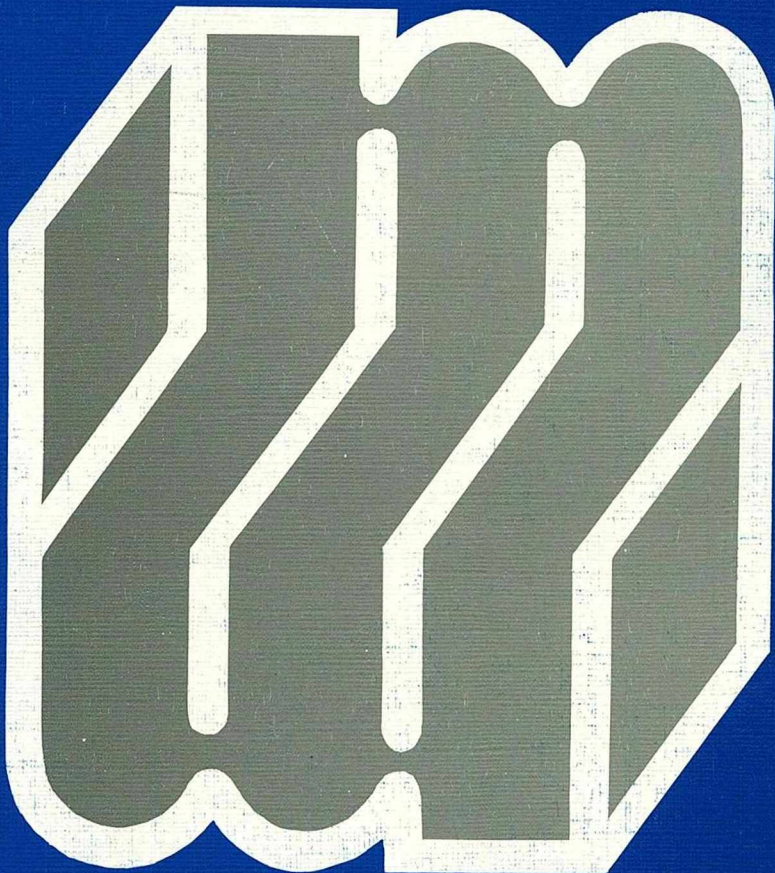


PUBLICACIONES MATEMATICAS DEL URUGUAY

VOLUMEN 2

GEOMETRIA Y ALGEBRA



VOLUMEN 2
GEOMETRIA Y ALGEBRA

PUBLICACIONES MATEMATICAS DEL URUGUAY

**EDITADAS POR EL CENTRO DE MATEMATICA DE LA FACULTAD
DE HUMANIDADES Y CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE LA
REPUBLICA, CON EL APOYO DEL PROGRAMA PARA EL
DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BASICAS (PEDECIBA).**

Montevideo, diciembre de 1989.

Publicaciones Matemáticas del Uruguay

Editor Responsable

Rodrigo Arocena

Consejo Editor

Enrique M. Cabaña
Marcos Dajczer
Walter Ferrer
Ricardo Fraiman
Gerardo González Sprinberg
Alfredo Jones
Jorge Lewowicz
José L. Massera
Marcos Sebastiani
Mario Wschebor

Equipo Editor

Rodrigo Arocena
Enrique Cabaña
Silvia Estol
Gerardo González Sprinberg
Martha Ottino
José Pacheco
Pablo Vázquez Díaz

A la memoria de Jean-Louis Verdier, matemático sobresaliente, amigo y orientador de matemáticos uruguayos.

Las Publicaciones Matemáticas del Uruguay constituyen una serie orientada a comunicar nuevos desarrollos en la creación, enseñanza y aplicación de la matemática. Serán considerados para su publicación en esta serie trabajos del tipo siguiente:

1. Artículos originales y monográficos, en forma definitiva o preliminar;
2. Cursos avanzados que contengan enfoques originales e informes de puesta al día sobre temas de importancia.
3. Avances de investigación.
4. Actas de coloquios.
5. Resúmenes de resultados o puntos de vista nuevos.

Con estas publicaciones aspiramos a dar cuenta de la labor de los matemáticos que trabajan en Uruguay y a estrechar sus vínculos con la comunidad científica internacional. Por ello, solicitamos a todos los que compartan tales objetivos que nos envíen sus colaboraciones. Proponemos establecer relaciones de canje a todos los responsables de publicaciones científicas que estén en condiciones de concertar acuerdos semejantes.

Consejo Editor

**Kac's theorem on the number of real roots and its consequences
in average complexity.**

F. Cucker *
Dept. L.S.I.
Facultat d'Informàtica
Barcelona 08028
SPAIN

M.-F. Roy
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Rennes 35042
FRANCE

Complexity of algorithms dealing with real polynomials are usually expressed as a function of two parameters. By one hand, the degree of the polynomial which is related to the number of multiplications we must perform to compute its value at a point; by the other hand, the norm of the polynomial, which is related with the amount of memory needed to store it. There is however a third parameter which is generally missleaded: the number of different roots of the polynomial. When dealing with complex polynomials this is natural because the subset of polynomials having less roots than its degree has measure zero. But this is not longer true in the real case.

In this note we shall expose a result due to M. Kac about the number of different real roots of a random polynomial and we shall use it to get estimates on the average complexity of some algorithms solving a concrete problem in computer algebra: the coding of real algebraic numbers. The use of probabilistic methods to estimate average complexity of algorithms has been extensively used in the combinatorial case (see [13] or [8]) and also for some numerical algorithms (see [16]); however no attempt has been done to introduce such methods in the domain of symbolic computation. In the sequel we will do such an attempt for the particular problem above mentioned.

We don't pretend here to close any problem but rather to show how probabilistic methods can also be used to estimate complexities in the field of computer algebra. In fact, several questions will remain open along the paper.

1. Kac's theorem.

We begin by recalling Kac's theorem.

Let $P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$ be a polynomial with real coefficients and let us suppose that we are interested on measuring the expected value of a certain random variable R depending on $P(t)$ which is independent of the homothecy class of $P(t)$. If we associate to $P(t)$ the point $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, a geometrically meaningful probabilistic distribution on the set of all real polynomials of degree less or equal than $n - 1$ would be to restrict our attention to the points in the unit sphere $S_n(1) \subset \mathbb{R}^n$ and to consider there the classical Lebesgue measure. This hypothesis turns out to be equivalent to consider the coefficients independent standard normal random variables.

* Partially supported by DGICYT PB 860062.

Lemma 1.1.

Let N be a random variable on \mathbb{R}^n such that $N(a) = N(\lambda a) \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. We have that

$$\frac{1}{|S_n(1)|} \int_{S_n(1)} N(a) d\sigma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} N(a) e^{-\frac{1}{2}\|a\|^2} da_0 \dots da_{n-1}$$

where σ is the surface element on $S_n(1)$.

Proof.

Just note that the right hand integral coincides with

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \left(\int_{S_n(r)} N(a) d\sigma_r \right) dr$$

where σ_r is the surface element on $S_n(r)$ and that, since $N(a) = N(ra)$, we have the equality

$$\int_{S_n(r)} N(a) d\sigma_r = r^{n-1} \int_{S_n(1)} N(a) d\sigma.$$

The lemma now follows from the well known equality

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|S_n(1)|}.$$

Lemma 1.2.

Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous in $[a, b]$ and C^1 in (a, b) with a finite number of turning points. Then, the number of different real roots of f in $[a, b]$ equals the value $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_b^a \cos(\xi f(t)) |f'(t)| dt \right) d\xi$. In the case $f(a) = 0$ or $f(b) = 0$ we add $\frac{1}{2}$ to this number.

Proof.

Let $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ be the turning points and let us consider $a = \alpha_0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq \alpha_{k+1} = b$.

$$\begin{aligned} \int_b^a \cos(\xi f(t)) |f'(t)| dt &= \sum_{j=0}^k \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos(\xi f(t)) |f'(t)| dt \\ &= \sum_{j=0}^k \pm \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos(\xi f(t)) f'(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^k \pm \frac{1}{\xi} [\sin(\xi f(\alpha_{j+1})) - \sin(\xi f(\alpha_j))] \end{aligned}$$

where the sign \pm depends on the (constant) sign of f' in (α_j, α_{j+1}) .

Thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_b^a \cos(\xi f(t)) |f'(t)| dt \right) d\xi &= \sum_{j=0}^k \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi} [\sin(\xi f(\alpha_{j+1})) - \sin(\xi f(\alpha_j))] \\ &= \sum_{j=0}^k \pm \frac{1}{2} [\text{sign} f(\alpha_{j+1}) - \text{sign} f(\alpha_j)] \end{aligned}$$

and this last summation is the number we are looking for.

Theorem 1.3.

Let $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$ be a random polynomial whose coefficients are independent random variables with standard normal distribution. Let N_n be the random variable that associates to $P(t)$ the number $N_n(a)$ of different real roots of $P(t)$.

We have the asymptotical equivalence $EN_n \sim \frac{2}{\pi} \log n$ where E means mathematical expectation.

Sketch of the proof.

Using the previous lemma and the equality

$$|y| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos[\eta y]) \eta^{-2} d\eta$$

we can express the m.e. of the number of roots in the interval $[\alpha, \beta]$ by the formula

$$EN_n^{[\alpha, \beta]} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\xi, t) d\xi \right) dt$$

where

$$R_n(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{-2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \|a\|^2} \{ \cos[\xi P(t)] (1 - \cos[\eta P'(t)]) \} da_0 \dots da_{n-1} d\eta$$

Integration with respect to a_0, \dots, a_{n-1} gives us

$$R_n(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{-2} [e^{-\frac{1}{2} A \xi^2} - e^{-\frac{1}{2} (A \xi^2 + 2B \eta \xi + C \eta^2)}] d\eta$$

where now

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} \\ B &= \sum_{k=0}^{n-1} k t^{2k-1} \quad \text{and} \\ C &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 t^{2k-2}. \end{aligned}$$

Integration with respect to ξ and η gives us now the equality

$$EN_n^{[\alpha, \beta]} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} dt.$$

Since $A = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$, $B = A'$ and $C = A'' + \frac{1}{4}A'$ we can rewrite this expression under the form

$$EN_n^{[\alpha, \beta]} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{1 - h_n^2(t)}}{1 - t^2} dt \quad (1)$$

with

$$h_n(t) = \frac{nt^{n-1}(1-t^2)}{1-t^{2n}}.$$

Now, $EN_n = 2EN_n^{[-1, 1]}$ since the roots of $a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$ inside $(-1, 1)$ corresponds to the roots of $\frac{1}{t^{n-1}}(a_0t^{n-1} + a_1t^{n-2} + \dots + a_{n-1})$ outside this interval. Moreover since the function inside the integral symbol is even, we have that

$$EN_n = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n^2(t)}}{1 - t^2} dt \quad (2)$$

Some asymptotics allows us finally to deduce that

$$EN_n < \frac{2}{\pi} \log n + \frac{14}{\pi} \text{ for every } n \geq 2 \text{ and} \quad (3)$$

$$EN_n \geq \frac{2}{\pi} \log n \text{ asymptotically.} \quad (4)$$

An easy consequence of the proof of this last theorem that will be useful later is the following

Proposition 1.4.

With the hypothesis of theorem 1.3. let us consider $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \frac{1}{n}]$ of the form $\alpha = 1 - n^{-a}, \beta = 1 - n^{-b}, \gamma = 1 - n^{-c}$. Then, if $b = \frac{a+c}{2}$ we have $EN^{[\alpha, \beta]} \sim EN^{[\beta, \gamma]}$ for large n .

Proof.

In order to prove (3) it is shown in [10] that for $0 \leq y \leq x \leq \frac{1}{n}$ we have

$$EN[x, y] \leq \int_y^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \right]_y^x$$

Also for $0 \leq y \leq x \leq \frac{1}{n}$ it is not difficult to realizes that the argument used by Kac for proving (4) allows us to derive the asymptotic bound

$$EN[x, y] \geq \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \right]_y^x$$

So, we have for large n that $EN^{[\alpha,\beta]} \sim \frac{b-a}{2} \log n$ and $EN^{[\beta,\gamma]} \sim \frac{c-b}{2} \log n$ and from these equivalences we easily get our result.

Remarks 1.5.

i) Detailed proofs of the results above can be found in [10] et [11].

ii) One can ask to what extent this result relies on the distributions given to the coefficients. Surprisingly enough, it turns out that the same asymptotical estimate appears under several assumptions about the probability distribution of the coefficients. In fact, it holds if the coefficients are

- a) uniformly distributed in $[-1,1]$ (see [12]), and
- b) ± 1 with probability $\frac{1}{2}$ (see [7]).

More general results can be found in [3].

iii) From equation (1) in theorem 1.3. we can conclude that EN_n is continuous over $B(\mathbb{R})$ for the common Lebesgue measure with density $\phi_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t^2}$.

The graph of $\phi_n(t)$ is depicted in the following Figure and shows that the zeros tend to concentrate around 1 and -1 . Moreover, this tendency increases with n and we can measure how pronounced it is by noticing that $\phi_n(1) = \phi_n(-1) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n(n+2)}{12}} \sim \frac{n}{2\pi\sqrt{3}}$.

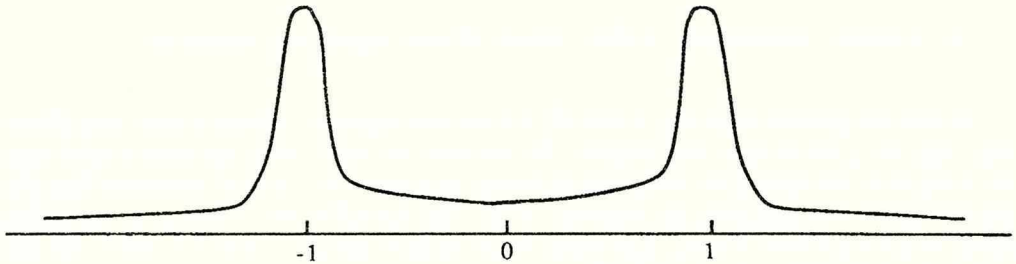


Figure 1

In [11] Kac observes that we can look upon $\phi_n(t)$ as the “average density” of the real roots. However, this is not a formal statement and in [10] it is said that “the exact determination of the average distribution of real roots of $P(t)$ on the real axis will, of course, depend on a more delicate treatment of the integral (1)”. This treatment seems to be done in [9] where it is shown that the integral corresponds to a kind of “condensed distribution” of the roots.

iv) In [14], Maslova has proved that, under the hypothesis of Theorem 1.3. the variance of N_n , VN_n is asymptotically equivalent to $\frac{4}{\pi}(1 - \frac{2}{\pi}) \log n$.

v) The value of the integral (2) can be numerically approached with some of the algorithms commonly used in Numerical Analysis. We have done so using the numerical integration routine of *Macysma* obtaining the following values that we list along with the

corresponding value of $\frac{2}{\pi} \log n$.

<i>degree</i>	EN_n	$\frac{2}{\pi} \log n$
2	1.2970	0.6993
3	1.4927	0.8825
5	1.7595	1.1406
10	2.1502	1.5265
100	3.5634	2.9380
1000	5.0202	4.3982
10000	6.4525	5.8635

Table 1

We can see that the difference between the approached value of EN_n and its asymptotically one doesn't seem to be the bound $\frac{14}{\pi}$ appearing in equation (3) but something smaller. We don't know if it is possible to improve this bound.

2. Average complexity of the coding of real algebraic numbers.

In the last years several algorithms for coding real algebraic numbers have been given. They can be grouped into two classes. By one side we have some algorithms that code the roots of a polynomial by producing isolating intervals with rational endpoints (see [4]) and relying on the archimedean character of \mathbb{R} . By the other side there is an algorithm based on a lemma from Thom, that codes the roots by a list of signs and is valid over any arbitrary computable real closed field.

In the sequel we shall obtain some bounds in the average complexity of these algorithms that follows directly from Kac's theorem. We don't try to compute the exact average complexity of the above mentioned algorithms. Instead of that, our idea is to choose one of the parameters that produce such complexity (in our case the number of roots of the input polynomial) and to calculate how it appears in its expression. The substitution of the worst case value of the parameter (in our case the degree of the polynomial) by its average value will give us a bound on the average complexity of the algorithm.

Conventions.

If $P = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ is a polynomial with integer coefficients, we shall note by d its norm $(\sum_{i=0}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}$ and by b a positive number that bounds the absolute value of the roots of P that we shall suppose moreover to be a power of 2. Also we shall suppose in the sequel that P is squarefree.

2.1. Sturm's algorithm.

The algorithm uses the Sturm sequence of P and a dichotomic process. It first computes b and the Sturm sequence of P . Then it bisects the segment $(-b, b]$ and computes the number of roots of P inside each of them. If this number is 1 it returns the segment, if it is 0 it drops the segment, and if it is greater than 1 it repeats the process.

The last part of the algorithm dominates the two firsts. For it the evaluations cost $O(n^4 \log(nd)^2)$. Moreover since the number of bisections is $O(n \log(nd))$, the number of real roots is bounded by n and the number of polynomials in the Sturm sequence is bounded by $n + 1$, the total number of evaluations is $O(n^3 \log(nd))$. (See [4] for the details). We then get for the worst case complexity

$$t_{max} = O(n^7 \log(nd)^3).$$

Now as a consequence of Kac's theorem we have for the average complexity

$$t_{aver} = O(n^6 \log(n) \log(nd)^3).$$

Remark 2.1.1.

The preceding algorithm proceeds by bisecting an interval and counting the roots of P inside this interval.

If this process is done sequentially it behaves optimally when in every new interval there is at least one root. If it is done in parallel, the optimal behavior corresponds to finding equal number of roots in the two intervals resulting after the bisection. Of course there is no choice of the tree of bisecting points giving such result for all polynomials. However we can use probabilistic arguments in the choice of the bisecting points for expecting this situation.

Since $\phi_n(t)$ is even, the first point shall be 0, and the negative points will be just the opposite of the positive ones. Moreover, by an argument seen during the proof of theorem 1.3., if $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ we have that $EN^{[\alpha, \beta]} \sim EN^{[\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}]}$ for large n . So, we can restrict our attention to the interval $[0, 1]$. Moreover, it is shown in [10] that $EN[1 - \frac{1}{n}, 1] \leq 2\sqrt{2}$ and so, we can restrict our attention to the interval $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ and use common bisection in $[1 - \frac{1}{n}, 1]$.

Now we use Proposition 1.4. and it turns out that a good choice of "bisecting" points inside $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ is done by taking points of the form $1 - n^{-x}$ and for two such points with parameters x_1 and x_2 bisecting in the point with parameter $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

2.2. The modified Uspensky algorithm.

Descartes rule states that the number of sign variations of the coefficients of a polynomial exceeds the number of its positive roots by an even non-negative integer. So, if this number is 0 the polynomial has no positive roots, and if it is 1 the polynomial has exactly one positive root. There is a theorem stating that the converse of this last fact is

true provided certain conditions (that can be attained after a bounded number of certain elementary transformations on the polynomial) are satisfied.

Based upon this fact, Uspensky designed an algorithm for producing a list of isolating intervals for the real roots of P . Its original algorithm suffered from an exponential running time, but has been modified by Akritas and Collins to run in polynomial time.

An exposition of the modified Uspensky algorithm can be found in [4] where proofs of correctness are given as well as its worst-case running time complexity that it is shown to be

$$t_{max} = O(n^6 \log(d)^2).$$

The number of roots affects, as in the previous case, this expression in a linear way. So, by Kac's theorem we get

$$t_{aver} = O(n^5 \log(n) \log(d)^2).$$

2.3. The coding à la Thom.

It is an easy consequence of Thom's lemma that the real roots of a real polynomial can be coded by the signs they give to its derivatives. In [5] it is given an algorithm that outputs the number of roots of P and for each root a sign collection corresponding to the signs that this root gives to the derivatives of P . These algorithm relies on a generalized version of the Sturm sequence due to Sylvester and revisited by Ben-Or, Kozen and Reif, that computes the number of roots of a polynomial P giving fixed signs $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ to any given polynomials Q_1, \dots, Q_k .

The worst case complexity of this algorithm is calculated in [15] where it is shown to be

$$O(r^4 n^5 (n + \log(d))^2)$$

(where r is the number of real roots of P) or

$$O(r^3 n^4 (n + \log(d)) \log(n + \log(d)) \log(\log(n + \log(d))))$$

using "fast multiplication". So, we have

$$t_{max} = O(n^9 (n + \log(d))^2)$$

or

$$t_{max} = O(n^7 (n + \log(d)) \log(n + \log(d)) \log(\log(n + \log(d))))$$

using "fast multiplication".

As before we get

$$t_{aver} = O(\log(n)^4 n^5 (n + \log(d))^2)$$

or

$$t_{aver} = O(\log(n)^3 n^4 (n + \log(d)) \log(n + \log(d)) \log(\log(n + \log(d))))$$

using "fast multiplication".

Remark 2.3.1.

In order to code the roots of P we don't need necessarily all the derivatives of P . The algorithm proceeds by computing the number of roots of P giving a fixed sign to $P^{(n-1)}$, then to $P^{(n-1)}$ and $P^{(n-2)}$ and so on until this number is one and all the roots are coded. So, a possible parameter that could also be studied in order to improve the complexity of the algorithm is the average number of derivatives needed to distinguish between all the roots.

The formal treatment of such random variable seems to be quite difficult. Moreover, computer experiences with this algorithm shows that in general, the first derivative used (i.e. $P^{(n-1)}$) is quite useful in the sense that it gives positive sign to a about the half of the roots and negative to the rest but the following derivatives turns out to be useless.

A possible reason is that the zero of $P^{(n-1)}$ is the one of $na_n t + a_{n-1}$ which tends to be close to zero for large n . So it is a good point of bisection as we observed in the Remark 2.1.1. However, the following derivatives will also have their zeros near the origin of coordinates and then will no distinguish between the roots that on the average cluster around 1 (or -1). In fact it seems natural to conjecture that for higher derivatives we will get a "density" similar to the one in Figure 1 but with the property that the smaller is the degree of the derivative, the closer to the origin are the maxima.

Remarks 2.4.

i) From the preceding analysis it turns out that the consideration of the number of real roots as a significant parameter in computing complexities doesn't improve in the same way the algorithms considered.

ii) Using the remark 1.5.iv. and Tchebychev's inequality we can prove that for every $k > 1$ the probability of having more than $\frac{2k}{\pi} \log n$ roots tends to zero for large n .

iii) There exist others algorithms for producing a list of isolating intervals, and remarkably the one using Rolle's theorem (see[4]). However it doesn't seem that Kac's theorem can improve the worst-case complexity because of the recursive nature of the algorithm. In order to get such improvement we should have asymptotically estimates of the average number of roots of the derivatives of a random polynomial. Such estimates have been given for the first derivative (see [6]) but the problem is open for the higher ones.

3. Final remarks.

3.1. How many hyperbolic polynomials do we have?

Related with the exposed results there is the problem of compute the probability for a random polynomial to have a certain number of real roots and in particular, to be hyperbolic i.e. to have all its roots in the real field. The geometrical structure of the set of points $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ giving hyperbolic polynomials has been studied in [2].

i) A first consequence of the results shown in paragraph 1 is that the probability for a

random polynomial to be hyperbolic is $O(\frac{\log n}{n^2})$ for large n . We just apply Tchebychev's inequality to the expectation and the variance mentioned in Remark 1.5.iv.

ii) Let $P(t) = at^2 + bt + c$ be a random polynomial whose coefficients are independent random variables uniformly distributed in $[-1, 1]$. Then it is an easy exercise of integration to prove that $\mu\{(a, b, c) | P(t) \text{ is hyperbolic} \} = \frac{19+3 \log 4}{36} \sim 0.6433023 \dots$. The same kind of result turns out to be much more difficult if the coefficients are standard normal random variables. However we can deduce from the fact that a numerical approximation of EN_3 is $1.2970 \dots$ that the probability we are looking for is approximately $0.6485 \dots$. Quite surprisingly, the resulting probability turns out to be very similar in both cases.

Another fact concerning hyperbolic quadratic equations is given in [1]. There, it is shown that under very general conditions the probability for a random quadratic polynomial to have real roots is less or equal than $5/6$.

iii) For random cubic polynomials with standard normal coefficients we can deduce from $EN_4 \sim 1.4927 \dots$ that the probability of such a polynomial to be hyperbolic is approximately $0.2463 \dots$.

iv) For higher degrees the situation becomes much more involved. It is not clear how should we compute this probability, not even a numerical approximation. We can however at least rewrite the integral expressing the probability we are looking for in such a way that it is amenable to numerical approximations.

Let us consider the elementary symmetrical functions

$$\begin{aligned} s_1 &= (-1)(y_1 + \dots + y_n) \\ s_2 &= y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{n-1} y_n \\ &\vdots \\ s_n &= (-1)^n y_1 \dots y_n. \end{aligned} \tag{*}$$

If we consider the map $s^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ given by (s_1, \dots, s_n) we know that the set H_n of hyperbolic polynomials is the image of \mathbb{R}^n under s^* . Moreover, this surjection induces a bijection if we identify points in the domain by the action of S_n (the well known correspondence of monic hyperbolic polynomials and sets of n roots). So we can consider the following "change of coordinates"

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= (-1)y_0(y_1 + \dots + y_n) \\ a_2 &= y_0(y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{n-1} y_n) \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n y_0 y_1 \dots y_n. \end{aligned} \tag{**}$$

which gives us the equality

$$\mu(H_n) = \frac{1}{n!} (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} y_n^2 \sum_{j=1}^n s_j^2} |J| dy_0 \dots dy_n$$

where J is the Jacobian corresponding to (**). But it is easily observed that this Jacobian turns out to be the one corresponding to (*) multiplied by y_0^n . We get in this form an integrand which is Gaussian with respect to y_0 . Performing the integral we obtain

$$\mu(H_n) = \frac{1}{n!} (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |J| \left(\frac{2}{\sum_{j=1}^n s_j^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} dy_1 \dots dy_n$$

where now J denotes the Jacobian corresponding to (*).

A similar transformation can be performed to obtain the probability of having $n - 2r$ real roots and $2r$ complex roots by considering the roots $y_1, \dots, y_{n-2r}, z_1 + iw_1, z_1 - iw_1, \dots, z_r + iw_r, z_r - iw_r$ in (**) and dividing now by $(n - 2r)!r!2$.

3.2. How many M -curves do we have?

A last remark is that the methods outlined here could be used in higher dimensions. For instance, researchers working on topology of real algebraic curves have observed that the M -curves (i.e. curves with the maximal number of connected components for its degree) are quite rare. How seldom must they appear?

Also, in many applications we must code the roots of univariate polynomials coming in a deterministic manner from others polynomials (for instance, the discriminant of a bivariate polynomial). If we give a random distribution on the set of those lasts ones, how many roots will we find on the average for the former one?

References.

- [1] Arnold, L.; "The probability that a quadratic equation has real roots is less than 5/6". Unpublished manuscript.
- [2] Arnol'd, V.I.; "Hyperbolic polynomials and Vandermonde mappings". *Funct. Anal. and Applic.* 20, 1986.
- [3] Bharucha-Reid, A.T. and Sambandham, M.; *Random Polynomials*. Academic Press, 1986.
- [4] Collins, G.E. and Loos, R.; "Real zeros of polynomials". In *Computer Algebra. Symbolic and algebraic computation*. (Edited by Buchberger, Collins and Loos). Springer-Verlag, 1982.
- [5] Coste, M. and Roy, M.-F.; "Thoms lemma, the coding of real algebraic numbers and the computation of the topology of semi-algebraic sets". *J. of Symb. Comp.* 5, 1988.
- [6] Das, M.; "The average number of maxima of a random algebraic curve". *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 65, 1969.
- [7] Erdős, P. and Offord, A.C.; "On the number of real roots of a random algebraic equation". *Proc. London Math. Soc.* 6, 1956.
- [8] Flajolet, Ph. and Vitter, J.; "Average-case analysis of algorithms and data structures". INRIA, RR n 718, 1987. Also to appear in *Handbook of Theoretical Computer Science*, North-Holland, 1988.
- [9] Hammersley, J.M.; "The zeros of a random polynomial". *Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. Probability, 3rd*, vol.2, 1955.

- [10] Kac, M.; "On the average number of real roots of a random algebraic equation" *Bull. Amer. Math. Soc.* **49**, 1943.
- [11] Kac, M.; *Probability and related topics in Physical Sciences*. Interscience, 1959.
- [12] Kac, M.; "On the average number of real roots of a random algebraic equation (II)". *Proc. London Math. Soc.* **50**, 1948.
- [13] Knuth, D.; *The art of computer programming*. Vol.3., Reading, Mass., 1973.
- [14] Maslova, N.B.; "The variance of the number of real roots of random polynomials". *Teor. Veroyatn. Ee Primen.* **19**, 1974.
- [15] Roy, M.-F. and Szpirglas, A.; "Complexity of the computation on real algebraic numbers". Submitted to *J. of Symb. Comp.*.
- [16] Smale, S.; "Algorithms for solving equations". *Proc. Int. Congress of Math.* Berkeley, 1986.

Manuscrito recibido en diciembre de 1988.

Sobre las resoluciones inmersas de superficies.

G.González Sprinberg (Institut Fourier, Université Grenoble I)

1. Introducción.

La resolución o desingularización de superficies algebraicas o analíticas ha sido obtenida por diferentes métodos propuestos por geómetras italianos, principalmente por B. Levi y G. Albanese, quienes disponían de la resolución de curvas obtenida en el siglo pasado por L. Kronecker y Max Noether. La primera demostración rigurosa y completa, para superficies, es debida a R. Walker en 1936, y está basada en la reducción al caso de singularidades particulares que habían sido estudiadas por H. Jung. Con métodos puramente algebraicos, O. Zariski obtiene una demostración para superficies sobre un cuerpo de característica cero, poco después. Desde entonces han habido resultados importantes y en un contexto más general (esquemas excelentes) de H. Hironaka y resultados parciales en característica positiva de S. Abhyankar. La existencia de resoluciones inmersas, en las que se preserva la información de la inmersión de la variedad singular en una variedad lisa, ha sido también obtenida (y en un cuadro más general que el de superficies). Pero la realización efectiva y la descripción de tales desingularizaciones plantean aún numerosos problemas. por ejemplo la determinación de resoluciones inmersas canónicas y la relación con la geometría intrínseca de la singularidad. Comenzamos con algunas definiciones precisas.

Sea (S,O) un representante de un germen de superficie compleja, en el que O es un punto singular aislado.

Una resolución o desingularización de S es un morfismo propio $\sigma: \hat{S} \rightarrow S$, donde \hat{S} es una superficie lisa, $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ es denso en \hat{S} y tal que la restricción de σ es un isomorfismo de $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sobre $S \setminus \{O\}$. Dada una inmersión de S en una variedad lisa V , se llama resolución inmersa de $S \hookrightarrow V$ un morfismo propio $\sigma: \hat{V} \rightarrow V$ donde \hat{V} es también una

variedad lisa, $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ es denso en \hat{V} , la restricción de σ es un isomorfismo de $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sobre $V \setminus \{O\}$, y tal que σ induce una resolución de S con cruces normales. Esta última condición significa:

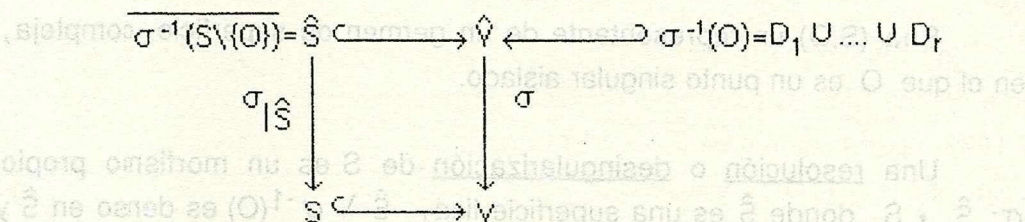
(a) Sea $\hat{S} = \overline{\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})}$ el transformado estricto de S , i.e. la adherencia de $\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})$ en \hat{V} . La restricción $\sigma|_{\hat{S}}$ de σ a \hat{S} es una desingularización de S .

(b) $\sigma^{-1}(O)$ es un divisor de \hat{V} , unión de hipersuperficies lisas irreducibles $D_i, 1 \leq i \leq r$, y la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ es con cruces normales.

La propiedad de cruces normales de la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ quiere decir que, para cada punto $x \in \sigma^{-1}(O)$, existe un sistema local de coordenadas de \hat{V} en un entorno de x tal que las variedades de la familia $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ que contengan x son subespacios lineales de coordenadas, en posición general.

El divisor $\sigma^{-1}(O)$ de \hat{V} , cuya descomposición en componentes irreducibles es $D_1 \cup \dots \cup D_r$, es llamado el divisor excepcional de σ .

La descomposición en componentes irreducibles de $\sigma^{-1}(S)$ es $\hat{S} \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$. El diagrama siguiente es conmutativo:



Como consecuencia de la condición de cruces normales se obtienen las propiedades siguientes:

1) Por cada punto de $x \in \sigma^{-1}(O) \cap \hat{S}$ pasan a lo sumo dos componentes irreducibles de $\sigma^{-1}(O)$, pues \hat{S} es una variedad de dimensión dos.

2) Las componentes irreducibles de la fibra excepcional $\sigma^{-1}_{|\hat{S}}(O)$ de la restricción $\sigma|_{\hat{S}}$ son lisas y con cruces normales en \hat{S} (i.e. la resolución de S inducida por σ es lo que se llama una buena resolución de S).

En efecto, se tiene la igualdad $\sigma^{-1}_{|\hat{S}}(O) = \hat{S} \cap \sigma^{-1}(O)$, por lo que la familia de las componentes irreducibles de la fibra excepcional $(D_i \cap \hat{S}, i=1, \dots, r)$ es con cruces normales y en particular cada componente es lisa.

Las definiciones precedentes han sido dadas en el contexto analítico complejo: definiciones análogas existen en el contexto algebraico.

La obtención y la descripción de resoluciones inmersas de superficies es de una complejidad equivalente a la de las resoluciones de variedades de dimensión tres. En este artículo resumimos algunos métodos y resultados ilustrados con un ejemplo de una hipersuperficie, caso de una singularidad con dimensión de inmersión (es decir la dimensión del espacio tangente de Zariski) mínimo.

Los resultados resumidos aquí son una parte del contenido de varias conferencias realizadas en las Universidades de Harvard y de Northeastern en 1987 (en un seminario conjunto organizado por H. Hironaka, D.T. Lê, M. Spivakovsky, y el autor), y en el Instituto Fourier en 1988.

2. "Blow-up", superficies regladas y ciclo fundamental.

2.1 Uno de los métodos efectivos para el cálculo de resoluciones reposa sobre la utilización de "blow-up" (estallido) de centro puntos o curvas lisas en las que la superficie considerada es singular, o bien donde existe tangencia de un transformado estricto de ésta con los divisores excepcionales introducidos por estallidos anteriores. Los centros de los estallidos son subvariedades de la superficie, pero los estallidos son realizados en la variedad ambiente lisa. En el ejemplo considerado la variedad ambiente lisa es de dimensión tres; será suficiente, para los estallidos puntuales, fijar la notación standard del estallido de \mathbb{C}^3 de centro el origen: la variedad estallada $\hat{\mathbb{C}}^3$ está recubierta por los abiertos afines U_i , $1 \leq i \leq 3$, donde cada U_i es una copia de \mathbb{C}^3 con coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) , de tal manera que U_i es el abierto en el que la imagen del i -ésimo generador del ideal maximal $m = (X, Y, Z)$ del origen de \mathbb{C}^3 es un generador del ideal principal $m \hat{\mathbb{C}}^3$ (i.e. (X_1) en U_1 , (Y_2) en U_2 , (Z_3) en U_3); dicho generador en cada abierto U_i es una ecuación local del divisor excepcional D del estallido, divisor que es isomorfo a un plano proyectivo \mathbb{P}^2 . Las funciones de transición entre los tres abiertos son:

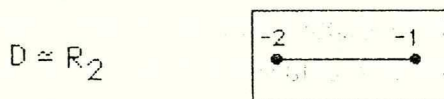
$$(X_1, Y_1, Z_1) = (X_2 Y_2, 1/X_2, Z_2/X_2)$$

$$(X_2, Y_2, Z_2) = (X_3/Y_3, Y_3 Z_3, 1/Y_3)$$

$$(X_3, Y_3, Z_3) = (1/Z_1, Y_1/Z_1, X_1 Z_1)$$

Denotaremos σ un estallido puntual, $\bar{\sigma}$ un estallido de centro una curva (lisa). En el ejemplo considerado, la notación utilizada para un estallido de tipo $\bar{\sigma}$ es análoga a la precedente, pero sobre cada abierto afín considerado, la variedad estallada es recubierta por dos abiertos afines en lugar de tres.

2.2 Los componentes irreducibles D_j del divisor excepcional son superficies racionales en el caso en que provengan de un estallido puntual, o superficies regladas si provienen de un estallido de una curva. Para las primeras utilizaremos la notación R_n para denotar un superficie isomorfa a un plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 estallado en n puntos, indicando también el grafo dual de las n curvas excepcionales de R_n , grafo ponderado por las auto-intersecciones de dichas curvas. Por ejemplo :



denota un divisor isomorfo a \mathbb{P}^2 estallado en dos puntos, tales que el segundo punto estallado pertenece a la fibra excepcional del primero. En el caso general este grafo dual no es suficiente para determinar el orden de los estallidos, pero lo es en los ejemplos considerados.

Para los divisores excepcionales que son superficies regladas, denotaremos F_m una superficie isomorfa al espacio total de un fibrado proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{P}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ sobre la recta proyectiva \mathbb{P}^1 .

La consideración de estas superficies regladas es suficiente para los casos en los que la curva estallada es racional (lisa), i.e. isomorfa a \mathbb{P}^1 . En este caso, todas las superficies regladas obtenidas por estallido de una curva racional en una variedad lisa de dimensión tres son del tipo F_m , con $m \geq 0$. En particular si $m=0$, entonces $F_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, si $m > 0$ identificaremos la única curva en F_m cuya auto-intersección es $-m$.

Es de notar que las superficies F_1 y R_1 son isomorfas, pero es el único tipo común entre las F_m y las R_n .

La determinación del entero m depende de la clase de isomorfismo del fibrado normal $N_{\mathcal{C}} \subset V$ de la curva racional \mathcal{C} en V , que es del tipo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$, donde a y b son enteros, $a \leq b$; se obtiene entonces $m=b-a$, pues el producto tensorial por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$ no modifica la clase de isomorfismo del fibrado proyectivo asociado.

2.3 Probablemente el caso más accesible de singularidad de superficie a ser considerado para obtener una resolución inmersa es el de las singularidades absolutamente aisladas, para las que se obtiene una resolución (no inmersa) por medio de estallidos puntuales. Una vez obtenida dicha resolución, se podrá considerar la condición de transversalidad o cruce normal de los divisores excepcionales con el transformado estricto de la superficie.

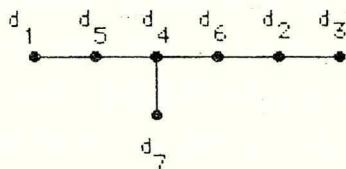
Si $\sigma : \hat{S} \rightarrow S$ es una resolución de S , donde $O \in S$ es una singularidad absolutamente aislada, el ideal $m_{\hat{S}} \cdot \mathcal{O}_{\hat{S}}$ es localmente principal (m denota el ideal máximo en O); por lo tanto $m_{\hat{S}} \cdot \mathcal{O}_{\hat{S}}$ define un divisor Z en \hat{S} tal que $m_{\hat{S}} \cdot \mathcal{O}_{\hat{S}} = \mathcal{O}_{\hat{S}}(-Z)$. Sean d_1, \dots, d_r las componentes irreducibles de la fibra excepcional $\sigma^{-1}(O)$. Si la multiplicidad de intersección $(Z \cdot d_i)$ de Z con d_i es diferente de cero, entonces d_i pertenece a la fibra excepcional del primer estallido; si dicha intersección es cero, entonces la componente d_i no aparece en la fibra excepcional del primer estallido. (La multiplicidad de intersección considerada está dada por la forma intersección en el grupo de Picard de \hat{S}). La iteración de este procedimiento permite determinar el orden de aparición de las componentes d_i en la sucesión de estallidos puntuales. Si la singularidad es racional, el divisor Z coincide con el ciclo fundamental, que es el único ciclo divisorial minimal en la familia de los ciclos divisoriales positivos con soporte en la fibra excepcional $\sigma^{-1}(O)$, tales que $(Z \cdot d_i) \leq 0, \forall i$. De hecho el ciclo fundamental es determinado por la matriz intersección $(d_i \cdot d_j), 1 \leq i, j \leq r$, lo que reduce varios cálculos al dominio de la combinatoria.

3. Ejemplo de una hipersuperficie.

Sea S la superficie de ecuación $f = X^2 + Y(Y^2 + Z^3) = 0$ inmersa en $V = \mathbb{C}^3$; el origen es el único punto singular de S (de tipo llamado E_7).

La resolución (minimal) de S es obtenida mediante siete estallidos puntuales. El grafo dual de las componentes irreducibles de la fibra excepcional es:

[3.1]

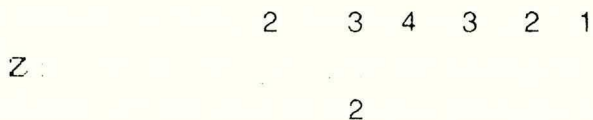


Cada vértice representa una componente, y cada arista un punto de intersección entre las componentes representadas por los dos vértices correspondientes. La auto-intersección de cada vértice es $(d_i \cdot d_i) = -2, 1 \leq i \leq 7$; lo que completa la matriz intersección. El orden de los índices de las componentes d_i respeta el orden de aparición de las mismas al efectuar los estallidos.

En efecto, el ciclo fundamental es:

$$Z = 2d_1 + 2d_2 + d_3 + 4d_4 + 3d_5 + 3d_6 + 2d_7,$$

que se puede representar indicando la multiplicidad de cada componente irreducible de Z en un diagrama análogo a [3.1]:



El cálculo de las intersecciones $(Z \cdot d_i)$ es inmediato a partir del grafo [3.1] y de las auto-intersecciones; se obtiene $(Z \cdot d_i) = 0$ para todo $i \neq 1$. En consecuencia el transformado estricto de S por el estallido σ_i de centro el origen es una superficie con un único punto singular en cuya resolución minimal las componentes irreducibles de la fibra excepcional son $d_i, 2 \leq i \leq 7$.

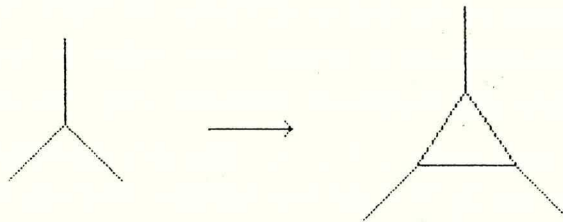
Fijemos algunas notaciones: para cada estallido puntual $\sigma_i, 1 \leq i \leq 7$, notaremos \hat{S}_i el transformado estricto de S por la composición $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i$; D_i el divisor excepcional de la variedad ambiente de dimensión tres introducido por σ_i , y $d_i = |D_i \cap \hat{S}_i|$ la curva reducida traza de D_i en \hat{S}_i . Se conservará por abuso de notación, la misma denominación para los transformados estrictos de D_i y de d_i en los estallidos posteriores a σ_i . Finalmente denotaremos $(i j)$ la curva intersección de D_i con D_j , para $i \neq j$, si dicha intersección no es vacía, así como sus transformados estrictos. La ecuación del transformado total de S en el abierto U_3 (ver 2.1) de la variedad estallada en:

$$\sigma_1^*(f) = Z_3^2 + X_3^2(Y_3 Z_3 (Y_3^2 + Z_3)) = 0$$

La ecuación local en U_3 del divisor excepcional es $Z_3 = 0$, y el factor en paréntesis corresponde a \hat{S}_1 ; se verifica que el único punto singular de \hat{S}_1 es el origen de U_3 (de tipo \mathbb{D}_6).

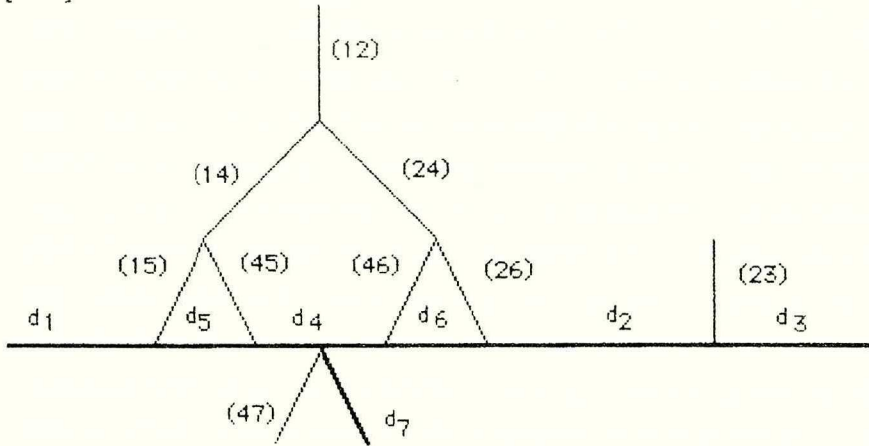
Un cálculo análogo de los ciclos fundamentales de las singularidades sucesivas de $\hat{S}_i, 2 \leq i \leq 6$, determina el orden de aparición de las curvas excepcionales restantes: \hat{S}_2 posee dos puntos singulares (de tipo A_1 y \mathbb{D}_4); \hat{S}_3 obtenida con el estallido σ_3 del punto de tipo A_1 posee un solo punto singular en $d_1 \cap d_2$, cuyo estallido σ_4 permite obtener la superficie \hat{S}_4 con tres puntos singulares de tipo A_1 en $d_4 \cap d_1$, en $d_4 \cap d_2$ y un tercero en d_4 que son resueltos respectivamente con los estallidos $\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$.

Esta información permite la construcción del diagrama de incidencia de los divisores $\hat{S}_7, D_i, 1 \leq i \leq 7$ en el espacio ambiente de dimensión tres resultante de los siete estallidos. En este diagrama de incidencia son representadas todas las curvas que aparecen como intersección de los ocho divisores obtenidos; cada curva es representada por un segmento, y un punto común a dos segmentos representa un punto de intersección de dos curvas. Las curvas consideradas son reducidas; los divisores excepcionales D_i son transversales entre ellos pues son superficies lisas obtenidas todas por estallidos puntuales. La condición de cruce normal de los $D_i, 1 \leq i \leq 7$ con \hat{S}_7 será analizada posteriormente. La irreductibilidad de cada intersección $D_i \cap \hat{S}_7, 1 \leq i \leq 7$, implica que si el diagrama de incidencia conjuntista de tres divisores corresponde a la posición general de tres hiperplanos, entonces el diagrama de incidencia del estallido de centro el punto de intersección de los tres divisores se obtiene reemplazando este punto por un triángulo que representa las intersecciones del nuevo divisor excepcional con los tres precedentes, como en el diagrama siguiente:



El diagrama de incidencia conjuntista para la resolución minimal resulta de la regla precedente y de la información disponible sobre el orden y los centros sucesivos de estallidos; y es obtenido facilmente sin necesidad de conocer las ecuaciones locales del atlas de los abiertos afines. El resultado es el diagrama siguiente:

[3.2]

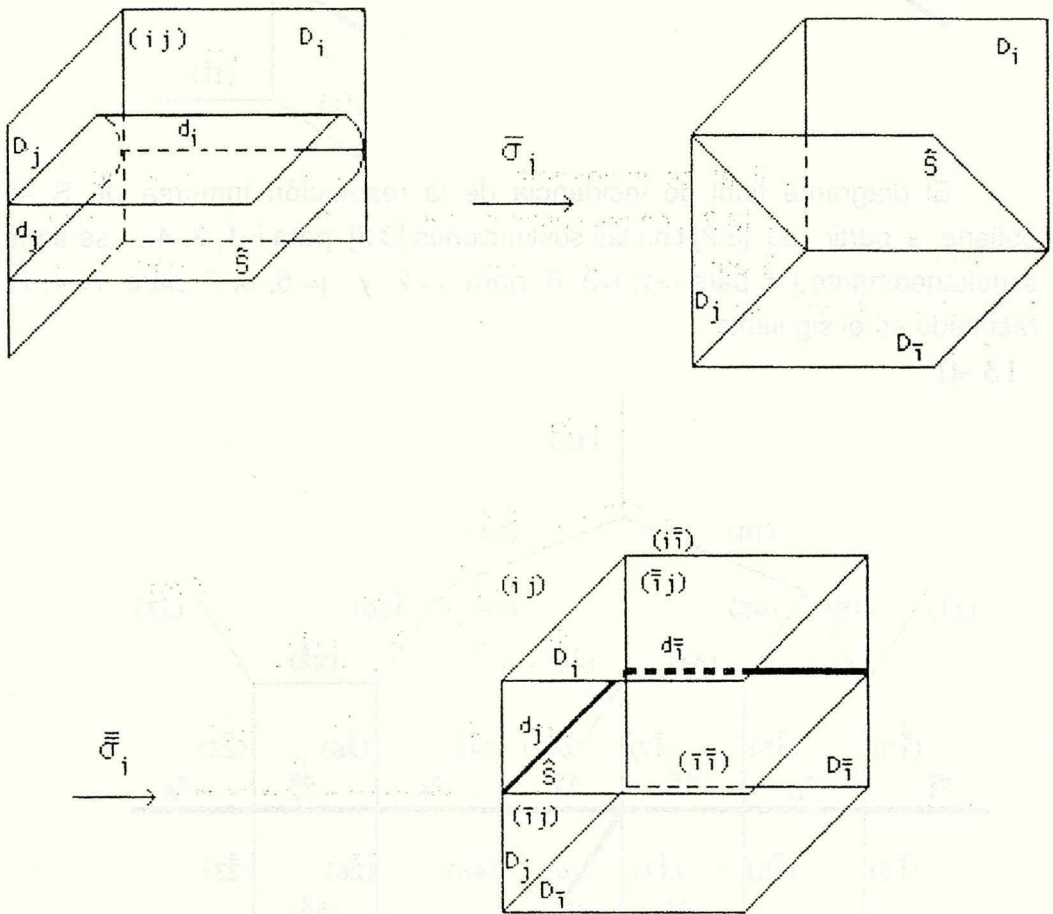


El cálculo local muestra que tres de los divisores excepcionales D_i son tangentes al transformado estricto \hat{S}_7 a lo largo de las curvas (racionales) $d_i = |D_i \cap \hat{S}_7|$, para los índices $i=1, 2, 4$.

En estos tres casos en los que la condición de cruce normal no es satisfecha, el tipo de tangencia es el mismo, con orden de contacto 2; en consecuencia se obtiene una resolución inmersa luego de efectuar dos estallidos de centro d_i para cada $i=1, 2, 4$. Más precisamente, sea $\bar{\sigma}_i$ el estallido de centro d_i y sea D_i^- la superficie reglada obtenida como divisor excepcional. Las superficies D_i^- y los transformados estrictos de D_i y de \hat{S}_7 tienen una intersección común a lo largo de una curva que es centro del estallido siguiente, denotado $\bar{\sigma}_i^-$, estallido que introduce otra superficie reglada, D_i^{--} . Las cuatro superficies D_i^{--}, D_i^-, D_i y \hat{S} presentan cruces normales (\hat{S} denota el transformado estricto final de S); la única intersección no vacía de \hat{S} con los tres otros divisores es $\hat{S} \cap D_i^{--}$ que será denotado d_i^{--} . Los divisores D_i^- y D_i son disjuntos y sus intersecciones con D_i^{--} son denotados (i^-i^-) e $(i i^-)$ respectivamente. Finalmente, si $(i j) = D_i \cap D_j \neq \emptyset$ la curva d_j es tangente a $(i j)$ en $d_i \cap d_j$, y después de

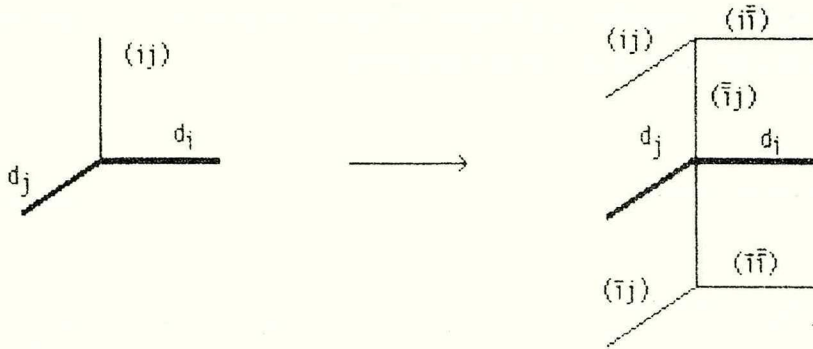
efectuar los estallidos $\bar{\sigma}_i$ y $\bar{\sigma}_i^{\parallel}$, las intersecciones de D_j con D_i^- y D_i^+ son denotadas $(\bar{i}j)$, $(\bar{i}\bar{j})$ respectivamente.

Se puede representar graficamente estos estallidos en las trazas reales de las superficies de la manera siguiente:



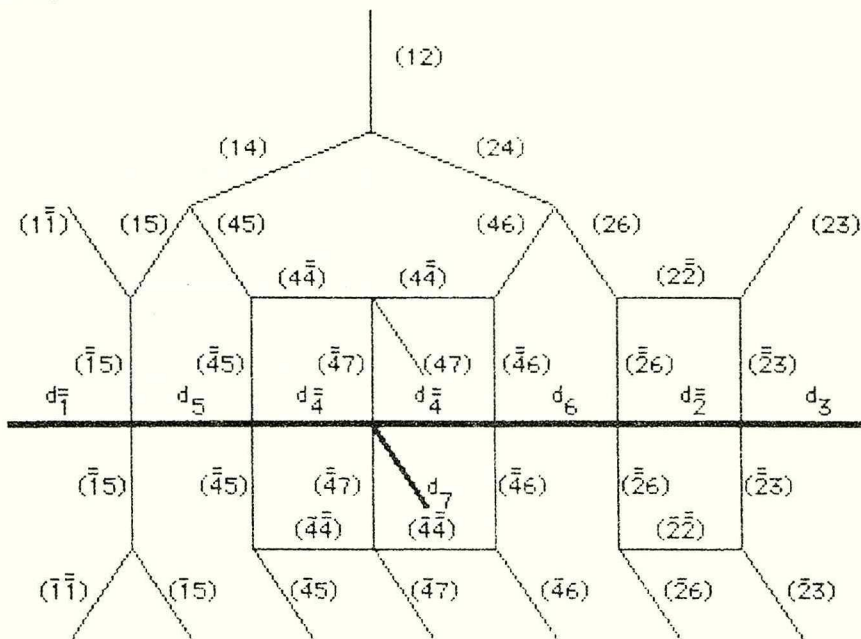
En consecuencia, el diagrama de incidencia local de \hat{S} , D_i , $D_{\bar{i}}$, $D_{\bar{\bar{i}}}$, D_j se obtiene a partir del diagrama de \hat{S} , D_i , D_j de la manera siguiente:

[3.3]



El diagrama final de incidencia de la resolución inmersa de S se obtiene a partir de [3.2] con las sustituciones [3.3] para $i=1, 2, 4$; se tiene simultaneamente $j=5$ para $i=1$; $j=3, 6$ para $i=2$ y $j=5, 6, 7$ para $i=4$. El resultado es el siguiente :

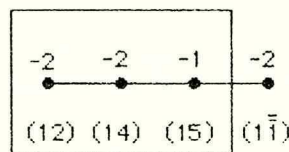
[3.4]



Para determinar el tipo de superficies racionales y regladas que aparecen como divisores excepcionales hay que retomar la sucesión de estallidos puntuales y de curvas que las generan.

La superficie D_1 que es isomorfa a un plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 , divisor excepcional de σ_1 , es estallada en tres puntos por $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$, por lo que es isomorfa a una superficie racional de tipo R_3 (ver § 2.2), siendo las curvas excepcionales en D_1 , (12), (14), (15). Los puntos estallados pertenecen a d_1 o a su transformado estricto en cada estallido; d_1 es una recta en el primer estallido, pues el cono tangente de S en 0 es un plano (doble), su autointersección en D_1 es 1. Pero como la autointersección de una curva estallada en uno de sus puntos decrece de una unidad, al cabo de los tres estallidos ésta es -2 . Los estallidos de centro d_1 no modifican la superficie D_1 pues la curva ya es un divisor de Cartier; en cambio separan D_1 del transformado estricto de la superficie \hat{S} , por lo que la curva que denotamos d_1 deviene $(1\bar{1})$, es decir la intersección $D_1 \cap D_1^-$. Cada curva que aparece en el diagrama de incidencia posee una autointersección para cada superficie que la contiene, autointersección que es el grado de su fibrado normal en la superficie considerada.

Para completar la descripción de la resolución inmersa, determinamos todas las autointersecciones, resumidas en [3.5]. En éste se describe, para cada divisor excepcional, el grafo dual de las curvas de intersección con los otros divisores, grafo ponderado por las autointersecciones. Las curvas excepcionales de los n estallidos de R_n , así como la única curva de autointersección $-m < 0$ de F_m , son distinguidas (en recuadro) de las restantes. Para $D_1 \cong R_3$, el grafo es



El divisor excepcional $D_{\bar{1}}$ obtenido por el estallido $\bar{\sigma}_1$ de centro d_1 es una superficie reglada de tipo F_2 . En efecto cuando se efectúa el primer estallido, σ_1 , el divisor excepcional $D_1 \simeq \mathbb{P}^2$ tiene un fibrado normal de grado -1 en la variedad ambiente de dimensión tres estallada \hat{V}_1 (pues $N_{D_1/\hat{V}_1} \simeq \mathcal{O}_{D_1}(-1)$), y la curva $d_1 = |D_1 \cap \hat{S}_1|$ es una recta en D_1 , por lo que $N_{d_1/D_1} \simeq \mathcal{O}_{d_1}(1)$. En consecuencia, se obtiene:

$$N_{d_1/\hat{V}_1} \simeq \mathcal{O}_{d_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-1)$$

Para cada estallido de centro puntos de d_1 , σ_2 , σ_4 , σ_5 , el grado de cada uno de los dos sumandos del fibrado normal disminuye de una unidad, por lo que se obtiene finalmente

$$\mathcal{O}_{d_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-4).$$

Este resultado se puede verificar también con cálculos locales y funciones de transición; con las notaciones adoptadas en § 2.1, un entorno de d_1 en \hat{V} está dado por los segundos abiertos de la descripción de σ_1 y de σ_5 , cada uno de ellos isomorfo a \mathbb{C}^3 , con funciones de transición:

$$(X, Y, Z) = (xy^2, y^4z, 1/y)$$

El ideal de definición de d_1 es (X, Y) (respectivamente (x, z)) en el primer (resp. segundo) abierto, por lo que se verifica el resultado enunciado sobre el fibrado normal, y el tipo de la superficie reglada

$$D_{\bar{1}} = \mathbb{P}_{d_1}(\mathcal{O}_{d_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_1}(-4)) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)).$$

Considerando ahora la curva $d_{\bar{1}} = |D_{\bar{1}} \cap \hat{S}|$ el estallido $\sigma_{\bar{1}}$ de centro $d_{\bar{1}}$ tiene el divisor excepcional $D_{\bar{1}}$ isomorfo a F_0 (es decir $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$), pues el fibrado normal de $d_{\bar{1}}$ en la variedad ambiente es isomorfo a

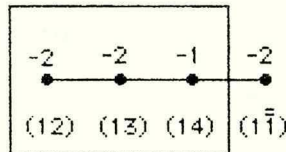
$$\mathcal{O}_{d_{\bar{1}}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{d_{\bar{1}}}(-2).$$

Para $D_{\bar{i}}$ y $D_{\bar{i}}$, con $i=2,4$, se obtienen resultados análogos al obtenido para $i=1$.

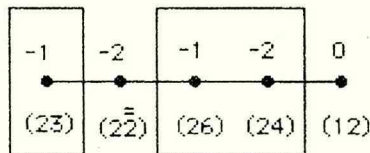
Si la curva d_i intersecta transversalmente un divisor D_j , la restricción a D_j del estallido σ_i de centro d_i es un estallido puntual de D_j . En el cuadro siguiente se resume el tipo de isomorfismo de cada divisor excepcional y el grafo dual de las curvas de la configuración [3.4] que contiene.

[3.5]

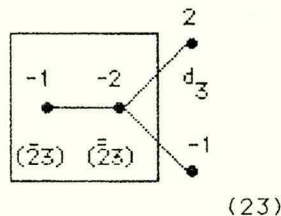
$$D_1 \cong R_3$$



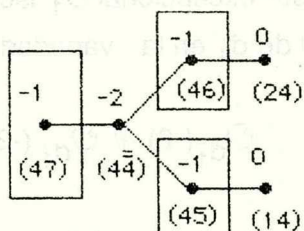
$$D_2 \cong R_3$$



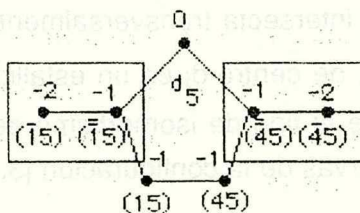
$$D_3 \cong R_2$$



$$D_4 \approx R_3$$



$$D_5 \approx R_4$$



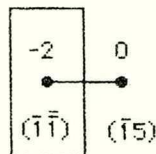
$$D_6 \approx R_4$$

(grafo igual al de D_5 ,reemplazando los índices 1 por 2, 5 por 6).

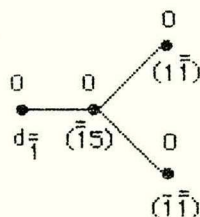
$$D_7 \approx R_2$$

(grafo igual al de D_3 , reemplazando los índices 2 por 4, 3 por 7)

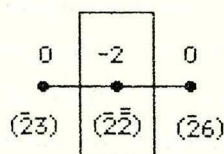
$$D_{\bar{1}} \approx F_2$$



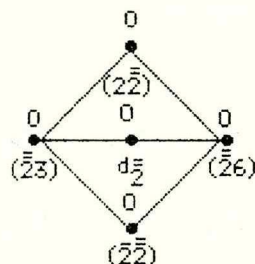
$$D_{\bar{1}} \cong F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



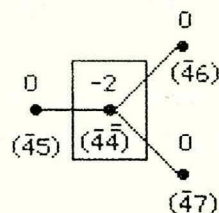
$$D_{\bar{2}} \cong F_2$$



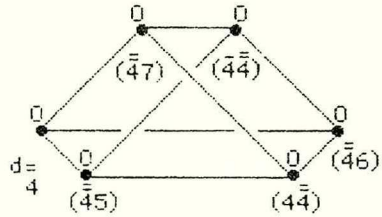
$$D_{\bar{2}} \cong F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



$$D_{\bar{4}} \cong F_2$$



$$D_{\frac{d}{4}} \cong F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$



Sea σ el morfismo de la resolución inmersa de S , composición de los estallidos puntuales y de centro las curvas indicadas. El transformado total $\sigma^{-1}(S)$ de S por σ se descompone como ciclo en suma del transformado estricto \hat{S} y de los divisores excepcionales con coeficientes enteros, coeficientes iguales a las multiplicidades genéricas de los divisores. Dichas multiplicidades son calculadas a partir del orden de los estallidos y de la multiplicidad del centro estallado. Sea m_i la multiplicidad de D_i , $i=1, 2, 4$; entonces la multiplicidad de D_i^- es $(m_i + 1)$ y la de $D_i^{\bar{-}}$ es $(2m_i + 2)$. El transformado total es:

[3.6]

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(S) = & \hat{S} - 2D_1 + 4D_2 + 6D_3 + 8D_4 + 12D_5 + 14D_6 + 10D_7 \\ & + 3D_1^- + 5D_2^- + 9D_4^- \\ & + 6D_1^{\bar{-}} + 10D_2^{\bar{-}} + 18D_4^{\bar{-}} \end{aligned}$$

Los cuadros [3.4], [3.5] y [3.6] completan la descripción de incidencias, autointersección y multiplicidades de la desingularización inmersa de S .

Referencias:

M.Artin. "On isolated rational singularities of surfaces"
(Amer.J.Math. 88, p. 129-136, 1966)

J.M.Aroca, H. Hironaka, J.L. Vicente. "Desingularization theorems"
(Mem. de Mat. 30, Madrid 1977)

H. Hironaka. "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field
of characteristic zero"
(Annals of Math. 79, p.109-326, 1964)

G. González Sprinberg. "Resolution de Nash des points doubles rationnels".
(Ann. Inst. Fourier 32, p.111-178, 1982).

G.N. Tyurina. "Absolute isolatedness of rational singularities".
(Func. Annal. Appl. 2, p.324-332, 1968).

Transformations des singularités.
Marcos Sebastiani.

1. Introduction.

Considerons la catégorie dont les objets sont les germes de fonctions analytiques:

$$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \quad (n > 0 \text{ fixé})$$

ayant un point critique isolé en 0. Si g en est un autre objet, un morphisme $T: f \longrightarrow g$ est un germe $T: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ d'application analytique finie tel que $f = g \circ T$.

Dans cette catégorie on peut définir deux foncteurs contravariants qui sont, essentiellement: l'un, la cohomologie complexe (en dimension n) de la fibre de Milnor; l'autre, le quotient de l'anneau local $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$ par l'idéal engendré par les dérivées partielles du germe. Les deux sont-à valeurs dans la catégorie des \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie. On les définit de façon précise:

a) Pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $\rho > 0$ assez petit respect de ε on considère:

$$H_{\varepsilon, \rho}^n = H^n(B_\varepsilon \cap f^{-1}(-\rho), \mathbb{C})$$

où B_ε est la boule de centre 0 et rayon ε dans \mathbb{C}^{n+1} .

Les propriétés de la fibration de Milnor nous disent que si $\varepsilon' > 0$, $\rho' > 0$ sont aussi convenablement petits, alors on a un isomorphisme canonique $H_{\varepsilon, \rho}^n = H_{\varepsilon', \rho'}^n$. Donc, on a un objet bien défini qu'on note $H^n(f)$ et qui est un

\mathbb{C} -espace vectoriel.

Le morphisme $T: f \longrightarrow g$ applique

$$B_{\varepsilon'} \cap f^{-1}(-\rho) \text{ dans } B_{\varepsilon} \cap g^{-1}(-\rho)$$

si ε' est assez petit respect de ε , et, donc, induit une application linéaire

$$T^* : H^n(g) \longrightarrow H^n(f).$$

Ceci définit le premier foncteur.

b) Soit Ω^* le faisceau gradué de germes de formes holomorphes dans \mathbb{C}^{n+1} . Soit

$$E(f) = \Omega_0^{n+1} / df \wedge \Omega_0^n$$

Le morphisme $T: f \longrightarrow g$ induit l'application évidente $\Omega_0^{n+1} \longrightarrow \Omega_0^{n+1}$ qui passe au quotient et définit une application linéaire.

$$T': E(g) \longrightarrow E(f)$$

On a ainsi le deuxième foncteur.

La correspondance $h \longrightarrow h \cdot dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n+1}$ ($h \in \mathcal{O}$) induit un isomorphisme:

$$\mathcal{O} / (\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_{n+1}) \xrightarrow{\sim} E(f)$$

Modulo cet isomorphisme, T' est induite par:

$$h \longrightarrow \text{Jac}(T) \cdot (h \circ T),$$

ce qui permet le calcul explicite du deuxième foncteur.

L'objet de cet article est de démontrer le théorème suivant et d'en donner quelques applications.

Théorème: Soit $T: f \longrightarrow g$ un morphisme.

Alors:

a) T' est injective et elle est bijective si et seulement si T est un isomorphisme.

b) T^* est injective et elle est bijective si et seulement si T est un isomorphisme.

L'auteur remercie J.P. Brasselet et R. Moussu par leurs observations éclairantes. Ce travail a pu être réalisé grâce aux séjours de l'auteur aux Universités de Dijon et Lille (ce dernier, comme chercheur associé au CNRS) en septembre-octobre-novembre 1988.

2. Demonstration du théoreme

a) D'après l'interpretation de T' donnée plus haut, un élément du noyau de T' peut être représenté par un germe h de fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\text{Jac}(T) \cdot (h^\circ T) = \sum_j a_j (\partial g / \partial z_j), a_j \in \mathcal{O}$$

La relation $f = g^\circ T$ entraîne:

$$1) \quad \text{Jac}(T) \cdot (h^\circ T) = \sum_j b_j [(\partial g / \partial z_j)^\circ T], b_j \in \mathcal{O}$$

Si Tr est l'homomorphisme trace associé à l'application T on a que:

$$c_j = \text{Tr} (b_j / \text{Jac}(T)) \in \mathcal{O} \quad (\text{voir [3]})$$

Alors, en divisant (1) par $\text{Jac}(T)$ et en appliquant Tr on obtient:

$$m h = \sum_j c_j (\partial g / \partial z_j)$$

où $m = \text{deg } T$. Donc, la classe de h dans

$$\mathcal{O} / (\partial g / \partial z_1, \dots, \partial g / \partial z_{n+1}) \cong E(g)$$

est nulle, ce qui prouve que T' est injective.

Si T' est surjective, alors la classe de $\text{Jac}(T)$ dans

$$\mathcal{O} / (\partial f / \partial z_1, \dots, \partial f / \partial z_{n+1}) \cong E(f)$$

n'est pas contenue dans l'idéal maximal.

Donc, $\text{Jac}(T)$ est un inversible de \mathcal{O} et, alors T est un isomorphisme.

b) On va prouver l'injectivité de T^* à partir de celle de T' en utilisant la théorie de Malgrange ([2] surtout le § 6).

Soit $\hat{\Omega}_0^p$ l'espace des p -formes formelles à l'origine de \mathbb{C}^{n+1} .

Soit

$$\Omega_f = \hat{\Omega}_0^{n+1} / d_f \wedge d \hat{\Omega}_0^{n-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et $\rho > 0$ très petit respect de ε . Soient:

$$X = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| < \varepsilon \text{ et } |f(z)| < \rho\}$$

et

$$X^- = \{z \in X : \text{Re } f(z) < 0\}$$

Soit $H_f = H_{n+1}(X, X^-, \mathbb{C})$. Les propriétés de la fibration de Milnor montrent que $H^n(f)$ s'identifie au dual de H_f .

Soit \langle, \rangle la forme bilinéaire définie par Malgrange:

$$\langle, \rangle : H_f \times \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}, \langle \Gamma, \omega \rangle = \int_{\Gamma} \tilde{e}^{\tau f} \omega$$

(\sim veut dire comportement asymptotique pour $\tau \longrightarrow +\infty$)

Ici $\mathbb{C}[[\tau]]$ est l'anneau commutatif intègre des séries formelles:

$$\sum_{k, \alpha} a_{k, \alpha} \tau^{-\alpha} \log^k \tau \quad (a_{k, \alpha} \in \mathbb{C})$$

où les α forment une suite de nombres ≥ 0 rationnels qui tendent vers $+\infty$ et $k=0, 1, 2, \dots$

Ω_f et \wedge sont des $\mathbb{C}[[\tau^{-1}]]$ modules et la forme \langle , \rangle respecte les structures de module. Ω_f est un module libre de rang μ , nombre de Milnor de f . Finalement,

$$\Omega_f / \tau^{-1} \Omega_f = E(f)$$

canoniquement.

On fait les mêmes constructions pour g : on choisit convenablement $\varepsilon' > 0$, $\rho' > 0$, on définit Ω_g, H_g , etc, en prenant la précaution de que $T(B_\varepsilon) \subset B_{\varepsilon'}$.

L'action de T sur les formes donne une application $\wedge_o^{n+1} \longrightarrow \wedge_o^{n+1}$

qui passe au quotient et définit:

$$\tilde{T}^* : \Omega_g \longrightarrow \Omega_f,$$

homomorphisme de $\mathbb{C}[[\tau^{-1}]]$ -modules.

\tilde{T}^* passe au quotient modulo $\tau^{-1}\Omega_g, \tau^{-1}\Omega_f$ et induit $T^* : E(g) \longrightarrow E(f)$. Par définition:

$$2) \quad \langle \Gamma, \tilde{T}^* \omega \rangle = \langle T^* \Gamma, \omega \rangle, \quad \Gamma \in H_f, \omega \in \Omega_g,$$

où T^* est l'action de T dans l'homologie.

Supposons choisies des \mathbb{C} -bases de H_f, H_g et des $\mathbb{C}[[\tau^{-1}]]$ -bases de Ω_f, Ω_g . Alors les formes bilinéaires considérées plus haut, pour f et pour g , définissent des matrices S_f, S_g à coefficients dans \wedge (qui sont respectivement, $\mu \times \mu$ et $\nu \times \nu$ si μ, ν sont les respectifs nombres de Milnor des germes f, g . Ces matrices ont un déterminant non-nul. ([2] § 6).

Soient A, B les matrices associées à T^* et \tilde{T}^* dans les bases choisies. Alors,

$$A^t S_g = S_f B$$

Par le théorème 1, T' est injective. Cela implique que la matrice B (à coefficients dans $\mathbb{C}[[\tau^{-1}]]$) a rang ν modulo l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[\tau^{-1}]]$. Alors, $\text{rang } B = \nu$. Donc, $\text{rang } (S f B) = \nu$. Alors $\text{rang } (A^t S_g) = \nu$. Donc, $\text{rang } A = \text{rang } A^t = \nu$

Ceci implique que T^* est surjective. Alors, T^* est injective.

Si T^* est bijective, on a $\mu = \nu$. Donc, par le théorème 1, T' est bijective. Encore par le théorème 1, T est un isomorphisme.

3. Applications On a d'abord le suivant:

Corrolaire Soit $T: f \longrightarrow G$ un morphisme. Alors,

- La monodromie de g s'injecte dans celle de f .
- Le nombre de Milnor de g est inférieur ou égal à celui de f et l'égalité a lieu si et seulement si T est un isomorphisme.
- Le polinôme caractéristique de la monodromie de g divise celui de la monodromie de f .

Démonstration.

- découle du fait que T^* commute avec les monodromies.
- est immédiat et (c) résulte de (a).

Exemple Une condition nécessaire pour que on puisse écrire f sous la forme:

$$f = g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_{n+1}^2$$

où les g_j sont des germes analytiques en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $g_j(0)=0$, est que la monodromie de f possède la valeur propre $(-1)^{n+1}$.

En effet, on a un morphisme $T: f \longrightarrow g$ où

$$T = (g_1, \dots, g_{n+1})$$

et

$$g = W_1^2 + \dots + W_{n+1}^2$$

Suivant une idée de R. Moussu, on peut introduire une relation d'ordre entre les germes analytiques ayant un point critique isolé à l'origine de \mathbb{C}^{n+1} .

On écrit $f > g$ si il existe un morphisme $T: f \longrightarrow g$.

Cette relation est une relation d'ordre partiel entre les classes d'isomorphisme de germes. En effet, d'après le corollaire, si $T: f \longrightarrow g$ et $S: g \longrightarrow f$ sont des morphismes, alors f et g ont le même nombre de Milnor et T, S sont des isomorphismes.

En plus, il résulte du même corollaire que pour tout f il existe g minimal tel que $f > g$.

Voici un exemple de germe minimal:

$$f = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$$

où les a_j sont des nombres premiers tous différents. Dans ces conditions, le polynôme caractéristique de la monodromie de f est un polynôme cyclotomique, donc irréductible sur les rationnels. (voir [1]). Par le corollaire, f est minimal, puisque le polynôme caractéristique d'une monodromie est à coefficients rationnels (voir [1]).

References

- [1] E. Brieskom. Manuscripts Math.2 (1970). 103-161.
- [2] B. Malgrange. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 7 (1974) 405-430.
- [3] M. Sebastiani. Ann. de l'Inst. Fourier 30.1 (1980) 65-90.

Universidad Federal de Río Grande del Sur
Av. Bento Gonçalves 9500
91500 Porto Alegre R.S. Brasil

Tangential polynomials and elliptic solitons

Armando Treibich

Introduction

In the mid seventies, several people succeeded in integrating different non-linear partial differential equations by algebro-geometric methods. It was shown how to associate a class of solutions of the Korteweg-de Vries equation:

$$(KdV) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{1}{4} (6u \frac{\partial}{\partial x} u - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u) = 0$$

to any hyperelliptic Riemann Surface ([MK-VM], [L], [D-M-N]). This was later generalized by Krichever ([K-1], see also [S-W]ch.6) who associated a class of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation:

$$(KP) \quad \frac{3}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{1}{4} (6u \frac{\partial}{\partial x} u - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u) \right\} = 0$$

to any integral projective curve (i.e.: any compact Riemann Surface with at most a finite number of singularities). At the same time, following earlier work of Calogero ([C]) there began a systematic study of the rational and doubly periodic solutions of the K-P equation. These solutions are called, respectively, rational and elliptic solitons and have the type:

$$u(x, y, t) = 2 \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(x - x_i(y, t))$$

, \mathcal{P} being the Weierstrass function associated to Λ , the lattice of periods of the soliton u (in the rational case $\mathcal{P}(x) = \frac{1}{x^2}$). Once we fix Λ , the number n is uniquely determined by u and is called the degree of the soliton u . As suggested by Kruskal ([Kru]) the motions of the poles of u were completely identified with the Hamiltonian flows of a system of n particles on the line, having as Hamiltonian function ([C], [M], [A-MK-M], [O-P], [K-2]):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \mathcal{P}(x_i - x_j)$$

Following the Hamiltonian system approach, Krichever [K-2] associated to a generic elliptic solution u of KP of degree n , a Calogero-Moser type matrix $L(u)$ with elliptic functions as coefficients. The characteristic polynomials of these Krichever matrices define smooth curves $\Gamma(u)$, naturally equipped with a projection of degree n onto the elliptic curve \mathbb{C}/Λ . Krichever shows that the eigenvalue function of the matrix $L(u)$ restricts to a particular rational function on the smooth curve $\Gamma(u)$ [K-2, p.285 (25)]. We prove in 1.10. that the existence of such a rational function on any algebraic curve Γ is a necessary and sufficient condition for a projection $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ to be a tangential cover (see also [K-2, p.289]). The characteristic polynomials constructed by Krichever are all the tangential polynomials (2.2.). In this work we state a simple criterion for a polynomial to be tangential (2.2.) and give the explicit construction of the corresponding minimal tangential cover (3.8.). We also give two other constructions of such polynomials. The first one is by induction on the degree n (4.5.) and the other one in terms of the elliptic Baker-Akhiezer function (4.7.).

Here is how we proceed:

- §1 It can be shown that any elliptic soliton is associated to a pointed algebraic curve (Γ, p) whose canonical image in the jacobian variety $\text{Jac}(\Gamma)$ is tangent at the origin to an elliptic curve X . Furthermore, this amounts to say that there exists a projection $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ ($\pi(p) = q$) for which the canonical images of Γ and X in $\text{Jac}(\Gamma)$ are tangent at the origin (see [T] and [T-V]). The latter projection π , called "tangential cover", is defined and studied at once for any algebraic curve X . It is characterized by the existence of a meromorphic function k on Γ ($k \in K(\Gamma)$) having specific polar developments at the points of the fiber $\pi^*(q)$.
- §2 We then view the meromorphic function k as an element of the finite field extension $K(\Gamma)/K(X)$, study the properties of its characteristic polynomial $P_k(T)$ and call "tangential" any polynomial having the same kind of properties. As a by-product we get the following existence restrictions, whenever the "target" X is a smooth curve of genus > 1 : "let $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$, ($\pi(p) = q$) be a tangential cover of degree > 1 and

suppose that X is a smooth curve of genus > 1 . Then:

- i) X is hyperelliptic and q is a Weierstrass point;
- ii) Γ is hyperelliptic and p is not a Weierstrass point;
- iii) degree $\pi = 2$ ”.

§3 Conversely, starting from any tangential polynomial $P(T)$, we reconstruct the tangential cover $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ and the corresponding meromorphic function k , whose characteristic polynomial is equal to $P(T)$.

§4 Having made clear the usefulness of the tangential polynomials we develop an inductive algorithm to calculate them, whenever X is a curve of arithmetic genus 1 (i.e.: elliptic, rational with 1 cusp or rational with 1 node).

Final remarks:

All the results given here were later recovered and fully generalized in [T-V], by means of an algebraic surface approach inspired by the results of §3. The advantage of working with tangential polynomials instead, (besides its more analytical flavor) stems from the fact that we get explicit equations for the tangentials covers to work with.

§1 Tangential covers

Let me first recall the basic notations and results about algebraic curves assumed to be known.

1.1. By an algebraic curve we mean a compact reduced and irreducible 1-dimensional complex analytical variety. In other words, a curve is a compact Riemann Surface possibly having a finite number of singularities. Let C be a curve and C° the open dense subset of smooth points of C . The arithmetic genus of C is equal to $h^1(C, \mathcal{O}_C)$. We denote by $K(C)$ the field of meromorphic functions on C , $\text{Jac } C$ the jacobian variety of C (i.e.: the moduli space of isomorphic classes of line bundles of degree zero) and ω_C the sheaf of regular differential forms (in the sense of Rosenlicht [R], see also [S]). The sheaf ω_C is isomorphic to the dualizing sheaf of C .

1.2. The choice of a smooth point $p \in C^\circ$ enables us to define a closed immersion, $A_C: C^\circ \rightarrow \text{Jac } C$, called the Abel map. It associates to any point p' of C° the isomorphism class of the line bundle $\mathcal{O}_C(p' - p)$. The tangent space to $\text{Jac } C$ at the origin is $H^1(C, \mathcal{O}_C)$. Let us identify by duality $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ with $H^0(C, \omega_C)^*$ and $\text{Jac } C$ with $H^0(C, \omega_C)^* / H_1(C^\circ, \mathbf{Z})$. Then the map which associates to any p' in C° the linear form on $H^0(C, \omega_C)$, $\omega \mapsto \int_p^{p'} \omega$, is well defined modulo $H_1(C^\circ, \mathbf{Z})$ and equal to the Abel map A_C . Let T_p be the tangent space to C at p and dA_C the derivative of A_C . The image $dA_C(T_p) \subset H^1(C, \mathcal{O}_C)$ corresponds by duality to the hyperplane $H^0(C, \omega_C(-p))$.

1.3. Let Γ and X be two curves and $\pi: \Gamma \rightarrow X$ a finite morphism. Naturally associated with π we have the following homomorphisms:

- a) $\pi^*: \text{Jac } X \rightarrow \text{Jac } \Gamma$, which to any line bundle L of degree zero over X , associates the class of $\pi^*(L)$;
- b) if π is flat (for example when X is smooth) we can also define the generalized Albanese map $\text{Alb}(\pi): \text{Jac } \Gamma \rightarrow \text{Jac } X$, which to any line bundle M of degree zero over Γ , associates the class of $\det(\pi_*(M)) \otimes \det(\pi_*(\mathcal{O}_\Gamma))^{-1}$.

We easily see that $\text{Alb}(\pi) \circ \pi^* : \text{Jac } X \longrightarrow \text{Jac } X$ is the multiplication by the degree of π . Hence π^* is an immersion and $\text{Alb}(\pi)$ a surjection.

1.4. The derivative at the origin of π^* is the natural map $\pi^* : H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$, acting on the cohomology. This linear map is the dual of $\text{Tr}_\pi : H^0(\Gamma, \omega_\Gamma) \longrightarrow H^0(X, \omega_X)$, compatible with the usual trace of differential forms as defined on the smooth part of Γ . The derivative at the origin of $\text{Alb}(\pi)$, denoted $d\text{Alb}(\pi) : H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$, defines an isomorphism between $\pi^*(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ and $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. In fact we know that the linear map $d\text{Alb}(\pi) \circ \pi^*$ is the multiplication by the degree of π .

1.5. Let $\pi : \Gamma \longrightarrow X$ be a finite morphism and choose two points p in Γ and q in X . We say that these data make a "pointed morphism", denoted $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$ if and only if:

1) $\pi(p) = q$.

2) p and q are smooth points.

The pointed curves (Γ, p) and (X, q) define the Abel maps $A_\Gamma : \Gamma^\circ \longrightarrow \text{Jac } \Gamma$ and $A_X : X^\circ \longrightarrow \text{Jac } X$. The composed morphism $i_\pi = \pi^* \circ A_X$ is a local immersion of X° into $\text{Jac } \Gamma$ whose image contains the origin of $\text{Jac } \Gamma$.

Definition 1.6.

A pointed morphism between two curves of arithmetic genus > 0 , $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$, is called a "tangential cover" if and only if $i_\pi(X^\circ)$ is tangent to $A_\Gamma(\Gamma^\circ)$ at the origin of $\text{Jac } \Gamma$.

Proposition 1.7.

Let $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$ be a pointed morphism and $j : \bar{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ a partial desingularization (i.e.: j is a birational morphism).

1) If π is tangential then the composed pointed morphism

$$\bar{\pi} = \pi \circ j : (\bar{\Gamma}, j^{-1}(p)) \longrightarrow (X, q)$$

is tangential.

2) If π is tangential and flat then π is étale at p .

3) When π is flat the following properties are equivalent:

3.i) π is tangential;

3.ii) $\pi^*(\text{Jac } \Gamma)$ is tangent to $A_\Gamma(\Gamma^\circ)$ at the origin of $\text{Jac } \Gamma$.

Proof

1) The maps $A_\Gamma : \bar{\Gamma}^\circ \longrightarrow \text{Jac } \bar{\Gamma}$ and $i_\pi : \text{Jac } X \longrightarrow \text{Jac } \bar{\Gamma}$ factorize through the surjective homomorphism $j^* : \text{Jac } \Gamma \longrightarrow \text{Jac } \bar{\Gamma}$. It follows that $\bar{\pi}$ is tangential whenever π is tangential.

2),3) Let T_p (resp.: T_q) be the tangent space to Γ at p (resp.: to X at q). We know that $\text{Alb}(\pi) \circ A_\Gamma = A_X \circ \pi$. Furthermore, the diagram below is commutative

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T_p & \xrightarrow{dA_\Gamma} & H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) & \xleftarrow{\pi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_X) \\ d\pi \downarrow & & d\text{Alb}(\pi) \downarrow & & \\ T_q & \xrightarrow{dA_X} & H^1(X, \mathcal{O}_X) & & \end{array}$$

It is clear that 3.i) implies 3.ii). Conversely let us start from 3.ii) which says that $dA_\Gamma(T_p)$ is contained in $\pi^*(H^1(X, \mathcal{O}_X))$. The restriction of $d\text{Alb}(\pi)$ to the latter vector space being an isomorphism we deduce that $d\text{Alb}(\pi) \circ dA_\Gamma$ is injective. Moreover since $d\text{Alb}(\pi) \circ dA_\Gamma = dA_X \circ d\pi$ it follows that $d\pi : T_p \longrightarrow T_q$ is an isomorphism and π is étale at p which proves 2). We also remark that $dA_\Gamma(T_p)$ and $\pi^* \circ dA_X(T_q)$ have same image under $d\text{Alb}(\pi)$. By hypothesis these two lines are contained in $\pi^*(H^1(X, \mathcal{O}_X))$, on which $d\text{Alb}(\pi)$ is injective. Hence

$$(2) \quad \pi^* \circ dA_X(T_q) = dA_\Gamma(T_p)$$

Since $\pi^* \circ dA_X = di_\pi$, the last equation implies that $i_\pi(X^\circ)$ is tangent to $A_\Gamma(\Gamma^\circ)$ at the origin of $\text{Jac } \Gamma$. •

1.8. Let $\pi_i : (\Gamma_i, p_i) \rightarrow (X, q)$ ($i = 1, 2$) be two tangential covers. By a birational morphism from π_1 to π_2 we mean a pointed birational morphism $u : (\Gamma_1, p_1) \rightarrow (\Gamma_2, p_2)$ such that $\pi_2 \circ u = \pi_1$. We say that π_2 is "smaller" than π_1 if there exists a birational morphism from π_1 to π_2 . The equivalence relation generated by the latter couples (π_1, π_2) is called "birational" equivalence class of tangential covers. Let $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ be a tangential cover and denote, $[\pi]$ its birational equivalence class and $j : (\tilde{\Gamma}, p) \rightarrow (\Gamma, p)$ the desingularization of Γ . Then (1.7.1)) $\tilde{\pi} = \pi \circ j$ is a tangential cover and π is smaller than $\tilde{\pi}$. We will say that π is "minimal" if and only if π is smaller than any other element in $[\pi]$.

Lemme 1.9.

Let C be a curve, p a smooth point of C and $A_C : C^\circ \rightarrow \text{Jac } C$ the corresponding Abel map. Let

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C(p)} \rightarrow \mathcal{O}_p \rightarrow 0$$

be the canonical exact sequence and $\delta : \mathcal{O}_p \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C)$ the coboundary map of the associated long exact cohomology sequence. Then $\delta(\mathcal{O}_p) = dA_C(T_p)$.

Proof

Let λ be a local coordinate of C at p and $[\lambda^{-1}]_p$ the class of λ^{-1} in $H^0(C, \mathcal{O}_p(p))$. The points of the tangent line $dA_C(T_p)$ can be viewed as linear forms on $H^0(C, \omega_C)$ (see 1.2.), vanishing on the hyperplane

$$H^0(C, \omega_C, (-p)) = \{\omega \in H^0(C, \omega_C) / \text{Res}_p(\frac{\omega}{\lambda}) = 0\}$$

It is also known that for any $\omega \in H^0(C, \omega_C)$, $\text{Res}_p(\frac{\omega}{\lambda}) = \delta([\lambda^{-1}]_p) \cup \omega$ where " \cup " is the cup product identifying $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ with the dual of $H^0(C, \omega_C)$ ([S]ch.IV,3-10).

It follows that $\delta([\lambda^{-1}]_p)$ generates $dA_C(T_p)$. •

Remark

From now on we will always identify the tangent space T_p to C at $p \in C^\circ$, with its image $dA_C(T_p) = \delta(\mathcal{O}_p(p))$. As a final result for this section we give a criterion for a pointed morphism $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$ to be tangential. Choose a local coordinate z of X at q and denote Γ_q the fiber of Γ with respect to π . The latter is a divisor of Γ and we have :

Theorem 1.10. ("tangency" criterion).

A pointed morphism $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$ is a tangential cover if and only if there exists a meromorphic function k on Γ , holomorphic on $\Gamma - \Gamma_q$, having over a neighborhood of q the following property: $k + \pi^*(z^{-1})$ is defined at every point different from p and has at p a simple pole.

Proof

Consider the commutative diagram of exact sequences of sheaves

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Gamma & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Gamma(p) & \longrightarrow & \mathcal{O}_p(p) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Gamma & \longrightarrow & \mathcal{O}_\Gamma(\Gamma_q) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\Gamma_q}(\Gamma_q) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

From the corresponding exact cohomology sequences we get the following commutative diagram:

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Let λ be a local coordinate of Γ at p . We denote $[\lambda^{-1}]_p$ and $[z^{-1}]_q$ the classes of λ^{-1} and z^{-1} in $H^0(\Gamma, \mathcal{O}_p(p))$ and $H^0(X, \mathcal{O}_q(q))$ respectively. Since the arithmetic genera of X and Γ are > 0 we know from lemma 1.9. that

$$(5) \quad \begin{cases} t_p = \delta([\lambda^{-1}]_p) \\ t_q = \delta([z^{-1}]_q) \end{cases}$$

generate the tangent spaces T_p and T_q respectively.

The tangency condition amounts to claim the existence of a constant $\alpha \neq 0$ such that

$$(6) \quad \alpha t_p = \pi^*(t_q) \quad .$$

Let us also call $[\lambda^{-1}]_p$ the image in $H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma_q}(\Gamma_q))$ of $[\lambda^{-1}]_p \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_p(p))$.

The equality (6) can be written using (5) above as:

$$(7) \quad \alpha \delta([\lambda^{-1}]_p) = \pi^* \circ \delta([z^{-1}]_q) \quad .$$

The commutativity of the diagram (4) implies the equivalence of (7) with

$$(8) \quad \delta(\alpha[\lambda^{-1}]_p - \pi^*([z^{-1}]_q)) = 0 \quad .$$

Consider now the middle exact line in (4) above. The equality (8) is equivalent to the existence of a meromorphic function $k \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma}(\Gamma_q))$, such that its class in $H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma_q}(\Gamma_q))$ is $\alpha[\lambda^{-1}]_p - \pi^*([z^{-1}]_q)$. This means that $k + \pi^*(z^{-1})$ has as polar part over Γ_q , the element $\alpha[\lambda^{-1}]_p$. Hence, the equality (8) is equivalent to the existence of $k \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma_q}(\Gamma_q))$ having the required properties. •

Remark 1.11.

The function k of 1.10. is uniquely determined (up to an additive constant) by the tangent vector

$$t_q = \frac{\partial}{\partial z}|_q = [z^{-1}]_q \quad .$$

§2 Tangential polynomials

Proposition 2.1..

Let z be a local coordinate of X at q , $\pi : (\Gamma, p) \longrightarrow (X, q)$ a tangential cover of degree n , $k \in K(\Gamma)/K(X)$ the meromorphic function associated to π by 1.10. and denote:

$$P_k(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j(k) T^{n-j}$$

the characteristic polynomial of k with coefficients in $K(X)$. Then:

1) the polynomial $P_k(T)$ has the following property:

all the coefficients of $zP_k(T - z^{-1})$ are holomorphic at q .

2) if π is flat, the coefficients $\alpha_j(k), j = 1, \dots, n$, are holomorphic on $X - \{q\}$.

Proof

1) We know from 1.10. that $k + \pi^*(z^{-1})$ has a simple pole at p and it is holomorphic outside p over the inverse image of a suitable neighborhood of q . Hence the symmetric functions in $k + \pi^*(z^{-1})$ with respect to the projection $\pi : \Gamma \rightarrow X$ have, at worst, a simple pole at the point q . These functions are, up to a sign, the coefficients of the characteristic polynomial of $k + \pi^*(z^{-1})$ which is equal to

$$P_{k+z^{-1}}(T) = P_k(T - z^{-1})$$

It follows that all the coefficients of $zP_k(T - z^{-1})$ are holomorphic at q .

2) The function $k \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma_q}(\Gamma_q))$ is holomorphic outside Γ_q and has as principal parts at Γ_q :

$$[k]_{\Gamma_q} = \alpha[\lambda^{-1}]_p - [\pi^*(z^{-1})]_{\Gamma_q}$$

The meromorphic functions $\text{Tr}_{\pi}(k^j), j = 1, \dots, n$, are then bounded and holomorphic on $X - \{q\}$ when π is flat. It follows from Newton's formulas relating the traces $\{\text{Tr}_{\pi}(k^j); j = 1, \dots, n\}$ and the symmetric functions in k with respect to π , that $\alpha_j(k) (j = 1, \dots, n)$ is meromorphic on X and bounded (indeed holomorphic) on $X - \{q\}$.

•

Definition 2.2.

Let $n \geq 1$ be an integer, X a curve of arithmetic genus > 0 , q a smooth point of X and z a local coordinate of X at q . Let $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j}$ be an element of $K(X)[T]$ whose coefficients are holomorphic on $X - \{q\}$. We call

$P(T)$ a "tangential polynomial" (with respect to z) if and only if all the coefficients of $zP(T - z^{-1})$ are holomorphic at q (2.1.1)).

Remarks 2.3.

- 1) Let $\pi : \Gamma \rightarrow X$ be a finite morphism between two integral curves and suppose X is smooth. Then any \mathcal{O}_Γ -module is flat over X if and only if it is a torsion free \mathcal{O}_Γ -module. In particular, since Γ is reduced, \mathcal{O}_Γ is flat over X and π is flat.
- 2) The condition 2.1.1) is linear and it only depends upon the tangent vector $t_q = [z^{-1}]_q$. The set of all tangential polynomials of degree n is therefore a linear affine subspace of $K(X)[T]$ and will be denoted $\Theta(n, X, t_q)$.
- 3) Let $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ be a tangential cover and $P_k(T) \in K(X)[T]$ the characteristic polynomial associated to π by 2.1..If π is flat $P_k(T)$ is tangential.

Lemma 2.4. Let $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j}$ be a tangential polynomial. Then for all $j = 1, \dots, n$ the coefficient α_j has a pole of order $\leq j$. More precisely, α_1 is constant and for all $j = 2, \dots, n$ we have

$$z^j \alpha_j|_{z=0} = \binom{n}{j} (1 - j) .$$

Proof

Our hypothesis implies that

$$R(T) = zP(T - z^{-1}) = zT^n + \sum_{l=1}^n a_l T^{n-l}$$

has all its coefficients holomorphic at q . Furthermore, since $P(T) = zR(T + z^{-1})$ we get the following developments for the coefficients α_j ($j = 1, \dots, n$) of $P(T)$:

$$(9) \quad \alpha_j = z^{-j} \left[\binom{n}{j} + \sum_{1 \leq l \leq j} a_l \binom{n-1}{j-1} z^{l-1} \right] .$$

We also know by hypothesis that α_1 is holomorphic on $X - \{q\}$ and X has an arithmetic genus > 0 . Thus α_1 is a constant function, $\alpha_1(o) = -n$ and plugging this value in (9) above we get

$$z^j \alpha_j|_{z=0} = \binom{n}{j} (1 - j)$$

Theorem 2.5.

Let X be a curve, n an integer and $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ a tangential cover of degree n . Furthermore, let us suppose that X is smooth or (more generally 2.3.1)) that $\pi : \Gamma \rightarrow X$ is flat. Then

- 1) if $n > 2$, X is a curve of arithmetic genus $= 1$, i.e.: X is an elliptic curve, a plane cubic with a node or a plane cubic with a cusp.
- 2) if $n = 2$, X and Γ are hyperelliptic curves and q is a Weierstrass point of X . Furthermore if the arithmetic genus of X is > 1 , the point p can not be a Weierstrass point of Γ .

Proof

Let $P(T) = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j}$ be the tangential polynomial associated to π (2.3.3)). For any $j = 2, \dots, n$ the coefficient α_j is holomorphic on $X - \{q\}$ and has a pole of order j (2.4.). Hence:

- 1) if $n > 2$, X has arithmetic genus 1.
- 2) if $n = 2$, X is an hyperelliptic curve and q is a Weierstrass point of X . In case $n = 2$ the function $k \in K(\Gamma)$, whose characteristic polynomial is $P(T)$, defines a projection $k : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}^1$ of degree 2. Thus Γ is hyperelliptic.

Moreover, let X have an arithmetic genus > 1 . Since $\pi : \Gamma \rightarrow X$ is flat, there exists a natural immersion of $\text{Jac } X$ into $\text{Jac } \Gamma$ (see 1.3.b)). It follows that Γ also has an arithmetic genus > 1 and there is a unique hyperelliptic involution of Γ , i.e.: the one defined by the projection $k : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}^1$ above. Consider now the morphism $\pi : \Gamma \rightarrow X$. It is étale at p (1.7.2)) as well as at $\Gamma_q - \{p\}$, and the meromorphic function k has a pole at each point of Γ_q . Hence k is étale at p and p is not a Weierstrass point of Γ •

2.6 Let us now study the case $n = 2$ of 2.5. Let X be a hyperelliptic curve of arithmetic genus $g \geq 1$ and $q \in X^\circ$ a smooth Weierstrass point of X . Choose a function \mathcal{P} holomorphic on $X - \{q\}$ and having at q a pole of order 2. Let us denote $P(T) = T^2 + aT - \mathcal{P} + b$, where a and b are constants and suppose that X is not a rational curve (i.e.: $\tilde{X} \neq \mathbf{P}^1$, where \tilde{X} is the normalization of X). The equation $\{P = 0\}$ defines a divisor Γ' of $\mathbf{P}^1 \times X$ and Γ' is reduced and irreducible. Otherwise we would have a meromorphic function on \tilde{X} having a simple pole at q and holomorphic elsewhere, and \tilde{X} should be isomorphic to \mathbf{P}^1 . The singular curve Γ' has a node p' over q . Let $j : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ be the desingularization of Γ' at p' , $k : \Gamma \rightarrow \mathbf{P}^1$ the restriction to Γ of the natural projection $\mathbf{P} \times X \rightarrow \mathbf{P}$ and choose $p \in \Gamma$, one of the points over q . It follows from the criterion 1.10. that the pointed morphism $\pi \circ j : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ is tangential (and even minimal, see 3.8.). The arithmetic genus of Γ is $2g$.

Let us suppose now that X is a rational curve. Then X has two unibranch Weierstrass points: the point q and another one denoted w . If the discriminant $\Delta = a^2 + 4(\mathcal{P} - b)$ does not vanish at w we have a flat minimal tangential cover of degree 2, $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$, as before. But if $\Delta(w) = 0$ the divisor Γ' (defined by the equation $P = 0$) is no longer irreducible and our definition of tangential cover does not apply.

§3 Tangential equations

To any flat tangential cover $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ we associate (1.10.) a function $k \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\Gamma_q))$ whose characteristic polynomial $P_k(T)$, is "tangential". Conversely, we are going to prove that if X is smooth, any tangential polynomial $P(T)$, corresponds to a tangential cover $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$. More precisely, starting from $P(T)$ we will construct a minimal (see 1.8.) tangential cover whose associated characteristic polynomial is equal to $P(T)$. As a by-product we will prove that any tangential cover $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ factorizes through a particular ruled surface $S \rightarrow X$. Furthermore, the image of (Γ, p) in S is a minimal tangential cover (3.8.).

3.1. We will assume, hereafter, that X is a smooth curve of genus ≥ 1 . A ruled surface

over X is an algebraic surface S together with a surjective morphism $\pi_S : S \rightarrow X$ whose fibers are isomorphic to \mathbf{P}^1 . Let \mathcal{E} be a rank 2 vector bundle over X and consider the projective bundle $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. It is a surface endowed with a natural projection $\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ such that the fiber over any point $x \in X$ is canonically isomorphic to the projective line $\mathbf{P}(\mathcal{E}_x)$. For any ruled surface R there exists a rank 2 vector bundle \mathcal{E} such that R is isomorphic to $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ over X (c.f. [H] V,2.2. or [B]).

3.2. Let $\pi : R \rightarrow X$ be a ruled surface and R_q the fiber of π over the point $q \in X$. Let \mathcal{E} be a rank 2 vector bundle over X such that R is isomorphic to $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. A point p_o of R_q corresponds to a surjective homomorphism $u_{p_o} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_q(q)$, where $\mathcal{O}_q(q)$ is the sky-craper sheaf which is zero outside q and has stalk \mathbf{C} at q . The kernel $\mathcal{E}' = \ker(u_{p_o})$ is a locally free sheaf of rank 2 and the inclusion $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$ naturally defines a birational transformation over X , $\text{elm}_{p_o} : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}')$. This map, called "the elementary transformation of center p_o ", is an isomorphism outside the fiber over $q \in X$ (c.f.: [H] V,5.7.1.).

3.3. Let $\mathbf{P} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ and denote $p_o = (\infty, q) \in \mathbf{P} \times X$. Let $n \geq 1$ be an integer, z a local coordinate of X at q and t_q the tangent vector $[z^{-1}]$. For any tangential polynomial $P(T) \in \Theta(n, X, t_q)$, we denote $\Gamma_o(P)$ the divisor of $\mathbf{P} \times X$ defined by the equation $P = 0$.

Lemma 3.4. *Let us suppose X is a smooth curve. Then for any $P \in \Theta(n, X, t_q)$, the divisor $\Gamma_o(P) \subset \mathbf{P} \times X$ is an integral curve.*

Proof

Let us denote by $T : \mathbf{P} \times X \rightarrow \mathbf{P}$ the projection $((a : b), q') \mapsto \frac{a}{b}$ so that the couple (T^{-1}, z) defines a local chart of $\mathbf{P} \times X$ centered at $p_o = (\infty, q)$. The divisor $\Gamma_o(P)$ is defined by the equation

$$P = T^n + \sum_{j=1}^n \alpha_j T^{n-j} = 0$$

and we know that $z^j \alpha_j$ is holomorphic at q and has the value (2.5.):

$$z^j \alpha_j|_{z=0} = \binom{n}{j} (1-j) \quad j = 1, \dots, n .$$

It follows that $\Gamma_o(\mathbf{P})$ is defined locally at $p_o = (\infty, q)$ by the equation

$$(10) \quad z^n T^{-n} \mathbf{P} = z^n + \sum_{j=1}^n (z^j \alpha_j) z^{n-j} T^{-j} = 0$$

and the tangent space to $\Gamma_o(\mathbf{P})$ at p_o is given by the equation

$$(11) \quad z^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (1-j) z^{n-j} T^{-j} = 0 .$$

The left side of (11) above is equal to

$$(12) \quad ((1-n)T^{-1} + z)(T^{-1} + z)^{n-1} = 0 .$$

Let Γ'_o be the reduced irreducible component of $\Gamma_o(\mathbf{P})$ whose tangent space at p_o contains the line $(1-n)T^{-1} + z = 0$ (see (12)). Let us denote $k : \Gamma'_o \rightarrow \mathbf{P}$ and $\pi : \Gamma'_o \rightarrow X$ the restrictions to Γ'_o of the projections $T : \mathbf{P} \times X \rightarrow \mathbf{P}$ and $\mathbf{P} \times X \rightarrow X$. Let d be the degree of $\pi : \Gamma'_o \rightarrow X$. Since the projection $\Gamma_o \rightarrow X$ has degree n all we need to prove is that $n = d$. Let $P_o(T) = T^d + \sum_{l=1}^d \alpha_l^o T^{d-l}$ be the characteristic polynomial of k . The coefficients α_l^o ($l = 1, \dots, d$) are holomorphic on $X - \{q\}$ and $P_o(T)$ divides $P(T)$. It follows that α_l^o ($l = 1, \dots, d$) has a pole of order $\leq l$. Let $\text{lf}(P_o)$ denote the leading form in the development of $z^d T^{-d} P_o(T) = z^d + \sum_{l=1}^d (z^l \alpha_l^o) z^{d-l} T^{-l}$ as a formal series in the variables $\{T^{-1}, z\}$. The equation $\text{lf}(P_o) = 0$ defines the tangent space to Γ'_o at $p_o \in \mathbf{P} \times X$, which we have assumed to contain the line $(1-n)T^{-1} + z = 0$. Since $P_o(T)$ divides $P(T)$ we finally deduce that $\text{lf}(P_o) = ((1-n)T^{-1} + z)(T^{-1} + z)^{d-1}$ and that the polar part of α_1^o is equal to $(n-d)z^{-1}$. Hence $n = d$. Otherwise α_1^o would define an isomorphism between X and \mathbf{P}^1 . •

3.5. Let p_1 be a point of $\text{elm}_{p_o}(\mathbf{P} \times X)$ over q and denote $S(p_o, p_1)$ the ruled surface $\text{elm}_{p_1}(\text{elm}_{p_o}(\mathbf{P} \times X))$. The composed birational map $\text{elm}_{p_1} \circ \text{elm}_{p_o} : \mathbf{P} \times X \dashrightarrow S(p_o, p_1)$, denoted elm_{p_1, p_o} , is an isomorphism over $X - \{q\}$.

Theorem 3.6.

There exist two points, $p_1 \in \text{elm}_{p_0}(\mathbf{P} \times X)$ and $p \in S(p_0, p_1)$, over $q \in X$ such that for any integer $n \geq 1$ and any tangential polynomial $P \in \Theta(n, X, t_q)$, the strict transform by elm_{p_1, p_0} of $\Gamma_0(P) \subset \mathbf{P} \times X$, denoted $\Gamma(P)$, has the following properties:

- 1) $\Gamma(P)$ is an integral curve of $S(p_0, p_1)$ and $p \in \Gamma(P)$;
- 2) the restriction to $\Gamma(P) \subset S(p_0, p_1)$ of the rational function $T \circ \text{elm}_{p_1, p_0}^{-1} : S(p_0, p_1) \dashrightarrow \mathbf{P}$ satisfies the tangency criterion 1.10., with respect to the natural projection $\pi : (\Gamma(P), p) \longrightarrow (X, q)$. In particular $\pi : (\Gamma(P), p) \longrightarrow (X, q)$ is a tangential cover.

Proof

Let E denote a \mathbf{C} -vector space of dimension 2, $\{e_1, e_2\}$ a basis of E (i.e.: $E = \mathbf{C} \cdot e_1 \oplus \mathbf{C} \cdot e_2$) and \mathcal{E} the trivial vector bundle $E \times X$. We identify \mathcal{E} with its sheaf of sections $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. The ruled surface $\mathbf{P} \times X$ is naturally isomorphic to $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ and the point $p_0 = (\infty, q) \in \mathbf{P} \times X$ corresponds to the sheaf homomorphism $u_{p_0} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_q(q)$, whose kernel is canonically isomorphic to $\mathcal{O}_X(-q) \oplus \mathcal{O}_X$. Let us denote \mathcal{V} the vector bundle whose sheaf of sections is equal to $\ker(u_{p_0})$. We can define, by means of the natural inclusion $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{E}$, a birational map

$$\text{elm}_{p_0} : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{V})$$

which we are going to make precise.

The basis $\{e_1, e_2\}$ of $H^0(X, \mathcal{E})$ defines a particular decomposition of \mathcal{E} and $\{ze_1, e_2\}$ trivializes \mathcal{V} over some neighborhood of q . Hence every element $((a : b), z)$ of $\mathbf{P}(\mathcal{E})|_z$ defines by restriction to $\mathcal{V}|_z$ the linear form

$$((a : b), z) : h \cdot ze_1 + g \cdot e_2 \longmapsto ahz + bg$$

It follows that the birational map $\text{elm}_{p_0} : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{V})$ is defined over some neighborhood of q by the formula:

$$((a : b), z) \longmapsto ((az : b), z)$$

Let us now take $p_1 = ((1 : -1), q) \in \mathbf{P}(\mathcal{V})$. As usual we denote u_{p_1} the sheaf homomorphism $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}_q(q)$ defined by p_1 and \mathcal{W} the vector bundle whose sheaf of sections is equal to $\ker(u_{p_1})$. Over a suitable neighborhood of q , $\{ze_1 + e_2, ze_2\}$ trivializes \mathcal{W} and $\text{elm}_{p_1} : \mathbf{P}(\mathcal{V}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{W})$ is given by the homomorphism

$$((a' : b'), z) : h \cdot (ze_1 + e_2) + g \cdot (ze_2) \mapsto (a' + b')h + b'gz \quad .$$

Therefore, the composed birational map $\text{elm}_{p_1 p_0} : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{W})$ is given over some neighborhood U of q by the following formula:

$$\text{elm}_{p_1 p_0} : ((a : b), z) \dashrightarrow ((az + b : bz), z) \quad .$$

It follows that $\text{elm}_{p_1 p_0}^{-1} : \mathbf{P}(\mathcal{W}) \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ is given over U by:

$$\text{elm}_{p_1 p_0}^{-1} : ((a' : b'), z) \dashrightarrow ((a' - \frac{b'}{z} : b'), z) \quad .$$

This implies that $T' = (T + z^{-1}) \circ \text{elm}_{p_1 p_0}^{-1}$ is equal to the natural projection $\mathbf{P}(\mathcal{W})|_U \rightarrow \mathbf{P}$, $((a' : b'), z) \mapsto \frac{a'}{b'}$ and the strict transform of $\Gamma_0(\mathbf{P})$ by $\text{elm}_{p_1 p_0}$, denoted $\Gamma(\mathbf{P})$, is an integral curve (3.4.3) of $\mathbf{P}(\mathcal{W})$, defined over U by the equation

$$(13) \quad 0 = zP(T' - z^{-1}) = zT'^n - nT'^{n-1} + \sum_1^{n-2} zb_j T'^{n-j} \quad .$$

The point $p = S_q \cap C_0$ has local coordinates $\{T'^{-1}, z\}$ in terms of which Γ is defined at p by the equation

$$(14) \quad 0 = zT'^{-n}P(T' - z^{-1}) = z - nT'^{-1} + \sum_{j=1}^{n-2} zb_j T'^{-j} \quad .$$

In particular the restriction of T' to Γ has a simple pole at p and is holomorphic everywhere else (over U). Furthermore, the meromorphic function $k = T \circ \text{elm}_{p_1 p_0}^{-1}|_\Gamma$ is holomorphic on $\Gamma - \Gamma_q$ and

$$k + z^{-1} = (T + z^{-1}) \circ \text{elm}_{p_1 p_0}^{-1}|_\Gamma = T'|_\Gamma \quad .$$

Hence k satisfies the tangency criterion 1.10. and $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ is a tangential cover. •

3.7. To any tangential polynomial $P(T)$, 3.6. associates a pointed curve (Γ, p) embedded in the ruled surface $\hat{S}(p_0, p_1)$, such that the canonical projection $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ is a tangential cover. Furthermore, the restriction to Γ of the rational function $T \circ \text{elm}_{p_1, p_0^{-1}} \in K(S(p_0, p_1))$ satisfies the tangency criterion 1.10. and its characteristic polynomial (with respect to π) is equal to $P(T)$.

Theorem 3.8.

For any tangential polynomial $P(T)$, the tangential cover $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, q)$ associated to $P(T)$ in 3.6. is minimal. In other words, suppose $\pi' : (\Gamma', p') \rightarrow (X, q)$ is another tangential cover endowed with a meromorphic function $k' \in K(\Gamma')$ whose characteristic polynomial is equal to $P(T)$. Then there exists a birational pointed morphism $j : (\Gamma', p') \rightarrow (\Gamma, p)$ such that $\pi' = \pi \circ j$.

Proof

Let $\Gamma_0(P)$ be the integral curve of $\mathbf{P} \times X$ defined by the equation $P = 0$ (3.4.) and $\Gamma(P)$ the strict transform of $\Gamma_0(P)$ by elm_{p_1, p_0} . It follows from 3.4. that these two curves are isomorphic over $X - \{q\}$. Let us now prove that π' factorizes through π . The couple of morphisms (k', π') defines a map from Γ' into $\mathbf{P} \times X$ whose image is the curve defined by $P = 0$. We deduce a birational map $j : \Gamma' - \Gamma'_q \rightarrow \Gamma(P) - \Gamma_q$. Over some neighborhood U of q , the couple of functions $(k' + \pi'^*(z^{-1}), z)$ defines a birational morphism from $\pi'^{-1}(U)$ onto its image in $\mathbf{P} \times U$. The latter is defined by the equation

$$0 = zP(T' - z^{-1})$$

, which defines $\Gamma(P)$ over U ((13)). Therefore we get a birational morphism $j : \Gamma' \rightarrow \Gamma(P)$ having the announced properties. •

§4 Tangential polynomials over curves of genus 1

4.1. From now on, X will denote a curve of arithmetic genus 1. Let q be a smooth point of X and $\sigma : X \rightarrow X$ the unique involution fixing q and such that the quotient X/σ is isomorphic to \mathbf{P}^1 . Choose a non-zero tangent vector to X at q , t_q , and a unibranch fixed point of σ , $w \in X$, different from q . In the preceding sections we have reduced the elliptic soliton problem to the study of the tangential polynomials and their corresponding divisors on the ruled surface S . Hereafter we develop an algorithm to construct the tangential polynomials of degree n over (X, q) , by solving $\frac{1}{2}n(n+1)$ linear equations.

4.2 Let Δ represent the differentiation with respect to the variable T and $\Delta^{-1} : K(X)[T] \rightarrow K(X)[T]$ be the "integration" operator which associates to any polynomial $R(T) = \sum_0^n \beta_j T^{n-j}$ the element $\Delta^{-1}(R)(T) = \sum_0^n \beta_j \frac{1}{n+1-j} T^{n+1-j}$.

We remark that $\Delta \cdot \Delta^{-1}(R) = R$.

Proposition 4.3. (recursive formula)

Let $P(T)$ be in $\Theta(n, X, t_q)$. Then there exists a unique meromorphic function $\alpha(P)$ on X having the following properties:

- 1) $\alpha(P)$ is holomorphic on $X - \{q\}$;
- 2) the polar part of $\alpha(P)$ at q is equal, modulo z^{-1} , to

$$[\alpha(P)_q] = [-(n+1)\Delta^{-1}(P)(z^{-1})]_q \quad ;$$

- 3) $\text{Res}_q(z^{-1}\alpha(P)dz) = 0$.

Furthermore, for any $a \in \mathbf{C}$

$$(n+1)\Delta^{-1}(P)(T) + \alpha(P) + a$$

is a tangential polynomial of degree $n+1$.

Proof

The first two properties fix the function $\alpha(P)$ up to an additive constant and the last one normalizes it. Let us now denote $R(T) = (n+1)\Delta^{-1}(P)(T) + \alpha(P) + a$. We only need to prove that $R(T)$ has the property $\Theta(n, X, T_q)$, i.e.: that

$$(15) \quad zR(T - z^{-1}) = (n+1)z\Delta^{-1}(P)(T - z^{-1}) + z\alpha(P) + az = zT^{n+1} + \sum_1^{n+1} \beta_j T^{n+1-j}$$

has holomorphic coefficients. If we apply Δ to (15) above we get the equality

$$(16) \quad (n+1)zP(T - z^{-1}) = z(n+1)T^n + \sum_1^{n+1} \beta_j(n+1-j)T^{n-j}$$

, whose left side has holomorphic coefficients at q . This shows that β_j ($j = 1, \dots, n$) is holomorphic at q . We see from (15) that the remaining coefficient, β_{n+1} , is equal to :

$$zR(-z^{-1}) = (n+1)z\Delta^{-1}(P)(-z^{-1}) + z\alpha(P) + az \quad ,$$

which is holomorphic by the hypothesis 2). •

Corollary 4.4.

For any $n > 0$, the set of tangential polynomials $\Theta(n, X, t_q)$ is an affine space of dimension n .

Proof

We know already that $\Theta(1, X, t_q)$ is an affine subspace of $K(X)[T]$ and we deduce from 4.3. that $\dim\Theta(n+1, X, t_q) = \dim\Theta(n, X, t_q) + 1$. The result follows once we check that $\dim\Theta(1, X, t_q) = 1$. •

Proposition 4.5.

1) There exists a formal series in the variable Δ , $\Xi(m) = 1 + \sum_{n>0} \alpha_n(m)\Delta^n$ having the following properties:

a) for all $n > 0$, $m \mapsto \alpha_n(m)$ is a meromorphic function on X , holomorphic on $X - \{q\}$;

b) for every local coordinate z of X at q , such that $dz(t_q) = 1$, we have

$$\Xi(z) = z^{-1} e^{\Delta/z} \left(\sum_{n \geq 0} \beta_n(z) \Delta^n \right)$$

, the functions $\beta_n(z)$ being holomorphic at 0.

2) Let Ξ be a solution of a) and b) above. Every other solution can be uniquely written as $(1 + \sum_{n \geq 0} a_n \Delta^n) \Xi$, the coefficients a_n ($n \geq 0$) being arbitrary constants.

3) In particular there exists one and only one formal series $\Phi_X(\Delta, m, t_q)$ satisfying a) and b) as well as

$$c) \quad \Phi_X(\Delta, w, t_q) = 1.$$

4) For every $\lambda \in \mathbb{C}^*$ we have

$$\Phi_X(\lambda \Delta, m, t_q) = \Phi_X(\Delta, m, \lambda t_q).$$

and also

$$\Phi_X(\Delta, m, t_q) = \Phi(-\Delta, \sigma(m), t_q).$$

Proof

1) Let us suppose by induction on n that there exist functions $\{\alpha_i, i = 1, \dots, n-1\}$ verifying a) and such that b) is true modulo Δ^{n+1} . The next coefficient α_n , must satisfy the following equation

$$(17) \quad \sum_0^{n-1} \alpha_{n-p} (-1)^p \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{z^p} = \frac{\beta_n}{z}$$

β_n being some function holomorphic at q .

In particular the polar part of α_n is known modulo $\frac{\beta_n(o)}{z}$. Since X has an arithmetic genus > 0 , there exists a unique constant $\beta_n(o)$ such that the polar part at q of

$$\frac{\beta_n(o)}{z} - \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_{n-p}(z) (-1)^p \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{z^p}$$

is the polar part of a meromorphic function on X , holomorphic on $X - \{q\}$. This proves the existence of Ξ . We also deduce an expression for β_n in terms of $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ from (17) above.

2) Let Ξ_1 be another series satisfying a) and b). Then the coefficients of $\Xi_1 \Xi^{-1}$ are holomorphic over the whole X and must be constants.

Finally the verification of 3) and 4) are straightforward and left to the reader. •

We next express the series $\Phi(\Delta, m, t_q)$ of 4.5. in terms of the " θ -function" of X . There are three different cases, depending on whether X is smooth, has one node or has one cusp.

4.6. Elliptic case: X is a smooth plane cubic. Let $\Lambda (\Lambda \subset T_q)$ be the lattice of periods of X (i.e.: $X \simeq T_q/\Lambda$) and choose a \mathbb{Z} -basis of Λ , $\{v_1, v_2\}$, such that $\exp_X(\frac{v_1}{2}) = w$ and $\lambda = \frac{v_2}{v_1}$ has positive imaginary part. For every $z \in \mathbb{C}$ we define

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(2nz + \lambda n^2)}.$$

Let $\omega \in H^0(X, \omega_X(2q))$ and $\alpha \in H^0(X, \omega_X)$ be normalized by the following conditions:

- 1) $\int_{v_1} \omega = 0$;
- 2) The function $m \mapsto \int_w^m \omega$ has at q a simple pole with polar part t_q ;
- 3) $\int_{v_1} \alpha = 1$;

In particular the constant $C = \frac{1}{2\pi i} \int_{v_2} \omega$ is different from zero.

Let $A: X \rightarrow \text{Jac } X$ be the Abel map $m \mapsto \frac{1}{2} + \int_w^m \alpha$.

Proposition 4.7.

The series $\Phi_X(\Delta, m, t_q)$ defines an analytic function meromorphic over $\mathbb{C} \times (X - \{q\})$. We have

$$(18) \quad \Phi_X(\Delta, m, t_q) = \exp\left(\Delta \int_w^m \omega\right) \cdot \frac{\theta\left(A(m) + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} + C\Delta\right)}{\theta\left(-A(m) + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)} \cdot \frac{\theta\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\theta\left(\frac{\lambda}{2} + C\Delta\right)}$$

Proof

Let us denote by Ψ the right side of (18). We remark that the first two factors of Ψ depend on the choice of a path from w to m . But if we choose the same path for either factor, their product does not depend on the chosen path as it can be seen using the equalities $\theta(z+1) = \theta(z)$ and $\theta(z+\lambda) = e^{-\pi i(2z+\lambda)}\theta(z)$. Since the function θ vanishes only at $\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} + \Lambda$, where it has simple zeroes, Ψ is defined on a neighborhood of $\{0\} \times (X - \{q\})$ and has the property 4.5.b). Finally, we check that for small Δ and $m = w$, $\Psi = 1$ (take for example the trivial path and $A(m) = \frac{1}{2}$). Hence the series development in Δ of Ψ has the properties a), b) and c) of 4.5.. Therefore (4.5.3)) Ψ must be equal to $\Phi_X(\Delta, m, t_q)$. •

4.8 Rational case: X is a singular plane cubic. Let $j : \tilde{X} \rightarrow X$ be the desingularization of X and $\sigma : X \rightarrow X$ the hyperelliptic involution fixing q and the unibranch point w . We identify q and w with its inverse images in \tilde{X} . There exists an isomorphism $x : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}^1$ such that $x(w) = 0$ and $x(q) = \infty$. Its polar part at q defines a tangent vector $t_q = [x^{-1}]_q$ of X at q . If X has a cusp, w is the cusp of X . Otherwise X has a node which we denote w_1 and let $w_i (i = 2, 3)$ be the points of \tilde{X} over w_1 . In the latter case

$$x(w_i) = (-1)^i \quad (i = 2, 3) .$$

Proposition 4.9.

1) If X has a cusp we have

$$(19) \quad \Phi_X(\Delta, m, t_q) = (1 - x\Delta) \exp(x\Delta)$$

2) If X has a node we have

$$(20) \quad \Phi_X(\Delta, m, t_q) = (1 - xth(\Delta)) \exp(x\Delta) .$$

Proof

Denote by Ψ the right side of (19) and (20). It has the property 4.5.b). Moreover the function $m \mapsto \Psi(m)$ is defined at any smooth point of $X - \{q\}$.

Let us suppose that X has a cusp. Then

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi|_{x=0} = (\Delta - x\Delta^2 - \Delta) \exp(x\Delta)|_{x=0} = 0 .$$

Thus Ψ is also defined at w .

Let us suppose that X has a node. Then

$$\Psi(1) = (1 - th(\Delta)) \exp(\Delta) = 2(e^\Delta + e^{-\Delta})^{-1}$$

and

$$\Psi(-1) = (1 + th(\Delta)) \exp(-\Delta) = 2(e^\Delta + e^{-\Delta})^{-1} .$$

Thus $\Psi(1) = \Psi(-1)$ and Ψ is also defined at w_1 . Therefore Ψ has the property 4.5.a). Finally, since $x(w) = 0$ and $\Psi(0) = 1$, Ψ has the property c). Hence Ψ verifies the conditions 4.5. a),b) and c) and by uniqueness (4.5. 3)) it is equal to $\Phi_X(\Delta, m, t_q)$. •

4.10. Let $\mathbb{C}[T]$ be the ring of polynomials with complex coefficients, $\Delta : \mathbb{C}[T] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ be the differentiation with respect to the variable T and $K(X)[[\Delta]]$ be the ring of formal power series in Δ with coefficients in $K(X)$. For any Q in $\mathbb{C}[T]$ and any integer $n > \deg Q$, $\Delta^n(Q) = 0$. It follows that we have a natural pairing

$$K(X)[[\Delta]] \times \mathbb{C}[T] \longrightarrow K(X)[T] .$$

In particular the formal series $\Phi_X(\Delta, m, t_q)$ (4.5.) defines a homomorphism of differential rings $\Phi_X : \mathbb{C}[T] \rightarrow K(X)[T]$ given by associating to any Q in $\mathbb{C}[T]$ the element $\Phi_X(Q) = \Phi_X(\Delta, m, t_q)(Q)$ of $K(X)[T]$.

Theorem 4.11.

The map $\Phi_X : \mathbf{C}[T] \longrightarrow K(X)[T]$ restricts for any $n > 0$, to an affine isomorphism between \mathcal{M}_n , the space of monic polynomials of degree n of $\mathbf{C}[T]$, and $\Theta(n, X, t_q)$.

Proof

Let z be a local coordinate of X at q such that $dz(t_q) = 1$ and Q an element of \mathcal{M}_n . We deduce from 4.5. a) and b) that the coefficients of $\Phi_X(Q)(T)$ are holomorphic on $X - \{q\}$ and that

$$z\Phi_X(Q)(T - z^{-1}) = ze^{-\frac{\Delta}{z}}\Phi_X(Q)(T) = \sum_{r \geq 0} \beta_r(z)\Delta^r(Q) \quad ,$$

where the functions $\beta_r (r \geq 0)$ are holomorphic at $z = 0$. Hence $\Phi_X(Q)$ has the property 2.1.1) and is in $\Theta(n, X, t_q)$. In fact, $\deg \Phi_X(Q) = \deg Q$ so that Φ_X defines an injective affine map from \mathcal{M}_n into $\Theta(n, X, t_q)$. Moreover, since (4.4.) $\dim \Theta(n, X, t_q) = n = \dim \mathcal{M}_n$, the latter map is an isomorphism. •

Acknowledgement: the author would like to thank J.-L. Verdier for his continuous support and help.

Bibliography

- [A-MK-M] H.Airault, H.McKean, J.Moser, "Rational and elliptic solutions of the K-deV equation", *Comm. Pure App. Math.* vol.30 (1977), p.95-148.
- [B] A.Beauville, "Surfaces algébriques complexes", *Astérisque 54* and *Société Mathématique de France*, Paris (1978).
- [C] F.Calogero, "Solution of the one-dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials", *J.Math. Phys.*vol.12 (1971),p.419-436.
- [D-J-K-M] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara, T.Miwa, " Transformation groups in soliton equations" , *Proc. of RIMS Symp., org. by M.Sato, "Non-linear Integrable Systems-Classical Theory & Quantum Theory"*, (1981).
- [D-N-M] B.A.Dubrovin, V.B.Matveev, S.P.Novikov, "Non-linear equations of K-deV type, finite-band operators and Abelian Varieties", *Uspekhi Math.Nauk.* vol.31 (1976),n.1.
- [H] R.Hartshorne, "Algebraic Geometry", *Grad. Texts in Math.*, 52, Springer-Verlag, New York (1977).
- [K-1] I.M.Krichever, "Integration of non-linear equations by the methods of Algebraic Geometry", *Funct.Anal.*,vol.11 (1977), n.1,p15-31.
- [K-2] I.M.Krichever, "Elliptic solutions of the K-P equation and integrable systems of particles", *Funct. Anal.* vol.14 (1980), n.4,p.45-54.
- [Kru] M.D.Kruskal, "The K-deV equation and related evolution equations", *Am.Math.Soc. Lect.in Appl.Math.* vol.15(1974), p.61-83.
- [L] P.D.Lax, "Periodic solutions of de K-deV equation", *Comm.Pure and Appl.Math.* vol 28(1975),p.141-148.
- [M] J. Moser, "Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformation", *Adv.Math.* vol.16(1975),p.197-220.
- [K-VM] H.McKean, P.Van Moerbeke, "The spectrum of Hill's equation", *Inv. Math.* vol. 30 (1975), n.3, p.217-274.

- [O-P] M.A.Ol'shanetskii, A.M.Perelomov, "Completely Integrable Systems connected with semi-simple Lie Algebras", *Inv.Math.* vol 37(1976).
- [R] M.Rosenlicht "Equivalence relations on algebraic curves", *Annals of Math.*, Series 2, t.56,169-191.
- [S] J.-P.Serre, "Groupes algébriques et corps de classes", Paris, Hermann, (1975).
- [S-W] G.Segal, G.Wilson, "Loop groups and equations of K-deV type", *Publ. Math. I.H.E.S.* vol.61 (1985), p.5-65.
- [T] A.Treibich, "Courbes Elliptiques tracées sur des Jacobiennes Généralisées", *Comptes Rendus Acad.Sc. Paris*, t.307, Serie I, p.531-534, 1988.
- [T-V] A.Treibich, J.-L.Verdier, "Solitons elliptiques", accepted for publication in the special volume for the 60th. anniv. of Prof. A.Grothendieck, *Birkhauser-Boston*.

current address : Armando Treibich

Math.Dept. Univ.of Arizona Tucson AZ 85721

Part of this work was done while visiting the University of Rennes I(France) and the Institute for Advanced Study (Princeton).

Manuscrito recibido en Enero de 1989.

Singularidades racionales y sucesiones casi escindidas, según
M. Auslander.

Claude Cibils (*)

1. Introducción

El carcaj de MacKay asociado a un grupo finito G y a una representación V definida sobre un cuerpo k tiene como vértices a una lista completa y sin repeticiones de kG -módulos simples; el número de flechas de un módulo simple X a otro Y es la multiplicidad de X en una descomposición de $V \otimes_k Y$ en suma directa de módulos inescindibles.

En el caso en que G es un subgrupo finito de $SL_2\mathbb{C}$ y V es el $\mathbb{C}G$ -módulo correspondiente a esta inclusión, McKay observó que si se reemplaza en su carcaj cada ida y vuelta $\circ \rightrightarrows \circ$ por una arista $\circ \text{---} \circ$ se obtiene uno de los grafos de Dynkin extendidos \tilde{A}_n , \tilde{D}_n , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 y \tilde{E}_8 .

Si de este grafo eliminamos el vértice correspondiente al módulo trivial y las aristas que lo tienen como extremo, el grafo resultante es un Dynkin A_n , D_n , E_6 , E_7 o E_8 . Este grafo es isomorfo al de la desingularización de la singularidad asociada a $G \subset SL_2\mathbb{C}$. Este último fenómeno ha sido explicado por Artin, González-Sprinberg, Knorrer y Verdier. ([1] y [6])

El artículo de M. Auslander (Rational Singularities and almost splits sequences, Trans. of the AMS, 293(2) (1986) que nos proponemos presentar en esta nota, da en primera instancia nuevas interpretaciones del carcaj de McKay, relacionándolo con construcciones habituales en el área de la representación de álgebras. Logra en primer lugar obtener el carcaj de McKay como un carcaj "á la Gabriel" construido a partir de la categoría de módulo proyectivos sobre un anillo de grupo izquierdo con coeficientes en el anillo de series formales. Para ello es necesario que la característica de k no divida el orden de G y que el kG -módulo V sea de dimensión 2 sobre k . El anillo de series formales S es entonces en dos variables identificadas a una

(*) Invitado por la Universidad de la República.

base elegida de V , la acción de G sobre V se prolonga de la manera única posible en una acción sobre S por automorfismos de álgebra.

En segundo lugar Auslander se concentra sobre la categoría de módulos reflexivos sobre R el sub-anillo de S constituido por las series formales fijas bajo la acción de G . Esta categoría resulta equivalente a la de módulos proyectivos sobre SG , el anillo de grupo izquierdo de G . El interés reside en que los módulos reflexivos poseen sucesiones casi escindidas, también llamadas sucesiones de Auslander-Reiten que refleja en buena medida el comportamiento de la categoría de módulos de generación finita sobre un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo. Suponiendo ahora el cuerpo algebraicamente cerrado y la no existencia de pseudo-reflexiones en G , Auslander define un carcaj "á la Auslander-Reiten" de los módulos reflexivos que resulta isomorfo al construido "á la Gabriel" y por tanto al de McKay. Es de hacer notar que el carcaj "á la A.R." viene provisto de una translación sobre sus vértices que forma parte de su estructura. La interpretación de esta translación a nivel de los nodos del grafo de la desingularización queda por conocer, así como la de las sucesiones que casi se dividen que son las que describen las aristas del grafo "á la A.R."

En segunda instancia Auslander utiliza los módulos y herramientas obtenidas para dar una nueva demostración de un teorema que él atribuye a Artin-Verdier[1]. Para enunciarlo digamos primero que el anillo R obtenido como puntos fijos de la acción de G sobre S verifica la propiedad siguiente (cuando G no tiene pseudo-reflexiones y $k=\mathbb{C}$): es conmutativo, integralmente cerrado, de dimensión 2 completo, dominio de integridad noetheriano, local y con cuerpo residual \mathbb{C} . El teorema dice que un anillo A con estas propiedades y que sólo posee un número finito de clases de isomorfía de A -módulos reflexivos es precisamente del tipo que se ha considerado. Es decir que consiste en los puntos fijos de la acción de algún grupo finito G sobre las series formales en dos variables, originados por un $\mathbb{C}[G]$ -módulo de dimensión dos sin pseudo-reflexiones.

Nosotros en este informe sobre el artículo de Auslander comenzamos por recordar los pasos esenciales de las construcciones ya clásicas en representación de álgebras. Articularemos luego los tramos del trabajo, permitiéndonos algunas ligeras modificaciones de forma. La bibliografía citada es la del artículo de Auslander.

2. Carcaj de Gabriel

Sea k un cuerpo y Λ una k -álgebra de dimensión finita como espacio vectorial sobre k . El radical de Jacobson r de Λ es la intersección de los ideales izquierdos máximos de Λ , coincide con la de los ideales derechos máximos, y es el ideal nilpotente máximo de Λ . Si r es cero decimos que el álgebra es semi-simple. En este caso el teorema de estructura de Wedderburn-Artin asegura que Λ es isomorfa a un producto de

álgebras de matrices $M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_d}(D_d)$ donde D_i es un cuerpo izquierdo (i.e. no necesariamente conmutativo) extensión finita de k . Para un álgebra de este tipo todo módulo es suma directa de módulos simples (un módulo es simple si no tiene submódulos otros que los triviales). en general, llamamos semisimples a un módulo isomorfo a una suma directa de simples. Tenemos entonces que si Λ es semisimple, todos sus módulos son semisimples.

A un módulo se le llama inescindible si no es suma directa no trivial de dos de sus submódulos. Claramente un módulo simple es inescindible ya que no tiene submódulos (otros que los triviales).

Pero en cuanto el álgebra Λ no es semisimple (i.e. si $r \neq 0$), existe un módulo inescindible que no es simple. Por ejemplo si $\Lambda = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$ la primera columna $\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ es un submódulo de Λ (es decir un ideal izquierdo) que es inescindible pero no simple. El radical de esta álgebra es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

Nuestro interés se centra en las álgebras no semisimples en el entendido que el teorema de Wedderburn Artin despeja el panorama de las semisimples. A estas álgebras les asociaremos un carcaj (es decir un grafo orientado finito) que refleja la presencia del radical y que nos permite reconstruirlas por lo menos en parte. Para simplificar la exposición supondremos que el álgebra semisimplificada Λ / r de Λ es un producto de álgebras de matrices sobre k , es decir que todos los cuerpos izquierdos del teorema de Wedderburn-Artin son iguales a k , lo que es automático si k es algebraicamente cerrado. Si esta hipótesis no se verifica, existen trabajos técnicamente algo más complicados que cubren el caso general (Dlab y Ringel).

Salvo isomorfia un k álgebra de dimensión finita Λ sólo posee un número finito de módulos proyectivos inescindibles finitamente generados. Sea P_1, \dots, P_d una lista completa y sin repeticiones de tales módulos. Ellos constituyen los vértices del carcaj de Gabriel de Λ . Para describir las flechas (i.e. aristas orientadas) necesitamos la noción de cobertura proyectiva de un módulo M . Se trata de un proyectivo P que cubre al módulo M por medio de un homomorfismo $f: P \twoheadrightarrow M$ sobreyectivo y mínimo en el sentido que para todo submódulo estricto X de P el morfismo $f|_X$ ya no es sobreyectivo. En el contexto que nos ocupa todo módulo finitamente generado admite

cobertura proyectiva. Encuanto existe cobertura proyectiva es fácil de ver que ésta es única.

Un módulo proyectivo inescindible P sólo tiene un único submódulo máximo que es rP . En consecuencia P/rP es un módulo simple y $P \xrightarrow{\Pi} P/rP$ una cobertura proyectiva de P/rP . Más aún, los módulos $S_1=P_1/rP_1, \dots, S_d=P_d/rP_d$ constituyen una lista completa y sin repeticiones de módulos simples.

Para cada simple S_j consideremos el inicio de una resolución proyectiva por coberturas de $S_j \dots \longrightarrow Q_j \longrightarrow P_j \longrightarrow S_j \longrightarrow 0$ donde Q_j es la cobertura proyectiva del núcleo de Π , es decir de rP_j .

La multiplicidad del proyectivo inescindible P_j en una descomposición de Q_j en suma directa de proyectivos inescindibles es el número de flechas que van de P_i a P_j en el carcaj de Gabriel de Λ . Esto concluye la definición de Q_Λ , el carcaj de Gabriel de Λ .

El interés de este carcaj es, como decíamos, el de recabar bastante información de Λ . Precisamente a partir de un carcaj Q cualquiera (por ejemplo Q_Λ) construimos una k -álgebra kQ considerando el espacio vectorial de base el conjunto de todos los caminos orientados de Q . Un camino orientado es una sucesión de flechas $a_n \dots a_1$ tal que el vértice terminal de a_i coincide con el vértice inicial de a_{i+1} para $i=1$ hasta $i=n-1$. Incluimos entre los caminos orientados los vértices de Q , ellos constituyen los caminos de largo cero. La multiplicación en este espacio vectorial está dada por la composición de los caminos en caso de que se puedan componer, en caso contrario el producto de dos caminos es cero. Los vértices son idempotentes y la suma de todos ellos es el elemento uno del álgebra, por verificación directa.

Obtenemos de esta forma un álgebra asociativa que es de dimensión finita sí y sólo si no hay ciclos orientados, es decir caminos cuyo vértice inicial coincide con el terminal.

La observación de Gabriel es que la categoría de Λ -módulos es equivalente a la de módulos sobre un cociente de kQ_Λ . En particular si Λ verifica que $\Lambda/r = kx \dots xk$, entonces Λ es isomorfa como álgebra a kQ_Λ/I donde I es un ideal bilateral de kQ_Λ .

Las álgebras Λ tales que $\Lambda/r= kx \dots xk$ e isomorfas a kQ_Λ son precisamente las álgebras hereditarias, es decir aquellas para las cuales los submódulos de proyectivos son proyectivos (las de dimensión homológica global igual a uno). Para estas álgebras Gabriel probó el resultado siguiente: un álgebra hereditaria Λ sólo admite un número finito de clases de isomorfía de módulos inescindibles si y sólo si el grafo subyacente a Q_Λ es un Dynkin.

3. Carcaj de Mckay y carcaj "a la Gabriel"

Sea G un grupo finito y k un cuerpo cuya característica no divide el orden de G lo que constituye la condición necesaria y suficiente para que el álgebra de grupo G sea semisimple por el teorema de Maschke.

Sea V un KG -módulo de dimensión 2 sobre k , o sea un k -espacio vectorial de dimensión 2 equipado con una acción de G por automorfismos k lineales. Fijamos $\{x,y\}$ una k -base de V .

El grupo G actúa sobre $S=k[[x,y]]$ el anillo de series formales por medio de automorfismos de álgebra, actuando sobre las variables x e y como lo hace sobre la base $\{x,y\}$ de V y trivialmente sobre k .

El anillo de grupo izquierdo SG es el S -módulo libre de base el conjunto G . La multiplicación queda definida por medio de la fórmula $(s\sigma) \circ (\tau\sigma) = s\sigma(t)\sigma\tau$ donde s y t son series formales y los elementos σ y τ pertenecen G .

Un SG -módulo M es por tanto un S -módulo M equipado con una acción de G semi-lineal, es decir verificando

$$\sigma \circ (sm) = \sigma(s) \sigma \circ m$$

dónde el punto \circ indica la acción de G .

Proposición: Existe una correspondencia biunívoca entre las clases de isomorfía de kG -módulos y las de SG -módulos proyectivos.

Observaciones :

1) El anillo de series formales S es local con ideal máximo $\mathcal{M} = (x,y)$. Este ideal es preservado por la acción de G sobre S y es por tanto un ideal izquierdo de SG . El ideal bilateral $\mathcal{M}SG$ de SG verifica claramente que $SG/\mathcal{M}SG = kG$. en particular cada kG módulo es automáticamente un SG módulo en el cual las variables x e y actúan como cero. Por restricción a kG recobramos naturalmente el kG -módulo de origen.

2) Otra forma de producir SG-módulos a partir de kG-módulos es la de fijarse un SG-módulo M. Para cada kG-módulo W el producto tensorial $M \otimes_k W$ es un S-módulo vía la acción

$$s(m \otimes w) = sm \otimes w$$

Además G actúa diagonalmente

$$\sigma(m \otimes w) = \sigma m \otimes \sigma w$$

y es inmediato que la acción es semi-lineal, es decir que

$$\sigma(s(m \otimes w)) = \sigma(s)\sigma(m \otimes w).$$

3) El hecho de que G actúe por automorfismos de álgebra de S implica que S es un SG-módulo, esencial en la prueba de la proposición: de hecho a cada kG-módulo W le asociamos el SG-módulo $S \otimes_k W$ que es efectivamente proyectivo.

Nótese que el SG-módulo S/\mathfrak{M} es el cuerpo k con acción nula de \mathfrak{M} y trivial de G. Si W es un kG-módulo el SG-módulo $S \otimes_k W$ es exactamente el SG-módulo W obtenido en la primera observación utilizando la proyección canónica $SG \longrightarrow kG$.

Comenzamos por caracterizar los módulos SG-proyectivos.

Lema Un SG-módulo M es SG-proyectivo si y sólo si es libre como S módulo.

Prueba: Si M es SG-proyectivo es sumando directo de un SG-libre. Pero SG es S-libre, por tanto M es S-proyectivo. Al ser S un anillo local, todo módulo S-proyectivo es libre.

Recíprocamente, si M es S-libre y $B \xrightarrow{\pi} C$ es una sobreyección de SG-módulos, tenemos que $\text{Hom}_S(M, B) \rightarrow \text{Hom}_S(M, C)$ es una sobreyección. Pero $\text{Hom}_S(M, X)$ es un SG-módulo cuando X es un SG-módulo, por medio de la acción $(\sigma\varphi)(m) = \sigma\varphi(\sigma^{-1}m)$. Los puntos fijos de esta acción son exactamente los homomorfismos de S-módulos equivariantes bajo la acción de G, o sea $\text{Hom}_{SG}(M, X)$. Por otra parte al ser kG semisimple el functor que asocia a cada módulo sus puntos fijos es exacto. Obtenemos entonces que $\text{Hom}_{SG}(M, B) \longrightarrow \text{Hom}_{SG}(M, C)$ es una sobreyección, lo que demuestra que M es SG-proyectivo.

Prueba de la proposición : A cada kG -módulo W le asociamos el SG -módulo $S \otimes_k W$. Al ser S el S -módulo libre de rango uno, $S \otimes_k W$ es S -libre de rango la dimensión de W sobre k . El SG -módulo $S \otimes_k W$ es entonces SG -proyectivo en virtud del lema .

Aserción: $S \otimes_k W$ es la cobertura proyectiva de W considerando como

SG -módulo. En efecto, por de pronto $S \twoheadrightarrow S/\mathcal{M}$ es cobertura proyectiva pues \mathcal{M} es el único ideal máximo de S . La suma directa de coberturas proyectivas aún lo es (esto exige un poco de trabajo), en consecuencia $S \otimes_k W \twoheadrightarrow S/\mathcal{M} \otimes_k W$ es una cobertura proyectiva de S -módulos pues $S \otimes_k W$ es suma directa de $\dim_k W$ copias de S . Se deduce que se trata también de una cobertura proyectiva de SG -módulos, y notemos (observación 3) que $S/\mathcal{M} \otimes_k W$ es igual a W considerado como SG -módulo.

Gracias a esta aserción podemos mostrar que la asignación de $S \otimes_k W$ a cada W es sobreyectiva : sea un SG -módulo proyectivo P . Es cobertura proyectiva como S -módulo de $P/\mathcal{M}P$ ya que P es S -libre y S es local. Ahora $P/\mathcal{M}P$ es también un SG -módulo ya que $\mathcal{M}P = (\mathcal{M}SG)P$ y el morfismo $P \twoheadrightarrow P/\mathcal{M}P$ es a fortiori cobertura proyectiva de SG -módulos. Por la unicidad de la coberturas proyectivas, se sigue que P es isomorfo a $S \otimes_k P/\mathcal{M}P$ donde $P/\mathcal{M}P$ es considerado como kG -módulo.

Para ver que la asignación es inyectiva supongamos que $S \otimes_k W$ y $S \otimes_k W'$ son SG -módulos isomorfos. En consecuencia $(S \otimes_k W)/\mathcal{M} (S \otimes_k W)$ y $(S \otimes_k W')/\mathcal{M} (S \otimes_k W')$ son isomorfos . Pero es evidente que $(S \otimes_k W)/\mathcal{M} (S \otimes_k W) = W$.

Notemos que la biyección que acabamos de exhibir es aditiva, es decir que transforma sumas directas en sumas directas.

En consecuencia preserva las clases de isomorfia de módulos irrecindibles. Al ser kG una álgebra semi-simple tenemos que las clases de isomorfia de irrecindibles están representadas por una lista completa y sin

repeticiones de módulos simples S_1, \dots, S_d . Los SG -módulos proyectivos inescindibles $P_1 = S \otimes S_1, \dots, P_d = S \otimes S_d$ son pues una lista completa y sin repeticiones de módulos proyectivos inescindibles. Estamos entonces en condiciones de hacer una construcción de carcaj "a la Gabriel". Los vértices son P_1, \dots, P_d y el número de flechas de P_i a P_j es la multiplicidad de P_i en una descomposición de Q_j en suma directa de proyectivos inescindibles, donde

$$\cdots \longrightarrow Q_j \longrightarrow P_i \longrightarrow S_j \longrightarrow 0$$

es el inicio de una resolución proyectiva por coberturas de S_j .

Teorema : El carcaj de McKay se identifica al que acabamos de definir.

Prueba : Todo reside en obtener una resolución proyectiva mínima explícita que nos permita constatar que el número de flechas de P_i a P_j en el carcaj "à la Gabriel" es el mismo que el número de flechas de S_i a S_j en el de McKay.

A nivel del anillo local S tenemos la resolución proyectiva mínima de Koszul de S/\mathcal{M} :

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{g} S \otimes S \xrightarrow{f} S \xrightarrow{\Pi} S/\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

donde Π es la proyección canónica, f es el morfismo definido por $f(1,0) = x$ y $f(0,1) = y$ mientras que $g(1) = (y,-x)$.

A esta resolución proyectiva mínima le vamos a dar SG-estructura de forma de obtener una SG-resolución proyectiva mínima del SG-módulo simple trivial k .

Al S -módulo $S/\mathcal{M} = k$ lo consideramos como trivial y $S \xrightarrow{\Pi} S/\mathcal{M}$ es la proyección canónica para la estructura natural de SG -módulo de S . El S -módulo $S \otimes S$ lo vemos como $S \otimes_k V$ por medio de la identificación $(1,0) \longmapsto (1 \otimes x / y(0,1)) \longmapsto (1 \otimes y)$. De esta forma f queda definida por $f(1 \otimes x) = x$ y $f(1 \otimes y) = y$ lo que deja claro que f es un morfismo de SG -módulos.

Al último S de la resolución de Koszul no lo consideramos con su estructura natural de SG -módulo (g no sería equivariante). Para darle su nueva estructura, consideremos

$$\wedge^2 V = (V \otimes_k V) / \langle z \otimes z \mid z \in Q \rangle.$$

El espacio vectorial $V \otimes_k V$ es un kG -módulo via la acción diagonal de G y el subespacio por el cual cocientamos es un sub kG -módulo. Tenemos entonces que $\Lambda^2 V$ es un kG -módulo de dimensión uno de base $x \wedge y$ (la clase de $x \otimes y$ en el cociente). Notemos que en $\Lambda^2 V$ tenemos $x \wedge x = y \wedge y = 0$ e $y \wedge x = -x \wedge y$.

Observemos que si la matriz de la acción de σ sobre V en la base $\{x, y\}$ es $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ obtenemos $s(x \otimes y) = (ad-bc) x \otimes y$ lo que resumimos diciendo que $\Lambda^2 V$ es el kG -módulo simple "determinante de V " (el módulo es simple pues de dimensión uno).

Consideramos entonces el SG -módulo $S \otimes_k \Lambda^2 V$ que se identifica a S como S -módulo por medio de la identificación $1 \otimes (x \otimes y) \mapsto 1$. Se trata del SG -módulo S con la acción de G modificada por el determinante de V . Por medio de estas identificaciones obtenemos

$$g: S \otimes_k \Lambda^2 V \longrightarrow S \otimes_k V$$

definida por

$$g(1 \otimes (x \otimes u)) = y \otimes x - x \otimes y.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sigma(y \otimes x - x \otimes y) &= \sigma_y \otimes \sigma_x - \sigma_x \otimes \sigma_y \\ &= (cx + dy) \otimes (ax + by) - (ax + by) \otimes (cx + dy) \\ &= (da - bc)(y \otimes x - x \otimes y) \end{aligned}$$

lo que muestra que g es efectivamente equivariante.

Al ser la resolución proyectiva de Koszul mínima, tenemos que a fortiori

$$0 \longrightarrow S \otimes_k \Lambda^2 V \xrightarrow{g} S \otimes_k V \xrightarrow{f} S \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$

es también mínima.

Sea ahora S_j un kG -módulo simple. Al tensorizar sobre k la resolución proyectiva mínima obtenida tenemos:

$$0 \longrightarrow S \otimes_k \Lambda^2 V \otimes_k S_j \longrightarrow S \otimes_k V \otimes_k S_j \longrightarrow S \otimes_k S_j \longrightarrow S_j \longrightarrow 0$$

Descomponemos el kG -módulo $V \otimes S_j$ en suma directa de kG -módulos simples:

$$\bar{S} \otimes S_j = n_1 S_1 \oplus \dots \oplus n_d S_d.$$

Por definición n_j es el número de flechas de S_i a S_j en el carcaj de McKay.

Por otro lado obtenemos una descomposición de $S \otimes V \otimes S_j$ en SG -módulos proyectivos inescindibles utilizando la descomposición de $V \otimes S_j$:

$$\begin{aligned} S \otimes V \otimes S_j &= n_1 S \otimes S_1 \oplus \dots \oplus n_d S \otimes S_d \\ &= n_1 P_1 \oplus \dots \oplus n_d P_d. \end{aligned}$$

Por definición n_j es también el número de flechas de P_i a P_j en el carcaj "à la Gabriel".

Observemos sin embargo que las consideraciones efectuados sobre el término $S \otimes \wedge^2 V$ (de la resolución proyectiva resultan superfluas para realizar la identificación de los dos carcajes (el carcaj a la Gabriel sólo necesita el paso cero y uno de la resolución proyectiva)).

Las consideraciones efectuadas serán indispensables al considerar el carcaj "à la Auslander-Reiten".

Por otra parte observamos que si el kG -módulo es de dimensión n arbitraria y S el anillo de series formales en n variables, aún obtenemos la identificación de los carcajes. Precisamente porque las consideraciones sobre V son superfluas en esta parte.

4. Carcaj de Auslander-Reiten

Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita sobre el cuerpo k y sea M un Λ -módulo de generación finita no proyectivo. La observación crucial de Auslander y Reiten al considerar el conjunto de todas las sobreyecciones $f: X \twoheadrightarrow M$ fue constatar que existe una privilegiada, una "casi-escindida".

Antes de definir esta noción, fijaremos terminología. Un morfismo $g: X \twoheadrightarrow Y$ para el cual existe un morfismo $s: Y \twoheadrightarrow X$ tal que $gs = 1$ es una retracción. A su vez el morfismo s para el cual existe g con $gs = 1$ es una sección. Una retracción g es siempre sobreyectiva con $X = \text{Kerg} \oplus \text{Im}s$. Una sección s es siempre inyectiva. A un morfismo

sobreyectivo (o inyectivo) que además es retracción (o sección) le decimos que se escinde.

Por definición diremos que un morfismo $f : X \twoheadrightarrow M$ sobreyectivo es casi-escindido si de pronto no se escinde y si todo morfismo $g : Y \longrightarrow M$ que no es retracción se levanta, es decir que existe $\bar{g} : Y \longrightarrow X$ tal que $f\bar{g} = g$.

Es de notar que si permitiéramos a alguna retracción $g : Y \longrightarrow M$ levantarse, inmediatamente obtendríamos que f se escinde.

Otra anotación trivial es la siguiente: si f se escinde entonces cualquier morfismo $g : Y \longrightarrow M$ se levanta.

Así es como la noción de "casi-escindido" aparece como la noción máxima inmediatamente por debajo de la de "escindido". El interés de la noción reside en el teorema siguiente de Auslander y Reiten:

Teorema: Sea M un Λ -módulo inescindible no proyectivo y finitamente generado.

Entonces existe un morfismo único casi-escindido $f : E \twoheadrightarrow M$. Además $\text{Ker} f$ es un Λ -módulo inescindible finitamente generado.

La unicidad significa que si $f' : E' \twoheadrightarrow M$ es también casi escindido, entonces existe un isomorfismo $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que $f'\varphi = f$. A la clase de isomorfía de M se le puede asociar entonces la clase de isomorfía de $\text{Ker} f$, que denotamos τM donde τ es la "translación de Auslander Reiten".

Para M un Λ -módulo inescindible no proyectivo finitamente generado, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

se llama sucesión casi-escindida o sucesión de Auslander-Reiten. Tiene la propiedad de que g es también un morfismo casi-escindido en el sentido de que todo morfismo $h : \tau M \longrightarrow Y$ que no es sección se prolonga, es decir existe $\bar{h} : E \longrightarrow Y$ con $\bar{h}g = h$.

El carcaj de Auslander-Reiten tiene por vértices las clases de isomorfía de módulos inescindibles el que bien puede ser un conjunto infinito.

Para cada módulo inescindible M no proyectivo, consideremos la sucesión casi escindida que termina en el

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

Descomponemos E en suma directa de submódulos inescindibles

$$E = n_1 E_1 \oplus \dots \oplus n_r E_r.$$

El número de flechas en el carcaj de AR que van de un módulo inescindible X a M es la multiplicidad de X en E , o sea n_i si $X \simeq E_i$ y 0 si $X \not\sim E_i$ para $i = 1, \dots, r$.

El interés de este carcaj reside en que recaba información sobre $\text{ind } \Lambda$, la categoría de módulos inescindibles finitamente generados sobre Λ . En efecto, a partir de un carcaj cualquiera se construye de la manera evidente una k -categoría cuyos objetos son los vértices y los caminos orientados finitos la k -base de los morfismos de un vértice a otro. Resulta que $\text{ind } \Lambda$ es un cociente bien descrito de la categoría asociada al carcaj de Auslander-Reiten.

5. Carcaj de McKay y carcaj "a la Auslander-Reiten".

Volvemos a la situación de un grupo finito G y un cuerpo k cuya característica no divide al orden de G . Suponemos además que k es algebraicamente cerrado y V un kG -módulo de dimensión 2 sobre k sin pseudo-reflexiones, es decir ningún $\sigma \neq 1$, $\sigma \in G$ posee el valor propio 1.

Obtenemos una acción de G sobre $S = k[[x,y]]$ donde $\{x,y\}$ es una base de V . El anillo $R = S^G$ de invariantes es completo, integralmente cerrado, dominio de integridad y S es un R -módulo finitamente generado.

Consideremos \mathcal{R} la categoría de R -módulos reflexivos. Recordemos que un R -módulo M es reflexivo si el morfismo canónico de evaluación $M \longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M,R))$ es un isomorfismo. Por el hecho de que R es integralmente cerrado de dimensión dos tenemos que los módulos reflexivos coinciden con los Cohen-Macaulay. En consecuencia S es un R -módulo reflexivo.

De hecho S es en cierta forma el "generador" de los R -módulos reflexivos. Si denotamos $\text{add} S$ a la subcategoría plena de \mathcal{R} cuyos objetos son sumas finitas de R -factores directos de S , entonces $\mathcal{R} = \text{add}_R S$. La

prueba de este resultado se encuentra en el artículo de Auslander del cual estamos informando.

Observemos que al ser R un anillo completo, el teorema de Krull-Schmidt es válido en $\text{mod } R$. Utilizándolo se demuestra fácilmente que si un inescindible L es factor directo de una suma directa de copias de S es isomorfo a un factor directo de una sola copia de S . De tal forma que $\text{add}_R S$ sólo tiene un número finito de clases de isomorfia de módulos inescindibles. Lo mismo vale entonces para \mathcal{R} .

Notemos $\mathcal{P}(\text{SG})$ la categoría de SG-módulos proyectivos.

Proposición : Existe una equivalencia de categorías entre $\mathcal{P}(\text{SG})$ y $\mathcal{R} = \text{add}_R S$.

Esquema de prueba :

Sea M un SG-módulo cualquiera y sea

$$M^G = \{ m \in M \mid \sigma m = m \quad \forall \sigma \in G \}.$$

Por lo general M^G no es un sub S -módulo de M , pero sí es un sub RS^G -módulo de M .

Por otra parte consideremos $(\text{SG})^G$. Es fácil verificar que

$$S \longrightarrow (\text{SG})^G \quad s \longmapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma(s)\sigma$$

es un isomorfismo de R -módulos que vemos como una identificación.

Sea ahora P un SG-módulo proyectivo, es decir que es factor directo de una suma de copias de SG . En consecuencia P^G es R -factor directo de una suma de copias de $(\text{SG})^G$, o sea que $P^G \in \text{add}_R S$. Esto define un funtor de $\mathcal{P}(\text{SG})$ en $\text{add}_R S$ que es una equivalencia. El hecho básico necesario para demostrarlo es que los primos de altura uno de R no se ramifican en S , lo que es equivalente a la hipótesis de que G no tiene pseudo-reflexiones.

Con esta equivalencia de categorías podremos construir sucesiones que casi escinden en \mathcal{R} y un carcaj "à la AR". Recordemos que S_1, \dots, S_d es una lista completa y sin repeticiones de kG -módulos simples. Cada uno de ellos es automáticamente un SG-módulo y sus cubiertas proyectivas $P_1 = S \otimes S_1, \dots, P_d = S \otimes S_d$ son una lista completa y sin repeticiones de SG-módulos proyectivos inescindibles. Utilizando la equivalencia de

categorías entre $\mathcal{P}(\text{SG})$ y \mathcal{R} tenemos que $L_1 = \text{PG}, 1 =, \dots, L_d = \text{PG}, d$ es una lista completa y sin repeticiones de R -módulos inescindibles reflexivos.

Hemos obtenido las resoluciones proyectivas por coberturas de cada uno de los kG simples :

$$0 \longrightarrow S \otimes \wedge^2 V \otimes S_i \longrightarrow S \otimes V \otimes S_i \longrightarrow S \otimes S_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

Recordemos que $\wedge^2 V$ es de dimensión 1, o sea que $\wedge^2 V \otimes S_i$ se identifica con S_i en el cual la acción de $\sigma \in G$ ha sido modificada por un escalar, el determinante de la acción de σ en V .

En consecuencia los submódulos de $\wedge^2 V \otimes S_i$ son exactamente los mismos que los de S_i . Al ser S_i simple, $\wedge^2 V \otimes S_i$ también lo es, y lo denotamos σS_i . Tenemos que $\tau S_i = \tau S_j$ sólo si $S_i = S_j$, de vuelta usando que la acción en τS_i es la acción en S_i sólo modificada por un escalar.

Así es como $S \otimes \tau S_i$ es cubierta proyectiva de τS_i . A este SG -módulo proyectivo lo denotamos naturalmente τP_i . Tenemos entonces que la resolución proyectiva mínima de S_i se escribe

$$0 \longrightarrow \tau P_i \xrightarrow{v_i} Q_i \xrightarrow{u_i} P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

donde

$$Q_i = S \otimes V \otimes S_i.$$

Podemos decidir que el primer simple S_i de nuestra lista es el simple trivial, o sea el cuerpo k con G actuando como la identidad por todos sus elementos.

Aplicando el funtor puntos fijos (que es exacto pues la característica de k no divide al orden de G) a cada una de estas resoluciones proyectivas obtenemos:

$$0 \longrightarrow (\tau P_i)^G \longrightarrow Q_i^G \longrightarrow P_i^G \longrightarrow 0$$

para $i > 1$, pues $S_i^G = 0$ si S_i es simple no trivial, y

$$0 \longrightarrow (\tau P_1)^G \longrightarrow Q_1^G \longrightarrow P_1^G \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

para $i = 1$

Denotamos $(\tau P_i)^G = \tau L_i$ para cada i , obteniendo que τ es una permutación de los módulos reflexivos inescindibles sobre R . Llamamos E_i al módulo $Q_i^G = (S \otimes V \otimes S_i)^G$.

Para el simple trivial obtenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau R \xrightarrow{g_1} E_1 \xrightarrow{f_1} R \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

recordando que $S=P_1$ es la cobertura proyectiva de $S_1=k$ y que $SG=R$.

Aserción : Si $h : X \longrightarrow R$ es un morfismo que no es una retracción entonces se levanta a E_1 .

Para mostrarlo utilizamos la equivalencia entre $\mathcal{P}(SG)$ y \mathcal{R} .

Sea $h_p : P \longrightarrow S$ tal que $P_p^G : PG \longrightarrow SG = R$ es el morfismo h .

Como h no es retracción, h_p tampoco lo es. Pero S es SG -proyectivo ya que S es S -libre.

En consecuencia si h_p fuese suryectiva, sería una retracción. Por tanto h_p no es suryectiva y su imagen está entonces contenida en el único ideal máximo \mathcal{M} de S , que es también $\text{Im } u_1$. Por tanto h_p se levanta y entonces h también.

Clásicamente se demuestra que si

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow R \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R -módulos en \mathcal{R} con A inescindible y con la propiedad que toda no retracción $X \longrightarrow R$ se levanta a B , entonces esta sucesión exacta es isomorfa a la que teníamos.

Se le llama la sucesión exacta fundamental.

Utilizando argumentos similares a los dados, se muestra que

$$0 \longrightarrow \tau L_i \xrightarrow{g_1} E_1 \xrightarrow{f_1} L_i \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

tiene la misma propiedad, o sea que todo morfismo $h : X \longrightarrow L_i$ que no es retracción se levanta. Además otra sucesión exacta con esta propiedad y terminando en L_i le es isomorfa. El carcaj "à la AR" de la situación se define como lo hicimos en la sección anterior. Sus vértices son L_1, \dots, L_d y el número de flechas de L_i a L_j es la multiplicidad de L_j como factor directo de

E_j . Como $E_j = (S \otimes Q \otimes S_j)^G$ obtenemos inmediatamente que esta multiplicidad es la de P_j en $S \otimes Q \otimes S_j$, o sea que esta carcaj es isomorfo al definido "a la Gabriel" y por tanto al de McKay .

Institut Fourier
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères
Francia

Section de Mathématiques
C.P. 240
1211 Genève 24
Suiza

Manuscrito recibido en Diciembre de 1988.

Informe sobre el aspecto geométrico de la correspondencia de McKay .

G. González Sprinberg (Institut Fourier, Université Grenoble I).

Este informe es un resumen de una parte de un curso (Introducción a la geometría singular) y de un seminario de geometría y álgebra sobre la correspondencia de McKay, realizados en Noviembre y Diciembre 1988 en el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias. El autor agradece la invitación del Centro de Matemática de la Universidad y del Pedeciba, en particular a sus responsables y al secretariado del Centro de Matemática, que hicieron posible el desarrollo de estas actividades.

1. Grupos, singularidades y correspondencia de McKay .

El estudio de la correspondencia llamada de McKay tiene su origen en una observación esencialmente empírica (realizada en 1980, ver [M]) que relaciona objetos matemáticos de naturaleza diversa: singularidades de Klein de superficies complejas, representaciones de grupos binarios poliedrales, álgebras de Lie simples.

El contexto preciso en el que fue formulada parece ser sólo la parte visible de un "iceberg", pues actualmente continúa desarrollándose en varias direcciones y es objeto de una investigación activa por parte de matemáticos de universidades europeas y norteamericanas. Este informe no es exhaustivo; daremos una presentación de algunos resultados del aspecto geométrico obtenidos en parte por el autor, remitiendo a las referencias para las demostraciones completas.

Los objetos geométricos son las singularidades de Klein . Se trata de singularidades de superficies complejas obtenidas como cociente de \mathbb{C}^2 por subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$, por lo que comenzaremos con la descripción de estos últimos.

1.1 Subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$

La clasificación, a menos de conjugación, de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ se hace utilizando la clasificación de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$,

y ésta última depende de la clasificación de los poliedros regulares de \mathbb{R}^3 .

Dichos poliedros son, por definición, poliedros convexos en los que todas las caras son polígonos regulares (i.e. equiláteros y equiangulares) iguales, y tales que por cada vértice hay igual número de caras. Están caracterizados por el símbolo de Schläfli (n,m) , donde n denota el número de aristas de una cara, y m el número de caras con un vértice común (ver, por ejemplo [C]). Dos poliedros cuyos símbolos son (n,m) y (m,n) son duales en el sentido que uno se obtiene a partir del otro considerando cómo vértices los puntos centrales de las caras del otro (a menos de homotecia). Existen cinco tipos de poliedros regulares en \mathbb{R}^3 (a menos de isometrías y homotecias); son llamados poliedros platónicos pues eran ya conocidos por geómetras de la academia de Platón (Euclides dedica el último libro de sus Elementos al estudio de su clasificación y propiedades métricas elementales). Algunos de sus invariantes numéricos están reunidos en la tabla siguiente:

(T1)

poliedro	#caras	#aristas	#vértices	símbolo de Schläfli
tetraedro	4	6	4	(3,3)
cubo	6	12	8	(4,3)
octaedro	8	12	6	(3,4)
dodecaedro	12	30	20	(5,3)
icosaedro	20	30	12	(3,5)

El tetraedro es autodual, el cubo es dual del octaedro y el dodecaedro es dual del icosaedro. Todos los poliedros regulares poseen un centro, i.e. se pueden inscribir en una esfera de radio igual a la distancia del centro a cualquier vértice. A cada poliedro regular se le asocia el grupo de rotaciones R que dejan invariante el poliedro en su conjunto, llamado grupo poliédrico de rotaciones (o grupo poliédrico puro). Dos poliedros duales poseen el mismo grupo de rotaciones. Tomando como centro del poliedro el origen de

\mathbb{R}^3 se obtienen así (a menos de conjugación) tres subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$, que son isomorfos a los grupos alternados α_4 y α_5 para el tetraedro y para el icosaedro (o dodecaedro) respectivamente, y al grupo simétrico S_4 para el octaedro (o cubo).

Considerando como casos degenerados de poliedros los polígonos regulares (como poliedros con una sola cara) y los diedros (poliedros con dos caras iguales a un polígono regular, unidos por el borde) se obtienen dos familias numerables de subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$, los grupos cíclicos y los grupos diedrales. Se tiene el resultado clásico siguiente (ver por ejemplo [S]).

Proposición : La clasificación (a menos de conjugación) de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$ está formada por cinco tipos: grupos cíclicos, diedrales y los tres grupos de rotaciones de los poliedros regulares.

Identificando la esfera S^2 en \mathbb{R}^3 con la compactificación con un punto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de \mathbb{C} , por medio de la proyección estereográfica, los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R})$ se identifican con subgrupos finitos de $IPSU_2(\mathbb{C})$ (grupo multiplicativo de las matrices unitarias complejas 2×2 , módulo ± 1). Más generalmente, esta construcción por medio de la proyección estereográfica establece un isomorfismo entre $SO_3(\mathbb{R})$ y $IPSU_2(\mathbb{C})$.

La compactificación $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es identificada a la recta proyectiva compleja $IP^1(\mathbb{C})$. Es el método clásico utilizado por F. Klein para pasar de \mathbb{R} a \mathbb{C} (ver [K]).

Por otra parte, todo subgrupo finito G de $SL_2(\mathbb{C})$ es conjugado (en $SL_2(\mathbb{C})$) a un subgrupo finito de $SU_2(\mathbb{C})$. Para ésto basta considerar una forma hermiciana invariante por G (que se puede obtener a partir de una forma hermiciana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cualquiera, definiendo $\langle x, y \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$).

Por lo tanto la clasificación de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ coincide con la de los subgrupos finitos de $SU_2(\mathbb{C})$.

Sea $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \longrightarrow IPSU_2(\mathbb{C})$ el epimorfismo cociente canónico, cuyo núcleo es $\{\pm 1\}$. Si R es un subgrupo finito de $IPSU_2(\mathbb{C})$, el grupo

$G = \pi^{-1}(R)$ es una extensión de R por $\{\pm 1\}$, y es un subgrupo finito de $SU_2(\mathbb{C})$, de orden doble del de R ; el grupo es llamado grupo binario poliédrico si R es un grupo de rotaciones poliédrico.

Proposición: La clasificación (a menos de conjugación) de los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ está formado por cinco tipos: cíclicos, binarios diedrales, binario tetraédrico, binario octaédrico y binario icosaédrico.

Demostración : Sea G subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$. Tomando un conjugado se puede suponer $G \subset SU_2(\mathbb{C})$. Si $-1 \in G$, entonces $\pi^{-1}(\pi(G)) = G$ y por lo tanto G es un grupo binario. Si $-1 \notin G$, entonces G no posee ningún elemento de orden 2 (pues -1 es el único elemento de orden 2 en $SU_2(\mathbb{C})$) y G es isomorfo a $\pi(G)$. Pero en este caso, por la clasificación de los subgrupos finitos de $SO_3(\mathbb{R}) \cong IPSU_2(\mathbb{C})$, $\pi(G)$ es cíclico de orden impar, pues son los únicos que no poseen elementos de orden 2.

1.2 Singularidades de Klein.

Sea G un subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$. G opera sobre \mathbb{C}^2 , siendo el origen el único punto fijo y operando libremente sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

En efecto, todo elemento $g \in G$ es diagonalizable pues es de orden finito; si g deja fijo $z \neq 0$, uno de sus valores propios es 1, pero al ser su determinante 1, el otro valor propio es también 1 por lo tanto g es la identidad. Se llama singularidad de Klein el cociente \mathbb{C}^2/G de \mathbb{C}^2 por G ; como conjunto está constituido por las órbitas de \mathbb{C}^2 bajo la acción de G y su estructura algebraica es definida por el anillo de las funciones regulares de \mathbb{C}^2 (es decir los polinomios complejos de dos variables) que toman igual valor para todo punto de una misma órbita, i.e. los polinomios invariantes bajo la acción de G . El anillo de invariantes ha sido calculado explícitamente por F Klein (ver [K]) en 1884; aunque ya había sido estudiado por H. Schwartz en 1882, estos cocientes son conocidos con el nombre de Klein.

Este último demuestra que existe en cada caso un sistema minimal de generadores constituidos por tres polinomios homogéneos y determina la ecuación (normalizada) que satisfacen. Estos generadores están íntimamente relacionados con la geometría del poliedro correspondiente.

Por ejemplo, en el caso del icosaedro, Klein determina tres polinomios homogéneos X, Y, Z de grados respectivos 30, 20 y 12 que representan las ecuaciones de los 30 medios de aristas, 20 centros de caras y 12 vértices respectivamente, para una posición fijada del poliedro respecto al sistema de coordenadas; es un hecho notable que luego de cálculos en los que intervienen números irracionales imaginarios, los coeficientes que se encuentran sean no sólo reales, sino enteros ! :

$$\begin{aligned}
 X &= u^{30} + v^{30} + 522 (u^{25}v^5 - u^5v^{25}) - 10005 (u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20}) . \\
 Y &= u^{20} + v^{20} - 288 (u^{15}v^5 - u^5v^{15}) + 494 u^{10}v^{10} . \\
 Z &= uv (u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10}) .
 \end{aligned}$$

La tabla siguiente resume para cada tipo de grupo finito G los grados de los generadores invariantes homogéneos y las ecuaciones normalizadas:

(T2)

|← grados de generadores →|

G	G	X	Y	Z	ecuación (E)
cíclico	$n+1, n \geq 1$	$n+1$	$n+1$	2	$xy + z^{n+1} = 0$
binario diedral	$4(n-2), n \geq 4$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	4	$x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$
binario tetra.	24	12	8	6	$x^2 + y^3 + z^4 = 0$
binario octa.	48	18	12	8	$x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$
binario ico.	120	30	20	12	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

El anillo de los polinomios invariantes puede ser también calculado utilizando un teorema de Chevalley sobre grupos de reflexiones (ver por ejemplo [S]).

El morfismo de pasaje al cociente

$$q: \mathbb{C}^2 \longrightarrow S = \mathbb{C}^2 / G.$$

$$(u,v) \longmapsto (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

fuera del origen es un revestimiento de grado igual al orden del grupo G , por lo que $q(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ es regular, pero la imagen del origen es un punto singular (aislado) de la superficie cociente S . Esta última es una superficie compleja en \mathbb{C}^3 determinada por la ecuación E ; se verifica directamente que el origen es su único punto singular por el criterio jacobiano, que en este caso consiste en la anulación simultánea de las tres derivadas parciales.

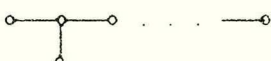
Las singularidades así obtenidas han sido posteriormente estudiadas por otros matemáticos (P.Duval [D], M.Artin [A], E.Brieskorn [B]) y caracterizadas como puntos dobles racionales (ver [A]).

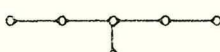
Sea $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ una desingularización minimal de S .

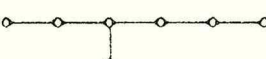
Esto significa que \tilde{S} es regular, p es un morfismo birracional, isomorfismo fuera del punto singular O de S . La minimalidad significa que \tilde{S} no contiene ninguna curva racional con auto-intersección -1 . (La auto-intersección de una curva en una superficie lisa es el grado de su fibrado normal). Sea D la fibra excepcional de la desingularización p , $D = p^{-1}(O)$. Descomponiendo D en componentes irreducibles, $D = \bigcup_{i=1}^n d_i$, y considerando las intersecciones de diferentes componentes y las auto-intersecciones de cada componente, se obtiene una descripción de la fibra excepcional D que es habitualmente representada por un grafo dual Γ . Los vértices de Γ corresponden a las componentes irreducibles d_i de D ; las aristas corresponden a los puntos de intersección y cada vértice es ponderado por la auto-intersección del d_i correspondiente. Para los puntos dobles racionales cada d_i es isomorfo a \mathbb{P}^1 y su auto-intersección es -2 , por lo que no se indicarán. Los grafos duales Γ correspondientes a los cinco tipos de singularidades de Klein, en el mismo orden que en la tabla T2, con sus denominaciones, son los siguientes :

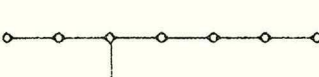
(T3) $\Gamma :$

A_n ($n \geq 1$)  (n vértices)

D_n ($n \geq 4$)  (n vértices)

E_6 

E_7 

E_8 

Si H es una intersección de S con un plano de \mathbb{C}^3 en posición general que contenga el punto singular O , la curva obtenida como imagen inversa $p^{-1}(H)$ por el morfismo de desingularización $p : \tilde{S} \longrightarrow S$, tiene componentes irreducibles contenidas en la fibra excepcional D y una componente T que no está contenido en D , llamada la transformada estricta de H .

Considerando las multiplicidades de las componentes irreducibles del divisor definido por $p^{-1}(H)$, se obtiene entonces

$$p^{-1}(H) = \mathcal{Z} + T, \text{ donde } \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n n_i d_i$$

El divisor \mathcal{Z} es llamado el ciclo fundamental de $p : \tilde{S} \longrightarrow S$.

El grafo dual Γ puede completarse con un vértice suplementario correspondiente a la transformada estricta T de $p^{-1}(H)$ y con aristas

representando las intersecciones de T con la fibra excepcional D . El grafo dual completado será notado $\tilde{\Gamma}$. En la tabla siguiente se indica para cada caso el ciclo fundamental \mathcal{Z} ; cuyos coeficientes han sido representados en el lugar del vértice correspondiente en Γ , y el grafo completado $\tilde{\Gamma}$:

(T4)

	\mathcal{Z}	$\tilde{\Gamma}$
$A_n (n \geq 1)$	1 1 ... 1 1	
$D_n (n \geq 4)$	1 2 2 ... 2 1 1	
E_6	1 2 3 2 1 2	
E_7	2 3 4 3 2 1 2	
E_8	2 4 6 5 4 3 2 3	

1.3 Correspondencia de McKay.

Sea G un subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$; sea $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ el conjunto de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles (lineales complejas) de G , donde ρ_0 es la representación trivial de rango 1.

La observación de J.McKay es la siguiente (ver [M]):

Sea c la representación de G , que llamaremos canónica, definida por la inclusión $G \subset SL_2(\mathbb{C})$. Se considera el producto tensorial de c con representación ρ_i , y se descompone este producto en suma de representaciones irreducibles:

$$c \otimes \rho_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} \rho_j, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Para todos los subgrupos finitos de $SL_2(\mathbb{C})$ se obtiene $a_{ii} = 0$, $0 \leq i \leq n$ y $a_{ij} = a_{ji}$, con $a_{ij} = 0$ o $a_{ij} = 1$, si $i \neq j$. Es decir que la matriz $C((a_{ij}))$ es simétrica, con coeficientes 0 ó 1, y diagonal nula.

A esta matriz se le asocia un grafo (o carcaj con aristas no orientadas) con un vértice para cada representación ρ_i , $0 \leq i \leq n$, y una arista entre los vértices de ρ_i y ρ_j si $a_{ij} = 1$. Los grafos así construídos coinciden, para cada grupo G , con los grafos completados $\tilde{\Gamma}$ asociados a las singularidades cocientes $S = \mathbb{C}^2 / G$ del párrafo precedente.

Haciendo corresponder al vértice suplementario de $\tilde{\Gamma}$ la representación trivial ρ_0 , se induce una biyección (módulo automorfismos de grafo) entre el conjunto $\text{Irr}(G)$ de las representaciones irreducibles no triviales de G , $\text{Irr}(G) = \{ \rho_1, \dots, \rho_n \}$ y el conjunto $\text{Irr}(D) = \{ d_1, \dots, d_n \}$ de las componentes irreducibles de la fibra excepcional $D = p^{-1}(0)$ de la desingularización minimal $p: \tilde{S} \rightarrow S$. Bajo esta biyección, los grados de las representaciones irreducibles coinciden con los coeficientes del ciclo fundamental \mathcal{Z} , que están indicados en la tabla (T4) del párrafo precedente.

(Los grafos $\tilde{\Gamma}$ son grafos de Dynkin completados; la matriz $2\mathbb{I}-C$, donde \mathbb{I} denota la matriz identidad, es la matriz de Cartan, correspondiente al sistema de raíces. Esta observación es la relación con las álgebras de Lie simples).

La obtención del mismo grafo con dos construcciones diferentes permite la correspondencia (combinatoria) señalada.

2. Construcción geométrica de la correspondencia de McKay.

La estructura geométrica de las singularidades consideradas es local, pues las singularidades son aisladas. Por lo tanto basta considerar el germen analítico (o formal) local correspondiente.

El punto de vista local es necesario para la formulación de los resultados siguientes, cuyo objeto es el de dar una construcción geométrica de la correspondencia de McKay, construcción que realiza la biyección entre representaciones G y componentes irreducibles de la fibra excepcional de la desingularización minimal de S de manera explícita y no por identificación combinatoria. Fijemos las nuevas notaciones:

V denota el germen de \mathbb{C}^2 en el origen, S el germen de la superficie cociente V/G por un subgrupo finito (no trivial) G de $SL_2(\mathbb{C})$, $0 \in S$ el punto singular, $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ la desingularización minimal. Notaremos $\text{Pic}(\tilde{S})$ el grupo de Picard de los divisores en \tilde{S} módulo equivalencia lineal (o las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales de rango 1 sobre \tilde{S} , lo que es equivalente), y $\text{Pic}_0(\tilde{S})$ el subgrupo de $\text{Pic}(\tilde{S})$ formado por los divisores con soporte en la fibra excepcional $p^{-1}(0) = D = \bigcup_{i=1}^n d_i$.

El grupo de Picard $\text{Pic}(\tilde{S})$ está provisto de una forma intersección que notaremos (\cdot, \cdot) . Asociando a un fibrado vectorial de rango 1 sobre \tilde{S} el grado de su restricción a cada d_i , se establece una aplicación de $\text{Pic}(\tilde{S})$ en \mathbb{Z}^n que es un isomorfismo para las singularidades que estamos considerando (ver [A]). El conjunto $\text{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}_0(\tilde{S})$, y el conjunto formado por los duales $\{d^{v,1}, \dots, d^{v,n}\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}(\tilde{S})$. La matriz de la inclusión $\text{Pic}_0(\tilde{S}) \subset \text{Pic}(\tilde{S})$ en estas bases es llamada la matriz intersección de la fibra excepcional.

La información obtenida en esta matriz es equivalente a la información contenida en el grafo dual ponderado Γ . El ciclo fundamental $\mathcal{Z} \in \text{Pic}_0(\tilde{S})$ es caracterizado por el hecho de ser el único ciclo minimal (con la relación de orden parcial inducida por el orden de \mathbb{Z} en los coeficientes) de la familia de los ciclos

$$\{ Y \in \text{Pic}_0(\tilde{S}) \mid Y > 0 ; (Y \cdot d_i) \leq 0, \forall i\}.$$

La construcción geométrica para asociar a cada representación irreducible no trivial de G una componente irreducible de D es la siguiente.

Para cada $\rho \in \text{Irr}(G)$, sea E_ρ el \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión igual al grado de ρ dado por la representación (i.e. un $\mathbb{C}[G]$ módulo simple). Por abuso de notación, denotaremos también E_ρ el fibrado vectorial trivial de fibra E_ρ sobre V (o el haz de O_V -módulos localmente libre de las secciones locales de ese fibrado). El grupo G opera sobre la base por la representación canónica y sobre la fibra por la representación ρ . Denotamos O_V (resp. O_S , etc.) el haz estructural de V (resp. de S , etc.).

Sea M_ρ el O_S -módulo definido por :

$$M_\rho := \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, O_V)$$

(M_ρ es canónicamente isomorfo al O_S -módulo $(O_V \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho^V})^G$, donde ρ^V denota la representación dual o contragradiente, y el exponente G significa que se consideran los puntos fijos bajo la acción de G).

Sea \tilde{M}_ρ el transformado estricto de M_ρ , como $O_{\tilde{S}}$ -módulo, p^*M_ρ módulo la $O_{\tilde{S}}$ -torsión, es decir

$$\tilde{M}_\rho := (O_{\tilde{S}} \otimes_{O_S} M_\rho) / \text{Torsión}.$$

Proposición 2.1 Con las notaciones precedentes, se tiene :

- i) $p_* m_r = M_r$ y $R^1 p_* m_r = 0$.
- ii) El O_S -módulo m_r es localmente libre de rango igual al grado de la representación r .

Para la demostración, ver [G-V].

De esta manera, para cada representación $\rho \in \text{Irr}(G)$ hemos obtenido un fibrado vectorial sobre la desingularización \tilde{S} . Para cada fibrado vectorial se puede considerar su primera clase de Chern, que es representada por un divisor en el grupo de Picard. Así se obtiene la biyección de McKay:

Teorema 2.2 Sea $\pi : \text{Irr}(G) \longrightarrow \text{Pic}(D)$ definida por

$$\pi(\rho) := c_1(\tilde{M}_\rho).$$

Entonces:

- i) Para cada $\rho_i \in \text{Irr}G$, existe un único elemento $d_i \in \text{Irr}(D)$ tal que $\pi(\rho_i) = d_i^\vee$, es decir $(\pi(\rho_i) \cdot d_j) = \delta_{ij}$. Por lo tanto π induce una biyección de $\text{Irr}(G)$ sobre $\text{Irr}(D)$; notemos d_ρ la imagen de ρ por esta biyección.
- ii) $(d_{\rho_i} \cdot d_{\rho_j}) = a_{ij}$ si $i \neq j$. Es decir que la biyección respeta las aristas del grafo de McKay.
- iii) El ciclo fundamental verifica $\mathcal{Z} = \sum (gr_r) d_r$ donde (gr_r) denota el grado de r .

Para demostrar este teorema, los ingredientes principales utilizados son los siguientes. Cada grupo binario $G \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ que se puede suponer (a menos de conjugación) subgrupo de $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ es un subgrupo de índice 2 de un grupo $G \subset \text{U}_2(\mathbb{C})$ engendrado por reflexiones. Esto es debido esencialmente al hecho de que los subgrupos poliédricos de rotaciones son subgrupos de índice 2 de grupos engendrados por reflexiones de \mathbb{R}^3 ; estos últimos son obtenidos considerando además de las rotaciones, las reflexiones que dejan invariante el poliedro. (Ver [K] o [D]). Esto permite construir resoluciones (periódicas infinitas) de los O_S -módulos M_ρ por O_S -módulos libres. (ver[G-V]).

3. Generalizaciones en característica positiva.

Sea O_S un álgebra completa local de dimensión 2 sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , con ideal maximal m , tal que $O_S/m \cong k$.

Se supone que el espectro $S = \text{Spec}(O_S)$ es un punto doble racional.

Esta es la generalización natural, para un cuerpo de cualquier característica, de las singularidades de Klein. Si la característica es nula, estas singularidades están clasificadas (a menos de isomorfismo formal, o analítico si $k = \mathbb{C}$) por el grafo dual Γ de la desingularización minimal. En característica positiva, si bien los grafos duales son los mismos que los que se encuentran en característica nula, éstos no bastan para clasificar los puntos dobles racionales.

M. Artin hizo una clasificación por medio del grupo fundamental local que clasifica los revestimientos etales (ver[A2]). El número de clases de isomorfismo, cuando difiere del caso de característica nula, está resumido en la tabla siguiente:

(T5)

característica de k	$\#D_n$	$\#E_6$	$\#E_7$	$\#E_8$
2	$\lfloor n/2 \rfloor$	2	4	5
3		2	2	3
5				2

Se observa el comportamiento siempre notable de E_8 (el "icosaedro"), en el que se invierten las características.

En característica positiva, ya no existe la construcción de singularidades cociente, por lo que hay que formular de otra manera la correspondencia de McKay. Los O_S -módulos asociados a las representaciones de G en característica nula, son reflexivos (es decir isomorfos a sus biduales) pues la dualidad de las representaciones es una involución. Entonces los objetos que se consideran son los O_S -módulos reflexivos.

Notemos MRI el conjunto de las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos inescindibles, no triviales (es decir no libres).

Haciendo una construcción análoga a la de la característica nula, se obtiene el resultado siguiente :

Teorema 3.1 Sea $p: \tilde{S} \longrightarrow S$ la desingularización minimal de S .

- i) Sea M un O_S -módulo reflexivo, $\tilde{M} = p^* M / \text{torsión}$ el transformado estricto de M . Entonces $(c_1(\tilde{M}) \cdot \mathcal{Z}) \leq \text{rango}(M)$; la igualdad es válida si y sólo si M no tiene sumandos libres.
- ii) Existe una correspondencia biyectiva entre MRI e Irr (D) tal que si la imagen de M_i es d_i , entonces $(c_1(\tilde{M}_i) \cdot d_j) = \delta_{ij}$
- iii) El carácter de Chern $(\text{rango}(\tilde{M}), c_1(\tilde{M}))$ clasifica las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos.

Para la demostración ver [A-V].

Esto establece la biyección entre los vértices; para establecer la correspondencia entre las aristas, hay que generalizar la construcción de McKay que utilizaba una representación canónica de un grupo que ya no existe sobre un cuerpo k cualquiera. Esto se subsana con el descubrimiento de un módulo reflexivo canónico, que denotaremos Ω .

Proposición 3.2

- i) Existe un O_S -módulo Ω de rango 2, único a menos de isomorfismo, extensión de m por O_S .
- ii) $\Omega \cong \Omega^*$, donde $\Omega^* = \text{Hom}_{O_S}(\Omega, O_S)$, por lo que Ω es reflexivo.
- iii) Ω no tiene sumandos libres.
- iv) $c_1(\tilde{\Omega}) + \mathcal{Z} = 0$.

Para la demostración, se aplica $R^i \text{Hom}_{O_S}(_, O_S)$ a la sucesión exacta $0 \longrightarrow m \longrightarrow O_S \longrightarrow k \longrightarrow 0$, por lo que se obtiene $\text{Ext}_{O_S}^1(m; O_S) = k$, utilizando que O_S es Gorenstein, por lo que O_S es

dualizante. Para el resto, se utiliza el teorema 3.1 y el hecho que $(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}) = -2$ para todos los puntos dobles racionales. (Ver detalles en [G-V2]).

La notación Ω para este O_S -módulo "canónico" proviene del hecho de que en característica nula $\Omega \simeq (\Omega^1, S)^{**}$.

Si M y N son O_S -módulos reflexivos, se define un "producto reflexivo", notado $M.N$ como el bidual de su producto tensorial, o de manera equivalente $M.N = \text{Hom}_{O_S}(M^*, N)$, donde M^* denota el dual de M .

Si d_i es la componente irreducible de D correspondiente a M_i por la biyección del teorema 3.1, como la expresión de $d_i \in \text{Pic}_O(\tilde{S})$ en la base $\{d_i^V\}$

de $\text{Pic}_O(\tilde{S})$ es $d_i = -2d_i^V + \sum_{j \rightarrow i} d_j^V$, donde $j \rightarrow i$ denota los vértices adyacentes

al i (correspondiente a los d_j que cortan d_i), y como $c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}_i) = \sum_{j \rightarrow i} d_j^V$ si

la regla de McKay se verifica, la traducción de esta regla es

$$c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}_i) = 2 c_1(\tilde{M}_i) + d_i.$$

Por lo tanto esta es la igualdad que se debe verificar para que la correspondencia entre los grafos respete las aristas.

Se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 3.3 Sea M un O_S -módulo reflexivo inescindible no trivial, $d^V = c_1(\tilde{M})$. Entonces,

i) $c_1(\tilde{\Omega}, \tilde{M}) = 2 c_1(\tilde{M}) + v$, donde $v = 0$ o bien $v = d$.

ii) Si $(\text{rango}(M), \text{car}(k)) = 1, v = d$; si $\text{car}(k)$ divide $\text{rango}(M)$, $v = 0$.

Esto significa que no siempre el grafo obtenido por la generalización de la construcción de McKay coincide con Γ ; esto es así si la característica de k es diferente de 2, 3 y 5, y en caso contrario existen algunos vértices "patológicos" (ver los rangos en la tabla T4). La demostración se hace

estudiando la especialización de característica 0 en característica positiva, y utilizando una resolución de Ω análoga a la de la característica nula.

También se utiliza otra caracterización de Ω :

Proposición 3.4 El O_S -módulo Ω es el segundo syzygy de m :

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow O_S^3 \longrightarrow m \longrightarrow 0 \text{ es exacta}$$

Para la demostración del teorema 3.3 y de la proposición 3.4 ver [G-V 2]. M Auslander demuestra una parte del teorema 3.3 por métodos diferentes, utilizando sucesiones casi-escindibles (ver [Au]).

En el caso en que el producto por Ω respeta la regla multiplicativa de McKay, se puede reconstruir toda la estructura multiplicativa del anillo de representaciones de un grupo que de hecho ha practicamente desaparecido:

Teorema 3.5 Sea $\mathcal{R}(s)$ el anillo de las clases de isomorfismo de O_S -módulos reflexivos provisto de la involución $*$ definida por la dualidad de O_S -módulos.

i) Si la característica de k es nula, la estructura del anillo con involución $(\mathcal{R}(s), *)$ posee las propiedades siguientes:

(A1) Verifica la regla multiplicativa de McKay.

(A2) Sea α la clase de un módulo reflexivo inescindible de rango 1; entonces $\alpha \alpha^* = 1$. Para todo par α, β de clases de módulo reflexivos inescindibles de rango 1, $\alpha \cdot \beta$ es la clase de un módulo de rango 1.

ii) Existe sobre $(\mathcal{R}(s), *)$ una sola estructura de anillo con involución que posea las propiedades A1 y A2 .

Se demuestra utilizando la clasificación de los diagramas de Dynkin Γ (ver [G-V 2]).

Referencias

- [A] M.Artin: "On isolated rational singularities of surfaces"
(Amer. J. Math. 88, 1966, p.129-136).
- [A-2] M.Artin: "Coverings of the rational double points in characteristics p."
(Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Skoten,
Tokyo 1977, p. 11-22).
- [A-V] M.Artin,J.L.Verdier: "Reflexive modules over rational double points".
(Math. Ann. 270, 1985, p. 79-82).
- [Au] M.Auslander: "Rational singularities and almost split sequences".
(Trans. A.M.S., Vol. 293, N^o2, 1986,p.511-531).
- [B] E.Brieskorn: "Rationale Singularitäten Komplexer Flächen".
(Inv. Math. 4, 1968, p. 336-358).
- [C] H.S.M.Coxeter: "Regular Polytopes"
(Dover 3rd. ed., New York, 1973).
- [D] P.Du Val: "Homographies, Quaternions and Rotations".
(Clarendon Press, Oxford 1964).
- [G-V 1] G.González-Sprinberg, J.L.Verdier: "Construction géométrique de la
correspondencia de McKay".
(Ann.Scient. Ec.Norm.sup., t.16, 1983, p.409-449).
- [G-V 2] G.González-Sprinberg, J.L.Verdier: "Structure multiplicative des
modules reflexifs sur les points doubles rationnels".
(Singularités et Géométrie complexe, Travaux en cours N^o 22,
Hermann, p. 79-110, 1987).
- [K] F.Klein: "The Icosahedron and the General 5th. Degree Equation".
(1884, Dover reprint 1956).
- [M] J.McKay: "Graphs, singularities and finite groups".
(Proc. of Symp. Pure Math., A.M.S., vol. 37, 1980, p. 183-186).
- [S] T.A.Sprinberg: "Invariant Theory".
(Sprinberg-Verlag, L.N.M. Vol. 585, 1977).

INDICE

Kac's theorem on the number of real roots and its consequences in average complexity. F.CUCKER - M.F. ROY	7
Sobre las resoluciones inmersas de superficie. G.GONZALEZ-SPRINBERG	19
Transformations des singularités. M.SEBASTIANI	39
Tangential polynomials and elliptic solitons. A. TREIBICH	47
Singularidades racionales y sucesiones casi escindidas según M. Auslander. C.CIBILS	75
Informe sobre el aspecto geométrico de la correspondencia de McKay. G.GONZALEZ -SPRINBERG	91
Indice	109

INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACION DE TRABAJOS EN LAS PMU.

INSTRUCTIONS FOR THE PRESENTATION OF ARTICLES FOR THE PMU

Dado que los artículos serán fotocopiados directamente del original, se agradece tener en cuenta las recomendaciones que siguen:

Due to the fact that the articles will be photocopied directly from the originals, we will appreciate the consideration of the following recommendations:

Tamaño de página: Tamaño del texto escrito: ancho, 13cm. y largo, 16.5 cm.

Page size: The size of the written text is: 13cm. width, and 16.5cm. length.

Datos del autor: A continuación del título conviene anotar, además del nombre del autor, su lugar de trabajo, así como consignar al final del trabajo su dirección de contacto.

Author's information: After the title it is convenient to write the author's name, his place of work, as well as at the end of the article, his contact address.

Abstract: Se debe incluir un resumen, en inglés y en el idioma del trabajo.

Abstract: A resumé in English as well as in the article's language should be included.

Numeración de las páginas: Se numerará a lápiz, para que luego se numere en función de la ubicación en el volumen.

Pages numbering: Pages should be numbered in pencil. They will be renumbered according to their place in the volume.

REFERENCIAS Se sugiere presentarlas como a continuación se indica:

REFERENCES: The following presentation is suggested:

- [9] PARANJAPÉ, S. R. and PARK, C. Distribution of the supremum of the two parameter Yeh-Wiener process on the boundary. J. Appl. Probability 10 (1973), 875-88.
- [10] PYKE, R. Multidimensional Empirical Processes: Some Comments, in Statistical Inference and Related Topics, JM. L. Puri, ed., New York, Academic Press (1975), 45-48.
- [11] WIDDER, D. V. The Heat Equation., New York, Academic Press, 1975.

TEXTO. En cuanto a la presentación del texto, el siguiente modelo es recomendable:

TEXT. The following model is recommended for the presentation of the text:

- 1. Introduction. The aim of this paper is to give upper and lower estimates for the probability density.
- 3. Two "Kolmogorov forward inequations" for p . In what follows, D denotes the differential heat operator.

THEOREM 2. The density p satisfies the inequalities
(1) $Dp \geq 0$
and

For the proof, we shall

PROOF OF THEOREM 2. Given any

Due to the fact that the
articles will be photocopied
directly from the originals,
we will appreciate the
contribution of the following
recommendations:

Dado que los artículos
serán fotocopiados
directamente del original, es
agradecido tener en cuenta las
recomendaciones que siguen.

Page size: The size of the
written text is 19cm. width
and 12.5cm. length.
Author's information:
After the title it is convenient
to write the author's name,
his place of work, as well as
at the end of the article, his
contact address.

Tamaño de página: Tamaño
del texto escrito: ancho
19cm. y largo 12.5 cm.
Datos del autor: A
continuación del título
conviene escribir, además del
nombre del autor, su lugar de
trabajo, así como consignar al
final del trabajo su dirección
de contacto.

Abstract: A resume in
English, as well as in the
Spanish of the work should be
written in English.

Resumen: Se debe incluir un
resumen en inglés y
también en español de
los datos del trabajo.

**Se terminó de imprimir
en el Departamento de Publicaciones
de la Universidad de la República
Montevideo, Uruguay
en el mes de mayo de 1990**

References: The following
references should be
presented in the
text in the following
manner:

Referencias: Se sugiere
presentar las
referencias en el
texto de la siguiente
manera:

Depósito legal 242.803

REFERENCES: The following
references should be
presented in the
text in the following
manner:

REFERENCIAS: Se sugiere
presentar las
referencias en el
texto de la siguiente
manera:

[5] PARZEN, S. F. and PARK, C. Discussion of the supramin
of the estimator Yeh-Werner process on the boundary. J.
Appl. Probability 10 (1973), 878-88.

[10] PARK, R. Multidimensional Empirical Processes. Some
Comments in Statistical Inference and Related Topics. IM. I.
Pub. of New York Academic Press (1975), 48-48.

[11] WOODER, G. V. The Heat Equation. New York, Academic Press,
1972.

TEXT: The following model is
recommended for the
presentation of the text.

TEXTO: Se sugiere a
presentación del texto de
siguiente modo en el
texto.

1. Introduction. The aim of this paper is to give upper and
lower bounds for the probability density
of the Kolmogorov forward induction for p in what
follows. D denotes the differential heat operator.

THEOREM 2. The density p satisfies the inequalities

(1) $p \geq 0$
and
For the proof, we shall

