c_1 and c_2. Similary, for t close to y but on $s(y)$ the corresponding connected component has to cut c and $\partial B_\sigma(x) - c$. The function that sends (z, t) to the unique intersection point of $S_{\delta/2}(z)$ and $U_{\delta/2}(t)$ is continuous, injective and open, by invariance of domain. This proves the lemma.

<u>Corollary 2.4</u>. Let $x \in M$ be such that there are at least two non-equivalent arcs in $\mathcal{A}$. Then there is a neighbourhood of x such that each y in that neighbourhood, $y \neq x$, has a local product structure.

Proof. To construct such a neighbourhood it is enough to remark that if $a \in \mathcal{R}$ there is a non trivial arc e, beginning at x such that if a' is equivalent to a, then $e \subset a'$ (lemma 2.1), and to replace stable arcs by unstable ones to include the points in the border of sectors such as our previous X.

Lemma 2.5. For each $x \in M$ there is $\sigma > 0$ such that the family $\mathcal{R}$ has at least two non-equivalent arcs.

Proof. Assume that for some x we have that for every $\sigma > 0$ the family $\mathcal{R}$ defined by x and σ has only one class of arcs. Pick a small σ; let the arc a with origin x and end point $g \in \partial B_\sigma(x)$ be a representative of that class. If C, the connected component of $S_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$ that contains $\{ x \}$, also contains points other than those in a, we join them to x, within C, by all possible arcs. If all these arcs contain a, it is easy to see that for some smaller σ, C would consist of only one arc joining x to $\partial B_\sigma(x)$. Assume then that there is a point $e \in C$, $e \notin a$, that may be joined to x, within C, by an arc which does not contain a. Thus, there is a point $p \in a$, $p \neq x$, and an arc $b \subset C$ with origin p and end point e, whose intersection with a is $\{ p \}$. Let J be a Jordan curve through g and e such that a and b lie in its interior except for their end points. Let $q \in a$ be the closest point to x such that there is an arc $c \in C$ with origin q and end point on J, $c \cap a = \{ q \}$(lemma 2.1). Consequently, the arc contained in a, with origin x and end point q, belongs (except for q) to the interior of one of the stable sectors, say X, defined as previously, with q replacing x and J instead of $\partial B_\sigma(x)$. But on account of the local product structure on a neighbourhood of q in X, this implies that the stable set of q meets twice some unstable set, which is absurd.

Thus, for some $\sigma > 0$, C consists of an arc a interior to $B_\sigma(x)$ except for its end point. All interior points of a have a local product structure and therefore their local unstable sets are arcs transversal to a. A connectedness argument on the boundary of a small neighbourhood of a permits to find a stable arc that meets twice some of these local unstable arc (see [6, p. 437]).

Proposition 2.6. Except for a finite number of points, that we shall call singular, every $x \in M$ has a local product structure. Any singular point y is periodic and its local stable (unstable) set consist of the union of r arcs that meet only at y ; $r \geq 3$. The stable (unstable) arcs separate unstable (resp. stable) sectors.

Proof. Lemma 2.5 and corollary 2.4 imply that singular points can not accumulate; thus, there are only a finite number of them. Since the set of singular points is f-invariant, all of them are periodic. The rest of the assertions are also easy consequences of our previous results.

3. The sphere

A rectangle in M will be the image of $[0, 1] \times [0, 1] \subset R^2$ through a homeomorphism that maps horizontal (vertical) segments into stable (resp. unstable) arcs; we assume also that a rectangle has diamete much less than α and that it may contain at most one singular point and only as one of its vertices.

Consider a finite family $\mathcal{R}$ of rectangles R_i, whose union is M, and such that $R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j$, if $i \neq j$, and that it consists of an interval of one of the sides of each rectangle when it is non-void. Take a point x_1 on an unstable side of, say, R_1, such that it does not lie on a stable leaf through any singular point. In the unstable side of R_1 opposite to that of x_1, we take x_2, lying on the same stable arc of R_1 that contains x_1; x_2 also belongs to another rectangle, say, R_2. Continuing with this we find a collection of rectangles and points that we shall call R_i, x_i, $i = 1, \ldots, n$, so that

i) $R_i \neq R_j$ if $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n-1$, and $R_1 = R_n$.

ii) For $i = 2, \ldots, n$, x_i belongs to an unstable side of R_{i-1} and of R_i.

In particular, x_n belongs either to the unstable side of R_1 that contains x_1 or to the one where x_2 lies. In the first case we define x_{n+1} continuing, from x_n, the previous procedure. Then, the union of the stable arcs $x_2x_3, \ldots, x_nx_{n+1}$ with the unstable $x_{n+1}x_2$ in this case, and the union of the stable $x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n$ with the unstable x_nx_2 in the other one, are Jordan curves.

For any $x \in M$ there is a sequence x_k, $k = 0, 1, \ldots$, so that $x_0 = x$, $x_k x_{k+1}$ is a stable arc contained in a rectangle of $\mathcal{R}$ and $x_kx_{k+1} \cap x_{k'}x_{k'+1}$ consists of at most one point if $k \neq k'$, k, $k' = 0, \ldots$. Moreover, for $k = 1, \ldots$, x_k and x_{k+1} lie on opposite sides of some rectangle. The existence of such a sequence, that we shall a stable prolongation of x, is an easy consequence of the non-existence of stable closed curves.

Assume that M is homeomorphic to S^2. Let C be a connected component of the complement of one of the Jordan curves defined previously.

<u>Lemma 3.1</u>. C contains some stable prolongation.

<u>Proof</u>. Assume that C contains singular points. If the thesis of the lemma were not true, we could find a Jordan curve J, $J = a_1 \cup a_2 \cup b_1$, where a_1, a_2 are arcs of the stable set of a singular point p, $a_1 \cap a_2 = \{p\}$, and b is an arc contained in $x_{n+1}x_2$ (or in $x_n x_2$). Moreover we may assume that the interior of J is contained in C and that it contains no singular points. then the continuous map that sends $x \in b$ to the first point $y \in b$ where the stable prolongation of x entering C meets b again, must have a fixed point; since this is absurd, and since the case when no singular point belongs to C is simpler, this completes the proof.

<u>Theorem 3.2</u>. There are no expansive homeomorphisms of S^2.

<u>Proof</u> Let C be as before. The previous lemma permits to construct, in the same way as the border of C, a Jordan curve whose interior $C_1 \subset C$, and $\overline{C}_1 \subset \overline{C}$, in both cases, properly. Consider a maximal family of sets like $\overline{C}$, $\overline{C}_1$, ordered by inclusion. The intersection of this family contains a stable prolongation, as it may be shown easily considering a convergent sub-net of a net constructed by assigning to each set in the family a stable

prolongation contained in it. Then, by previous arguments, this intersection contains properly a set that belongs to the family, which is absurd.

4. The torus

Let $\overline{f}$ be a lifting of f to the universal covering $\overline{M}$ of M and let $\overline{s}$, $\overline{u}$, be respectively, the corresponding liftings of a stable and an unstable leaf of f. Clearly $\overline{s}$($\overline{u}$) is a stable (unstable) leaf of $\overline{f}$. If $\overline{s}$ and $\overline{u}$ meet at two point we find a Jordan curve whose boundary is the union of an arc of $\overline{s}$ with an arc of $\overline{u}$ and therefore it contains an infinite stable (or unstable) semi-leaf. Since by previous arguments this is absurd, we may state :

<u>Corollary 4.1.</u> $\overline{s} \cap \overline{u}$ is either empty or consists of one point.

Now we assume that $M = T^2$ and that f is homotopic to an Anosov diffeomorphism g, by [3], f is semi-conjugate to g. Let then $h : T^2 \to T^2$ be a continuous surjective map, $h \circ f = g \circ h$, and let $\overline{f}$, $\overline{g}$, $\overline{h}$ be liftings of f, g, h such that $\overline{h} : R^2 \to R^2$ is a proper map that satisfies $\overline{h} \circ \overline{f} = \overline{g} \circ \overline{h}$.

Let $\mathcal{R}$ be a family of rectangles of T^2 with the properties of the previous ones, and moreover, such that if an unstable (stable) arc β is contained in the union of two rectangles of $\mathcal{R}$, then, diam ($f^n(\beta)$) is less than α for any $n \leq 0$ (resp. $n \geq 0$). Let

$\overline{R}$ be the lifting of $\mathcal{R}$ and assume that $\overline{y}$ belongs to the unstable leaf $\overline{u}$ through $\overline{x}$, $\overline{x} \neq \overline{y}$. Let β be the arc of $\overline{u}$ with end points $\overline{x}$, $\overline{y}$; the diam ($\overline{f}^n(\beta)$) $\to \infty$, for otherwise there would exist a positive integer K and a sub-sequence n_i, $i = 1, 2, \ldots$, such that $\overline{f}^m(\beta)$ would be contained, for $m = n_i$, in the union of K rectangles of $\overline{R}$. Choose a partition of β as the union of more than K sub-arcs; we have, on account of the properties of $\mathcal{R}$ with respect to α, that there exists N such that for $n \geq N$, the $\overline{f}^n$ image of any one of the arcs of the partition contains an entire unstable arc of some rectangle of $\overline{R}$. Since by previous arguments, $\overline{f}^n(\overline{u})$ can not meet twice a rectangle of $\overline{R}$, we get that for $n \geq N$, $\overline{f}^n(\beta)$ can not be included in the union of K rectangles.

Now we prove the following lemma which admits a similar version for points on a stable arc and $n \to -\infty$.

<u>Lemma 4.2</u>. $\lim_{n \to \infty} \mathrm{dist}(\overline{f}^n(\overline{x}), \overline{f}^n(\overline{y})) = \infty$.

<u>Proof</u>. If this were not true we could find infinite positive integers m, a compact set $L \in \overline{M}$, and, for each m, points $\overline{x}_m, \overline{y}_m \in L$, such that

i) $\overline{x}_m = \overline{f}^m(\overline{x}) + e_m$, $\overline{y}_m = \overline{f}^m(\overline{y}) + e_m$, where $e_m \in Z \times Z$, and

ii) the diameter of the unstable arcs with end points $\overline{x}_m$, $\overline{y}_m$ tends to infinite when m does.

in these conditions it is easy to find points $\bar{z}_m$, $\bar{w}_m$ in the straight line segment joining $\bar{x}_m$ to $\bar{y}_m$, such that the stable leaf through $\bar{z}_m$ and the unstable leaf through $\bar{w}_m$ meet at points whose distance to $\bar{z}_m$ or $\bar{w}_m$ tends to infinite with m. But on account of the properties of Anosov diffeomorphisms (see [3]) and the fact that $\bar{h}$ is a proper map, this is absurd.

It follows from the precceding lemma that if $\bar{y}$ lies in the unstable set of $\bar{x}$, whether this set contains singular points or not, $\bar{h}(\bar{x}) \neq \bar{h}(\bar{y})$ provided $\bar{x} \neq \bar{y}$. For otherwise we would have for $n \geq 0$,

$$\bar{h}(\bar{f}^n(\bar{x})) = \bar{g}^n(\bar{h}(\bar{x})) = \bar{g}^n(\bar{h}(\bar{y})) = \bar{h}(\bar{f}^n(\bar{y}))$$

and then, we could find $e_n \in Z \times Z$ such that $\bar{f}^n(\bar{x}) + e_n$, $\bar{f}^n(\bar{y}) + e_n$ lie in the $\bar{h}$ pre-image of the fundamental square in R^2. But since $\mathrm{dist}(\bar{f}^n(\bar{x}), \bar{f}^n(\bar{y})) \to \infty$, this is absurd.

Consequently f has no singular points, and this , in turn, implies that $\bar{h}$ is a convening map, i.e, a homeomorphism. Thus, we have proved the following theorem.

<u>Theorem 4. 3</u>. If f is expansive and homotopic to an Anosov diffeomorphism g of T^2, then f is conjugate to g.

Let $f : T^2 \to T^2$ be expansive and $\bar{f} : R^2 \to R^2$ a lifting of f. Let A be the matrix of integer elements and determinant ± 1 such that $\bar{f}(\bar{x} + n) = \bar{f}(\bar{x}) + An$ for every $\bar{x} \in R^2$, $n \in Z$. Let $H > 0$ be such that $\| \bar{f}(\bar{x}) \| \leq H$ for every $\bar{x}$ in the fundamental square, and let $\bar{x} \in R^2$, $\bar{x} = \bar{x}_0 + h_0$, where $\bar{x}_0$ belongs to the fundamental square and $h_0 \in Z \times Z$. Then $\bar{f}(\bar{x})$

$\bar{f}(x_0) + Ah_0$ and $\bar{f}(x_0) = \bar{x}_1 + h_1$ where $\bar{x}_1$ belongs also to the fundamental square and $h_1 \in Z \times Z$, $\| h_1 \| \leq H + 1$. If for $i = 0, 1, \dots$ we define $\bar{x}_{i+1}$ by $\bar{f}(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} + h_{i+1}$ where $\bar{x}_{i+1}$ belogs to the fundamental square and $h_{i+1} \in Z \times Z$, $\| h_{i+1} \| \leq H + 1$ we have that

$$\bar{f}^{\,i}(\bar{x}) = \bar{x}_i + h_i + Ah_{i-1} + \dots + A^i h,$$

and if for some $s > 0$, $\| A^i \| \leq si$, we get that, for some C, $D > 0$, $\| \bar{f}^i(x) \| \leq C + \frac{1}{2} Di(i+1)$.

Let $\mathcal{R}$ be a finite family of rectangles, as before. however we choose this time the rectangles so small that no arc of an unstable leaf included in the union of 4 rectangles can have a $\bar{f}^n$-image, $n \leq 0$, with diameter greater than σ. Let $m > 0$ be such that the f^m-image of any unstable segment of a rectangle (i.e, an unstable arc, contained in the rectangle, and joining opposite stable sides of it) in $\mathcal{R}$ meets at least 4 rectangles, consequently, this image contains unstable segments of 2 rectangles. Since no unstable leaf may contain points on different unstable arcs of a $\bar{R}$ rectangle, $\bar{f}^{km}(b)$ contains unstable segment ofat least 2^k rectangles, provided b is itself, an unstable segment. On the other hand, if for $s > 0$, $n = 1, \dots$ we had $\| A^n \| \leq sn$, the number of rectangles met by $\bar{f}^{km}(b)$ would be according to the previous inequalities, less than Bk^4 for some $B > 0$. Thus, A must be hyperbolic.

<u>Lemma 4.4.</u> Let $f : T^2 \to T^2$ be an expansive homeomorphism, then f is homotopic to an Anosov diffeomorphism.

Theorem 4.5. Let $f : T^2 \to T^2$ be an expansive homeomorphism; then f is conjugate to an Anosov diffeomorphism.

5. Surfaces of genus ≥ 2.

Let M be a surface of genus greater than 1, and $f : M \to M$ an expansive homeomorphism. Let $g : M \to M$ be a pseudo-Anosov map isotopic to f, $\overline{M}$ the universal covering of M, $\overline{f}$, $\overline{g}$ suitable liftings of f and g, and $\overline{D}_s$, $\overline{D}_u$ equivariant non-negative functions, $\overline{D}_s$, $\overline{D}_u : M \times M \to R$ such that $\overline{D}_s(\overline{x}, \overline{y})$ ($\overline{D}_u(\overline{x}, \overline{y})$) is the infimum of the length in terms of the g-measure transverse to the unstable (resp. stable) foliation, of the arcs joining $\overline{x}$ to $\overline{y}$ [11, 2]. There exists $\lambda > 1$ such that

$\overline{D}_s(\overline{g}^{-1}(\overline{x}), \overline{g}^{-1}(\overline{y})) = \lambda \overline{D}_s(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{D}_u(\overline{g}(\overline{x}), \overline{g}(\overline{y})) = \lambda\overline{D}_u(\overline{x}, \overline{y})$; furthemore, $\overline{D} = \overline{D}_s + \overline{D}_u$ is an equivariant metric on $\overline{M}$.

Lemma 5.1. There exists $P > 0$ such that for any $\overline{x}$ which does not belong to stable or unstable sets of the $\overline{f}$ singular points, there exists $y \in \overline{M}$ such that $\overline{D}(\overline{f}^n(x), \overline{f}^n(y)) \leq P$, $n \geq 0$.

Proof. For $P > 0$ consider $B_p(\overline{f}^n(\overline{x}))$, the $\overline{D}$ balls of radius P centered at $\overline{f}^n(\overline{x})$, $n \geq 0$. Let $W_u^{\overline{f}}(\overline{x})$ be a closed arc of the unstable manifold through $\overline{x}$, $\overline{x} \in W_u^{\overline{f}}(\overline{x})$, that meets the boundary of $B_p(\overline{x})$ only at both end points. Assume that for no $\overline{y} \in W_u^{\overline{f}}(\overline{x})$, $\overline{D}(\overline{g}^n(\overline{y}), \overline{f}^n(\overline{x}) \leq P$, $n \geq 0$. Then there exists

$N > 0$, such that for every $\bar{y} \in W_u^{\bar{f}}(\bar{x})$ it is possible to find $n(\bar{y})$, $0 \leq n(\bar{y}) < N$, such that

$$\bar{D}(\bar{g}^{n(\bar{y})}(\bar{y}), \bar{f}^{n(\bar{y})}(\bar{x})) > P.$$

Let $\hat{M}$, Φ be the suspension of $\bar{f}$ and let $\rho > 0$ be such that if $d_\rho(\bar{x})$ denotes the usual open disk of $\bar{M}$, with radius ρ and centre $\bar{x}$, we have that $\Phi_{n+t}(d_\rho(\bar{x}))$ contains $\Phi_t(B_p(\bar{f}^n(\bar{x})))$ for $0 \leq n \leq N$, $0 \leq t \leq 1$. Now we consider arcs $W_s(\phi(\bar{x}, t)$ through $\phi(\bar{x}, t)$ of the stable manifold $W_s^{\bar{f}}(\phi(x, t))$ of $\phi(x, t)$, such that their end points lie outside of $\phi_t(d_\rho(\bar{x}))$, $0 \leq t \leq N$, and moreover, such that these arcs depend continuosly on t (see [8, p. 572]. Also, let $\bar{U}(\bar{x})$ be a small closed arc of the $\bar{f}$ unstable manifoldthrough $\bar{x}$,

$\bar{x} \in int(\bar{U}(\bar{x}))$, such that $\phi_t(\bar{U}(\bar{x})) \subset \phi_t(d_\rho(\bar{x}))$, $0 \leq t \leq N$;

$\phi_n(\bar{U}(\bar{x})) \subset B_p(\bar{f}^n(\bar{x}))$, $0 \leq n \leq N$. Let $Q(t)$, $0 \leq t \leq N$ be the ϕ_t image of one of the end points of $\bar{U}(\bar{x})$, for points

$$\bar{z} \in \phi_t(d_\rho(\bar{x})), \qquad \bar{z} \notin W_s(\phi(\bar{x}, t)), \quad 0 \leq t \leq N,$$

we consider the modulo 2 intersection number $i(\bar{z})$ of the arc $W_s(\phi(x, t))$ with an arc joining $\bar{z}$ to $Q(t)$ within $\phi_t(d_\rho(\bar{x}))$. If for $0 \leq t \leq a$, $\phi(\bar{z}, t) \notin W_s(\phi(\bar{f}^n(\bar{x}), t))$ and $\phi(\bar{z}, t) \in \phi_{n+1}(d_\rho(x))$, then, clearly, $i(\phi(\bar{z}, t)$ is constant on

$[0, a]$. Thus, if $0 \leq n \leq N$, $D(\bar{z}, \bar{f}^n(x)) \leq P$ and $\bar{z}$ does not belong to the stable manifold through $\bar{f}^n(\bar{x})$, $i(\bar{f}(\bar{z})) = i(\bar{z})$.

Let

$$R > \max.\{ \sup._{\bar{x}\in M} \bar{D}(\bar{f}(\bar{x}), \bar{g}(\bar{x})), \sup._{\bar{x}\in \bar{M}} \bar{D}(\bar{f}^{-1}(x), \bar{g}^{-1}(x)) \},$$

$$H > 3R(\lambda - 1)^{-1} \text{ and } P > (\lambda H + 2R)(\lambda - 1)^{-1}.$$

Assume that for some $\bar{y}$ in $W_u(\bar{x})$ there is m, $0 \leq m \leq N$, such that $D(\bar{g}^n(\bar{y}), \bar{f}^n(\bar{x}) < P$ for $0 \leq n < m$ and $\bar{D}(\bar{g}^m(\bar{y}), \bar{f}^m(\bar{x}) < P$. Let $\bar{z}$ stand for $\bar{g}^m(\bar{y})$; if $\bar{D}_s(\bar{z}, \bar{f}^m(\bar{x})) \geq P - H$ we would have that

$$\bar{D}_s(\bar{g}^{-1}(\bar{z}), \bar{f}^{m-1}(\bar{x})) \geq \bar{D}_s(\bar{g}^{-1}(\bar{z}), \bar{g}^{-1}(\bar{f}^m(\bar{x}))) - R =$$

$$\lambda D_s(z, f^m(x)) - R \geq \lambda(P - H) - R > P$$

which is absurd. Therefore $\bar{D}_u(\bar{z}, \bar{f}^m(\bar{x})) \geq H$ and then

$$\bar{D}_u(\bar{f}(\bar{z}), \bar{f}^{m+1}(\bar{x})) \geq \bar{D}_u(\bar{g}(\bar{z}), \bar{g}(\bar{f}^m(\bar{x}))) - 2R \geq \lambda H - 2R \geq H + R.$$

Thus, $\bar{D}(\bar{f}^k(\bar{z}), \bar{f}^{m+k}(\bar{x})) \geq H$ for $k \geq 0$; it follows that $\bar{z}$ does not belong to the $\bar{f}$-stable manifold through $\bar{f}^m(\bar{x})$ and that, in case $\bar{D}(\bar{z}, \bar{f}^m(\bar{x})) = P$, $i(\bar{z}) = i(\bar{f}(\bar{z}))$. On the other hand, if $\bar{D}(\bar{f}(\bar{z}), \bar{v}) \leq R$ we have that

$$\bar{D}_u(\bar{f}^{m+1}(\bar{x}), \bar{v}) + \bar{D}_u(\bar{v}, \bar{f}(\bar{z})) \geq \bar{D}_u(\bar{f}^{m+1}(\bar{x}), \bar{f}(\bar{z}))$$

which implies $\overline{D}_u(\overline{f}^{m+1}(\overline{x}), \overline{v}) \geq H + R - R = H$, therefore $\overline{v}$ does not belong to the entire f-stable manifold of $\overline{f}^{m+1}(\overline{x})$ and $i(\overline{v}) = i(\overline{f}(\overline{z}))$. Since $\overline{D}(\overline{g}(\overline{z}), \overline{f}(\overline{z})) \leq R$ we get

$$i(\overline{g}(\overline{z})) = i(\overline{f}(\overline{z})) = i(\overline{z}).$$

Let $\overline{y} \in W_u^{\overline{f}}(x)$ and let $n(\overline{y})$, $0 < n(\overline{y}) < N$, be the first integer such that $\overline{D}(\overline{g}^{n(\overline{y})}(\overline{y}), \overline{f}^{n(\overline{y})}(\overline{x})) > P$. Since the previous arguments imply that $\overline{g}^{n(y)}(\overline{y})$ does not belong to the $\overline{f}$-stable manifold of $\overline{f}^{n(\overline{y})}(\overline{x})$ we may define $j(\overline{y})$ as the intersection number $i(g^{n(\overline{y})}(\overline{y}))$, $j(\overline{y}) = 0$ or 1. We want to show now that the sets

$$j_0 = \{ \overline{y} \in W_u^{\overline{f}}(\overline{x}) : j(y) = 0 \}, \quad j_1 = \{ y \in W_u^{\overline{f}}(x) : j(\overline{y}) = 1 \}$$

are both open. If $\overline{y}$ is such that $\overline{D}(\overline{g}^n(\overline{y}), \overline{f}^n(\overline{x})) < P$ for each n, $0 \leq n < n(y)$, or if $\overline{D}(\overline{g}^n(\overline{y}), \overline{f}^n(\overline{x})) < P$ for $0 \leq n < n(y) - 1$ and $\overline{D}(\overline{g}^{n(\overline{y})-1}(\overline{y}), \overline{f}^{n(\overline{y})-1}(\overline{x})) = P$, we know that $\overline{y}$ has a neighbourhood whose points $\overline{z}$ satisfy $j(\overline{z}) = j(\overline{y})$. So, let us try to choose P in order to have that if $\overline{D}(\overline{g}^n(\overline{y}), \overline{f}^n(\overline{x})) = P$ for some n, $0 \leq n \leq n(y)$, then $n = n(y) - 1$.

Consider, for a, $b \in \overline{M}$,

$$\Delta = \overline{D}(\overline{g}(a), \overline{f}(b)) - 2\overline{D}(a, b) + \overline{D}(\overline{g}^{-1}(a), \overline{f}^{-1}(b)) \geq$$

$$\overline{D}(\overline{g}(a), \overline{g}(b)) - R - 2\overline{D}(a, b) + \overline{D}(\overline{g}^{-1}(a), \overline{g}^{-1}(b)) - R \geq$$

$$(\lambda + \lambda^{-1} - 2) \overline{D}(a, b) - 2R.$$

Let $r = \lambda + \lambda^{-1} - 2$ and choose P to satisfy also $P > 2r^{-1}R$, then if $\overline{D}(a, b) = P$, $\Delta > 0$. Thus if $\overline{D}(a, b) = P$ and $\overline{D}(\overline{g}^{-1}(a), \overline{f}^{-1}(b)) \leq P$ we get that $\overline{D}(\overline{g}(a), \overline{f}(b)) > P$.

Hence, with this choyce of P, we have that if for some n, $0 \leq n < n(y)$, $\overline{D}(\overline{g}^n(\overline{y}), \overline{f}^n(\overline{x})) = P$, then $n = n(y) - 1$, proving that j_0 and j_1 are open.

Let now e stand for an end point of $W_u^{\overline{f}}(x)$; if $\overline{D}_s(\overline{x}, e) \geq H$, we get that $\overline{D}_s(\overline{f}^{-1}(x), \overline{f}^{-1}(e)) \geq \lambda H - 2R \geq H$, which is absurd. Thus $\overline{D}_u(\overline{x}, e) \geq P - H$ and therefore $\overline{D}(\overline{f}(\overline{x}), \overline{g}(e)) \geq \overline{D}_u(\overline{f}(\overline{x}), \overline{g}(e)) \geq \lambda(P - H) - R > P$. Hence j_0 and j_1 are non-void; this completes the proof.

<u>Lemma 5.2.</u> For each $\overline{x} \in \overline{M}$ there exists a unique $\overline{y} \in \overline{M}$ such that $\overline{D}(\overline{f}^n(\overline{x}), \overline{g}^n(\overline{y})) < P$, $n \in Z$.

<u>Proof.</u> From the previous lemma it follows easily that for each $\overline{x} \in \overline{M}$ which is not on the stable or unstable sets of the $\overline{f}$-singular points, there exists $\overline{y} \in \overline{M}$ such that $\overline{D}(\overline{f}^n(\overline{x}), \overline{g}^n(\overline{y})) < P$, $n \in Z$. Since those x constitute a dense subset of $\overline{M}$, we may complete the proof of the lemma using the expansivity properties of the liftings of pseudo Anosov maps [5].

Let $\overline{h} : \overline{x} \rightarrow \overline{y}$, then it follows from [5] that $\overline{h}$ is a surjective semiconjugacy between $\overline{f}$ and $\overline{g}$, furthermore $\overline{h}$ is a proper map. Let $\overline{\mathfrak{R}}$ be a family of rectangles of $\overline{f}$ as in the previous section. As in that section, we may show that $\overline{h}$ is injective on each $\overline{R} \in \overline{\mathcal{R}}$, on account of the fact that also for pseudo Anosov maps, if $\overline{x}_n \to \overline{x}$, $\overline{y}_n \to \overline{y}$ and the stable sets of $\overline{x}_n$ meets the unstable set of $\overline{y}_n$, $n \geq 0$, then the unstable set of $\overline{y}$ meets the stable set of $\overline{x}$. Since, by the same arguments, two prongs of a singular point can not go to the same prong of the image point, we conclude that every point $\overline{x}$ has a neighbourhood where $\overline{h}$ is injective; thus, $\overline{h}$ is a covering map. We have then proved the following theorem.

Theorem 5.3. If $\overline{f}$ is expansive and homotopic to a pseudo Anasov $\overline{g}$, then $\overline{f}$ is conjugate to $\overline{g}$.

Lemma 5.4 . An expansive homeomorphism can not preserve any trivial isotopy class.

Proof . Assume that for some expansive homeomorphism the assertion of the lemma is not true. Let f be an iterate of this homeomorphism such that there is a homeomorphic image of S^1, through a fixed non singular point x of f, say σ, whose non trivial isotopy class is preserved under f. We may construct, as in the proof of proposition II.6 , exposé 5 of [2], a simple curve α through x, isotopic to σ, and such that it consists of unstable arcs plus arcs transversal to both foliations plus singular points. Also we may construct another simple closed curve α through x, isotopic to σ, that consist of a finite union of stable and unstable arcs (not containing singular points). Clearly $f^n(\gamma)$ and $f^{-m}(\alpha)$ are isotopic n, $m \geq 0$. Lemma 2.4 and 2.5 of [1] imply, for large n and m, the existence of a very large unstable arc Ω in $f^n(\gamma)$ that is continuously mapped, through the stable leaves starting at Ω, to a very small unstable arc $\Omega' \subset f^{-m}(\alpha)$. In fact, this is a consequence of the existence of disks bounded by an arc in $f^{n}(\gamma)$ and an arc in $f^{-m}(\alpha)$, the finiteness of the set of singular points, and our previous results concerning infinite stable leaves contained in disks.

Suppose now that we have a family of rectangles as the previous ones. Since, as it is easy to show, there is a positive integer H such that all the rectangles met by the infinite stable prolongatios of any rectangle are also met after H stable prolongationsof the same rectangle , we may construct, starting from Ω, an unstable arc that contains one of its continuous stable prolongations. But this implies the existence of a closed stable leave, which is absurd.

Theorem 5.5. Every expansive homeomorphism of M is conjugate to a pseudo Anosov map.

Proof. By the previous lemma and Thurston's theorem [11] such an homeomorphis is isotopic to a Pseudo Anosov map.

References

[1] D. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. Acta Math. 115 (1966), 83-107.

[2] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru. Travaux de Thurston sur les surfaces (seminaire Orsay). Asterisque 66-67 (1979).

[3] J. Franks. Anosov diffeomorphisms. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics vol 14 (1970) 61-94.

[4] M. Gerber, A. katok. Smooth models of Thurston pseudo-Anosov maps. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 15 (1982) 173- 204.

[5] M. Handel. Global Shadowing of pseudo Anosov homeomorphisms. Ergod. Th. and Dynam. Sys. 5 (1985).

[6] K. Kuratowski. Topology Vol. II Academic Press, New York London (1966).

[7] J. Lewowicz. Lyapunov functions and topological stability. J. Diff. Eq. (2) 38 (1980) 192- 209.

[8] J. Lewowicz. Persistence in expansive systems. Ergod. Th. and Dynam. Sys. 3 (1983) 567 578

[9] J. Lewowicz, E. Lima de Sá. Analytic models of pseudo Anosov maps. Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1986) (to appear).

[10] T. O Brien, W. Reddy. Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism. Pac. J. of Math. 35 (1970) 737- 741.

[11] W. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. Preprint.

Ergodic properties of plane billiards

Roberto Markarian

Instituto de Matemática y Estadística
"Prof. Ing. Rafael Laguardia"

Facultad de Ingeniería. Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

1. Introduction

A plane billiard is the dynamical system describing the free motion of a point mass inside a bounded, connected region of the plane, with elastic reflections at the boundary. This consists of a finite set of curves ∂Q_i, C^2, with $|k|$ (curvature) bounded.

Sinai (Sin) proved that billiards whose boundaries have dispersing components are ergodic. Bunimovich (Bun) indicated that billiards whose focusing pieces of the boundary have constant curvature and that do not contain dispersing components are Bernoulli (the stadium, for example). Wojtkowski (Woj) proved that a large class of billiards with focusing arcs at the boundary have Pesin Region of measure one. In our paper (Mark) is proved that the condition obtained by Wojtkowski for focusing curves ($d^2R/ds^2 < 0$, $R=1/k$) is not generic. More precisely, open conditions for focusing C^4 curves, different than those in (Woj), are obtained.

Our work is a natural development of those by Lewowicz (L1,L2) which use Lyapunov forms for studying the stability of geodesic flows in surfaces.

The existence of contracting and expanding subspaces, detected by this forms permit the application of Pesin's theory which guarantees the construction of local stable and unstable foliations. Generally they are not uniform, neither in the length nor in their angle, but are sufficient to obtain certain ergodic properties.

2. Billiards and Quadratic forms.

Following Cornfeld-Fomin-Sinai (CFS) with $Q_0 = R^2$, take $M_1 = \{ x \in \partial\tilde{M} : (n(q),x) > 0,\ q = \pi(x) \}$ where $n(q)$ is the unitary inward normal at $q \in \partial\tilde{Q}_i^{\cdot\cdot} = \partial\tilde{Q} \setminus \cup_{k \neq i} \partial Q_k$. $\partial\tilde{Q}_i$ is a regular component of the boundary. π is the natural proyection from the unitary tangent bundle into R^2, $\pi(q.v) = q$; $\partial\tilde{M}_i = \pi^{-1}(\partial\tilde{Q}_i)$, $\partial\tilde{M} = \cup\partial\tilde{M}_i$.

If s is the arc length of the component ∂Q_i, parametrized by $\alpha(s)$, the curvature $k(s)$ is defined by $\alpha''(s) = d\vec{t}/ds = kn = ki\alpha'$. Then we have regular components of the boundary with positive (focusing components), negative (dispersing components) and zero (neutral) curvature.

Given $x = (q.v) \in M_1$, Tx (if it exists) is obtained moving forward, in the billiard surface, in the direction v, a distance (time) $f(x)$ till the intersection with $\partial\tilde{Q}_j$ in q_1. $Tx = (q_1, w)$, where $w = v - 2(n(q_1), v)n(q_1)$: the angle of incidence equals the angle of reflection.

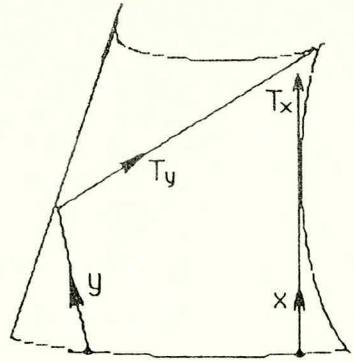


Fig. 1

If $H = M_1 \setminus K$ where K contains the points of M_1 such that T^k is not defined or not continuous (see fig. 1, where $x, y \in K$); and $d\nu = \cos\theta ds d\theta$ (θ the angle between $n(g)$ and v), then the billard transformation $T : H \to H$ is measurable, bijective, continuous, ν-measure preseving and is a diffeomorphism of order $p-1$, p being the differentiability order of ∂Q. ν is normalized.

A wave front is given by a curve $(\alpha(s), v(s))$ in M_1 where $v(s)$ is the vector of the front, and its state after colliding with $\partial\tilde{Q}_j$ is $(\gamma(\sigma(s)), w(\sigma(s)))$ (see fig. 2). ' will designate derivative with respect to s or σ.

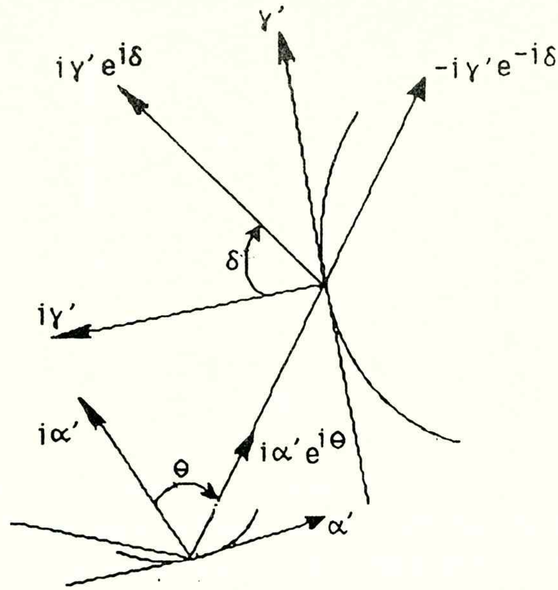


Fig. 2

Given a manifold M, $B : TM \to R$ is a quadratic form in M if B/T_xM is a quadratic form in the usual sense. If f is a diffeomorphism $f^{\#}B$ (pull back of B by f) is the quadratic form $(f^{\#}B)_x u = B_{f(x)}(f'_x(u))$.

In the Appendix of (Mark) we prove the following theorem whose proof is suggested for finite K, in (LS). $\Sigma(f)$ will denote the Pesin region of f, that is the set of points that have non zero Lyapunov exponents.

Theorem: Let $f : H \to H$ be a C^r-diffeomorphism, $r \geq 1$, that preserves the smooth measure ν, $H = H_1 \setminus K$. H_1 is a compact 2-manifold,

$\nu(k) = 0$; $\log^{+} \| (f^{\pm 1})'_x \| \in L^1(H,\nu)$ ($\log^{+} s = \max(0, \log s)$).

Let $B : TH_1 \to R$ be a bounded quadratic form, continuous and not degenerate in TH, such that $P_x = (f^{\#}B - B)_x$ is positive for every $x \in H$, and

$$S_x = \{ u \in T_xH : B((f^n)'u) < 0,\ n \geq 0 \}$$

$$U_x = \{ u \in T_xH : B((f^n)'u) > 0,\ n \leq 0 \}.$$

Then $\nu(\Sigma(f)) = 1$ and the proper spaces of the negative (positive) Lyapunov exponent in x is S_x (respectively U_x).

Notes 1. K may even be a dense set. But, naturally, f diffeomorphism must be defined in a neighbourhood of each point, that is, in a neighbourhood of each point, that is, in a set that can contain properly H.

2. Conditions on $\log \| f' \|$ are sufficient to apply Oseledec theorem about the existence almost everywhere of the descomposition that defines the Lyapunov exponents. It is a restriction on the behaviour of f, near the "singularities" in K.

3. The theorem is valid if P_x is positive eventually: for each $n \in N$ there exists $k \in N$ such that $B((f^{k+1})'u) - B((f^k)'u) > 0$ for any $u \in T_xH$, $u \neq 0$ and almost every $x \in H$.

The proof that the billiard transformation T verifies the conditions of the theorem is given, in details, in Part V (Plane Billiards as Smooth Dynamical Systems, by M. Strelcyn) of (KS).

In order to define a quadratic form on TH in the case of billiards we must consider curves $x(t) = (\alpha(s(t)),\ v(s(t)))$ in H such that $x(0) = x$ and assign to each vector $u = (\overline{\dot{\alpha}, v})_{t=0}$, a real number $B_x u$. $S(0) = s_0$, $\alpha(s_0) = \alpha_0$, etc.

3. Motivations and quadratic forms in billiards.

We explain now briefly why we have chosen certain quadratic forms. Consider first the case of geodesic flows on surfaces.

If $J(t) = w^p(t)\ e_2(t)$ is a Jacobi perpendicular vector field, a Jacobi equation is satisfied : $\ddot{w}^p + K(t)w^p = 0$. If $V(t) = \| J(t) \|^2 = (w^p)^2$ (see L1), $1/2\ \dot{V}(t) = B(J) = \theta\ w^p$ since the structural equations of the surface permit to deduce that the Lie derivative along the geodesic flow is $\mathcal{L} w^p = \theta$ (riemannian connection form). Working with this form B, Lewowicz gave a proof that the geodesic flow s on surfaces of negative curvature are Anosov (L2).

Now traduce the Lie derivative as the derivative along the continuous trajectory of the billiard, and $w^p{}_{(x,u)}(\vec{t}) = (\pi'\vec{t}, iu) = (\dot{\alpha}_0, iv_0)$, this last expression in the billiard. Then

$$\theta_{\alpha_0, v_0}(\dot{\alpha}_0, \dot{v}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{(\dot{\alpha}_0 + t\dot{v}_0,\ iv_0) - (\dot{\alpha}_0,\ iv_0)}{t} = (\dot{v}_0, iv_0)$$

Thus, is defined a form $B_{(\alpha_0, v_0)} = (\dot{v}_0, iv_0)\,(\dot{\alpha}_0, iv_0)$ that allows to apply the theorem to Sinai's billiards (negative curvature) and to obtain a result weaker than that of (Sin).

For positive curvature the previous expressions do not work neither in geodesic flows nor in billiards. Therefore, turning to the original motivation, rewrite $V(t) = (w^p)^2$ and instead of taking the derivative directly to obtain B, make the difference of its values between one collision and the previous one.

So it is obtained

$$(w_1^p)^2 = (w_0^p)^2 = (\dot{\alpha}_0 + f\dot{v}_0, iv_0)^2 - (\dot{\alpha}_0, iv_0)^2 =$$

$$(1) \qquad [\, f(\dot{v}_0, iv_0) + 2(\dot{\alpha}_0, iv_0)(\dot{v}_0, iv_0)\,]\, f$$

This, eliminating the final f, for simplification, is the second form studied in my paper. It permits to obtain the really new results. The change of f by L (time that the trajectory spends inside the osculating circle of radius $R = 1/K$, before or after colliding with the boundary at $\alpha(s_0) = \alpha_0$) presents itself naturally having into account the geometric study of the question and the results of Wojtkowski.

The direct study of the form (1) makes it possible to deduce that the conditions of the theorem are satisfied if

$$2ff_1[\, L_1(f+f_1) - 2ff_1\,] + L_1^2(f-f_1)^2/4 < 0,$$

which is a condition more restrictive than (2), below.

Taking now the form $B_x u = F(\dot{v}, iv) + 2(\dot{\alpha}, iv)(\dot{v}, iv)$ where F is any function depending on the natural variables of the billiard $(L, f, \ldots)$, it results

$$P_x u = (s\sigma')^2 [\, \delta'^2 (F_1 - F + 2f) + 2\delta' K_1 (F_1 + F - 2f) + K_1^2 (F_1 - F + 2f)] - 4\cos\delta K_1$$

where F_1 is the value of F in (γ_0, w_0), K_1 is the curvature in $\gamma_0 = \gamma(\sigma_0)$;

$\cos\delta = \dfrac{K_1 L_1}{2}$ (see figures 2 and 3)

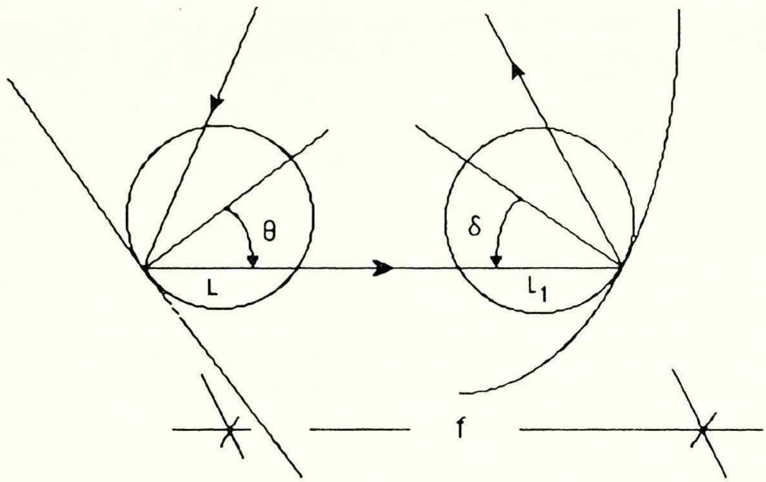


Fig. 3

That expression has constant sign if

(2) $\Delta/8K_1^2 = (F - 2f)(2F_1 - L_1) + L_1F_1 < 0.$

Finally, take

A. $F = f$. In this case

if $K_1 \leq 0$, P is positive (eventually)

if $K_1 > 0$, P is positive if and only if

(3) $L_1(f_1 + f) < 2ff_1$

where f_1 is the distance between T_x and T_x^2 and L_1 is the time that the trajectory spends in the osculating circle of radius $R_1 = 1/K_1$ before (or after) colliding in γ_0.

B. $F = 0$ if $k \leq 0$

$= L$ if $k > 0$. In this case if $k_1 \leq 0$ and $k_0 > 0$, it results $P_X > 0$

if the dispersing or neutral components do not intersect the semicurvatures circles of ∂Q_i ($\alpha(s)$) : $2f - L > 0$. For $k > 0$ the semicurvature circle is inside the billiard, tangent to the boundary and has radius $R/2$.

If k_0, $k_1 \leq 0$, there are not additional conditions.

If $k_1 > 0$ a necessary and sufficient condition for $P_X > 0$ is

(4) $$L + L_1 < 2f.$$

4. Conditions on the boundaries. New results.

We study here, separately, the fulfilment of the theorem's hypothesis by the two forms described in the previous section.

A. If $\pi(T_X)$ is in a neutral or dispersing component the conditions of the theorem are verified. If $\pi(T_X)$ is in a focusing component, (3) gives a necessary and sufficient condition that is verified if

(5) $$L_1 < f,\ f_1,$$

that is, if the osculating circles of each focusing component do not intersect any other component. So the interior angles between two focusing components must be bigger than π, and angles between a focusing component and a not focusing component must be not less than π (in case the not focusing component is neutral, the angle can be bigger than $\pi/2$.

But (5) is not fulfilled in general if two sucessive collisions are in the same focusing component. A study in details of this case gives that if $\gamma(A) = r(A)\,\gamma'(0)\,e^{iA}$, $\gamma(0) = 0$ (fig. 4), then condition (3) is written

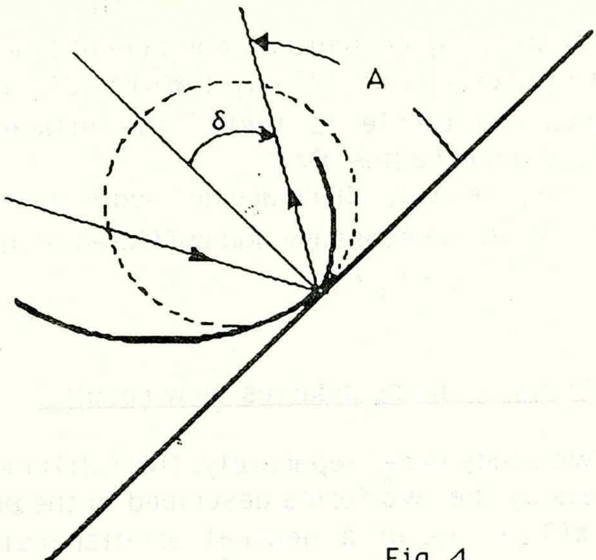


Fig. 4

$$\frac{2}{k(0)} \operatorname{sen} A \ (r(A) - r(-A)) < -2r(A)\, r(-A)$$

and, if the curve is symetric $(r(A) = -r(-A))$..

(6) $\operatorname{sen} A < r(A)\, k(0)/2$.

Besides, for trajectories near the tangent (small angles A), we obtain using Taylor's developments,

(7) $3kk'' < 4k'^2 \Leftrightarrow \dfrac{d^2R^{1/3}}{ds^2} > 0$

If the open condition (6) and (7) are fulfilled simultaneously we have $P > 0$ for sucessive collisions in C^4 focusing curves, near the symmetry point.

Examples of pieces of curves that verify these conditions are

- $r(A) = A \qquad -A_0 < A < A_0$
- the pieces of ellipse emphasized (and its symmetrical) in fig. 5.

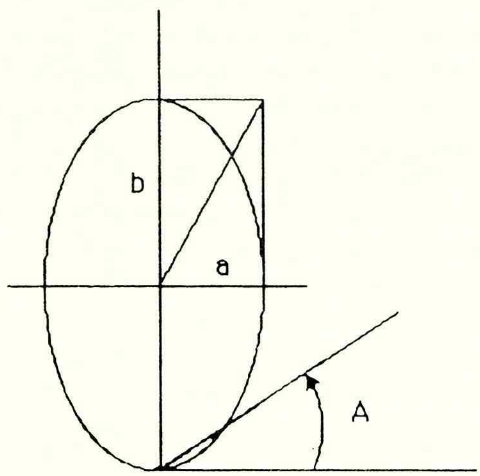


Fig. 5

B. The conditions indicated in the corresponding paragraph of the previous section are exactly those given by Wojtkowski. In (Woj) is proved that (3), considering consecutive collisions in the same focusing component, is equivalent to

$$(8) \qquad 2k'^2 < k\,k'' \Leftrightarrow \frac{d^2R}{ds^2} < 0.$$

This condition has the advantage of being global, is verified by arcs of epicycloid, hypocycloid, cycloid, in particular by the cardioid $r(A) = 1 + \cos A$. In the ellipse, the arc whose points verify (8) is <u>disjoint</u> of the one previously indicated.

5. <u>Conclusion and some open questions.</u>

The open character of conditions in <u>A</u>. shows that is not true the assertion of Wojtkowski (woj), p 412 that "tipically" condition (8) "is in some sense a necessary condition for nonvanishing of Lyapunov exponents".

Conditions like (2) may be used to obtain new open generically conditions for a billiard to have Pesin region of measure one.

Quadratic forms that allow the study of stability of geodesic flows in manifolds of higher dimension may be adapted to the case of billiards, evaluating the difference between two collisions . This is a natural way for generalizing the actual proved resuls for higher dimension billiards.

Quadratic Lyapunov forms may be profitably used in the research of persistence properties of billiards transformations (L3).

REFERENCES

(Bun)- BUNIMOVICH, L.A.: On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Commun Math. Phys. 65, 295-312 (1979).

(CFS)- CORFELD, I.P., FOMIN, S.V., SINAI, Ya.G.: Ergodic Theory. Sringer Verlag, 1982 (Original ed 1980).

(KS)- KATOK, A; STRELCYN, J. -M. with the collaboration of LEDRAPPIER, F. ; PRZYTYCKI, F.: Smooth maps with singularities. Lecture Notes in Mathematics, 1222, Springer Verlag, 1986.

(L1)- LEWOWICZ, Jorge : Lyapunov funtions and topological Stability, J. Diff. Eg. 38, 192-209 (1980).

(L2)- LEWOWICZ, Jorge : Lyapunov Functions and Stability of Geodesic Flows. Lecture Notes in Mathematics, 1007 - Geometric Dynamics. Proceedings, Rio de Janeiro 1981.

(L3)- LEWOWICZ, Jorge : Persistence in expansive Systems. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1983), 3, 567- 578.

(LS)- LEWOWICZ, Jorge ; LIMA DE SA, Eduardo - Analytical Models of Pseudo-Anosov Maps. Ergod. Th. & Dynam. (1986), 6, 385-392.

(Mark)- MARKARIAN, Roberto; Billiards with Pesin Region of Measure One. To be published in Commun. Math. Phys.

(Sin)- SINAI, Ya. G. : Dynamical Systems with Elastic Reflactions. Russ. Math. Sur. 25:1 (1970) 137- 189.

(Woj)- Woltkowski, Masiej : Principles for the desing of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents. Commun. Math. Phys. 105, 391-414 (1986).

Stable invariant subspaces of the unilateral shift.

Fernando J. Montans [1]

The purpose of this paper is to develop a rather elementary approach to the characterization of the non-trivial stable invariant subspaces of the unilateral shift operator.

In [2] (see also [1] pp. 468-473) Apostol, Foias and Salinas determine the stable invariant subspaces of the unilateral shift operator, using rather complicated approximation techniques which, on the other hand, yield the stable invariant subspaces of more general isometric operators. We intend to give a simpler proof of their theorem for the unilateral shift operator (of multiplicity one), which only involves well-known results about this operator, its invariant subspace lattice and the Riesz functional calculus.

1. Notation and Preliminaries

In what follows we work with bounded operators on a fixed Hilbert space $\mathcal{H}$ of any dimension with inner product $\langle .,. \rangle$. For an operator T, the adjoint is denoted T^*.

By a subspace of $\mathcal{H}$ we always mean a closed linear manifold of $\mathcal{H}$. The orthogonal projection onto a subspace $\mathcal{M}$ is written $P_{\mathcal{M}}$, and $\mathcal{M}^{\perp}$ is the orthogonal complement of $\mathcal{M}$.

---

[1] This paper is an expanded version of the talk given by the author during the Homenaje a Rafael Laguardia on October 1, 1987, at the Universidad de la República, Uruguay.

We recall the following standard distance between subspaces of $\mathcal{H}$

$$d(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \| P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}} \| \qquad \text{for } \mathcal{M}, \mathcal{N} \text{ subspaces of } \mathcal{H}.$$

The restriction of the operator T to a subspace $\mathcal{M}$ is denoted $T|_{\mathcal{M}}$, while the left (resp. right) essential spectrum of T is written $\sigma_{le}(T)$ (resp. $\sigma_{re}(T)$).

In this paper we use the characterization of the unilateral shift operator (of multiplicity one) as the operator S acting on the Hardy space $\mathbf{H}^2$ (of the unit disk) as multiplication by the independent variable :

$$S(f)(z) = z\, f(z) \qquad \text{for } f \in \mathbf{H}^2 \text{ and } z \text{ in the unit disk.}$$

2. Stable invariant subspaces

Our object of study will be the stable invariant subspaces of a fixed bounded operator on a Hilbert space, defined as follows :

Definition 1. Let T be an operator on the Hilbert space $\mathcal{H}$, and $\mathcal{M}$ an invariant subspace for T. We say that $\mathcal{M}$ is ***stably invariant*** for T if given any positive real number ε there exists $\delta > 0$ such that if R is an operator with $\| T - R \| < \delta$, then S has an invariant subspace $\mathcal{N}$ with $d(\mathcal{M},\mathcal{N}) < \varepsilon$.

Notice that $\mathcal{H}$ and $\{0\}$ are always stable invariant subspaces for any operator T. If $SIS(T)$ denotes the set of all stable invariant subspaces for T, it is natural to try to determine the structure of $SIS(T)$, both because of its intrinsic interest, and with the hope of thus gaining some insight into the structure of the lattice of all invariant subspaces of the operator T. For example one can ask whether there is an operator T such that $SIS(T) = \{ \{0\}, \mathcal{H} \}$, or if $SIS(T)$ is always a sub-lattice of the lattice of invariant subspaces of T.

Apostol, Foias and Salinas show in [2] that a biquasitriangular operator with connected spectrum has only trivial stably invariant subspaces. They also give an example of an operator T such that $SIS(T)$ is not a lattice (with the standard lattice operations with subspaces), and they characterize the SIS of a backward shift operator of any multiplicity (see also [1] pp. 468–473).

The characterization of $SIS(T)$ for an operator T acting on a finite-dimensional space can be found in [1] (pp. 431–435) or [3].

A famous theorem of Beurling [4] asserts that each non-zero invariant subspace of the unilateral shift is of the form $\phi \mathbf{H}^2$ for a unique inner function ϕ. Our main theorem is the following:

Theorem 2. Let S be the unilateral shift operator on $\mathbf{H}^2$. Then the following are equivalent for a non-zero subspace $\mathcal{M}$:

(1) $\mathcal{M}$ is stably invariant under S.

(2) $\mathcal{M} = B\mathbf{H}^2$ where B is a finite Blaschke product.

(3) $\mathcal{M}$ is invariant under S and has finite codimension in $\mathbf{H}^2$.

(4) $\mathcal{M}$ is invariant under S and the spectral radius of S^* restricted to $\mathcal{M}^\perp$ is less than 1.

(5) $\mathcal{M}^\perp$ is a right spectral space for S^*.

It is easy to verify the equivalence of (2), (3) and (4). We refer to [2] for the equivalence of (1), (4) and (5). We will prove only that (1) implies (3) and that (2) implies (1).

Before that, notice the following interesting corollary of Theorem 2 :

Corollary 3. The stable invariant subspaces of the unilateral shift operator form a non-complete lattice (with the usual lattice operations with subspaces).

3. Proof of Theorem 2

In order to prove Theorem 2 we borrow a slightly weaker version of Theorem 2.6 from [2], the proof of which uses only elementary techniques and a characterization of the essential parts of the spectrum of an operator :

Lemma 4. Let $\mathcal{M}$ be an infinite dimensional and infinite co-dimensional stable invariant subspace for the operator T, where

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

with respect to the decomposition $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$, and C is compact. Then $\sigma_{le}(A) \cap \sigma_{re}(B) = \phi$.

Now we are ready to prove Theorem 2. First assume that $\mathcal{M} = \phi\ \mathbf{H}^2$ is a non-zero stably invariant subspace for the unilateral shift of infinite codimension. Beurling's theorem implies that $\mathcal{M}$ is infinite dimensional, so if we prove that $C \equiv P_{\mathcal{M}} S|_{\mathcal{M}^{\perp}} : \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M}$ is compact, we can use Lemma 4 to conclude that the left essential spectrum of $A \equiv S|_{\mathcal{M}}$ and the right essential spectrum of $B \equiv P_{\mathcal{M}^{\perp}} S|_{\mathcal{M}^{\perp}}$ must be disjoint.

C is actually of finite rank. In order to see this, for each non negative integer k let e_k be the function in $\mathbf{H}^2$ defined by :

$e_k(z) = z^k$. Then $\{ e_k : k$ is a non-negative integer $\}$ is an orthonormal basis for $\mathcal{M} = \phi H^2$. Now let k and n be non-negative integers with $n \geq 1$:

$$\langle P_{\mathcal{M}} S P_{\mathcal{M}^\perp} e_k , \phi e_n \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} S (I - P_{\mathcal{M}}) e_k , \phi e_n \rangle =$$

$$= \langle e_{k+1} , \phi e_n \rangle - \langle e_k , \phi e_{n-1} \rangle = 0$$

Hence the range of C, which coincides with the range of $P_{\mathcal{M}} S P_{\mathcal{M}^\perp}$, is contained in the span of ϕ, i. e. has dimension at most one.

To determine the left essential spectrum of $A = S|_{\mathcal{M}}$, observe that $T : H^2 \to \mathcal{M} = \phi H^2$ defined by $Tf = \phi f$ is a unitary map which implements a unitary equivalence between A and S. Therefore $\sigma_{le}(A) = \sigma_{le}(S) =$ the unit circle.

Then, as noted above, lemma 4 implies that $\sigma_{re}(B)$ must be contained in the open unit disk. Now let λ be any point in the boundary of the spectrum of B. Then $\bar{\lambda}$ (the complex conjugate of λ) lies in the boundary of the spectrum of $B^* = S^*|_{\mathcal{M}^\perp}$, so either it belongs to $\sigma_{le}(B^*)$ or it is an eigenvalue of B^* of finite multiplicity ([5] p. 40). In either case $\bar{\lambda}$ is in the interior of the unit disk, since $\sigma_{le}(B^*) = \{ \bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_{re}(B) \}$ which is contained in the open unit disk as noted above, and because the eigenvalues of B^* are also eigenvalues of S^*, and the latter all have modulus less that 1. Therefore the spectrum of B is contained in the interior of the unit disk.

But it is well-known that the spectrum of $B = P_{\mathcal{M}^\perp} S|_{\mathcal{M}^\perp}$ is the unionof the support of the positive measure of the singular part of ϕ and the closure of the set of zeroes of the Blaschke factor of ϕ (see e. g. [5], [8]). Hence the support of the singular measure is empty and the Blaschke factor of ϕ has finitely many zeroes only, i. e. ϕ is a finite Blaschke product . But then $\mathcal{M}$ has finite codimension against our initial assumption .
For the converse, we will prove a lemma which is interesting in itself :

Lemma 5. If T is an isometry, then its range is stably invariant.

Proof of Lemma 5. It T is an isometry then its range is a subspace, and the same holds for any other operator R at a distance less than 1 from T . Moreover, if $\varepsilon > 0$ is given, and if $\| T - R \| < \varepsilon/(1+\varepsilon)$, then $d(\text{range } T, \text{range } R) < \varepsilon$. The lemma is proved .

Now let $\mathcal{M} = \phi\, \mathbf{H}^2$ be such that ϕ is a finite Blaschke product . We want to prove that $\mathcal{M}$ is stably invariant for S .

Choose numbers r and R such that $1 < r < R$ and such that ϕ is analytic in the closed disk of radius R . By the upper-semicontinuity of the spectrum, there exists $\eta > 0$ such that if $\| T - R \| < \eta$ then the spectrum of T is contained in the open ball of radius r . Let Γ the circle of radius R positively oriented, and for all operators T such that $\| T - S \| < \eta$ let $\phi(T) \equiv (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \phi(z)\,(z - T)^{-1}\, dz$ as given by the Riesz functional calculus (see [5], [6], [7] or [9]).

An easy computation ([7] pp. 5-6) shows the existence of $\nu > 0$ such that $\nu < \eta$ and if $\| T - S \| < \nu$, then $\| \phi(T) - \phi(S) \| < \varepsilon/(1+\varepsilon)$.

Since $\phi(S)$ is an isometry, the proof of lemma 5 implies that the range of $\phi(T)$ is a subspace and that d(range $\phi(S)$, range $\phi(T)$) $< \varepsilon$. But $\mathcal{M} = \phi\, \mathbf{H}^2$ = range $\phi(S)$, and the range of $\phi(T)$ is invariant for T as T and $\phi(T)$ commute . This shows $\mathcal{M}$ is stably invariant and the proof of the theorem is complete .

Ackowledgement. I would like to thank Allen Shields for introducing me to this subject and for providing me with a preprint of [2], and to Alvaro Rovella for his help in understanding [2].

References.

[1] Apostol, C.; Fialkow, L.; Herrero, D. and Voiculescu, D.: Approximation of Hilbert Space Operators, II, Pitman, Boston, 1984.
[2] Apostol, C.; Foias, C. and Salinas, N.: On stable invariant subspaces; Int. Eq. Op. Th. 8, 1985, 721-750.
[3] Bart, H.; Gohberg, I. and Kaashoek, M.A.: Stable factorizations of monic matrix polynomials and stable invariant subspaces; Int. Eq. Op. Th. 1, 1978, 496 - 517.
[4] Beurling, A.: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space; Acta Math. 81, 1949, 239-255.
[5] Conway, J. B.: Subnormal Operators; Pitman, Boston, 1981.
[6] Dunford, N. and Schwartz, J.: Linear Operators Interscience, New York, 1958.
[7] Herrero, D.: Approximation of Hilbert Space Operators, Pitman, Boston, 1982.
[8] Nikol'skii, N.K.: Treatise on the shift operator, Springer Verlag, New York, 1986.
[9] Rudin, W.: Functional Analysis; McGraw-Hill, New York, 1973

LA PROPAGACION DE LA LUZ EN LA PROXIMIDAD DE LA CAUSTICA

Marcos Sebastiani

1. En Optica geométrica, se representa la propagación de la luz en un medio homogéneo mediante los rayos luminosos, que son rectos. Los frentes luminosos o superficies de onda son las superficies ortogonales a la familia de rayos luminosos. Por ejemplo, en el caso de una fuente luminosa F puntual, las superficies de onda son esferas. Si la luz emitida por F se refleja en un espejo parabólico cuyo foco está en F, los nuevos frentes luminosos son planos.

Sea $S : P = P(u, v)$ una superficie de onda. Como la luz se propaga con velocidad constante c a lo largo de los rayos luminosos, una superficie arbitraria es de la forma :

$$S_t : Q_t = Q_t(u, v) = P(u, v) + ctN(u, v)$$

donde $N(u, v) = P_u \wedge P_v / \| P_u \wedge P_v \|$.

El flujo de energía a través de la región $R \subset S_t$ es representado por los rayos luminosos que lo atraviesan. Luego, a lo largo de un rayo luminoso, la intensidad de la luz es inversamente proporcional al elemento de área,

$$dS_t = \| \frac{\partial Q_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial Q_t}{\partial v} \| \, du dv \; .$$

Naturalmente, dados u, v, pueden existir valores de t para los cuales $\frac{\partial Q_t}{\partial u} \wedge \frac{\partial Q_t}{\partial v} = 0$.

En estos puntos la intensidad se haria infinita.
El lugar geométrico de los puntos donde $ds_t = 0$ se llama la cáustica.

Si consideramos la familia de rectas dependientes de los parámetros u, v :

$$Q(u,v,t) = P(u,v) + c\,t\,N(u,v)$$

y buscamos su envolvente encontraremos que es justamente la cáustica. O sea, la cáustica es la envolvente de los rayos luminosos.

La experiencia muestra que la cáutica es el lugar donde la luz es más intensa (" cáustica " : donde la luz quema). Pero la intensidad no es infinita y si queremos un modelo adecuado para estudiar la propagación de la luz, debemos llevar en cuenta su naturaleza ondulatoria.

La ecuación de ondas muestra que el comportamiento del campo electromagnético en una onda monocromática viene dado por la función :

(1) $\quad u(x,t) = a(x)\,e^{i(\omega t - S(x))} = \tilde{u}(x)\,e^{i\omega t}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$

donde $a(x)$ es la amplitud, $S(x)$ la fase y ω la frecuencia. (Ver [1] chap. VII). Las superficies de onda son las superficies $S(x) = cte.$ La intensidad es proporsional al cuadrado de la amplitud $a(x)$.

En lo que sigue notaremos $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función distancia usual en $\mathbb{R}^3$.

En el caso de una fuente puntual α tenemos que las superficies $S(x) = cte$ son esferas de centro α. Por otro lado, la ecuación de eikonal nos dice que $\| \text{grad } S(x) \| = \frac{\omega}{c}$. Resulta inmediatamente que $S(x) = \sigma / \varphi(x, \alpha)$ (σ cte).

Luego, en el caso de la onda esférica tenemos que (1) toma la forma:

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{\varphi(x, \alpha)} e^{i(\omega t - \tau \varphi(x, \alpha))} = \frac{\sigma e^{-i\tau\varphi(x,\alpha)}}{\varphi(x, \alpha)} e^{i\omega t}$$

donde $\tau = \omega / c$.

Volviendo al caso general (1), para calcular la función $\tilde{u}(x)$ aplicamos el <u>principio de Huyghens</u>. Consideramos una superficie de onda A y suponemos que cada punto $\alpha \in A$ emite una onda esférica de intensidad proporcional a $a(\alpha)^2$. El campo en el punto $x \in \mathbb{R}^3$ se calcula como supeposición de estas ondas esféricas. Resulta, entonces,

$$\tilde{u}(x) = \lambda \int_A \frac{e^{-i\tau\varphi(x,\alpha)}}{\varphi(x, \alpha)} a(\alpha) d\alpha \quad , \qquad \lambda \text{ cte.} ,$$

donde $d\alpha$ es el elemento de área en A.

No trataremos del cálculo exacto de esta integral: <u>nos interesamos en un comportamiento asintótico como función de</u> τ, <u>cuando</u> x está <u>dado</u>.

Se dice que dos funciones C^∞ de τ tienen el mismo <u>comportamiento asintótico</u> si difieren en una función que es de decrecimiento rápido (es decir, más rápido que cualquier potencia de τ) así como todas sus derivadas, para $\tau \to +\infty$. (Por ejemplo, dos funciones cuya diferencia es $e^{-\tau}$).

Observemos que cuando tratamos de ondas luminosas, ω es muy grande.

Usando una partición de la unidad y parametrizaciones locales en A, podemos reducir el problema a estudiar el comportamiento asintótico de integrales de la forma :

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\tau\varphi(x,\alpha)}\, b(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2$$

donde $\alpha = \alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ es una parametrización local en el entorno de $\alpha_0 = \alpha(0, 0)$ y b es una función C^∞ de soporte compacto contenido en un entorno conveniente de $(0, 0)$.

Separemos la discusión en tres casos .

1) α_0 no es punto crítico de $\varphi(x, \alpha)$ (x fijo, α variable en A). En este caso, podemos escoger la parametrización local de modo que $\varphi(x, \alpha) = a + \alpha_1$, a cte. O sea,

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\tau(a,\alpha_1)}\, b(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau(a+\alpha_1)}\, \tilde{b}(\alpha_1) d\alpha_1$$

donde $\tilde{b}(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_2$. Integrando por partes y llevando en cuenta que $\tilde{b}(\alpha_1)$ tiene soporte compacto, resulta :

$$I(\tau) = -\frac{1}{i\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau(a+\alpha_1)}\, \tilde{b}(\alpha_1) d\alpha_1 \quad .$$

Repitiendo sucesivamente la integral por partes vemos que $I(\tau)$ es de decrecimiento rápido; y lo mismo se aplica a sus derivadas . Su comportamiento asintótico es, pues, nulo .

2) α_0 <u>es punto crítico no degenerado de</u> $\varphi(x, \alpha)$.
En este caso podemos tomar la parametrización local de modo que $\varphi(x, \alpha) = a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2$, a cte. Entonces,

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)} b(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

Si $b_0 = b(0, 0)$ podemos escribir :

$$b(\alpha_1, \alpha_2) = b_0 + \alpha_1 b_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 b_2(\alpha_1, \alpha_2) .$$

Luego,

$$I(\tau) = b_0 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)) d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)) \alpha_1 b_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)) \alpha_2 b_2(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

La primera integral se calcula (integrales de Fresnel).
A la segunda aplicamos el misno procedimiento de antes de integración iterada e integración por partes y obtenemos :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)) \alpha_1 b(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= \pm \frac{1}{2i\tau} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\tau(a \pm \alpha_1^2 \pm \alpha_2^2)) \frac{b}{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2$$

y análogamente para la tercera integral.

Iterando el procedimiento, llegamos a calcular para $I(\tau)$ un desarrollo asintótico de la forma:

$$ao + \frac{a_1}{\tau} + \frac{a_2}{\tau^2} + \ldots, \qquad a_j \text{ ctes.}$$

(es decir, esta serie posee el mismo comportamiento asintótico que $I(\tau)$).

3) α_0 es un punto crítico degenerado de $\varphi(x, \alpha)$.

Este es el caso difícil, que vamos a considerar en lo que sigue. Pero antes observemos que si x no pertenece a la cáustica, entonces los puntos críticos de $\varphi(x, \alpha)$ (como función de α) son todos no degenerados; es decir, el tercer caso sólo se presenta cuando x pertenece a la cáustica
([2] &0).

2. Cambiando un poco la notación y colocándonos en un contexto más general, lo que vamos a considerar es el comportamiento asintótico de

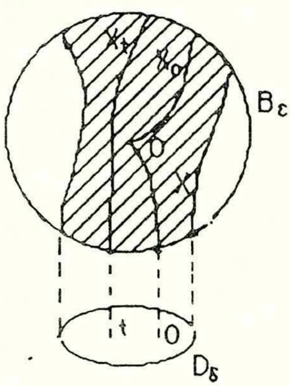
(2) $I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\tau\varphi(x_1, \ldots, x_n)) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$, $n \geq 2$

donde φ, f son C^∞ y tiene soporte compacto.

Vamos a asumir ciertas restricciones. Supondremos φ analítica en un entorno U de 0 y el soporte de f contenido en U. Llamemos aún φ a la extensión de φ a una función analitica compleja en el entorno V de $0 \in \mathbb{C}^n$. Supondremos que 0 es el único punto crítico de φ en V (es decir, 0 es punto crítico aislado de φ en los complejos).

(Por los métodos vistos antes, el desarrollo asintótico de $I(\tau)$ es 0 si φ no tiene puntos críticos en U y puede ser calculado directamente si 0 es punto crítico no degenerado).

Por comodidad, supondremos $\varphi(0) = 0$.



Vamos a ver que el comportamiento asintótico de $I(\tau)$ está vinculado a ciertas integrales abelianas relativas a φ. Veamos primero, como definir estas integrales abelianas.

Sea $B_\varepsilon \subset V$ la bola abierta de centro 0 y radio $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{C}^n$. Sea D_δ el disco abierto de centro 0 y radio $\delta > 0$ en $\mathbb{C}$. Sean :

$$X = \varphi^{-1}(D_\delta) \cap B_\varepsilon$$

$$X = \varphi^{-1}(t) \cap B_\varepsilon \quad , \quad t \in D_\delta.$$

Entonces, con ε bastante pequeño y $\delta \ll \varepsilon$,

$$\varphi : X - X_0 \to D_\delta - \{0\}$$

es una fibración C^∞ ([3] §4).

Esta fibración se llama fibración de Milnor.

La fibra X_t , $t \neq 0$, tiene la siguiente homología (a coeficientes $\mathbb{Z}$) :

$$H_0(X_t) = \mathbb{Z}, \; H_{n-1}(X_t) = \mathbb{Z}^\mu, \; H_j(X_t) = 0 \text{ si } j \neq 0, n-1,$$

donde μ , <u>número de Milnor</u> , es la dimensión del espacio vectorial cociente del anillo de todas las series de Taylor en $0 \in \mathbb{C}^n$ módulo el ideal generado por las derivadas parciales de φ ([3] §6).

Fijemos $t_0 \in D_\delta$, $t_0 \neq 0$. Sea $Z_0 \subset X_t$ un (n-1) - ciclo .

Podemos propagar Z_0 , por continuidad, a una familia de ciclos $Z_t \subset X_t$, $t \in D_\delta$, $t \neq 0$. Naturalmente esta familia no es, en general, uniforme : cuando damos una vuelta en torno de 0 no obtenemos necesariamente el mismo ciclo Z_0 . Esto induce un automorfismo $H_{n-1}(X_t) \to H_{n-1}(X_t)$ llamado la monodromia de φ en 0 .

Supondremos elegida una base de $H_{n-1}(X_t)$ y llamaremos M <u>a la matriz de la monodromia</u> .

Sea ω una forma homorfa de grado $n-1$ en X . Entonces $\int_{Z_t} \omega$ define una función holomorfa (multiforme) en $D_\delta - \{0\}$.
Estas son las integrales abelianas a que nos referiamos. Su estudio es realizable a través de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que tiene una singularidad regular en $0 \in \mathbb{C}$, llamadas <u>ecuaciones de Gauss-Manin</u>, basado en la relación siguiente :

$$t^N \frac{d}{dt} \int_{Z_t} \omega = \int_{Z_t} \eta \quad \text{si} \quad \varphi^N d\omega = d\varphi \wedge \eta \ , \ \text{donde} \ \eta$$

es una (n-1)-forma holomorfa en X , N es un entero positivo. Si N es bastante grande y ε bastante pequeño, existe una tal η (ver [4]).

3. Mostremos ahora como se relacionan las integrales abelianas que venimos a definir con el comportamiento asintótico de (2).

Un desarrollo asintótico de $I(\tau)$ puede ser obtenido por aproximaciones sucesivas usando la serie de Taylor de f en 0. Luego, podemos limitarnos a considerar integrales del tipo :

$$I(\tau) = \int_B e^{i\varphi} f dx_1 \ldots dx_n$$

donde B es una bola cerrada de centro $0 \in \mathbf{R}^n$ y f es un polinomio.

Consideremos la forma holomorfa :

$$\psi = f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n .$$

Entonces,

$$I(\tau) = \int_B e^{i\tau\varphi}\psi .$$

Sea $X^+ = \{ x \in X : \operatorname{Im} \varphi(x) > 0 \}$. En [4] §7 se muestra que, mediante la integración de un campo de vectores, podemos deformar B en un ciclo Γ de X módulo X^+, de manera que no cambie el comportamiento asintótico de la integral. Podemos, pues, suponer :

$$I(\tau) = \int_\Gamma e^{i\tau\varphi}\psi .$$

Fijemos $t_0 \in D_\delta$, $\operatorname{Im} t_0 > 0$. Como X^+ es un fibrado de base $D_\delta \cap (\operatorname{Im} > 0)$, X^+ es trivial por tener base contractible. Entonces, X^+ se retracta por deformación sobre X_{t_0}. Luego podemos modificar Γ de manera que $\partial\Gamma \subset X_{t_0}$. Como esta modificación sólo Γ en la región X^+, la integral sólo cambia a términos de decrecimiento exponencial (con todas las derivadas). O sea, no se modifica el comportamiento asintótico .

Entonces, podemos supone :

$$I(\tau) = \int_\Gamma e^{i\tau\varphi}\psi \quad , \qquad \partial\Gamma \subset X_{t_0} .$$

Sea $Z_0 = \partial\Gamma$ y sea $Z_t \subset X_t$ la familia de ciclos generada por Z_0 .

Para τ fijado, $e^{i\tau\varphi}\psi$ es ua forma holomorfa de grado n en B_ε; por lo tanto, ella es cerrada . Existe, entonces, una forma holomorfa ω_τ tal que $e^{i\tau\varphi}\psi = d\omega_\tau$. Por Stokes,

$$I(\tau) = \int_{Z_0} \omega_\tau \quad .$$

Sea N un entero positivo tal que $\varphi^N\psi = d\varphi \wedge \eta$, holomorfa . Entonces,

$$\varphi^N d\omega_\tau = d\varphi \wedge (e^{i\tau\varphi}\eta)$$

(observemos que η no depende de τ) .

Por lo visto al final del § 2, sigue de ahi que

$$t^N \frac{d}{dt} \int_{Z_t} \omega_\tau = \int_{Z_t} e^{i\tau\varphi}\eta$$

O sea $\quad \frac{d}{dt} \int_{Z_t} \omega\tau = t^{-N} \int_{Z_t} e^{i\tau\varphi} \eta$.

Integrando sobre la curva $\quad s \to st_0 \quad (0 \leq s \leq 1)$ y llevan[illegible] en cuenta que

$$\lim_{t\to o} \int_{Z_t} \omega_\tau = 0 \qquad ([4]\ \S 4)$$

resulta:

$$\int_{Z_{t_0}} \omega_\tau = \int_0^1 \left[(st_0)^{-N} \int_{Z_{st_0}} e^{i\tau\varphi} \eta \right] t_0 ds =$$

$$= t_0^{-N+1} \int_0^1 e^{i\tau st_0} \left[s^{-N} \int_{Z_{st_0}} \eta \right] ds,$$

porque $\varphi \mid Z_{s_{t_0}} = s_{t_0}$. En definitiva:

$$I(\tau) = t_0^{-N+1} \int_0^1 e^{i\tau st_0} \left[s^{-N} \int_{Z_{st_0}} \eta \right] ds \quad .$$

Esta fórmula muestra que el comportamiento asintótico que deseábamos estudiar viene determinado por la integral abeliana $\int_{Z_t} \eta$.

Usando este procedimiento se prueba que $I(\tau)$ admite un desarrollo asintótico de la forma

$$\sum_{\alpha,q} C_{\alpha,q}\, \tau^{\alpha} \log^q \tau \quad , \quad C_{\alpha,q} \text{ constantes} \;,$$

donde q es entero y $0 \leq q \leq n-1$ y α son reales negativos tales que $e^{2\pi i\alpha}$ es un autovalor de M ([4] § 7). Como los autovalores de M son raíces de la unidad ([5]), tenemos que los α son racionales .

Para otros desarrollos y aplicaciones de la teoría, recomendamos especialmente la referencia [6].

Otros tipos de integrales asintóticas son estudiadas en [7], usando, a través de la transformada de Fourier, el punto de vista de las microfunciones .

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Landau - E. Lifchitz . "théorie du Champ". Ed. Mir, 1966 .

[2] F. Pham . Acta Math . Vietnam . 2 (1977) 35- 101 .

[3] J. Milnor . "Singular points of complex hypersurfaces". Princeton University Press, 1968 .

[4] B. Malgrange . Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 7 (1974) 405-430 .

[5] E. Brieskon . Manuscripta Math . 2 (1970) 103-161 .

[6] V. Arnold - A. Varchenko - S. Goussein-Zadé . "Singularités des applicatioms différentiables" vol. 2 , Ed. Mir, 1986

[7] M. Sebastiani . Bull . London Math. Soc. 17 (1985), 32-40 .

Results on the approximation of local times of random processes.

Mario Wschebor
Universidad de la República.
Montevideo. Uruguay.

1. Introduction and general properties.

This paper contains an account without proofs of some classical and also recent results on approximation of the local times of random processes. No special applications of the approximation theorems are included. I believe that a non probabilist with a general background in analysis and a small bit of probability should be able to understand the statements below.

Suppose

$$X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$$

is a B-measurable function, and denote

$$\mu_T(A) = \mu(T,A) = \lambda(\{s: X(s) \in A,\ s \in T\})$$

the occupation measure of X, a function of the two arguments T, A, Borel subsets of $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{R}^n$ respectively. λ stands for Lebesgue measure.

If $\mu_T(\cdot)$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, its Radon-Nikodym derivative $L(T,\cdot)$ is called the local _ime_ (or _the occupation density_) of $X(\cdot)$. Here, we shall be concerned almost exclusively with the case $d = n = 1$.

For $d = 1$ and $t > 0$, we denote $L(t,x)$ for $L([0,t],x)$.

Generally speaking, for fixed $\underline{x}$ $L(T,x)$ should be considered a measure as a function of the Borel set $\underline{I}$ and say, when the function $X(\cdot)$ is continuous, an interesting object to study the level set $\{s: s \in T, X(s) = x\}$ which contains its support. A carefull study of a general situation implies a series of technical measurability problems which we shall avoid here completely.

A general reference for local times is the survey paper "Occupation densities" by Geman and Horowitz [12]. Let us consider some examples that illustrate about the basic properties of local times.

1.1.- Suppose $X(\cdot)$ is a differentiable function at t_0 where it has an isolated level value $\underline{x}$. An elementary computation shows that the local time $L(\cdot,x)$ of $X(\cdot)$ has a step of size $1/|X'(t_0)|$ at t_0.

1.2.- The following results of S. Berman [6],[8] exhibit-around the same ideas as example 1.1. with some additional technical complexities in the proofs - the connection between the continuity of the local time and the irregularity of the underlying function.

Theorem 1.1. (S. Berman). *Suppose* $X: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ *has a local time* $L(t,x)$ *that satisfies the (weaker than continuity as a function of t for fixed x) hypothesis:*

$$\lambda(\{x: L(\cdot,x) \textit{ is not continuous}\}) = 0$$

Then,

1º) $\lambda(\{t$: *X is increasing at the point t* $\}) = 0$.

2º) *For every subinterval* J, $J \subset [0,1]$ *and every positive integer m, there exist m pairwise disjoint intervals*

$$J_1, \ldots\ldots, J_m, \quad J_i \subset J \;(i=1, \ldots\ldots, m)$$

such that

$$\lambda\{ f(J_1) \cap f(J_2) \cap \ldots\ldots \cap f(J_m) \} > 0. \mid$$

1.3.- Irregular functions having continuous local time arise naturally in probability theory. The first case is given by the paths of the Wiener process. Let us mention here a quick possible definition of this random process.

We denote by $\{X(t), 0 \le t \le 1\}$ a real-valued random process (or random function), that is a Borel-measurable function X from $[0,1] \times \Omega$ to the real numbers, where Ω is a probability space. As usual the function $t \to X(t,\Omega)$ is called the path corresponding to $\omega \in \Omega$. Instead of $X(t,\cdot)$ we write simply $X(t)$ for the function - the random variable - of $\omega \in \Omega$ obtained by fixing the value of t.

The random process is called a Wiener process (or "Wiener function"), and we usually denote it "W" instead fo "X", if for almost all ω the corresponding path is a continuous function of t and if for any choice of $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n)$ the joint distribution of the random variables $W(t_1), \ldots\ldots, W(t_n)$, i.e. the probability measure $\pi_{t_1,\ldots,t_n}$ on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ defined by

$$\pi_{t_1,\ldots,t_n}(I_1, \ldots, I_n) = P\{W(t_1) \in I_1, \ldots\ldots, W(t_n) \in I_n\}$$

for any choice of the intervals $I_1, \ldots, I_n$, has the density function

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2}[t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})]^{-1/2}.$$

$$.\exp\{-1/2\,[(x_1)^2/t_1 + (x-x_1)^2/(t_2-t_1) + \ldots\ldots + (x_n-x_{n-1})^2/(t_n-t_{n-1})]\}$$

with respect to Lebesgue measure.

For a canonical definition, take for the Ω-space $\Omega_0 = C[0,1]$, the Banach space of real-valued continuous functions defined on $[0,1]$ with the supremum norm and $\mathfrak{B}$ its Borel σ- algebra. One can prove that there exists on $\mathfrak{B}$ a unique probability measure $\mathfrak{w}$ (the so-called "Wiener measure") whose n-dimensional projection on the cilinder sets corresponding to n distinct values of the parameter, is the Borel probability on $\mathbb{R}^n$ with the density function given by the above formula. Then, the random process defined by

$$W(t,\omega) = \omega(t) \quad (\omega \in \Omega_0,\ 0 \le t \le 1)$$

is a Wiener process.

One can define Wiener functions on $[0,+\infty)$ by pasting continuously independent copies of translated Wiener functions defined on $[0,1]$ on $[k,k+1]$ $(k=0,1,2\ldots)$.

Now, the <u>Theorem</u> conjectured by Paul Lévy ([15]) and apparently proved for the first time by Trotter ([18]), states that *excepting for a set of* $\mathfrak{w}$*-measure zero, every function in* Ω_0 *has a local time* $L(t,x)$ *which is continuous as a function of the pair* (t,x).

1.4.- An extensive literature is nowadays available on the existence and regularity of local times in various contexts, and their applications. References are the books by K. Itô and H.P. Mc Kean [14] and N.Ikeda and S. Watanabe [13]. One may also add, for example, the papers by M. Barlow, E. Perkins and S.J. Taylor [4], B.Friedst and S.J. Taylor [11].

The following general theorem due to S. Berman [7] (see also [5]) is a powerful tool to prove the regularity of local times of an important class of random functions. Some of its consequences had been obtained prevously from deep structure theorems of stochastic analysis. Its proof relies on a direct method applied succesfully by the same author in other situations also, consisting of deducing the regularity of the (random) occupation measure (see the definition above) from moment arguments plus some well-known classical results of Kolmogorov on the regularity of random processes.

Before the statement, let us introduce some notation.

If the random variables $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_k)$ ($t_i \neq t_j$ for $i \neq j$) have a joint density with respect to Lebesgue measure in $\mathbb{R}^k$, we shall denote its value at the point $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ by

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

and put, for each interval I in $[0,1]$,

$$q_I(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int\limits_{I \times \ldots \times I} \cdots \int p(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k$$

and

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_k) = q_{[0,1]}(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Finally denote

$$\Theta_{j,h} f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_k)$$

Theorem 1.2.[7] *Suppose:*

a) *for some* $N \geq 2$ q_I *is a continuous function for every* I, *and*

$$\left| \prod_{1}^{N} \Theta_{j,h}\, q_I(x_1, \dots, x_N) \right| \leq (\text{const})\, |h|^{1+\varepsilon}\, \lambda(I)^{1+\varepsilon},$$

for some positive ε *and any* $x_1, \dots, x_N$, *interval* I *and* $h>0$.

b) $q_I(x, \dots, x) \leq (\textit{const.})\, \lambda(I)^{1+\varepsilon}$.

Then, with probability 1 *(i.e. excepting for the* ω*'s in a subset of zero probability in* Ω*) the path* $X(\cdot)$ *has a local time time* $L(t,x)$ *which is a continuous function of the pair* (t,x). |

1.5.- The general Theorem 1.2. has been applied by S. Berman to extend, for example, the Lévy-Trotter result to a wide class of homogeneous Markov processes on the line. To be specific, suppose that that $\{X(t),\ 0 \leq t \leq 1\}$ is such a process with transition density function $p_t(x,y)$, that is

$$p_t(x,y) = P(X(t+s) \in (y, y+dy) \,/\, X(s) = x) \quad s \geq 0,\ t > 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Then the conclusion of Theorem 1.2. holds if $p_t(x,y)$ *satifies the following conditions:*

(i) *It is a continuous function of the triplet* (t,x,y)

(ii) *For* K *a compact subset of the line,*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x,y\in K} \int_0^\delta p_t(x,y)\,dt = 0.$$

(iii) *For each real* x, $\exists\, \eta > 0$ *such that*

$$\int_0^t p_s(x,x)\,ds = O(t^\eta).$$

(iv) $\exists$ $A > 0$ *and* $\gamma > 0$ *such that*

$$\int_0^{h'} | p_t(x,x+h) - p_t(x,x) |\, dt \leq A\, | h.h' |^\gamma$$

$$\int_0^{h'} | p_t(x+h,x) - p_t(x,x) |\, dt \leq A\, | h.h' |^\gamma. \;|$$

1.6. An application of the just mentioned result which is especially important, is to provide a comparably simple proof of the fact that the solutions of an autonomous stochastic differential equation on the line have continuous local time, excepting for a set of solutions of zero probability.

Suppose that the equation is

$$dX(t) = A(X(t))\,dt + B(X(t))\,dW(t)$$
$$X(0) = x_0.$$

Here A and B are continuously differentiable real functions of one real variable, $B > 0$, W is the standard Wiener process and x_0 a given real number (See for example the books [13],[14] for a precise interpretation of the notation). To study the continuity of the local time one can proceed in two steps: first, restreint the functions A and B to be bounded, and B also away form zero; second, use well-known classical bounds for the transition density of the solution process to verify the conditions in 1.5.

1.7. Extensions to multidimensional cases ($d > 1$ or $n > 1$) are also known, based upon similar methods. See [10] for the main results.

2. Classical approximations. Some examples

We describe now two main classical constructions already contained in Paul Lévy's work, which permit to obtain local time as the limit of approximation procedures on the paths of the Wiener process.

Let f be a function in $\mathbf{\Omega}_0$, and write the complement of the set of zeros of f as a denumerable union of disjoint open intervals I_m, $m=1,2,\ldots$:

$$[0,1) \setminus f^{-1}(\{0\}) = \bigcup_1^{\infty} I_m .$$

Define <u>the number of excursions of the function f having length greater than ε in $[0,t)$ ($\varepsilon>0$), with respect to the level zero</u>, as

$$\eta_\varepsilon(t;f) = \#\{m: I_m \subset [0,t), \text{ length of } I_m \geq \varepsilon\}.$$

<u>Theorem 2.1.</u> *$\mathcal{W}$-almost surely in Ω_0:*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ (\pi\varepsilon/2)^{1/2} \ \eta_\varepsilon(t;f) \ = \ 2\, L^f(t,0) \ \text{ for all } t,$$

where we have put $L^f(t,x)$ *for the local time of the function* f. |

For the second result, $f(\cdot)$ is again a function in Ω_0 and define the downcrossings of f with respect to the strip $[a,b]$, $a < b$, recursively in the following way:

$s_1 = \inf\{t: f(t) = b, t \in [0,1]\}$ if $\{\ \}$ is non empty,and $s_1=1$ if $\{\ \}$ is empty.

For i = 1,2,.... :

$t_i = \inf\{t: f(t) = a, t \in [0,1], t > s_i\}$ if $\{\ \}$ is non empty and $t_i=1$ if $\{\ \}$ is empty,

and for i = 2,3,..... :

$s_i = \inf\{t: f(t) = b, t \in [0,1], t > t_{i-1}\}$ if $\{\ \}$ is non empty and $s_i=1$ if $\{\ \}$ is empty.

We define <u>the number of downcrossings of f with respect to the strip [a,b] in the interval [0,t)</u> as

$$D(t,a,b;f) = \sup\{i : t_i < t\}$$

which may be finite or infinite. In a completely analogous way one can define U(t,a,b;f) the number of <u>upcrossings</u> of f with respect to the strip [a,b] on the interval [0,t).

The second Paul Lévy's Theorem is the following:

<u>Theorem 2.2</u>. $\mathcal{W}$-*almost surely,*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \, [\, D(t,0,\varepsilon;f) + U(t;-\varepsilon,0,f) \,] = 2\, L^f(t,0) \qquad \textit{for all } t. \,|$$

For proofs, see [13]. A short proof of the second result is in [19]. Extensions to Markov processes on the line are contained in [11].

3. <u>Strong approximations. Hungarian theorems</u>.

We give here a sample of two theorems of a certain class, in which the purpose is to study the asymptotic behaviour of the number of visits that performs random walk to a given value.

There exists a number of variants and refinements, but the situation is always that as the number of steps of the random walk tends to infinity, the number of times the walk takes on a given value is asymptotically equivalent - in an appropriate topology - to the local time of a Wiener process. In other words, local times are useful to study recurrence problems of random walks.

To be precise, let $X_1, X_2, \ldots\ldots$ be a sequence of independent identically distributed (i.i.d.) random variables, and define the sequence of partial sums:

$$S_0 = 0$$

$$S_n = X_1 + \ldots\ldots + X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

The random walk is defined as the polygonal random function $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ that has the points $\{(k, S_k),\ k=0, 1, \ldots\ldots\}$ as vertices.

The number of "visits" performed by the partial sums to the *integer* level x up to time n is:

$$N_n(x) = \#\{t\colon S_k = x,\ 0 \leq k < n\}.$$

The number of times that the random walk takes on the value x up to time n is:

$$\nu_n(x) = \#\{t\colon \xi(t) = x,\ 0 \leq t \leq n\}.$$

<u>Theorem 3.1.</u> (*Simple symmetric random walk, Révész* [17]).

Suppose that the distribution of each random variable X_i *is:*

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2.$$

Then, there exists a probability space and, defined on it, a sequence of i.i.d. random variables with this distribution and a Wiener process W so that with probability one, the following two asymptotic results hold true as $n \rightarrow \infty$ *for every* $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}} |N_n(x) - L(n,x)| = o(n^{\varepsilon+1/4})$$

$$|S_n - W(n)| = o(n^{\varepsilon+1/4}).$$

As before, in the above statement $L(t,x)$ stands for the local time of W.

A typical variant is as follows. Suppose that the common probability distribution function of the steps $X_1, X_2, \ldots$ is the function $F(\cdot)$ satisfying the following conditions:

(i) $F(\cdot)$ has a density $f(\cdot)$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx = 0.$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\,dx = 1.$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} x^{4+\delta}.f(x)\,dx < \infty$ for some $\delta > 0$.

Then the following similar result can be proved:

Theorem 3.2. (Csörgo-Révész [9])

There exits a probability space with an i.i.d. sequence of random variables $X_1, X_2, \ldots$ *with common distribution* $F(\cdot)$ *and a Wiener process defined on it, so that for each real* x *there exists* $\eta > 0$, *such that almost surely,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\rho\nu_n(x) - L(n,x)| = o(n^{\eta})$$

$$|S_n - W(n)| = o(n^{\eta}),$$

where $\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |x|.f(x)\,dx$. |

In particular, if the X_i's are standart gaussian random variables (i.e. with zero mean and variance equal to one), the last Theorem applies to prove the following:

Corollary. *If* $N_n{}^*(0)$ *is the number of crossings with zero of the polygonal approximation of the Wiener process defined on the interval* [0,1] *that coincides with it at the points of abcisae* k/n (k=0,1,...,n) *and* L*(t,x) *the local time of this Wiener process, then,*

$(2/\pi)^{1/2}.\, N_n{}^*(0)/n^{1/2}$ *converges in distribution to* L*(1,0) *as* n *tends to infinity.* |

In fact, if one defines

$$W^*(t) = W(nt)/n^{1/2}$$

then it follows from the above definitions that W*(·) is also a Wiener process and

$$L^*(1,0) = n^{-1/2}.L(n,0)$$

(Or, more generally, $L^*(1, x.n^{-1/2}) = n^{-1/2}.L(n,x)$). Since $N_n(0) = N_n{}^*(0)$, the corollary follows directly from the theorem.

Remarks.

A) In the same manner one can deduce that for every level x, $(2/\pi)^{1/2}. N_n^{*}(x.n^{-1/2})/n^{1/2}$ converges in distribution to $L^{*}(1,x)$ as n tends to infinity.

B) One can prove that the convergence in A) takes place in fact in probability or in L^p, by using methods similar to those employeed to demonstrate the statements contained in the next paragraph, that is, based upon the moments of the number of crossings of a level by a stochastic process.

One should note that the theorems contained in this section speak about the existence of a probability space in which the results hold true. But if the situation is, as it usually happens to be, that we are in a given space - for example, if one wishes to approximate a given process by a given approximation procedure, say the Wiener paths by the above standart polygonals - then, one can only deduce from these theorems, convergence in law. That is,convergence of the distribution functions of the normalized number of crossings to the distribution of the local time.

In A) other types of convergence (almost sure convergence for each level x, uniformities with respect to x) seem not be known.

4. Regularization and local time.

In this last paragraph I will mention a series of results that point to obtain the local time as a limit of the number of crossings (with an appropriate normalization) of regularizations of the original paths. The general purpose is to approximate local time by means of functionals defined on the corresponding level sets of regular functions.

In the interesting situations, that is, when the given random function has a continuous local time, the function itself is irregular, hence it is not possible to observe it physically. So one is obliged to regularize it first, for example filtering it by means of a deterministic known device. So, the approximation procedures described in the above two paragraphs, that require the exact observation of the original process can not be applied if one is willing to get the local time from the level sets of the process that is actually being observed.

On the other hand, the same results that we describe in this paragraph as approximations of local time by crossings of regular processes, can be looked at as answers to some interesting problems concerning the behaviour, under various asymptotics, of the level-crossing sets of certain classes of processes.

A number of different regularization procedures can be considered, with the corresponding asymptotics. We shall restrict here our attention to the convolution of the paths $X(\cdot)$ with deterministic approximations of unity of the form

$$\Psi_{\varepsilon}(t) = (1/\varepsilon)\, \Psi(t/\varepsilon) \qquad (\varepsilon>0)$$

where Ψ is a non-negative regular function with a compact support, $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\, dt = 1$.

Similar results may be got by using some other procedures.

We use the following notations:

$$X_\varepsilon(t) = (\Psi_\varepsilon * X)(t)$$

$N_x^Z(T) = \#\{t: Z(t)= x,\ t \in T\}$ (the number of times that the function $Z(\cdot)$ is equal to x on the set T).

The random function $X_\varepsilon(\cdot)$ has the advantage of being regular as a function of t, but its essential drawback is that it does not share with $X(\cdot)$ any good probabilistic properties, such as having independent increments or being markovian.

4.1. <u>The case of the Wiener process</u>.

With the above notation we have:

<u>Theorem 4.1</u>. ([20],[21]) *Let X be the Wiener process W and T an interval,* $T=(a,b)$, $0< a < b$. *Then as* ε *tends to zero, for each* $x \in \mathbb{R}$:

$(\pi\varepsilon/2)^{1/2}\, \|\Psi\|_2^{-1}\, N_x^{W_\varepsilon}(T)$ *tends to* $L(T,x)$ *in every* $L^p(\Omega)$, where $\|\Psi\|_2$ is the L^2-norm of the function Ψ.|

<u>Remarks</u>.

A) Again here, the author does not know wheather convergence in other natural topologies hold true. For example, almost sure convergence or simultaneous behaviours for different levels x.

B) The question of speed of convergence is also completely open as far as I know. The proof of Theorem 4.1. relies on an estimation of the moments of the random variables $N_x^{W_\varepsilon}(T)$ which does not seem to provide speeds.

C) With some extra work the results can be extended - mutatis mutandis - to multiparameter Wiener processes. One must substitute the number of crossings $N_x^{W_\varepsilon}(T)$ by the geometric measure of the intersection with the set T of the x- level set of the random function $W_\varepsilon(\cdot)$ (which is defined in a similar way than in the one parameter case).

4.2. Strictly stable processes.

An extension of Theorem 4.1. to strictly stable processes with stationary independent increments has been proved by J.M. Azaïs ([1]).

$\{X(t): t \geq 0\}$ is such a process if $X(0) = 0$, for every choice of the parameter values

$$0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \dots\dots\dots \leq s_n \leq t_n$$

the random variables

$$X(t_1)-X(s_1), \dots\dots\dots\dots, X(t_n)-X(s_n)$$

are independent, and the probability distribution function of $X(t+h)-X(t)$ $(h>0)$ has a Fourier transform that does not depend on t and has the form:

$$E\{\exp[iz(X(t+h)-X(t))]\} = \exp\{-[h.s(z)]\}$$

where

$s(z) = r.[1 - i.sg(z).\mathbf{B}.tg(\pi\alpha/2)].|z|^{\alpha}, \quad r \in \mathbb{R}^{+},\ 1 < \alpha \leq 2;\ |\mathbf{B}| \leq 1.$

The paths $X(\cdot)$ of the process are also required to be c.a.d.l.a.g., that is, to be right-continuous and have left limits at every point.

One can prove that there exists a random process verifying these conditions and that almost surely, its paths have a jointly continuous local time (see for example the survey [4] and the references therein). For the values $\alpha = 2$, $r = 1/2$, $\{X(t):t \geq 0\}$ is the Wiener process.

We use the notations

$$K_1 = E\{|X(1)|\}$$

$$\|\Psi\|_{\alpha} = [\int_{-\infty}^{\infty} [\Psi(y)]^{\alpha} dy]^{1/\alpha}$$

Then,

Theorem 4.2.[1] *Let* Ψ_{ε} *be as in Theorem 4.1. and* T *an interval,* $T=(a,b)$, $0 < a < b$.

Then as ε *tends to zero, for each* $x \in \mathbb{R}$:

$K_1.\varepsilon^{1-1/\alpha}.\|\Psi\|_{\alpha}^{-1}.N_x^{X_\varepsilon}(T)$ *tends to* $L(T,x)$ *in every* $L^p(\Omega)$.

Here $L(T,x)$ stands for the local time of $X(\cdot)$.|

Remarks.

A) Analogous results for more general Lévy processes (especially, those having a continuous local time) have not been written yet, as far as I know.

B) Excepting for the gaussian case, mentioned ut supra, multiparametric generalizations are not known either.

4.3. Stationary gaussian processes with nondifferentiable paths.

This class of random processes is considered in the paper by J.M. Azaïs and D. Florens [3], where a series of results on the approximation of the local time is proved under various hypothesis. We sample one of these (Theorem 4.3. below).

The notation and the hypothesis are as follows:

$\{X(t): t \in \mathbb{R}\}$ is a Gaussian stationary process with continuous paths, covariance $r(\cdot)$ and spectral density $f(\cdot)$.
That means:

- for any choice of $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ($t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) the joint distribution of the random variables $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ (i.e. the probability measure $\pi_{t_1,\ldots,t_n}$ on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ defined by

$$\pi_{t_1,\ldots,t_n}(I_1, \ldots, I_n) = P\{X(t_1) \in I_1, \ldots, X(t_n) \in I_n\}$$

for any intervals $I_1, \ldots, I_n$), has the density function

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2}[\det(\Sigma)]^{-1/2} \exp(-1/2)\{x^T \Sigma x\}$$

where Σ is the positive definite matrix with elements $\Sigma_{ij} = r(t_i - t_j)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$, $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- $r(\cdot)$ is the Fourier transform of the probability density $f(\cdot)$.

$$r(t) = \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(itx)\, dx \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

- The hypothesis on $r(\cdot)$ are the following:
it is twice differentiable outside $t=0$, of bounded variation in a neighbourhood of $t=0$, r' and r'' are bounded at ∞ and $f(x) \sim |x|^{-1-\alpha}$ as $x \to \infty$, $0 < \alpha < 2$.

- The hypothesis on Ψ are the following:
it is of class C^1, $t^2\,\Psi(t)$ and $t^2\Psi'(t)$ are bounded and

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{3-\alpha}\,[\hat{\Psi}(z)]^2\, dz < \infty.$$

Then we have the

Theorem 4.3. [3] *Under the above hypothesis,*

$(\pi/2)^{1/2}\,[\lambda_{2,\varepsilon}]^{-1/2}\,N_0^{X_\varepsilon}([0,t])$ *tends to* $L(t,0)$ *in* $L^2(\Omega)$ *as* ε *tends to zero.*

$L(t,x)$ *denotes as usual the local time of the given process* $\{X(t): t \in \mathbb{R}\}$ *and* $\lambda_{2,\varepsilon}$ *is the second spectral moment of the regular process* $X_\varepsilon(\cdot)$, *given by*

$$\lambda_{2,\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} z^2[\hat{\Psi}(\varepsilon z)]^2\, f(z)dz.$$

Remarks.

A) It is possible to prove a more general and also simpler statement than Theorem 4.3. above, for stationary gaussian process.

B) An important class of examples is the one given by:

$$r(t) = \exp\{-|t|^{\alpha}\} \quad (0 < \alpha < 2).$$

In particular, if $\alpha = 1$ (the Ornstein Ulhenbeck process), then

$$f(x) = [\pi(1+x^2)]^{-1} \quad \text{and} \quad \lambda_{2,\varepsilon} \sim (2/\varepsilon)\, \|\Psi\|_2^{\,2} \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

4.4. Diffusions.

Theorem 4.1. can also be extended to the solution $X(\cdot)$ of the stochastic differential equations described in 1.6 of the present paper. With the same notations, *for each* $x \in \mathbb{R}$

$(\pi\varepsilon/2)^{1/2}\, \|\Psi\|_2^{-1}\, N_x^{X^{\varepsilon}}(T)$ *converges in probability to* $B(x).\, L(T,x)$ *as* ε *tends to zero.*

This remarkable result has been proved very recently by J.M. Azaïs [2] under the hypotesis that the convolution kernel Ψ is a C^{∞}-function with compact support. He also proved an analogous result por polygonal approximations of $X(\cdot)$.

REFERENCES.

[1] Azaïs, J.M.: Approximation du temps local des mouvements stables. Prepublications d'Orsay. 1986.

[2] Azaïs, J.M.: Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. Preprint, 1987.

[3] Azaïs, J.M.; Florens, D.: Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires.
Probab. Th. Rel. Fields 76, pp. 121-132, 1987.

[4] Barlow, M.T.; Perkins, E.A.; Taylor, S.J.: The behaviour and construction of local times for Lévy processes. Seminar on Stochastic Processes, 1984. pp. 23-54, Birkhäuser, Boston, 1986.

[5] Berman, S.: Local non determinism and local times of general stochastic processes. Ann. Inst. Henri Poincare, Vol. XIX, Nº 2, pp. 189-207, 1983.

[6] Berman, S.: Nonincrease almost everywhere of certain measurable functions with applications to stochastic processes.
Proc. Amer. Math. Soc., 88, pp. 141-144, 1983.

[7] Berman S.: Joint continuity of the local times of Markov processes. Ziet. Wahr. verw. Gebiete, 69, 37-46, 1985.

[8] Berman S.:Multiple images and local times of measurable functions. Proc. Amer. Math. Soc., 97, № 2, pp. 328-330, 1986.

[9] Csörgö, M.; Révész, P.: On strong invariance of local times of partial sums. Stoch. Processes and Appl. 20, pp. 59-84, 1985.

[10] Ehm, W.: Sample function properties of multiparameter stable processes. Zeit. Wahr. verw. Gebiete, 56, pp. 195-228, 1981.

[11] Friedst, B., Taylor, S.J.: Constructions of local time for a Markov process. Zeit. Wahr. verw. Gebiete, 62, pp. 73-112, 1983.

[12] Geman D.; Horowitz, J.: Occupation densities. The Annals of Probability, Vol. 8, № 1, pp. 1-67, 1980.

[13] Ikeda, N.; Watanabe, S. "Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes". North Holland. 1981

[14] Itô, K.; Mc Kean, H.P.: Diffusion processes and their sample paths. Academic Press, NY, 1965.

[15] Lévy, P. Sur certains processus stochastiques homgènes. Compositio Math., 7, pp. 283-339, 1939.

[16] Mc Kean, H.P.: Stochastic Integrals. Academic Press. New York and London. 1969.

[17] Révész, P. Local time and invariance. Lecture Notes in Mathematics, № 861, pp. 128-145. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

[18] Trotter, H.F.: A property of Brownian motion paths. Illinois J Math. 2, pp. 425-432, 1958.

[19] Williams, D.: Lévy downcrossing theorem. Zeit. Wahr. verw. Gebiete. 40, pp. 157-158, 1977.

[20] Wschebor, M.: Régularisation des trajectoires et approximation du temps local. Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, T.298, Sér. I, Nº 9, pp. 209-212, 1984.

[21] Wschebor, M.: Surfaces Aléatoires. Mesure géometrique des ensembles de niveau. Lecture Notes in Mathematics, Nº 1147. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.

IMPRESO POR EL DEPARTAMENTO
DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
Enero 1989
400 ejemplares

Depósito Legal 236.348