PUBLICACIONES MATEMATICAS DEL URUGUAY

VOLUMEN 7

VOLUMEN 7

PUBLICACIONES MATEMÁTICAS DEL URUGUAY
EDITADAS POR EL CENTRO DE MATEMÁTICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, CON EL APOYO DEL PROGRAMA DE DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BÁSICAS (PEDECIBA).

Montevideo, octubre de 1997.

ISSN
0797-1443

PUBLICACIONES MATEMÁTICAS DEL URUGUAY

Las Publicaciones Matemáticas del Uruguay constituyen una serie orientada a comunicar nuevos desarrollos en la creación, enseñanza y aplicación de la Matemática. Serán considerados para su publicación en esta serie, trabajos del tipo siguiente:

1. Artículos originales y monográficos, en forma definitiva o preliminar
2. Cursos avanzados que contengan enfoques originales e informes de puesta al día sobre temas de importancia.
3. Avances de investigación
4. Actas de coloquios
5. Resúmenes de resultados ó puntos de vista nuevos.

Con estas publicaciones aspiramos a dar cuenta de la labor de los matemáticos que trabajan en el Uruguay, y a estrechar sus vínculos con la comunidad científica internacional. Por ello, solicitamos a todos los que compartan tales objetivos, que nos envíen sus colaboraciones. Proponemos establecer relaciones de canje a todos los responsables de publicaciones científicas que estén en condiciones de concertar acuerdos semejantes.

Consejo Editor.

Publicaciones Matemáticas del Uruguay is a series oriented to new developments in Mathematics. We will consider for publication:

1. Original results in the form of preprints or final versions
2. Lectures on advanced topics and up-to-date reviews on selected topics
3. Proceedings of meetings.

The Editorial Board.

Indice

Gérard González Sprinberg, Monique Lejeune-Jalabert
Courbes lisses, cycle maximal et points infiniment voisins des singularités de surfaces. 1

Rodrigo Arocena
Unitary extensions of isometries and interpolation problems: (2) Linear systems and generalized interpolation. 29

Ernesto Mordecki
Optimal stopping for a compound Poisson process with exponential jumps. 55

Adolfo J. Quiroz, Juan C. Trabucco
Kolmogorov-Smirnov type statistics for testing multivariate normality. 67

Armando Treibich, Jean-Louis Verdier
Au del des potentiels et revtements tangentiels hyperelliptiques exceptionnels. 83

COURBES LISSES, CYCLE MAXIMAL ET POINTS INFINIMENT VOISINS DES SINGULARITÉS DE SURFACES

par Gérard GONZALEZ-SPRINBERG et Monique LEJEUNE-JALABERT

(Version préliminaire)

Introduction

Pour entreprendre l'étude des familles de courbes tracées sur une singularité de surface, proposée par J. Nash, il est peut-être naturel de commencer par celle des courbes lisses.

Les objets considérés ici sont locaux ; par singularité de surface, nous entendons un germe de surface réduite équidimensionnelle (S, O) en un point singulier, formel ou analytique, défini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle ; et par courbe, une courbe paramétrée formelle.

Dans le premier paragraphe, on donne des critères d'existence de courbes lisses sur (S, O) non contenues dans le lieu singulier de S, où interviennent une désingularisation de S et le cycle maximal (Théorème 1.3) (*). On appelle désingularisation de S un morphisme propre $\pi : X \rightarrow S$ induisant un isomorphisme d'un ouvert dense de X sur l'ouvert régulier de S, tel que X soit lisse. On donne ensuite quelques exemples d'applications des critères obtenus.

Après avoir défini la notion de section hyperplane générale de (S, O), l'existence de branches lisses de celle-ci est le sujet du § 2. Les résultats (Proposition 2.4 et Théorème 2.5) font intervenir l'éclatement normalisé de centre O ou une désingularisation de S qui le domine, et une condition numérique d'intersection pour le cycle maximal.

Dans le § 3 on définit les familles de courbes lisses à partir de la désingularisation minimale π de la surface S. Ces familles, qui forment une partition de l'ensemble des courbes lisses sur S, sont associées à certaines composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ caractérisées par les critères du § 1. On précise les résultats des deux paragraphes précédents pour chacune d'elles (Propositions 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1,

(*) Ceci répond à une question posée par E. Casas.

3.3.2). En particulier, à l'aide d'applications "fibre", on détermine les points exceptionnels des transformées strictes des courbes d'une même famille par éclatement normalisé et désingularisations (Propositions 3.4.1 et 3.4.2). Chaque famille détermine une chaîne de points infiniment voisins satisfaisant une condition de minimalité (Théorème 3.5). La longueur de cette chaîne est aussi caractérisée en termes de jets des paramétrisations des courbes de la famille (Théorème 3.6.2). Les éclatements définissant la chaîne permettent de retrouver des sections hyperplanes générales possédant des branches lisses ; nous obtenons ainsi une nouvelle caractérisation des familles de courbes lisses (Théorème 3.7.2).

Le § 4 contient quelques remarques spécifiques au cas des hypersurfaces et le dernier paragraphe est consacré à un exemple.

1. Existence de courbes lisses, critères en termes de désingularisations

Soit S une surface réduite définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle, O un point de S.

On dit que S possède *la propriété* ($c\ell$) en O s'il existe une courbe lisse Γ telle que $O \in \Gamma$ et $\Gamma \setminus \{O\}$ soit contenue dans l'ouvert des points réguliers $\operatorname{Reg} S$ de S.

Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S ; on appelle *cycle maximal* le cycle $Z_X = \sum m_i E_i$ défini par la partie divisorielle de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal $\operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$ de $\mathcal{O}_{S,O}$, où les E_i sont les différentes composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$, et où les m_i sont des entiers non négatifs.

1.1. Proposition. — *Soit S une surface réduite, O un point singulier de S, et $\pi : X \to S$ une désingularisation de S telle que la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ n'ait pas de points isolés. Alors S possède la propriété ($c\ell$) si et seulement si le cycle maximal $Z_X = \sum m_i E_i$ de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ possède une composante réduite, i.e. il existe i tel que $m_i = 1$. S'il en est ainsi, $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ est localement principal au voisinage du point exceptionnel P de la transformée stricte de la courbe lisse Γ. De plus ce point est un point lisse de $\pi^{-1}(0)$ et il appartient à une composante réduite de Z_X. Inversement, si P est un tel point, il appartient à la transformée stricte d'une courbe lisse dans S.*

Preuve. — Remarquons d'abord que, puisque $\pi^{-1}(O)$ n'a pas de points isolés, la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_X$ n'est pas nulle.

Supposons qu'il existe une composante réduite E_i du cycle maximal Z_X. On choisit un point non singulier P de E_i n'appartenant à aucune autre composante de $\pi^{-1}(O)$, et n'appartenant pas non plus au support de la partie immergée de $m\mathcal{O}_X$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système minimal de générateurs de m. Soit (u, v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$; on a $(u, v) = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{X,P}$. Puisque E_i est non singulier en P, on peut supposer que E_i est défini au voisinage de P par $u = 0$. D'autre part, le lieu singulier $\operatorname{Sing} S$ de S est de dimension au plus 1 car S est une surface réduite, et π étant une désingularisation il en est de même de $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} S)$. On peut donc supposer de plus que $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} S) \cap \{v = 0\} = \{P\}$ au voisinage de P. Soit π donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u, v)$, $1 \leq j \leq n$. On a donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (u)$, et on peut supposer que $\varphi_1 = *u$ (où $*$ est une unité) en réindexant au besoin les coordonnées. Soit $\widetilde{\Gamma}$ la courbe définie par $u = t$, $v = 0$. Alors la courbe $\Gamma := \pi(\widetilde{\Gamma})$ est lisse et $\Gamma \setminus \{0\} \subset \operatorname{Reg} S$, car Γ est définie par $x_1 = *t$, $x_i = \varphi_i(t, 0)$, $2 \leq i \leq n$, et d'autre part $\widetilde{\Gamma} \setminus \{P\} \subset \pi^{-1}(\operatorname{Reg} S)$.

Inversement, supposons que S possède la propriété ($c\ell$) ; soit Γ une courbe lisse par O telle que $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$. Soit $\widetilde{\Gamma}$ la transformée stricte de Γ par π, et P le point de $\widetilde{\Gamma}$ se projetant sur O. Alors $\widetilde{\Gamma}$ est lisse. Soit encore (u, v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$, $\big(u(t), v(t)\big)$ une paramétrisation de $\widetilde{\Gamma}$. Soit g un générateur de la partie divisorielle de $m\mathcal{O}_{X,P}$ qui est non nulle puisque P n'est pas un point isolé de $\pi^{-1}(O)$. Soit π donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u, v)$, $1 \leq j \leq n$, au voisinage de P. Posant $\varphi_j = g\psi_j$, $1 \leq j \leq n$, on a, puisque Γ est lisse,

$$\inf_{1 \leq j \leq n} \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t), v(t)\big) = 1 .$$

Or :

$$1 \leq \operatorname{ord}_t g\big(u(t), v(t)\big) \leq \inf_{1 \leq j \leq n} \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t), v(t)\big) = 1 .$$

Donc

$$\inf_{1 \leq j \leq n} \operatorname{ord}_t \psi_j\big(u(t), v(t)\big) = 0$$

et $g \in M \setminus M^2$ où $M = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{X,P}$. Il existe donc j, tel que ψ_j soit une unité. Au voisinage de P, $m\mathcal{O}_{X,P}$ est donc principal, $\pi^{-1}(O)$ est non singulier et Z_X est un diviseur réduit, irréductible, lisse.

1.2. Corollaire. — *Soit S une surface réduite, O un point singulier de S, et $\pi : X \to S$ une désingularisation .*

Si $m\mathcal{O}_X$ est localement principal, ou bien si S est une surface normale et π est une désingularisation quelconque, par exemple la désingularisation minimale, alors la propriété ($c\ell$) est équivalente à l'existence d'une composante réduite du cycle maximal Z_X.

Preuve . — En effet, si $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ est localement principal, alors la fibre exceptionnelle n'a pas de points isolés ; et si S est normale, alors $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ n'est pas forcément localement principal, mais la fibre exceptionnelle est connexe et de dimension 1 ("main theorem" de Zariski). Alors l'équivalence résulte de la proposition 1.1.

1.3. THÉORÈME. — *Soit S une surface réduite, O un point de S, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,O}$, $\pi : X \to S$ une désingularisation . Alors la propriété $(c\ell)$ est équivalente à : ou bien le cycle maximal défini par la partie divisorielle de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ est non nul et possède une composante réduite, ou bien il existe un point isolé P de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ et un entier $m \geq 1$ tel que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$ pour un système régulier de paramètres convenable (u, v) de $\mathcal{O}_{X,P}$.*

Preuve . — Si S possède la propriété $(c\ell)$, soit Γ une courbe lisse, $\widetilde{\Gamma}$ sa transformée stricte dans X, et P le point de $\widetilde{\Gamma}$ se projetant sur O. Si P n'est pas un point isolé de $\pi^{-1}(O)$, alors la partie divisorielle de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ est non nulle et possède une composante réduite, par la proposition 1.1. Si P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$, (u, v) un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,P}$, et si π est donné (formellement) par $x_j = \varphi_j(u, v)$, $1 \leq j \leq n$ et $\widetilde{\Gamma}$ par $\big(u(t), v(t)\big)$, alors on a :

$$1 = \inf \operatorname{ord}_t \varphi_j\big(u(t), v(t)\big)$$

car Γ est lisse. Il existe donc j, par exemple 1, tel que $\varphi_j \in M \setminus M^2$, où $M = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{X,P}$. On peut donc supposer que $\varphi_1 = u$, et qu'il existe $\lambda_i(v)$ (une unité, si $\varphi_i \not\equiv 0 \pmod u$), et m_i entier, $m_i \geq 1$, tels que $\varphi_i \equiv \lambda_i v^{m_i} \pmod u$, $2 \leq i \leq n$.

L'ensemble $\{m_i | \lambda_i \text{ unité }, 2 \leq i \leq n\}$ est non vide, car P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$.

Par suite $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$ où $m = \inf\{m_i | \lambda_i \text{ unité }, 2 \leq i \leq n\}$, et on a $m \geq 1$.

Inversement, si la partie divisorielle de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ contient une composante réduite, l'argument est identique à celui de la proposition 1.1, et S possède la propriété $(c\ell)$. Si maintenant P est un point isolé de $\pi^{-1}(O)$ tel que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P} = (u, v^m)$, soit $\widetilde{\Gamma}$ la courbe définie par $u = t$; $v = tf(t)$, où $f(t)$ est tel que $\widetilde{\Gamma} \setminus \{P\}$ évite l'image réciproque de $\operatorname{Sing} S$. Alors $\Gamma := \pi(\widetilde{\Gamma})$ est définie par $x_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, et comme $\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \big(u(t), v^m(t)\big) = (t)$, cette courbe est lisse et $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$.

1.4. REMARQUE. — Les idéaux de type (u, v^m), $m \geq 1$, dans un anneau local régulier R de dimension 2, qui interviennent dans l'énoncé du théorème 1.3 sont caractérisés par la propriété suivante : soit I un idéal de R, primaire pour l'idéal maximal M. Il existe un système régulier de paramètres (u, v) de R et $m \geq 1$ tel que $I = (u, v^m)$

si et seulement si on a $\nu_M(I) = 1$, où $\nu_M(I) = \sup(n \in \mathbb{N} | I \subset M^n)$. Le nombre $\nu_M(I)$ est aussi la multiplicité avec laquelle apparaît le diviseur exceptionnel E_1 dans la partie divisorielle de la transformée totale de I par l'éclatement de l'idéal maximal de Spec R.

La transformée totale de I devient un diviseur à croisements normaux après une suite de m éclatements de points et le cycle associé est $E_1 + 2E_2 + \cdots + mE_m$ où E_i est la transformée stricte de la composante exceptionnelle introduite au i-ième éclatement, $1 \leq i \leq m$. Le graphe dual pondéré est :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & & E_2 & & E_{m-1} & & E_m \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{---} & \bullet \\ -2 & & -2 & & -2 & & -1 \end{array}$$

1.5. Exemples d'application des critères précédents.

(a). — La singularité de type $\mathbb{A}_n$ de la surface S d'équation $xy = z^{n+1}$, $n \geq 1$, possède la propriété $(c\ell)$. En effet, la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(O)$ de la désingularisation minimale $\pi : X \longrightarrow S$ est la réunion de n courbes rationnelles lisses E_i, $1 \leq i \leq n$, et le cycle maximal associé à $m\mathcal{O}_X$ (qui est localement principal) est réduit et s'écrit $Z_X = E_1 + \cdots + E_n$. Pour chaque composante exceptionnelle E_i et pour chaque point P de E_i qui n'appartient pas à l'intersection de E_i avec d'autres composantes exceptionnelles, il existe des courbes lisses Γ dans S dont la transformée stricte $\widetilde{\Gamma}$ contient P, est lisse et transverse à E_i en P, par la proposition 1.1.

(b). — Les singularités toriques de surfaces (ou éventails de dimension 2) possèdent la propriété $(c\ell)$, car l'idéal maximal devient localement principal dans la désingularisation minimale, la fibre exceptionnelle est une chaîne de courbes rationnelles lisses et le cycle maximal est réduit ([TE], [A]). Les singularités d'hypersurface de type $\mathbb{A}_n$ sont les seules intersections complètes parmi les singularités toriques.

(c). — Plus généralement, on peut appliquer les critères de la proposition et du théorème précédents pour les singularités rationnelles, en connaissant seulement le graphe dual pondéré du diviseur exceptionnel de la désingularisation minimale. En effet, celui-ci détermine le cycle fondamental, qui coïncide avec le cycle maximal [A].

Ainsi, par exemple, les points doubles rationnels de type $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$ et $\mathbb{E}_7$ possèdent la propriété $(c\ell)$.

(d). — La singularité de type $\mathbb{E}_8$ de la surface S d'équation $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ ne possède pas la propriété $(c\ell)$. En effet, le graphe dual de la désingularisation minimale est , où chaque sommet représente une courbe

rationnelle lisse d'auto-intersection -2, et les multiplicités des composantes du cycle fondamental, suivant le graphe précédent, sont : $\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ & & 3 & & & & \end{array}$. Donc, il n'y a aucune composante réduite du cycle maximal et par suite aucune courbe lisse.

(e). — Soit S le parapluie de Whitney d'équation $x^2 = y^2 z$. La normalisation $n : \overline{S} \to S$ est la désingularisation minimale de S ; la fibre exceptionnelle $n^{-1}(O)$ est un point isolé P, au voisinage duquel n est donnée par $x = uv$, $y = u$, $z = v^2$, où (u, v) est un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{\overline{S},P}$. Par suite, si m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,O}$, on a $m\mathcal{O}_{\overline{S},P} = (u, v^2)$. Par suite, S possède la propriété $(c\ell)$ en O (théorème 1.3). Par exemple, on a les courbes lisses $\Gamma_{\alpha,\beta}$ donnés par $x = \alpha\beta t^{n+1}$, $y = \alpha t$, $z = \beta^2 t^{2n}$, avec $\alpha, \beta \in k$, $\alpha \neq 0$.

2. Courbes lisses et section hyperplane générale

Nous commençons par préciser la notion de section hyperplane générale d'un germe de surface réduite (S, O). Il s'agit de celle de l'énoncé de [GS 2] 2.1, définie en terme de l'éclatement normalisé de O. Soit $\sigma_1 : S_1 \to (S, O)$ l'éclatement de O, $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ la normalisation de S_1, $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$ l'éclatement normalisé. Notons Z_1 (resp. $\overline{Z}_1$) le cycle maximal défini par $m\mathcal{O}_{S_1}$ (resp. $m\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$) et $|Z_1|$ (resp. $|\overline{Z}_1|$) la courbe réduite sous-jacente. Les cycles Z_1 et $\overline{Z}_1$ proviennent de diviseurs de Cartier respectivement sur S_1 et $\overline{S}_1$; $|Z_1|$ et $|\overline{Z}_1|$ sont des diviseurs de Weil.

Enfin, soit $C_{S,O} = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n \geq 0} m^n / m^{n+1}$ le cône tangent à S en 0, $T_{S,O} = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym} m/m^2$ son espace tangent de Zariski. On a $\operatorname{Proj} |C_{S,O}| = |Z_1| = \sigma_1^{-1}(O)$.

2.1. Définition. — On désigne par *section hyperplane* de (S, O) une courbe (non nécessairement réduite) sur (S, O) admettant pour équation locale $h = 0$ où $h \in m \setminus m^2$.

On dit qu'elle est *générale* si l'hyperplan H de $\operatorname{Proj} T_{S,O}$, ayant pour équation homogène $h \bmod m^2 = 0$, coupe transversalement $\operatorname{Proj} |C_{S,O}| = \sigma_1^{-1}(O)$ en évitant ses points singuliers, les images par n_1 des points singuliers (isolés) de $\overline{S}_1$ et des points de ramification de la restriction $n_{1||\overline{Z}_1|} : |\overline{Z}_1| \to |Z_1|$, enfin, si O n'est pas un point singulier isolé de S, la transformée stricte de $\operatorname{Sing} S$.

Les *génératrices* de $C_{S,O}$ correspondant aux points de $\sigma_1^{-1}(O)$ énumérés ci-dessus seront dites *spéciales*.

Il résulte du théorème de Bertini que l'ensemble des hyperplans vérifiant les conditions ci-dessus est un ouvert de Zariski dense U du système linéaire des hyperplans de $\operatorname{Proj} T_{S,0}$ vu comme espace projectif.

Soit $h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ tel que $H \in U$ et désignons par C_h (resp. T_h) la section hyperplane générale de (S, O) d'équation $h = 0$ (resp. sa transformée stricte sur $\overline{S}_1$). La section hyperplane générale C_h est une courbe génériquement réduite et elle possède un point immergé en O si et seulement si $\mathcal{O}_{S,O}$ n'est pas un anneau Cohen-Macaulay ; T_h et $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ se coupent transversalement en des points non singuliers de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$, de $\overline{S}_1$ et de T_h n'appartenant pas à la transformée stricte de $\operatorname{Sing} S$ sur $\overline{S}_1$ si $\dim \operatorname{Sing} S = 1$ ([GS 2] 2.1).

Soit $E_1, \ldots, E_s$ les composantes irréductibles de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$. On a $\overline{\mathcal{Z}}_1 = \sum|1 \leq j \leq s| m_j E_j$ où $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$.

2.2. LEMME. — *Avec les notations précédentes, si $H \in U$, $(T_h \cdot E_j)$ est un entier strictement positif indépendant de h égal à $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$ et la courbe C_h a $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot |\overline{\mathcal{Z}}_1|)$ branches (composantes analytiquement irréductibles de dimension 1) dont $-(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$ de multiplicité m_j en O.*

Démonstration . — Montrons d'abord que $(T_h \cdot E_j) > 0$. La courbe T_h est non singulière donc c'est la normalisation de C_h. Elle coupe transversalement $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ en des points non singuliers de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$. Le nombre de branches de C_h est donc $\sum|1 \leq j \leq s|(T_h \cdot E_j) = (T_h \cdot |\overline{\mathcal{Z}}_1|)$, car un point non singulier de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ appartient à un unique E_j, $1 \leq j \leq s$. D'autre part, les points d'intersection de T_h avec E_j, $1 \leq j \leq s$, sont les images réciproques par $n_{1|E_j}$ des points de $n_1(E_j)$ appartenant à la transformée stricte de C_h sur S_1, c'est-à-dire des points d'intersection de la composante irréductible $n_1(E_j)$ de $\operatorname{Proj}(C_{S,0})$ avec l'hyperplan H. Par définition de U, les points d'intersection de T_h et E_j ne sont pas des points de ramification de $n_{1|E_j}$; $(T_h \cdot E_j)$ est donc le produit du degré de la courbe projective $n_1(E_j)$ par le degré de la restriction de n_1 à E_j sur son image. En particulier, c'est un entier strictement positif et indépendant de h tel que $H \in U$. Enfin, soit $\mathcal{Z}_h$ le cycle à support exceptionnel tel que $(h) = \mathcal{Z}_h + T_h$. Pour montrer que, si $H \in U$, $(T_h \cdot E_j) = -(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$, il suffit qu'il existe h tel que $H \in U$ et que $\mathcal{Z}_h = \overline{\mathcal{Z}}_1$. Mais cette condition détermine un ouvert de Zariski dense de l'ensemble des hyperplans de $\operatorname{Proj} T_{S,O}$, donc il existe un tel h.

Montrons maintenant que la multiplicité d'une branche Γ de C_h dont la transformée stricte sur $\overline{S}_1$ intersecte E_j est m_j. Soit P un tel point d'intersection ;

c'est un point non singulier de $\overline{S}_1$ et de E_j et $P \notin E_{j'}$ si $j' \neq j$. Il existe donc un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{\overline{S}_1, P}$ tel que u engendre l'idéal définissant E_j localement en P, et un système minimal de générateurs de $\mathfrak{m}$, $(x_1, \ldots, x_n)$, tel que $x_i = u^{m_j}\varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{O}_{\overline{S}_1, P}$, $1 \leq i \leq n$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (1)$. D'autre part, si $(u(t), v(t))$ est la paramétrisation de T_h, on a $\mathrm{ord}_t\, u(t) = (T_h \cdot E_j)_P = 1$. D'où

$$\mathrm{mult}_O\, \Gamma = \inf_{1 \leq i \leq n} \mathrm{ord}_t\, x_i(t) = m_j\ .$$

Remarque. — Si $H \in U$, alors la partie exceptionnelle $\mathcal{Z}_h$ de (h) est $\overline{\mathcal{Z}}_1$, i.e. $(h) = \overline{\mathcal{Z}}_1 + T_h$. En effet, dans le lemme précédent, nous avons montré que $(T_h \cdot E_j) = -(\overline{\mathcal{Z}}_1 \cdot E_j)$. Puisque $(h) = \mathcal{Z}_h + T_h$, on a $(T_h \cdot E_j) = -(\mathcal{Z}_h \cdot E_j)$, d'où $((\mathcal{Z}_h - \overline{\mathcal{Z}}_1) \cdot E_j) = 0$, $1 \leq j \leq s$. Or, Mumford a défini une théorie de l'intersection des diviseurs de Weil sur une surface normale à coefficients rationnels. En suivant, mutatis mutandis, la démonstration de [M], on montre que la matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)$ est définie (négative) d'où $\mathcal{Z}_h = \overline{\mathcal{Z}}_1$.

2.3. Définition. — On dit que S possède la *propriété* $(c\ell\ h)$ en O s'il existe une section hyperplane générale de (S, O) qui possède une branche lisse.

Il résulte immédiatement de 2.2 que s'il en est ainsi, toute section hyperplane générale de (S, O) possède une branche lisse et qu'on a le critère suivant :

2.4. Proposition. — *Soit S une surface et $\overline{\sigma}_1 : \overline{S}_1 \to (S, O)$ l'éclatement normalisé de O. Alors S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si le cycle maximal $\overline{\mathcal{Z}}_1 = \Sigma m_i E_i$ de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$ possède une composante réduite, i.e. il existe i tel que $m_i = 1$.*

2.5. Théorème. — *Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S telle que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ soit inversible et soit $\mathcal{Z}_X = \Sigma m_i E_i$ le cycle maximal de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$. Alors S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si $\mathcal{Z}_X$ possède une composante réduite E_i telle que $(\mathcal{Z}_X \cdot E_i) < 0$.*

Démonstration . — A cause des propriétés universelles de l'éclatement et de la normalisation, il existe $\pi_1 : X \to \overline{S}_1$ tel que $\pi = \overline{\sigma}_1 \circ \pi_1$ et on a $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X = \pi_1^*(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\overline{S}_1})$. Puisque $\overline{S}_1$ est une surface normale, π_1 induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de chacune des composantes irréductibles de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$, la courbe exceptionnelle de $\overline{\sigma}_1$. En réindexant au besoin les E_i, on peut donc supposer que la transformée stricte de $|\overline{\mathcal{Z}}_1|$ sur X est $\bigcup_{1 \leq i \leq s} E_i$ et que si $i > s$, π_1 contracte E_i en un point (π_1 peut évidemment ne contracter aucune courbe par exemple si $\overline{S}_1$ est non singulière). On a donc : $\overline{Z}_1 = \sum |1 \leq i \leq s| m_i \pi_1(E_i)$ où $\pi_1(E_i)$ désigne l'image ensembliste de E_i et d'après 2.4, S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O si et seulement si il existe i, $1 \leq i \leq s$ tel que $m_i = 1$.

Pour conclure, il suffit de constater que $(Z_X \cdot E_i) < 0$ si $1 \leq i \leq s$ et $(Z_X \cdot E_i) = 0$ si $i > s$.

Or le morphisme π_1 étant propre et Z_X étant l'image réciproque de $\overline{Z}_1$ en tant que diviseurs de Cartier, on peut appliquer la formule de projection. On a $(Z_X \cdot E_i) = \left(\overline{Z}_1 \cdot \pi_1(E_i)\right)$ où ici $\pi_1(E_i)$ désigne l'image de E_i en tant que cycle. Si $1 \leq i \leq s$, le degré de la restriction de π_1 à E_i sur son image dans $\overline{S}_1$ est 1. Si nous désignons encore par E_i cette image (cette notation est cohérente avec celles précédemment utilisées), on obtient donc $(Z_X \cdot E_i) = (\overline{Z}_1 \cdot E_i)$ et nous avons vu (2.2) que c'est un entier strictement négatif. Par contre, si $i > s$, le cycle $\pi_1(E_i)$ est nul car π_1 contracte E_i en un point. D'où $(Z_X \cdot E_i) = 0$.

2.6. Exemples.

Nous reprenons dans *(a)*, *(b)*, *(c)* quelques exemples de 1.5.

(a). — La singularité A_n à l'origine de S d'équation $xy = z^{n+1}$ possède la propriété $(c\ell\ h)$. Le critère 2.5 s'applique à la désingularisation minimale π de S. Le graphe dual pondéré du diviseur exceptionnel de π est :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & & E_2 & & E_{n-1} & & E_n \\ \bullet & \text{———} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{———} & \bullet \\ -2 & & -2 & & -2 & & -2 \end{array}$$

et $(Z_X \cdot E_i) = \left((E_1 + \cdots + E_n) \cdot E_i\right)$ vaut -2 si $n = 1$ et $i = 1$, vaut -1 si $n \geq 2$ et $i = 1$ ou $i = n$ et vaut 0 si $n \geq 2$ et $1 < i < n$. Dans tous les cas, une section hyperplane générale quelconque possède 2 branches lisses. Si $n = 1$, elles se relèvent transversalement à E_1 ; $C_{S,O}$ n'a pas de génératrices spéciales ; et par tout point de E_1 se relève une branche d'une section hyperplane générale. (En ce cas, C_h est générale si $h = \lambda x + \mu y + \nu z \mod m^2$ avec $4\lambda\mu - \nu^2 \neq 0$). Si $n \geq 2$, l'une se relève transversalement à E_1, l'autre à E_n. L'unique génératrice spéciale de $C_{S,0}$ est son lieu singulier ($x = y = 0$). De même par tout point de E_1 ou E_n n'appartenant pas à E_2 ou E_{n-1} se relève une branche d'une section hyperplane générale. (C_h est générale si $\nu \neq 0$).

(b). — Plus généralement, les singularités toriques de surfaces possèdent la propriété $(c\ell\ h)$. Ici aussi, le critère 2.5 s'applique à la désingularisation minimale π de S. Le graphe pondéré du diviseur exceptionnel de π est :

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & & E_2 & & E_{n-1} & & E_n \\ \bullet & \text{———} & \bullet & \cdots & \bullet & \text{———} & \bullet \\ -a_1 & & -a_2 & & -a_{n-1} & & -a_n \end{array}$$

avec $a_i \geq 2$ [TE]. On a encore $Z_X = E_1 + \cdots + E_n$ et si $n = 1$, $(Z_X \cdot E_1) = -a_1$, si $n \geq 2$, $(Z_X \cdot E_1) = -a_1 + 1$, $(Z_X \cdot E_i) = -a_i + 2$, $1 < i < n$, $(Z_X \cdot E_n) = -a_n + 1$. Toutes les branches d'une section hyperplane générale quelconque sont lisses. Si $n = 1$, il y en a a_1 ; si $n \geq 2$, il y en a $(a_1 - 1) + (a_n - 1) + \sum |1 < i < n|(a_i - 2)$. Parmi elles, $a_1 - 1$ (resp. $a_n - 1$) se relèvent sur X transversalement à E_1 (resp. E_n), $a_i - 2$ à E_i, $1 < i < n$. Dans l'éventail qui décrit la désingularisation minimale de la surface, les E_i tels que $a_i > 2$, $i \neq 1$, $i \neq n$ correspondent aux points anguleux de la ligne polygonale joignant les points primitifs des arêtes ([GS 1]).

Ici $\overline{S}_1$ coïncide avec S_1, car les singularités toriques sont des singularités rationnelles. Au vu de l'éventail, les points singuliers éventuels de $\overline{S}_1$ sont à l'intersection de 2 composantes irréductibles de $\overline{\sigma}_1^{-1}(O)$. Par suite les génératrices spéciales sont données exactement par les points singuliers de $\overline{\sigma}_1^{-1}(O)$ et par tout point n'appartenant qu'à un seul E_1, E_n ou E_i telque $1 < i < n$ et $a_i \neq 2$ se relève donc une branche d'une section hyperplane générale.

(c). — Le théorème 2.5 permet de vérifier au vu de leurs graphes pondérés et arpès avoir déterminés le cycle fondamental que $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ne possèdent pas la propriété $(c\ell\ h)$; E_8 ne possédant pas la propriété $(c\ell)$, a fortiori elle ne possède pas $(c\ell\ h)$.

(d). — La singularité elliptique simple à l'origine de S d'équation $x^2+y^3+z^6 = 0$ possède la propriété $(c\ell)$. En effet, $x = i\sqrt{2}t^3$, $y = t^2$, $z = t$ est une courbe lisse tracée sur S. D'autre part, on vérifie que la surface S_1 obtenue par éclatement de O est normale et que $Z_1 = 2F$ où $F \simeq \mathbb{P}^1$, donc par 2.4, elle ne possède pas la propriété $(c\ell\ h)$.

Si $\pi : X \to S$ est la désingularisation minimale, on sait que $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique E d'auto-intersection -1 et que $\mathcal{m}\mathcal{O}_X$ n'est pas localement principal. On constate donc que $Z_X = E$ (par 1.1) et que $(Z_X \cdot E) = -1 < 0$ puisque $(E^2) = -1$. Ceci montre que l'hypothèse d'inversibilité de $\mathcal{m}\mathcal{O}_X$ est essentielle pour la caractérisation de la propriété $(c\ell\ h)$ que nous obtenons dans 2.5.

Nous reviendrons en détail sur cet exemple au § 5.

3. Familles de courbes lisses et points infiniment voisins

Si une surface S possède la propriété ($c\ell$) en O, les courbes lisses sur S passant par O se subdivisent en familles que nous allons maintenant définir en suivant librement une idée de J. Nash [N].

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des courbes lisses Γ sur S passant par O telles que $\Gamma \setminus \{O\}$ soit contenu dans $\operatorname{Reg} S$. Si $\sigma : \widetilde{S} \to S$ est un morphisme propre induisant un isomorphisme de $\sigma^{-1}(\operatorname{Reg} S)$ sur $\operatorname{Reg} S$, et si $\Gamma \in \mathcal{L}$, $\Gamma_{\widetilde{S}}$ désignera sa transformée stricte sur $\widetilde{S}$. Le morphisme σ détermine une *application "fibre"* $F_{\widetilde{S}} : \mathcal{L} \to \sigma^{-1}(O)$ en faisant correspondre à $\Gamma \in \mathcal{L}$ le point exceptionnel de $\Gamma_{\widetilde{S}}$.

3.1. Proposition. — *Soit $\pi : X \to S$ une désingularisation de S et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des composantes irréductibles, courbes ou points isolés, de $\pi^{-1}(O)$. On a :*

$$\mathcal{L} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{L}_E \text{ où } \mathcal{L}_E := \{\Gamma \in \mathcal{L} | F_X(\Gamma) \in E\}$$

et

$$\mathcal{L}_{E_1} \cap \mathcal{L}_{E_2} = \emptyset \text{ si } E_1 \neq E_2 .$$

Démonstration . — Soit $n : \overline{S} \to S$ la normalisation de S, $O_1, \ldots, O_f$ les points de $\overline{S}$ au-dessus de O (f est le nombre de composantes analytiquement irréductibles ou feuillets de S passant par O) et soit $\overline{\pi} : X \to \overline{S}$ tel que $\pi = n \circ \overline{\pi}$. Si $\mathcal{L}_i = \{\Gamma \in \mathcal{L} \mid F_{\overline{S}}(\Gamma) = O_i\}$ et $\mathcal{E}_i$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles de $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$, on a : $\mathcal{E} = \bigcup_{1 \leq i \leq f} \mathcal{E}_i$, $\mathcal{L}_i = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_i} \mathcal{L}_E$, $1 \leq i \leq f$, $\mathcal{L} = \bigcup_{1 \leq i \leq f} \mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Or, la fibre exceptionnelle $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$ étant connexe, ou bien elle n'a pas de points isolés ou bien elle contient un seul point P et il existe $O_i \in \operatorname{Reg} \overline{S}$, $1 \leq i \leq f$ tel que $(X, P) \simeq (\overline{S}, O_i)$. Dans le premier cas, il résulte de 1.1 appliqué à $(\overline{S}, O_i)$ et $\overline{\pi}$ que si $E, F \in \mathcal{E}_i$ et $E \neq F$, $\mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F = \emptyset$. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{L}_i$, $\Gamma_{\overline{S}}$ est lisse en O_i et Γ_X est la transformée stricte de $\Gamma_{\overline{S}}$ sur X. Son point exceptionnel $F_X(\Gamma_{\overline{S}}) = F_X(\Gamma)$ est donc un point lisse de $\overline{\pi}^{-1}(O_i)$ et n'appartient ainsi qu'à un seul $E \in \mathcal{E}_i$. Dans le 2ème cas, S possède un feuillet dont la normalisation est lisse et $\mathcal{E}_i = \{P\}$.

Pour montrer que la partition de $\mathcal{L}$ obtenue à partir de la désingularisation minimale est la moins fine, il suffit de comparer les partitions obtenues à partir de

π et de $\widetilde{\pi} = \pi \circ \tau$ où $\tau : \widetilde{X} \to X$ est l'éclatement d'un point P de $\pi^{-1}(O)$. En effet, un morphisme propre et birationnel entre surfaces lisses est une suite d'éclatements de points.

Soit F le diviseur exceptionnel de τ et soit $\widetilde{E}$ la transformée stricte de $E \in \mathcal{E}$ par τ si $\dim E = 1$, son image réciproque si $\dim E = 0$ et $E \neq P$. Si $\widetilde{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des composantes irréductibles de $\widetilde{\pi}^{-1}(O)$, on a : $\widetilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{\{E \in \mathcal{E} \mid E \neq \{P\}\}} \widetilde{E} \cup F$. Si $P \notin F_X(\mathcal{L})$, $E \in \mathcal{E}$ et $E \neq \{P\}$, alors $\mathcal{L}_{\widetilde{E}} = \mathcal{L}_E$ et $\mathcal{L}_F = \emptyset$. Les 2 partitions sont identiques. Si $P \in F_X(\mathcal{L})$, alors il existe $E_0 \in \mathcal{E}$ unique tel que $P \in E_0$. Si $E \in \mathcal{E}$ et $E \neq E_0$, alors $\mathcal{L}_{\widetilde{E}} = \mathcal{L}_E$. Si $E_0 = \{P\}$, on a $\mathcal{L}_{E_0} = \mathcal{L}_F$, les 2 partitions restent identiques ; par contre si $\dim E_0 = 1$, $\mathcal{L}_{E_0} = \mathcal{L}_{\widetilde{E}_0} \cup \mathcal{L}_F$ car P est un point lisse de E_0 (1.1). La partition provenant de $\widetilde{\pi}$ est plus fine que celle provenant de π. ■

3.2. DÉFINITION. — Une *famille de courbes lisses* sur (S, O) est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}$ apparaissant dans la partition de $\mathcal{L}$ obtenue dans 3.1 à partir de la désingularisation minimale. Par extension, si $E \in \mathcal{E}$ et si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, nous dirons que S possède la *propriété* ($c\ell$) *en* O *relativement à* E.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $\pi : X \to S$ désignera la désingularisation minimale de S.

En suivant la preuve de 1.1, on obtient :

3.2.1. PROPOSITION. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est une courbe, $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ si et seulement si la multiplicité $m(E)$ avec laquelle E apparaît dans le cycle maximal $\mathcal{Z}_X$ défini par la partie divisorielle de $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ vaut 1 ; s'il en est ainsi $U_E := F_X(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert de Zariski dense de E et on a :*

$$E \setminus U_E = \{P \in E \mid P \in \operatorname{Sing} \pi^{-1}(O)\} \cup \{P \in E \mid \mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,P} \text{ n'est pas un idéal principal}\} .$$

3.2.2. PROPOSITION. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est un point, $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ si et seulement si il existe un entier $m \geq 1$ et un système régulier de paramètres (u, v) de $\mathcal{O}_{X,E}$ tel que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,E} = (u, v^m)$.*

S'il en est ainsi, S possède un feuillet dont la normalisation est lisse au voisinage de E et dont toute section hyperplane générale ne possède qu'une seule branche de multiplicité m en O.

Démonstration . — La première partie de l'énoncé résulte de 1.4. Supposons $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Comme $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,E} = (u, v^m)$, pour presque tout $h \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, E est un point lisse de la transformée stricte sur X de la section hyperplane C_h de S et C_h possède donc une seule branche Γ_h sur le feuillet de (S, O) dont la normalisation est isomorphe à (X, E) et de ce fait est lisse. Soit $\tau_1 : X_1 \to (X, E)$ la suite de m éclatements de points qui rend $m\mathcal{O}_{X_1}$ inversible introduite dans 1.4 et soit $\pi_1 : X_1 \to \overline{S}_1$ tel que $\pi \circ \tau_1 = \bar{\sigma}_1 \circ \pi_1$ où $\bar{\sigma}_1$ est l'éclatement normalisé de O. Le cycle maximal $\mathcal{Z}_{X_1}$ de $m\mathcal{O}_{X_1}$ est : $E_1 + 2E_2 + \cdots + mE_m$. On a $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_m) = -1$ et $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_i) = 0$, $1 \leq i \leq m-1$. Donc d'une part, la transformée stricte de Γ_h sur X_1 est analytiquement irréductible et intersecte transversalement E_m, d'autre part π_1 ne contracte pas E_m en un point.

Comme dans 2.5, le coefficient avec lequel $\pi_1(E_m)$ apparaît dans le cycle maximal $\overline{\mathcal{Z}}_1$ est encore m. La multiplicité de Γ_h est donc m par 2.2.

Remarque. — Si le feuillet $\mathcal{F}$ de S dont la normalisation passe par E a une singularité isolée en O, cette condition est encore équivalente à $Eu_O(\mathcal{F}) = 1$ où $Eu_O(\mathcal{F})$ est l'invariant d'Euler local de $\mathcal{F}$ en O ([GS 2]), remarque 4.2).

3.3. Définition. — Si $E \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{L}_E$ contient une branche lisse d'une section hyperplane générale de (S, O), nous dirons que S possède la *propriété* ($c\ell$ h) *en* P *relativement* à E.

Cependant nous verrons que s'il en est ainsi toute courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ n'est pas nécessairement une branche d'une section hyperplane générale de (S, O).

Les résultats du § 2 vont nous permettre de caractériser ceux des $E \in \mathcal{E}$ tels que S possède la propriété ($c\ell$ h) en O relativement à E.

Remarquons d'abord que si $\pi_1 : X_1 \to S_1$ est la désingularisation minimale de l'éclaté S_1 de S en O, alors il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & S \end{array}$$

car la désingularisation $\sigma_1 \circ \pi_1$ de S se factorise par la désingularisation minimale π. De plus, τ_1 étant un morphisme propre et birationnel entre surfaces lisses est la composition d'une suite finie d'éclatements de points. C'est d'ailleurs la suite d'éclatements de points de longueur minimum pour laquelle l'image réciproque de $m\mathcal{O}_X$ soit inversible.

En particulier, si $E \in \mathcal{E}$ est un point et si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, τ_1 est au-dessus d'un voisinage de E, la suite de m éclatements de points de 1.4 et 3.2.2. Il résulte immédiatement de 3.2.1 et 1.4 que les partitions de $\mathcal{L}$ obtenues à partir de π et $\pi \circ \tau_1$ sont les mêmes.

3.3.1. PROPOSITION. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est un point, S possède la propriété ($c\ell$ h) en O relativement à E si et seulement si l'entier m de 3.2.2 vaut 1 i.e. $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X,E}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,E}$. Le feuillet $\mathcal{F}$ de S dont la normalisation passe par un tel E est non singulier en O.*

Démonstration . — Le seul point à vérifier compte tenu de 3.2.2 est la dernière assertion. Elle résulte du fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{F},O}$ est isomorphe à son normalisé $\widehat{\mathcal{O}_{X,E}}$ qui est un anneau local régulier. ∎

Si maintenant $E \in \mathcal{E}$ est une courbe, nous désignerons encore par E sa transformée stricte sur X_1. Soit $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ la normalisation de S_1, $\overline{\pi}_1 : X_1 \to \overline{S}_1$ le morphisme qui factorise π_1 et $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$ l'éclatement normalisé de O.

3.3.2. PROPOSITION. — *Si $E \in \mathcal{E}$ est une courbe, S possède la propriété ($c\ell$ h) en O relativement à E si et seulement si l'entier $m(E)$ (défini dans 3.2.1) vaut 1 et $\overline{\pi}_1(E)$ (ou $\pi_1(E)$) est une courbe.*

Démonstration . — Par définition (2.1), si Γ est une branche d'une section hyperplane générale, $F_{\overline{S}_1}(\Gamma)$ est un point lisse de $\overline{S}_1$ et de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$ et appartient donc à une unique composante irréductible de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$. Or, π_1 étant la désingularisation minimale de S_1, $\overline{\pi}_1$ est celle de $\overline{S}_1$. Le morphisme $\overline{\pi}_1$ induit donc un isomorphisme d'un voisinage de $F_{X_1}(\Gamma)$ sur un voisinage de $F_{\overline{S}_1}(\Gamma)$. Le point $F_{X_1}(\Gamma)$ appartient donc aussi à une unique composante irréductible E' de dimension 1 de la fibre exceptionnelle de $\pi \circ \tau_1$ et $\overline{\pi}_1(E')$ est une courbe. Les courbes E' et $\overline{\pi}_1(E')$ apparaissent respectivement dans les cycles maximaux $\mathcal{Z}_{X_1}$ (défini par $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X_1}$) et $\mathcal{Z}_{\overline{S}_1}$ (défini par $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\overline{S}_1}$) avec la même multiplicité $m(E')$ qui est aussi la multiplicité de Γ en O (2.2).

Si de plus $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, alors $F_X(\Gamma) \in E \setminus B$ (où B est l'ensemble des points où $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ n'est pas inversible) par 3.2.1 et donc $F_{X_1}(\Gamma) \in E$. C'est donc que $E = E'$ et par suite $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe. D'autre part, la multiplicité $m(E)$ de E dans $\mathcal{Z}_X$ est égale à celle de sa transformée stricte (notée encore E) dans $\mathcal{Z}_{X_1}$. On a donc $m(E) = 1$.

Réciproquement, si $m(E) = 1$ et $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe, toute branche Γ d'une section hyperplane générale telle que $F_{\overline{S}_1}(\Gamma) \in \overline{\pi}_1(E)$ est un élément de $\mathcal{L}_E$. En effet, Γ est lisse ; sa multiplicité est égale à la multiplicité de $\overline{\pi}_1(E)$ dans $\mathcal{Z}_{\overline{S}_1}$ (2.2), elle-même égale à celle de E dans $\mathcal{Z}_{X_1}$ ou $\mathcal{Z}_X$, c'est-à-dire $m(E)$. Or $m(E) = 1$. Enfin, puisque $F_{X_1}(\Gamma) \in E$, c'est que $F_X(\Gamma) \in E$. ∎

Les résultats du § 2 vont nous permettre aussi de déterminer l'image de $\mathcal{L}$ par les applications fibres F_{X_1}, $F_{\overline{S}_1}$ et F_{S_1}.

3.4.1. PROPOSITION. — *Soit $E \in \mathcal{E}$ de dimension 0 telle que $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Alors :*

a) $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E_1 \setminus \mathrm{Sing}(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$ où E_1 est le diviseur de X_1 créé par l'éclatement de X de centre E.

b) Si S ne possède pas la propriété $(c\ell\ h)$ en O relativement à E, le graphe dual de la partie de $\mathcal{Z}_{X_1}$ à support dans $\tau_1^{-1}(E)$ est une chaîne ayant $m \geq 2$ sommets et $\overline{\pi}_1$ contracte E_1 en un point singulier $\overline{O}_1$ de $\overline{S}_1$ dont l'image O_1 sur S_1 est le Proj *d'une génératrice spéciale de $C_{S,O}$. On a $E_1 \setminus F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = \{E_1 \cap E_2\}$, $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{O}_1$, $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$.*

c) Si S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en 0 relativement à E, alors la partie de $\mathcal{Z}_{X_1}$ à support dans $\tau_1^{-1}(E)$ est E_1 et $\overline{\pi}_1(E_1)$ et $\pi_1(E_1)$ sont des courbes. On a $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E_1$, $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{\pi}_1(E_1)$ et $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = \pi_1(E_1)$; le morphisme $\overline{\pi}_1$ est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

Démonstration. — D'après 1.3 et 1.4, $\mathcal{Z}_{X_1} = E_1+2E_2+\cdots+mE_m$. L'assertion *a)* résulte de la preuve de 1.1. On sait que S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O relativement à E si et seulement si $m = 1$ (3.3.1). Si $m \geq 2$, $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_1) = (E_1^2) + 2(E_2 \cdot E_1) = 0$ d'après 1.4. Par suite (voir 2.5), $\overline{\pi}_1$ contracte E_1 en un point $\overline{O}_1$. Ce point est singulier, puisque $\overline{\pi}_1$ est la résolution minimale de $\overline{S}_1$. Pour finir la preuve de *b)*, il suffit de se rappeler la définition des génératrices spéciales (2.1).

L'assertion *c)* résulte du fait que si $m = 1$, $(\mathcal{Z}_{X_1} \cdot E_1) = (E_1^2) = -1$; ainsi $\overline{\pi}_1$ ne contracte pas E_1 et comme $\overline{\pi}_1$ est la résolution minimale de $\overline{S}_1$, $\overline{\pi}_1(E_1) \subset \mathrm{Reg}\,\overline{S}_1$ et $\overline{\pi}_1$ induit alors un isomorphisme de $E_1 = F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ sur $\overline{\pi}_1(E_1) = F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

3.4.2. PROPOSITION. — *Soit $E \in \mathcal{E}$ une courbe telle que $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Alors :*

a) $F_{X_1}(\mathcal{L}_E) = E \setminus \mathrm{Sing}(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$ où E désigne aussi la transformée stricte de E par τ_1.

b) Si S ne possède pas la propriété $(c\ell\ h)$ en O relativement à E, $\overline{\pi}_1$ contracte E en un point singulier $\overline{O}_1$ de $\overline{S}_1$ dont l'image O_1 sur S_1 est le Proj *d'une génératrice spéciale de $C_{S,O}$. On a $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{O}_1$ et $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$.*

c) Si S possède la propriété $(c\ell\ h)$ en 0 relativement à E, alors $\overline{\pi}_1(E)$ et $\pi_1(E)$ sont des courbes. On a :

$$\overline{\pi}_1(E) \setminus F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = (\overline{\pi}_1(E_1) \cap \mathrm{Sing}\,\bar{\sigma}_1^{-1}(O)) \cup (\overline{\pi}_1(E) \cap \mathrm{Sing}\,\overline{S}_1).$$

Les morphismes τ_1 et $\overline{\pi}_1$ sont des isomorphismes au voisinage de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ et induisent des isomorphismes de $F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ respectivement sur $F_X(\mathcal{L}_E)$ et $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$.

$F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$ *est un ouvert dense de* $\pi_1(E)$. *Si* L *n'est pas une génératrice spéciale de* $C_{S,O}$ *et si* Proj $L \in \pi_1(E)$, *alors* Proj $L \in F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$.

Démonstration . — Les assertions *a)* et *b)* se démontrent comme dans 3.4.1 au vu de 3.3.2. Montrons *c)*. Au voisinage de $P \in F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$, τ_1 est un isomorphisme car $\tau_1(P) \in F_X(\mathcal{L}_E)$ donc $m\mathcal{O}_X$ est inversible au voisinage de $\tau_1(P)$. Puisque E est la seule courbe exceptionnelle de X_1 contenant P, que $\overline{\pi}_1(E)$ est une courbe et que $\overline{\pi}_1$ est la désingularisation minimale de $\overline{S}_1$, $\overline{\pi}_1(P) \in \operatorname{Reg}\overline{S}_1$ et $\overline{\pi}_1$ est aussi un isomorphisme au voisinage de P. En conséquence, puisque $P \notin \operatorname{Sing}(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$, alors $\overline{\pi}_1(P) \notin \operatorname{Sing}\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$. Enfin, si $Q \in \overline{\pi}_1(E)$ est un point lisse de $\overline{S}_1$ et de $\bar{\sigma}_1^{-1}(O)$, alors $Q = \overline{\pi}_1(P)$, où $P \in E$, et P est lisse sur $(\pi \circ \tau_1)^{-1}(O)$ donc par *a)* $P \in F_{X_1}(\mathcal{L}_E)$ et $Q \in F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E) = \overline{\pi}_1(F_{X_1}(\mathcal{L}_E))$. La dernière assertion est une conséquence immédiate de la caractérisation précédente de $F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)$ et de la définition des génératrices spéciales, puisqu'alors Proj $L \in n_1(F_{\overline{S}_1}(\mathcal{L}_E)) = F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$.

3.4.3. Définition. — Les propositions 3.4.1 et 3.4.2 distinguent 2 types de génératrices spéciales de $C_{S,O}$. Nous dirons qu'une génératrice spéciale L est *ordinaire* si $\overline{S}_1$ est non singulière en tout point de n_1^{-1}(Proj L), *singulière* dans le cas contraire.

Remarque. — Dans le cas *c)*, si L est une génératrice spéciale de $C_{S,O}$ telle que Proj $L \in F_{S_1}(\mathcal{L}_E)$, toute courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ telle que $T_{\Gamma,O} = L$ (voir un exemple au § 5) ne peut être une branche d'une section hyperplane générale par définition de ces dernières.

3.5. Théorème. — *Soit* $\pi : X \to S$ *la désingularisation minimale d'une surface* S, O *un point singulier de* S *et* E *une composante irréductible de dimension 1 de* $\pi^{-1}(O)$.

a) Il existe une suite unique de longueur minimum de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{\ell+1} & \xrightarrow{\tau_{\ell+1}} & X_\ell & \cdots\longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\ell+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\ell} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
S_{\ell+1} & \xrightarrow[\sigma_{\ell+1}]{} & S_\ell & \cdots\longrightarrow & S_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{} & S
\end{array}$$

où $\sigma_i : S_i \to S_{i-1}$ *est l'éclatement d'un point* O_{i-1}, $1 \leq i \leq \ell + 1$, *(où* $S_0 = S$, $O_0 = O$*),* $\pi_i : X_i \to S_i$ *est la désingularisation minimale de* S_i *et telle que* $\dim \pi_{\ell+1}(E) = 1$ *où on note encore* E *la transformée stricte de* E *dans* $X_{\ell+1}$ *(et plus généralement dans* X_i, $1 \leq i \leq \ell+1$*). Pour* $1 \leq i \leq \ell$, O_i *est le* Proj *d'une génératrice spéciale singulière* L_{i-1} *de* $C_{S_{i-1},O_{i-1}}$.

b) Si S possède la propriété $(c\ell)$ en O relativement à E, alors :

i) $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) = E \setminus \operatorname{Sing}(\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_i)^{-1}(O)$, $1 \leq i \leq \ell + 1$;

ii) On a $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, $1 \leq i \leq \ell$. Si $0 \leq i \leq \ell - 1$, S_i possède la propriété $(c\ell)$ en O_i relativement à E et pas la propriété $(c\ell\ h)$. S_ℓ possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O_ℓ relativement à E.

iii) Si $\overline{\pi}_{\ell+1}$ est la désingularisation minimale de la normalisation $\overline{S}_{\ell+1}$ de $S_{\ell+1}$, alors $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{\ell+1}$ et $\overline{\pi}_{\ell+1}$ sont des isomorphismes au voisinage de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ et induisent des isomorphismes de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_X(\mathcal{L}_E)$ et sur $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$. On a :

$$\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \setminus F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E) = \left(\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \cap \operatorname{Sing}(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell \circ \overline{\sigma_{\ell+1}})^{-1}(O)\right) \cup \left(\overline{\pi}_{\ell+1}(E) \cap \operatorname{Sing} \overline{S_{\ell+1}}\right).$$

$F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert de Zariski dense de $\pi_{\ell+1}(E)$. Si L n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ, O_ℓ}, si $L \not\subset C_{(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell)^{-1}(O), O_\ell}$ et si $\operatorname{Proj} L \in \pi_{\ell+1}(E)$, alors $\operatorname{Proj} L \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$.

Démonstration . — Montrons d'abord *a)*. Le 1er diagramme est défini sans ambiguïté et la suite s'y réduit si $\dim \pi_1(E) = 1$. Sinon, $\pi_1(E) = O_1$. En effet, l'un des σ_i, $i \geq 2$ doit être l'éclatement de O_1 pour que $\dim \pi_i(E) \neq 0$ et si ce n'était pas σ_2, la longueur de la suite ne serait pas minimum. Il s'agit donc de montrer qu'il n'existe pas de suite infinie où π_i est la désingularisation minimale de S_i, $\pi_i(E) = O_i$ et σ_{i+1} est l'éclatement de O_i, $i \geq 1$. Si une telle suite existait, soit $U_\infty(E) = E \setminus \bigcup_{i \geq 1} \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_i(B_i)$ où $B_i = \{P \in \pi_i^{-1}(O_i) \mid \mathfrak{m}_i \mathcal{O}_{X_i, P}$ n'est pas un idéal principal$\}$ et $\mathfrak{m}_i := \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S_i, O_i}$. Cet ensemble n'est pas vide, car on a exclu de E au plus un ensemble dénombrable, (quitte à effectuer une extension du corps de base s'il est dénombrable). Soit $\overline{\Gamma}$ une courbe de X qui porte un point $P \in U_\infty(E)$ et soit Γ son image par π. La transformée stricte de Γ dans S_i passe par O_i ; en effet, celle de $\overline{\Gamma}$ dans X_i évite B_i et, τ_{i+1} étant un isomorphisme à l'extérieur de B_i, elle ne peut se détacher de E. Or au bout d'un nombre fini h d'éclatements de points, la transformée stricte Γ_h de Γ sur S_h devient lisse et S_h devient normalement plate le long de Γ_h [L.T]. Comme on peut aussi éviter que P soit sur la transformée stricte de $\operatorname{Sing} S$, nécessairement $\Gamma \setminus \{0\} \subset \operatorname{Reg} S$, $\Gamma_h \setminus \{O_h\} \subset \operatorname{Reg} S_h$ et par suite S_h est lisse au voisinage de O_h. Or O_h est singulier puisque π_h, la désingularisation minimale de S_h contracte E en O_h. D'où la contradiction.

La dernière assertion de *a)* résulte, comme on l'a déjà vu, de la définition des génératrices spéciales singulières puisque, $\overline{\pi}_i$ étant la désingularisation minimale de la normalisation $\overline{S}_i$ de S_i, $\overline{\pi}_i(E)$ est un point singulier de $\overline{S}_i$.

Supposons maintenant que S possède la propriété $(c\ell)$ en O relativement à E. L'assertion $i)$ de $b)$ résulte toujours de la preuve de 1.1 (Ici $m\mathcal{O}_{X_i}$ est inversible $1 \leq i \leq \ell+1$).

On montre par récurrence sur i que $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, S_i possède la propriété $(c\ell)$ en O_i relativement à E, $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) \cap B_i = \emptyset$, enfin $F_{X_{i+1}}(\mathcal{L}_E) \subset E$ si $0 \leq i \leq \ell$. C'est vrai pour $i = 0$. Si $i < \ell$, $\pi_{i+1}(E) = O_{i+1}$, d'où $F_{S_{i+1}}(\mathcal{L}_E) = \pi_{i+1}(F_{X_{i+1}}(\mathcal{L}_E)) = O_{i+1}$. La surface S_{i+1} possède donc la propriété $(c\ell)$ en O_{i+1} relativement à E puisque, si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, alors sa transformée stricte Γ_{i+1} sur S_{i+1} passe par O_{i+1}, est lisse et qu'on a $\Gamma_{i+1} \setminus \{O_{i+1}\} \subset \operatorname{Reg} S_{i+1}$. D'où $F_{X_{i+1}}(\Gamma_{i+1}) = F_{X_{i+1}}(\Gamma) \notin B_{i+1}$ et $F_{X_{i+2}}(\Gamma) \in E$. Enfin, à cause de 3.3.2, S_ℓ possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O_ℓ mais pas S_i en O_i si $0 \leq i < \ell$. D'où $ii)$.

Puisque $F_{X_{i-1}}(\mathcal{L}_E) \cap B_{i-1} = \emptyset$, τ_i est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_i}(\mathcal{L}_E)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_i}(\mathcal{L}_E)$ sur $F_{X_{i-1}}(\mathcal{L}_E)$, $1 \leq i \leq \ell+1$, d'où les propriétés de $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{\ell+1}$ énoncées dans $iii)$. Notons $\mathcal{L}_E^\ell$ la famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) déterminée par E ; on sait d'après 3.4.2,$c)$ que $\overline{\pi}_{\ell+1}$ est un isomorphisme au voisinage de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ et induit un isomorphisme de $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ sur $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E^\ell)$. Il suffit donc de constater que $F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E) \subset F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E^\ell)$ et que $\overline{\pi}_{\ell+1}(F_{X_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)) = F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$ pour obtenir les propriétés de $\overline{\pi}_{\ell+1}$ énoncées dans $iii)$. La caractérisation de $F_{\overline{S_{\ell+1}}}(\mathcal{L}_E)$ en découle immédiatement au vu de $i)$.

Enfin, soit L une génératrice de C_{S_ℓ, O_ℓ} comme dans $iii)$. Comme elle n'est pas spéciale et que $Q = \operatorname{Proj} L \in \pi_{\ell+1}(E)$, Q est l'image d'au moins un point $\overline{Q} \in \overline{\pi_{\ell+1}}(E)$ lisse sur $\overline{S_{\ell+1}}$ et sur $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$. En particulier, $\overline{\pi}_{\ell+1}(E)$ étant une composante irréductible de $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$, $\overline{Q}$ est un point lisse de $\overline{\pi}_{\ell+1}(E)$ qui n'appartient à aucune autre composante irréductible de $\overline{\sigma}_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$. Pour montrer que $\overline{Q} \in F_{\overline{S}_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$, il reste à vérifier que $\overline{Q}$ n'appartient pas à l'image réciproque sur $\overline{S_{\ell+1}}$ de la transformée stricte de $(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell)^{-1}(O)$ par $\sigma_{\ell+1}$. Or justement $L \not\subset C_{(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell)^{-1}(O), O_\ell}$. ■

L'énoncé géométrique 3.5. $b)$ a une traduction en terme des jets des paramétrisations des courbes $\Gamma \in \mathcal{L}_E$.

3.6.1. Définition. — Soit $\gamma : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]$ une paramétrisation d'une courbe Γ sur (S, O) et i un entier ≥ 1. Si $e_i ; k[[t]] \to k[[t]]/(t)^{i+1}$ est la surjection canonique, $\rho_i(\gamma) := e_i \circ \gamma : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{i+1}$ est appelé le *ième jet* de γ.

Par abus de notation, $\rho_i(\mathcal{L}_E)$ désignera l'ensemble des i-jets des paramétrisations des courbes $\Gamma \in \mathcal{L}_E$.

Remarquons que si γ et γ' sont deux paramétrisations d'une même courbe Γ lisse, il existe un k-automorphisme continu ε de $k[[t]]$ tel que $\gamma = \varepsilon \circ \gamma'$. Le groupe $\operatorname{Aut} k[[t]]$

des k-automorphismes continus de $k[[t]]$ agit sur $\rho_i(\mathcal{L}_E)$, $i \geq 1$ (par composition à gauche avec le k-automorphisme ε_i de $k[[t]]/(t)^{i+1}$ induit par ε).

3.6.2. THÉORÈME. — *Les hypothèses et notations sont celles de 3.5. Si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, l'entier ℓ défini par les propriétés de minimalité énoncées dans 3.5. a) est aussi caractérisé par la propriété suivante :*

Si $1 \leq i \leq \ell$, $\rho_i(\mathcal{L}_E) = k^* \times k^{i-1}$ et coïncide avec une orbite de Aut $k[[t]]$. *Il existe un ouvert $\mathcal{C}_E$ dense dans une surface sur laquelle k^* agit, et stable par cette action, tel que $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) = \mathcal{C}_E \times k^\ell$. L'ensemble des orbites de* Aut $k[[t]]$ *dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ s'identifie à l'ensemble des orbites de k^* dans $\mathcal{C}_E$.*

Démonstration . — Nous déterminons d'abord $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$. Pour ce faire, remarquons que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système minimal de générateurs de $m = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$, $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \longrightarrow k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ est déterminé dès qu'on connaît $\gamma_{\ell+1}(x_\bullet)$, $1 \leq \bullet \leq n$. Puisque $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$, on peut supposer que $(x_2, \ldots, x_n)$ engendre l'idéal définissant une courbe $\Gamma_0 \in \mathcal{L}_E$. D'après 3.5. *b),ii)*, $F_{S_i}(\mathcal{L}_E) = O_i$, $1 \leq i \leq \ell$. Si donc $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, ses transformées strictes sur S_i, $0 \leq i \leq \ell - 1$ passent par O_i et ont la même tangente en ce point, la droite L_i. Comme $x_1 = t$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$ est une paramétrisation de $\Gamma_0 \in \mathcal{L}_E$, alors chaque O_i, $1 \leq i \leq \ell$, est l'origine de la carte de l'éclatement de O_{i-1} où (x_1) est l'idéal principal exceptionnel. L'anneau des fonctions régulières sur cette carte de S_i est donc $\mathcal{O}_{S,O}\left[x_2/x_1^i, \ldots, x_n/x_1^i\right]$ et $m_i = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S_i,O_i} = \left(x_1, x_2/x_1^i, \ldots, x_n/x_1^i\right)$. Soit γ une paramétrisation de $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ et soit $\gamma(x_\bullet) = \sum |p \geq 1| x_{\bullet p} t^p$, $1 \leq \bullet \leq n$. On vérifie par récurrence sur i, en écrivant que $F_{S_i}(\Gamma)$ est l'origine de cette carte, $1 \leq i \leq \ell$, que $x_{11} \neq 0$ et $x_{\bullet i} = 0$, $2 \leq \bullet \leq n$ et $1 \leq i \leq \ell$. On vérifie aussi que, Γ_ℓ désignant la transformée stricte de Γ sur S_ℓ et T_{Γ_ℓ,O_ℓ} sa tangente en O_ℓ, $\operatorname{Proj} T_{\Gamma_\ell,O_\ell} = (x_{11} : x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^\ell) = (x_{11}^{\ell+1} : x_{\bullet\ell+1})$ et puisque $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, c'est un point de $F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$.

Or d'après 3.5. *b), iii)*, $F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$ est un ouvert dense dans une composante irréductible de $\sigma_{\ell+1}^{-1}(O_\ell)$ et provient d'un ouvert conique C dense dans une composante irréductible de C_{S_ℓ,O_ℓ}, et il résulte du calcul précédent que si $(x_1, \ldots, x_n) \in C$, alors $x_1 \neq 0$.

L'image réciproque de cette composante irréductible (resp. de C) par le morphisme fini $k \times k^{n-1} \longrightarrow k \times k^{n-1}$ envoyant $(u, \underline{v})$ sur $(u^{\ell+1}, \underline{v})$ est une surface (resp. un ouvert dense $\mathcal{C}_E$ dans cette surface) stable par l'action de k^* sur $k \times k^{n-1}$, $\lambda \cdot (u, \underline{v}) = (\lambda u, \lambda^{\ell+1} \underline{v})$. Pour que $(x_{11}^{\ell+1}, x_{\bullet\ell+1}) \in C$, il faut et il suffit que $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$. Ainsi si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, $\gamma_{\ell+1} = \rho_{\ell+1}(\gamma)$ est tel que :

$$\begin{cases} \gamma_{\ell+1}(x_1) = x_{11}t + \cdots + x_{1,\ell+1}t^{\ell+1} \\ \gamma_{\ell+1}(x_\bullet) = \qquad\qquad\quad x_{\bullet\ell+1}t^{\ell+1} \quad 2 \leq \bullet \leq n \end{cases}$$

avec $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$.

Réciproquement, soit $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ vérifiant les conditions précédentes. Alors, c'est le $(\ell+1)$-ième jet d'une paramétrisation d'une courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$. En effet, puisque $(x_{11}, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E$, $(x_{11}^{\ell+1}, x_{\bullet\ell+1}) \in C$ d'où $x_{11} \neq 0$ et $(x_{11} : x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^{\ell}) \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E)$. Il existe donc $\Gamma' \in \mathcal{L}_E$ tel que $F_{S_{\ell+1}}(\Gamma')$ soit ce point. Soit γ' une paramétrisation de Γ'. Si $\gamma'(x_\bullet) = \sum |p \geq 1| x'_{\bullet p} t^p$, on a donc $x'_{11} \neq 0$, $x'_{\bullet i} = 0$, $2 \leq \bullet \leq n$, $1 \leq i \leq \ell$ et $x'_{\bullet\ell+1}/x_{11}'^{\ell+1} = x_{\bullet\ell+1}/x_{11}^{\ell+1}$. Soit $\varepsilon \in \operatorname{Aut} k[[t]]$ tel que $\gamma_{\ell+1}(x_1) = \varepsilon \circ \gamma'(x_1) \operatorname{mod}(t)^{\ell+2}$. On a :

$$x_{11} t \equiv x'_{11} \varepsilon(t) \operatorname{mod}(t)^2 .$$

D'où :

$$\varepsilon \circ \gamma'(x_\bullet) \operatorname{mod}(t)^{\ell+2} = x'_{\bullet\ell+1} \varepsilon(t)^{\ell+1} \operatorname{mod}(t)^{\ell+2} = \gamma_{\ell+1}(x_\bullet),\ 2 \leq \bullet \leq n$$

et

$$\gamma_{\ell+1} = \rho_{\ell+1}(\varepsilon \circ \gamma') \in \rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) .$$

Par suite, comme annoncé $\tau_{\ell+1}(\mathcal{L}_E) = \mathcal{C}_E \times k^{\ell}$.

D'autre part, l'ensemble des orbites de $\operatorname{Aut} k[[t]]$ dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ et celui des orbites de k^* dans $\mathcal{C}_E$ s'identifient tous deux avec $\{x_{\bullet\ell+1} \in k^{n-1} \mid (1, x_{\bullet\ell+1}) \in \mathcal{C}_E)$ puisque une orbite de $\operatorname{Aut} k[[t]]$ dans $\rho_{\ell+1}(\mathcal{L}_E)$ contient un unique $\gamma_{\ell+1} : \mathcal{O}_{S,O} \to k[[t]]/(t)^{\ell+2}$ tel que $\gamma_{\ell+1}(x_1) = t$ et qu'une orbite de k^* dans $\mathcal{C}_E$ contient un unique $(u, \underline{v}) \in k^n$ tel que $u = 1$.

La détermination de $\rho_i(\mathcal{L}_E)$, $1 \leq i \leq \ell$ en découle immédiatement.

3.6.3. Remarque. — Soit Z un espace lisse de dimension minimum contenant (S, O) et désignons par $Z_i \to Z_{i-1}$ l'éclatement de O_{i-1} et par D_i le diviseur exceptionnel de cet éclatement. On constate au vu des calculs précédents que :

1) $L_i \not\subset T_{D_i, O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ (on rappelle que $\operatorname{Proj} L_i = O_{i+1}$) ; il en résulte d'une part que si $1 \leq i \leq \ell$, O_i est un point de D_i mais qu'il n'appartient pas à la transformée stricte de D_h dans Z_i, $1 \leq h < i$ et donc que $(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i)^{-1}(O)$ coïncide au voisinage de O_i avec $\sigma_i^{-1}(O_{i-1})$, d'autre part que $L_i \not\subset C_{(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i)^{-1}(O), O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ puisque $\sigma_i^{-1}(O_{i-1}) \subset D_i$.

2) Si C_E est la composante irréductible de C_{S_ℓ, O_ℓ} telle que $\operatorname{Proj} C_E = \pi_{\ell+1}(E)$, alors $C_E \not\subset T_{D_\ell, O_\ell}$. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{L}_E$, $F_{S_{\ell+1}}(\Gamma) \in F_{S_{\ell+1}}(\mathcal{L}_E) \subset \pi_{\ell+1}(E)$. Donc, si Γ_ℓ est la transformée stricte de Γ sur S_ℓ et si $L = T_{\Gamma_\ell, O_\ell}$, on a $L \subset C_E$ et $L \not\subset T_{D_\ell, O_\ell}$.

3.7.1. Définition. — On désigne par *chaîne de points infiniment voisins* de O sur S de longueur $\ell \geq 0$ une suite $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ où $O_0 = O$ et O_h est un point de la fibre exceptionnelle de l'éclatement $\sigma_h : S_h \to S_{h-1}$ de O_{h-1}.

3.7.2. *Remarque.* — Si $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$ est la famille de courbes lisses sur S déterminée par une courbe E de $\mathcal{E}$, le théorème 3.5 lui associe :

i) une chaîne de points infiniment voisins de O sur S, $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ telle que posant $O_i = \operatorname{Proj} L_{i-1}$, $1 \leq i \leq \ell$,

a) L_i soit une génératrice spéciale singulière de C_{S_i, O_i}, $0 \leq i \leq \ell - 1$;

b) $L_i \not\subset T_{D_i, O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$.

ii) une famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) déterminée par une courbe E contractée sur O_ℓ par la désingularisation minimale de S_ℓ telle que

a) S_ℓ possède la propriété $(c\ell\ h)$ en O_ℓ relativement à E. (Dans la preuve de 3.5, nous avons noté cette famille $\mathcal{L}_E^\ell$. On rappelle que toute courbe de cette famille dont la tangente n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ, O_ℓ} est une branche lisse d'une section hyperplane générale de (S_ℓ, O_ℓ)).

b) L'ensemble des tangentes aux courbes de cette famille est un ouvert conique dense dans une composante irréductible C_E de C_{S_ℓ, O_ℓ} telle que $C_E \not\subset T_{D_\ell, O_\ell}$.

3.7.3. Théorème. — *Si S est une surface normale en O, il n'existe qu'un nombre fini de chaînes de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés a) et b) de 3.7.2 i).*

Si $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ est une telle chaîne, toute famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) possédant les propriétés énumérées dans 3.7.2. ii) provient d'une famille de courbes lisses sur (S, O) par la correspondance indiquée (3.7.2).

Démonstration . — Soit $\mathcal{P}_h$ l'ensemble des chaînes de longueur $h \geq 0$ ayant ces deux propriétés. L'oubli de O_h définit une projection de $\mathcal{P}_h$ dans $\mathcal{P}_{h-1}$, $h \geq 1$, qui fait de $\{\mathcal{P}_h\}$ un système projectif. On vérifie par récurrence sur h que $\mathcal{P}_h$ est un ensemble fini. En effet, le cône tangent à une surface réduite en un point quelconque a au plus un nombre fini de génératrices spéciales. Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_h = \emptyset$. Or, il suffit, pour qu'il en soit ainsi que $\varprojlim \mathcal{P}_h = \emptyset$ *i.e.* qu'il n'existe pas de chaîne infinie de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés *a)* et *b)*. Mais s'il existait une telle chaîne, elle déterminerait une courbe lisse Γ dans Z passant par O et dont la transformée stricte Γ_i dans Z_i passerait par O_i. Cette courbe serait contenue dans S. En effet, après un nombre fini d'éclatements, la transformée stricte de $S \cup \Gamma$ devient normalement plate le long de la transformée stricte de Γ. Si $\Gamma \cap S = \{O\}$, il existe donc h tel que $S_h \cup \Gamma_h$ soit lisse en O_h, car $S_h \cup \Gamma_h$ est génériquement lisse le long de Γ_h ; or c'est impossible puisque $O_h \in S_h \cap \Gamma_h$. Puisque S est normale en O, $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$ et alors par le même argument, il existe h tel que S_h soit lisse en O_h. Mais alors, ou bien L_{h-1} n'est pas une génératrice spéciale de

$C_{S_{h-1},O_{h-1}}$ ou bien c'est une génératrice spéciale ordinaire (3.4.3) contrairement à *a)*. C'est donc que $\varprojlim \mathcal{P}_h = \emptyset$.

Considérons maintenant E une courbe telle que $\pi_\ell(E) = O_\ell$ et telle que S_ℓ possède la propriété ($c\ell$ h) relativement à E *(ii) a))*. Si E désigne encore la transformée stricte de E dans $X_{\ell+1}$ où $\pi_{\ell+1} : X_{\ell+1} \to S_{\ell+1}$ est la résolution minimale de l'éclaté $S_{\ell+1}$ de S_ℓ en O_ℓ, on a par 3.3.2 $\dim \pi_{\ell+1}(E) = 1$. Par *ii) b)*, $\operatorname{Proj} \pi_{\ell+1}(E) = C_E$. Si donc L n'est pas une génératrice spéciale de C_{S_ℓ,O_ℓ} et si $L \subset C_E$, il existe Γ_ℓ lisse sur (S_ℓ, O_ℓ) telle que $T_{\Gamma_\ell,O_\ell} = L$. Par *ii) b)*, on peut supposer de plus que $L \not\subset T_{D_\ell,O_\ell}$. Il résulte alors de *i) b)* et de la remarque 3.6.3 *i)* qu'il existe un système minimal de générateurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathfrak{m} = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S,O}$ tel que $(x_1) = \mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell} = \mathfrak{m}_{\ell-1}\mathcal{O}_{Z_\ell,O_\ell}$ où $\mathfrak{m}_{\ell-1} = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{Z_{\ell-1},O_{\ell-1}}$. Par suite, D_ℓ étant le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $O_{\ell-1}$, $\Gamma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_\ell(\Gamma_\ell)$ est lisse dans (S, O).

Soit F la composante irréductible de $\pi^{-1}(O)$, telle que $\Gamma \in \mathcal{L}_F$. Comme S est normale en O, c'est une courbe. Comme $\Gamma_i = \sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_\ell(\Gamma_\ell)$, $0 \leq i \leq \ell - 1$ est aussi lisse, $F_{X_i}(\Gamma) \notin B_i$ l'ensemble des points de X_i où $\mathfrak{m}_i\mathcal{O}_{X_i}$ n'est pas inversible, $0 \leq i \leq \ell - 1$. Par suite $F_{X_\ell}(\Gamma)$ appartient à la transformée stricte de F, notée encore F sur X_ℓ. Or par définition de E, $F_{X_\ell}(\Gamma) \notin E$. Mais E et F sont deux courbes contractées en O par $\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell$. Or $F_{X_\ell}(\Gamma)$ est un point lisse de $(\pi \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_\ell)^{-1}(O)$. Donc $E = F$. La chaîne de points infiniment voisins associée à $\mathcal{L}_F$ dans 3.7.2. *i)* est donc $\{O_h\}_{0 \leq h \leq \ell}$ et la famille de courbes lisses sur (S_ℓ, O_ℓ) de 3.7.2. *ii)* est donc celle déterminée par E.

4. Cas des hypersurfaces

Nous supposons dans ce paragraphe que le germe de surface (S, O) est plongé dans (k^3, O).

Remarquons d'abord que dans ce cas et si k est le corps des nombres complexes, une génératrice de $C_{S,O}$ qui n'est pas tangente au lieu singulier $\operatorname{Sing} S$ de S est une génératrice *spéciale* si et seulement si c'est une *tangente exceptionnelle* (*i.e.* une génératrice du cône tangent $|C_{S,O}|$ axe d'un pinceau de plans tangents limites en O ; voir [L̂.T], 1.3.2). En effet, soit L une génératrice de $C_{S,O}$ qui n'est pas tangente à $\operatorname{Sing} S$ et soit $\sigma_1 : S_1 \to (S, O)$ l'éclatement de O et $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ sa normalisation. Alors L est une tangente exceptionnelle si et seulement si S_1 n'est pas équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en $O_1 = \operatorname{Proj} L$ (ibid., 1.4.4.1). Ce théorème énonce d'autres caractérisations des tangentes exceptionnelles par exemple en terme de la modification de Nash. Or, si L est une génératrice spéciale, ou bien O_1 est un point singulier de $\sigma_1^{-1}(O)$ ou bien il existe un point singulier de $\overline{S}_1$ au-dessus de O, ou bien la restriction $n_{1|\bar{\sigma}_1^{-1}(O)} : \bar{\sigma}_1^{-1}(O) \to \bar{\sigma}_1^{-1}(O)$, où $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ n_1$, n'est pas étale au voisinage de tout point de $n_1^{-1}(O_1)$. La surface S_1 n'est donc pas équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en O_1. Par contre, si L n'est pas une génératrice spéciale, alors O_1 est un point lisse de $\sigma_1^{-1}(O)$, le lieu singulier de S_1 est contenu, au voisinage de O_1, dans $\sigma_1^{-1}(O)$ et $n_1 : \overline{S}_1 \to S_1$ est au-dessus d'un voisinage de O_1 une résolution des singularités simultanée faible d'une rétraction locale quelconque $(S_1, O_1) \to (\sigma_1^{-1}(O), O_1)$ ([T], déf. 3.1.1). Par suite, S_1 est équisingulière le long de $\sigma_1^{-1}(O)$ en O_1.

Les résultats de [LJ] vont nous permettre de préciser les résultats de finitude du § 3.

A toute courbe Γ sur (S, O), on associe dans [LJ] une suite décroissante d'entiers $\{m_i\}_{i\geq 0}$, sa suite des multiplicités de Nash, dont voici la définition : m_0 est la multiplicité de S en O et désignant par $(S \cdot C)_O$ la multiplicité d'intersection en O de S et d'une courbe C de (k^3, O), les m_i sont définis par récurrence par la formule

$$m_0 + \cdots + m_i := \inf_{\{C | \rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)\}} (S \cdot C)_0$$

où θ (resp. γ) est une paramétrisation de C (resp. Γ) (*cf.* [LJ], § 2, remarque 1.0). La même formule permet d'associer à Γ sur (k^3, O) non nécessairement sur (S, O) une suite décroissante d'entiers. Dans tous les cas $\inf_{i\geq 0} m_i$ est la multiplicité de S au point générique de Γ, *i.e.* 0 si $\Gamma \setminus \{O\} \not\subset S$ et 1 si $\Gamma \setminus \{O\} \subset \operatorname{Reg} S$.

4.1. Proposition. — *Soit $\Gamma \subset (k^3, O)$ un germe de courbe lisse. Soit $\{O_i\}_{i\geq 0}$ la chaîne infinie de points infiniment voisins de O sur $Z_0 = (k^3, O)$ telle que $O_0 = O$ et O_i soit le point exceptionnel de la courbe Γ_i obtenue en faisant éclater O_{i-1} dans Γ_{i-1}, $i \geq 1$.*

Soit $Z_i \to Z_{i-1}$ l'éclatement de O_{i-1}, $i \geq 1$ et S_i la transformée stricte de S dans Z_i, $i \geq 0$; enfin soit e_i la multiplicité de S_i en O_i, $i \geq 0$ ($e_i = 0$ si $O_i \notin S_i$). On a $m_i = e_i$, $i \geq 0$.

Démonstration . — Comme Γ est lisse, on sait que pour tout $i \geq 1$, $O_i \in D_i$ mais n'appartient pas à la transformée stricte de D_j dans Z_i, $1 \leq j < i$, où D_i est le diviseur exceptionnel de Z_i contracté sur O_{i-1}. Au voisinage de O_i, la transformée totale $\widetilde{S}_i$ de S dans Z_i coïncide donc avec $(e_0 + \cdots + e_{i-1})D_i + S_i$. Soit $C \subset (k^3, O)$ telle que $\rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)$. Si $1 \leq j \leq i$, O_j est le point exceptionnel de la transformée stricte C_j de C dans Z_j et C_j est lisse et transverse à D_j en O_j, $1 \leq j \leq i$. On a donc :

$$\begin{aligned}(S \cdot C)_O &= (\widetilde{S}_i \cdot C_i)_{O_i} = (e_0 + \cdots e_{i-1})(D_i \cdot C_i)_{O_i} + (S_i \cdot C_i)_{O_i} \\ &= e_0 + \cdots + e_{i-1} + (S_i \cdot C_i)_{O_i} .\end{aligned}$$

Or la tangente L_i à C_i en O_i est déterminée par le coefficient de t^{i+1} dans $\rho_{i+1}(\theta)$. Si C est assez générale parmi les courbes telles que $\rho_i(\theta) = \rho_i(\gamma)$, $L_i \not\subset C_{S_i,O_i}$ et $(S_i \cdot C_i)_{O_i} = e_i$. Par suite

$$m_0 + \cdots + m_i = e_0 + \cdots + e_i \,.$$

Puisque $m_0 = e_0$, il vient par récurrence que $m_i = e_i$, $i \geq 0$. ∎

Nous supposerons désormais que O est un point *singulier isolé* de (S, O). Sous cette hypothèse, $f = 0$ étant une équation locale de S en O, J (resp. j) étant l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,O}$ engendré par f et ses dérivées partielles (resp. $J\mathcal{O}_{S,O}$) et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{H}$) désignant les paramétrisations des courbes sur (Z, O) (resp. (S, O)),

$$\bar{\nu}_{J(\text{resp. } j)}(m) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}(\text{resp. } \mathcal{H})} \frac{\operatorname{ord}\gamma(m)}{\operatorname{ord}_t \gamma(J)(\text{resp. } \gamma(j))}$$

est un nombre rationnel strictement positif et inférieur à 1.

4.2. Proposition. — *Soit $\{O_i\}_{0 \leq i \leq \ell}$ une chaîne de points infiniment voisins de O sur S telle que posant $O_i = \operatorname{Proj} L_{i-1}$, $1 \leq i \leq \ell$*

(a) $O_i \in \operatorname{Sing} S_i$, $0 \leq i \leq \ell$

(b) $L_i \not\subset T_{D_i,O_i}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ où D_i est le diviseur exceptionnel de $Z_i \to Z_{i-1}$.

Soit e_i la multiplicité de S_i en O_i, $0 \leq i \leq \ell$. Alors :

$$\ell + 1 \leq e_0 + \cdots + e_\ell - (\ell + 1) \leq 1/\bar{\nu}_J(m) \,.$$

Démonstration. — L'hypothèse *(b)* permet de construire $\Gamma \subset (Z, O)$ lisse telle que O_i soit le point exceptionnel de la transformée stricte Γ_i de Γ dans Z_i, $1 \leq i \leq \ell$. Soit γ sa paramétrisation. On a :

$$1 = \operatorname{ord}_t \gamma(m) \geq \bar{\nu}_J(m) \cdot \operatorname{ord}_t \gamma(J) \,.$$

A cause de 4.1, γ vérifie les hypothèses de [LJ], corollaire 2.3 avec $i = \ell$ et $(m, \ldots, m_i) = (e_0, \ldots, e_\ell)$. Comme de plus f est entier sur l'idéal engendré par ses dérivées partielles, $\operatorname{ord}_t \gamma(J) \geq e_0 + \cdots e_\ell - (\ell + 1)$. Enfin, $e_i > 1$, $0 \leq i \leq \ell$ par *(a)*.

4.2.1. Corollaire. — *La longueur des chaînes de points infiniment voisins de O sur S possédant les propriétés (a) et (b) de 3.7.2 est bornée par* $1/\bar{\nu}_J(m) - 1$.

(En effet, si L_i est une génératrice spéciale singulière, $O_{i+1} \in \operatorname{Sing} S_{i+1}$, $0 \leq i \leq \ell - 1$).

4.3. PROPOSITION. — *La longueur des chaînes de points infiniment voisins de O sur S construite à partir d'une famille de courbes lisses sur S (3.5–3.7.2) est bornée par* $1/\bar{\nu}_j(m) - 1$.

Démonstration . — L'argument est analogue à celui de 4.2, mais ici $\Gamma \subset (S, O)$. D'où $1 = \mathrm{ord}_t\, \gamma(m) \geq \bar{\nu}_j(m)\,\mathrm{ord}_t\, \gamma(j)$ et

$$\mathrm{ord}_t\, \gamma(j) \geq e_0 + \cdots e_\ell - (\ell+1) \geq \ell + 1\,.$$

5. Un exemple

Revenons à l'exemple 2.6 *(d)* : la singularité elliptique simple à l'origine de S d'équation $x^2 + y^3 + z^6 = 0$. Nous conservons les notations de 2.6. *(d)* et 3.5. Ici $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique E et $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. *Toutes les courbes lisses tracées sur* (S, O) *appartiennent donc à la même famille* $\mathcal{L}_E$.

Nous construisons d'abord le diagramme commutatif ayant les propriétés de minimalité de 3.5 *(a)* relativement à E. Il s'agit de

$$\begin{array}{ccccc} X_2 & \xrightarrow{\tau_2} & X_1 & \xrightarrow{\tau_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_2 & \xrightarrow[\sigma_2]{} & S_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & S \end{array}$$

où σ_2 est l'éclatement de l'unique point singulier O_1 de S_1 (qui est donc normale). En effet, la désingularisation minimale π_1 de S_1 coïncide avec $\bar{\sigma}_2$, l'éclatement normalisé de O_1, de sorte que π_1, la désingularisation minimale de S_2 est sa normalisation et $\tau_2 = \mathrm{Id}$. Précisément, $\mathrm{Sing}\, S_2 = \sigma_2^{-1}(O_1)$ est un $\mathbf{P}^1$ le long duquel S_2 a des points doubles ordinaires sauf en 4 points qui sont des parapluies de Whitney. L'un d'entre eux est le point d'intersection Q de $\sigma_2^{-1}(O_1)$ et de la transformée stricte F de $\sigma_1^{-1}(O)$. Il nous reste à identifier la transformée stricte de E dans le cycle maximal $\mathcal{Z}_{X_i}$ défini par $m\mathcal{O}_{X_i}$, $i = 1,2$ pour déterminer son image par π_i, $i = 1,2$. On vérifie que $\mathcal{Z}_{X_2} = 2F + \widetilde{E}$ où $\widetilde{E}$ est l'unique courbe irréductibles de X_2 telle que $\pi_2(\widetilde{E}) = \sigma_2^{-1}(O_1)$. C'est une courbe de genre 1 (revêtement double de $\mathbf{P}^1$ ramifié en 4 points d'indice 1). Comme de plus $F \simeq \mathbf{P}^1$ et $(F)^2 = -1$, le morphisme τ_1 factorisant $\sigma_1 \circ \pi_1$ à travers π, la résolution minimale de S, est l'éclatement d'un point P de E tel que $\tau_1(F) = P$ tandis que $\tau_1(\widetilde{E}) = E$. (Ce calcul vérifie que $\pi^{-1}(O)$ est une courbe elliptique). Suivant les notations de 3.5, on a donc $\widetilde{E} = E$

d'où $\pi_2(E) = |\sigma_2^{-1}(O_1)| \simeq \mathbf{P}^1$, $\pi_1(E) = \sigma_2 \circ \pi_2(E) = O_1$ et $\ell = 1$. Le calcul précédent montre aussi que $\mathcal{Z}_X = E$ comme il se doit par 3.2.1, puisque $\mathcal{L}_E \neq \emptyset$. Toujours par 3.2.1, on a $U_E = F_X(\mathcal{L}_E) = E \setminus P$ et par 3.5 *(b)* $F_{X_i}(\mathcal{L}_E) = E \setminus (E \cap F)$, $i = 1,2$ et $F_{S_1}(\mathcal{L}_E) = O_1$. *Toute courbe $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ a pour tangente la droite L_0 d'équation $x = y = 0$.* Ici, c'est l'unique génératrice spéciale de $C_{S,O}$ car S_1 est normale, $\sigma_1^{-1}(O) \simeq \mathbf{P}^1$ et $\operatorname{Sing} S_1 = O_1$ et bien sûr elle est singulière. Enfin, par 3.5 *(b), ii)* et *iii)* S_1 *possède la propriété (cℓ h)* en O_1 relativement à E et $F_{S_2}(\mathcal{L}_E) = \pi_2(F_{X_2}(\mathcal{L}_E)) = \sigma_2^{-1}(O_1) \setminus Q$.

Il résulte des calculs précédents et du lemme 2 qu'une *section hyperplane générale quelconque de S_1 passant par O_1 a 2 branches lisses ayant la même tangente* ; en effet $\sigma_2 \circ \pi_2 = \bar{\sigma}_2$, le cycle maximal défini par $\mathfrak{m}_1 \mathcal{O}_{X_2}$ est E ($\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Max} \mathcal{O}_{S_1,O_1}$) et $-(E^2) = 2$. D'autre part, C_{S_1,O_1} *a 4 génératrices spéciales toutes ordinaires G_i*, $1 \leq i \leq 3$ et T_{F,O_1} qui déterminent les 4 parapluies de Whitney sur S_2. Enfin *l'ensemble $\mathcal{L}_1$ des courbes lisses sur (S_1, O_1) comprend une unique famille* car $\pi_1^{-1}(O_1) = E$ et on a $F_{X_1}(\mathcal{L}_1) = E$ (3.2.1) et $F_{S_2}(\mathcal{L}_1) = \sigma_2^{-1}(O_1)$.

La chaîne de points infiniment voisins de O sur S associées à E est donc $\{O, O_1\}$ et la famille de courbes lisses sur (S_1, O_1) est $\mathcal{L}_1$ et $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ si et seulement si $\Gamma = \sigma_1(\Gamma_1)$ où $\Gamma_1 \in \mathcal{L}_1$ et $T_{\Gamma_1,O_1} \neq T_{F,O_1}$.

Enfin, si γ est la paramétrisation de $\Gamma \in \mathcal{L}$, on lit sur $\rho_3(\gamma) = \gamma_3$ si T_{Γ_1,O_1} est une génératrice spéciale de C_{S_1,O_1}.

On vérifie, avec l'algorithme de [LJ]§ 1, que $\Gamma \in \mathcal{L}_E$ si et seulement si : $\gamma_3(x) = a_3 t^3$, $\gamma_3(y) = b_2 t^2 + b_3 t^3$, $\gamma_3(z) = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ et ou bien $a_3^2 + b_2^3 + c_1^6 = 0$, $c_1 \neq 0$ $a_3 \neq 0$, ou bien $a_3 = 0$, $b_2^3 + c_1^6 = 0$, $b_2^2 b_3 + 2c_1^5 c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$. Dans le premier cas T_{Γ_1,O_1} n'est pas une génératrice spéciale et la suite des multiplicités de Nash de Γ est $m_0 = m_1 = m_2 = 2$, $m_i = 1$, $i \geq 3$. Dans le deuxième cas, $T_{\Gamma_1,O_1} = G_i$, $1 \leq i \leq 3$ et la suite des multiplicités de Nash de Γ est $m_0 = \cdots = m_3 = 2$, $m_i = 1$, $i \geq 4$.

Références

[A] ARTIN M. — *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.

[GS 1] GONZALEZ-SPRINBERG G. — *Éventails en dimension deux et transformé de Nash*, Pub. de l'E.N.S., 1977.

[GS 2] GONZALEZ-SPRINBERG G. — *Cycle maximal et invariant d'Euler local des singularités isolées de surface*, Topology **21**, n°4 (1982), 401–408.

[L̂.T] Lê D.T. et Teissier B. — *Sur la géométrie des surfaces complexes, I. Tangentes exceptionnelles*, Amer. J. Math. **101** (1979), 420–452.

[LJ] Lejeune-Jalabert M. — *Courbes tracées sur un germe d'hypersurface*, Amer. J. Math. **112** (1990), 525–568.

[L.T] Lejeune-Jalabert M et Teissier B. — *Contributions à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton*, Thèse Université Paris 7, 1973.

[M] Mumford D. — *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Pub. Math. IHES **9** (1961), 229–246.

[N] Nash J. — *Arc structure of singularities*, preprint non publié.

[T] Teissier B. — *Résolution simultanée I et II*, Lecture Notes in Mathematics **777** Springer, 1980.

[TE] Kempf G., Knudsen F., Mumford D. and Saint Donat B. — *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Mathematics **339** Springer, 1973.

– ◊ –

Institut Fourier
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

Unitary extensions of isometries and interpolation problems: (2) Linear systems and generalized interpolation.

Rodrigo Arocena

Abstract

Realization of analytic functions as response functions of linear systems is related with the method of unitary extensions of isometries and with the description of all the solutions of a general interpolation problem.

Resumen

Se vincula la realización de funciones analíticas como funciones de respuesta de sistemas lineales con el método de extensiones unitarias de una isometría y con la descripción de todas las soluciones de un problema general de interpolación.

AMS subject classification. Primary: 47A57, 47-02;secondary:47A20, 93B28, 30E05.

This is the second part of a rapid introduction to the use of operator theoretic methods in interpolation and extension problems. Our approach is based on the method of unitary extensions of isometries. In the first part the fundamental dilation and lifting theorems were established. Here the relations of our subject with the theory of linear systems are explored. The basic notions of that theory are sketched, some realization theorems are proved, and parametrization formulas for the solutions of interpolation and extension problems are established by means of operations with systems.

Index of Part 1: Dilation and Lifting Theorems [A.1]

I. Basic constructions

II. An extension of Sarason's interpolation theorem

III. Applications to classic problems

IV. Unitary dilations of contractions and the Nagy-Foias theorem

V. On Parrott's extension of the commutant lifting theorem

VI. The Cotlar-Sadosky lifting theorem

VII. On the band extension problem

Index of Part 2: Linear Systems and Generalized Interpolation

VIII. Linear systems and response functions

IX. Realization of contractive analytic functions

X. Operations with systems and generalized resolvents

XI. The Arov-Grossman formula

XII. Descriptions of all the solutions of a general interpolation problem

XIII. On the moment problem.

The exposition is intended to be brief, elementary and essentially self-contained. So we keep the notations of the first part and use the results included in chapters I to VII without further references. The emphasis is always on the unifying and geometric features of the method of unitary extensions of isometries.

VIII LINEAR SYSTEMS AND RESPONSE FUNCTIONS

Heuristics: extensions of isometries, colligations and systems

Our approach is based in the close connection between unitary extensions of isometries and linear systems. Let us start by sketching it.

As before, let V be an isometry acting in a Hilbert space H, with domain D and range R, both closed subspaces of H, and defect subspaces N and

M. If $(U,F) \in \mathcal{U}$, i.e. if (U,F) is a minimal unitary extension of V, setting $X = F \ominus H$ and $A = U_{|F \ominus D}$, a unitary operator $A \in \mathcal{L}(N \oplus X, M \oplus X)$ is defined. Note that the minimality condition $F = \bigvee\{U^n H : n \in \mathbf{Z}\}$ ensures that the contraction $T := P_X A_{|X}$ is completely non unitary (c.n.u.), which means that there is no non trivial subspace Y of X such that $T_{|Y}$ is a unitary operator in Y. This shows how to obtain every element in $\mathcal{U}$: let X' be a Hilbert space such that $N \oplus X'$ and $M \oplus X'$ have the same dimension as Hilbert spaces and $A' \in \mathcal{L}(N \oplus X', M \oplus X')$ a unitary operator; set $F' = H \oplus X'$, $U' = V \oplus A'$, $F = \bigvee\{U'^n H : n \in \mathbf{Z}\}$ and $U = U'_{|F}$. Remark that, with obvious notation, $(U,F) \approx (U',F')$ in $\mathcal{U}$ iff $\exists \lambda \in \mathcal{L}(X,X')$, a unitary operator such that $A'(I_N \oplus \lambda) = (I_M \oplus \lambda)A$.

Thus, the problem of extending an isometry leads naturally to the following notions. A set $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$, where E_1, E_2, X are Hilbert spaces and A is a bounded operator from the space $X \oplus E_1$ to the space $E_2 \oplus X$, is called an operator colligation; δ is a unitary colligation if A is a unitary operator; that operator is naturally associated with an operator matrix $[A_{jk}]_{j,k=1,2}$; a unitary colligation δ is said simple if the contraction $A_{21} \equiv P_X A_{|X}$ is c.n.u. The colligation $\delta' = \{E_1, E_2, X'; A'\}$ is equivalent to δ if $\exists \lambda \in \mathcal{L}(X,X')$, a unitary operator such that $A'(\lambda \oplus I_{E_1}) = (I_{E_2} \oplus \lambda)A$.

So to describe the set $\mathcal{U}$ of equivalence classes of minimal unitary extensions of V is equivalent to describe the set of all the (non equivalent) simple unitary colligations $\{N, M, X; A\}$ with given N and M.

To study and apply operator colligations it is useful to see them as linear systems. In the discrete case, that means that the system $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$ behaves as follows: if in time $n \in \mathbf{Z}$ the internal state is $x(n) \in X$ and the system receives an input $h_1(n) \in E_1$, then it produces an output $h_2(n) \in E_2$ and the internal state changes to $x(n+1) \in X$, in such a way that

$$h_2(n) = A_{11}x(n) + A_{12}h_1(n), \; x(n+1) = A_{21}x(n) + A_{22}h_1(n); \qquad (1)$$

these are the dynamic equations associated to the system δ.

Basic notions of systems theory

Given the system $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$, E_1 is its input space, E_2 its output space, X its internal space and $A_{21} \in \mathcal{L}(X)$ the state propagator. It is assumed that

X is a "black box", i.e., that only E_1 and E_2 can be observed directly, so the properties of the system have to be deduced from the relations between inputs and outputs.

If the system is initially at rest, $x(0) = 0$, a sequence of inputs $h_1 = \{h_1(n) : n \geq 0\} \subset E_1$ generates a well defined sequence of outputs $\mathcal{T}h_1 = h_2 = \{h_2(n) : n \geq 0\} \subset E_2$; we shall say that h_2 is the output signal corresponding to the input signal h_1. The linear map $\mathcal{T}$ is called the input-output or transfer map. It is associated to a matrix $[T_{mn}]_{m,n\geq 0}$, $T_{mn} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ such that $h_2(m) = \sum\{T_{mn}h_1(n) : n \geq 0\}$ for every $m \geq 0$.

(1) **Exercise.**

a) $T_{mn} = 0$ if $n > m$;

b) $\exists\{T_j\}_{j\geq 0} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ such that $T_{mn} = T_{m-n}$;

c) $T_0 = A_{12}$ and $T_n = A_{11}A_{21}^{n-1}A_{22}$ for $n > 0$.

Property (a) says that causality holds: the output at time m does not depend on the input at time $n > m$. Property (b), by showing that $[T_{mn}]$ is a Toeplitz matrix, reflects the fact that δ is a stationary or time-invariant system.

Thus, the relation of the output sequence with the input sequence is given by a "convolution": $h_2(m) = \sum\{T_{m-n}h_1(n) : n \geq 0\}, \forall m \geq 0$. Consequently, by a Fourier transform that relation is given by a "multiplication". In order to be precise, assume that h_1 is bounded (as a subset of E_1) and let f_1 be its z-transform, i.e., the power series $f_1(z) = \sum\{z^n h_1(n) : n \geq 0\}$; thus, $f_1 : \mathbf{D} \to E_1$ is an analytic function. Since A is a bounded operator, there exists a constant $c > 1$ such that $\|T_m\| \leq c^m, \forall m \geq 0$. Then it is easy to see that the z-transform of h_2, given by $f_2(z) = \sum\{z^n h_2(n) : n \geq 0\}$, is analytic in $\{z \in \mathbf{D} : |z| < c^{-1}\}$. Set $\Psi(z) = \sum\{z^n T_n : n \geq 0\}$; this power series converges if $|z| < c^{-1}$ so $\Psi : \{z \in \mathbf{D} : |z| < c^{-1}\} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ is an analytic operator-valued function. Clearly:

$$f_2(z) = \Psi(z)f_1(z) \text{ and } \Psi(z) = A_{12} + zA_{11}(I - zA_{21})^{-1}A_{22}. \tag{2}$$

The function $\Psi \equiv \Psi_\delta$ is called the response function of the system δ, and also the characteristic function of the colligation δ. It is the main tool for the study of systems.

The realization problem for an analytic operator-valued function S consists in finding a representation of S as $S(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$, where A, B, C and D are bounded operators between adequate spaces. So the realization problem for S consists in finding a system δ such that $S = \Psi_\delta$.

Characterization of the response functions of systems with contractive propagator

If the system $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$ has a contractive propagator (i.e., $\|A_{21}\| \leq 1$), its response function Ψ_δ is analytic in $\mathbf{D}$. The following result characterizes the analytic functions in the unit disk for which the realization problem can be solved by means of systems with contractive propagators.

(2) THEOREM *An analytic function $\Psi : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ with its development in power series given by $\Psi(z) = \sum\{z^n T_n : n \geq 0\}$ is the response function of a linear system with contractive propagator iff setting $\gamma(n) = T_{n+1}, \forall n \geq 0$, the following condition holds:*

a) there exist $\alpha : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_1)$ and $\beta : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_2)$ such that

$$\sum\{\langle\alpha(i-j)u_i, u_j\rangle_{E_1} + \langle\beta(i-j)v_i, v_j\rangle_{E_2} : 0 \leq i,j \leq n\} \geq$$

$$2\left|\sum\{\langle\gamma(i+j)u_i, v_j\rangle_{E_2} : 0 \leq i,j \leq n\}\right|, \forall n \geq 0, (u_i, v_j) \in E_1 \times E_2.$$

We show first that the condition is necessary. If Ψ is the response function of the system $\delta = \{E_1, E_2, X; [A_{jk}]_{j,k=1,2}\}$ and $\|A_{21}\| \leq 1$, let $U \in \mathcal{L}(G)$ be the minimal unitary dilation of A_{21}; set $\alpha(j) \equiv A_{22}^* A_{21}(j) A_{22}$ and $\beta(j) \equiv A_{11} A_{21}(j) A_{11}^*$ where, as usual, $A_{21}(j) = A_{21}^j$ if $j \geq 0$ and $A_{21}(j) = A_{21}^{*-j}$ if $j \leq 0$. Since $\gamma(j) = A_{11} A_{21}^j A_{22}$ for every $j \geq 0$, it follows that

$$2|\sum\{\langle\gamma(i+j)u_i, v_j\rangle_{E_2}\}| = 2|\langle\sum U^i A_{22} u_i, \sum U^{*j} A_{11}^* v_j\rangle_G| \leq$$

$$\|\sum U^i A_{22} u_i\|_G^2 + \|\sum U^{*j} A_{11}^* v_j\|_G^2 = \sum\{\langle\alpha(i-j)u_i, u_j\rangle_{E_1} + \langle\beta(i-j)v_i, v_j\rangle_{E_2}\}.$$

In order to prove the converse assertion assume the following generalization of Naimark's dilation theorem.

(3) THEOREM *Let* $\alpha : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_1)$, $\beta : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_2)$ *and* $\gamma : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ *be such that (2.a) holds. Then there exist a unitary operator* $U \in \mathcal{L}(G)$ *and* $\tau \in \mathcal{L}(E_1, G)$, $\lambda \in \mathcal{L}(E_2, G)$ *such that:*

$$\alpha(j) = \tau^* U^j \tau \text{ and } \beta(j) = \lambda^* U^{-j} \lambda, \forall j \in \mathbf{Z}; \gamma(j) = \lambda^* U^j \tau, \forall j \geq 0.$$

In fact, if $\Psi(z) = T_0 + \sum\{z^{n+1}\gamma_n : n \geq 0\}$ is such that (2.a) holds, then Ψ is the response function of $\delta = \{E_1, E_2, X; [A_{jk}]_{j,k=1,2}\}$ with $A_{11} = \lambda^*$, $A_{12} = T_0$, $A_{21} = U$ and $A_{22} = \tau$, with U, λ and τ given by theorem (3).

We now sketch the proof of the last theorem, which is a generalization of Naimark's theorem because, when $\gamma \equiv 0$ and $\alpha \equiv \beta$, (3) says that any function of positive type has a unitary dilation.

Set $H' = \{(u,v)/u : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_1), v : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_2)$ sequences with finite support contained in the set of positive integers$\}$ and define a sesquilinear positive semidefinite form by setting, for any $(u,v), (u',v') \in H'$, $\langle (u,v),(u',v')\rangle = \sum\{\langle \alpha(i-j)u_i, u'_j\rangle_{E_1} + \langle \beta(i-j)v_i, v'_j\rangle_{E_2} + \langle \gamma(i+j)u_i, v'_j\rangle_{E_2} + \langle v_j, \gamma(i+j)u'_i\rangle_{E_2} : i,j \geq 0\}$. As in the classic case, let H be a Hilbert space and π a linear map from H' onto a dense subspace of H such that $\langle \pi h, \pi h'\rangle_H \equiv \langle h, h'\rangle$. Set $D' = \{(u,v) \in H' : v(0) = 0\}$ and define $V' : D' \to H'$ by

$$V'(u,v) = (u',v'), u'_i \equiv u_{i-1}, v'_j \equiv v_{j+1};$$

then $V\pi = \pi V'$ defines an isometry acting in H. Let U be a unitary extension of V to $G \supset H$. Identify any $w \in E_1$ with the function from $\mathbf{Z}$ to E_1 which is equal to w in 0 and to 0 for any $n \neq 0$; define $\tau \in \mathcal{L}(E_1, G)$ by $\tau w = \pi(w, 0)$; analogously, define $\lambda \in \mathcal{L}(E_2, G)$ by $\lambda w = \pi(0, w)$. Let $w, w' \in E_1, x, x' \in E_2$ and $j \geq 0$; then

$$\langle \alpha(j)w, w'\rangle_{E_1} = \langle V'^j(w,0),(w',0)\rangle = \langle V^j \tau w, \tau w'\rangle_H = \langle \tau^* U^j \tau w, w'\rangle_{E_1};$$

analogously, $\langle \beta(j)x, x'\rangle_{E_2} = \langle \lambda^* U^{-j} \lambda x, x'\rangle_{E_2}$; also,

$$\langle \gamma(j)w, x\rangle_{E_2} = \langle V'^j(w,0),(0,x)\rangle = \langle V^j \tau w, \lambda x\rangle_H = \langle \lambda^* U^j \tau w, x\rangle_{E_2}.$$

The result follows.

Energy and stable systems

Here we shall consider systems with bounded response functions. The space $H^\infty(E_1, E_2)$ is the set of the analytic functions $\Psi : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ such that $\|\Psi\|_\infty := \sup\{\|\Psi(z)\| : z \in \mathbf{D}\} < \infty$. The following result was originally proved by Helton.

(4) PROPOSITION *Every function in $H^\infty(E_1, E_2)$ is the response function of a system with contractive propagator.*

Sketch of the proof

If $\Psi(z) = \sum\{z^n T_n : n \geq 0\}$, set $\gamma(n) = T_{n+1}, \forall n \geq 0$, and $f(z) = \sum\{z^n \gamma(n) : n \geq 0\}$. Since $\int_{-\pi}^{\pi} \langle \Psi(re^{\imath\omega})u, v\rangle e^{-\imath k\omega} dw/2\pi = r^k \langle T_k u, v\rangle, \|T_k\| \leq \|\Psi\|_\infty, \forall k \geq 0$; now, from $\Psi(z) = T_0 + zf(z)$ it follows that $f \in H^\infty(E_1, E_2)$. Let $\alpha : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_1)$ and $\beta : \mathbf{Z} \to \mathcal{L}(E_2)$ be given by $\alpha(0) = \|f\|_\infty I_{E_1}$, $\alpha(n) = 0$ if $n \neq 0$, $\beta(0) = \|f\|_\infty I_{E_2}$ and $\beta(n) = 0$ if $n \neq 0$. In order to prove that (2a) holds set $u(\omega) = \sum\{e^{-\imath j\omega} u_j : 0 \leq j \leq n\}$ and $v(\omega) = \sum\{e^{\imath k\omega} v_k : 0 \leq k \leq n\}$. Then $2|\sum\{\langle \gamma(k+j)u_k, v_j\rangle_{E_2} : 0 \leq k, j \leq n\}| = \lim_{r\to 1^-} 2\left|\int_{-\pi}^{\pi} \langle f(re^{\imath\omega})u(\omega), v(\omega)\rangle \frac{d\omega}{2\pi}\right| \leq \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} [\|u(\omega)\|^2 + \|v(\omega)\|^2] \frac{d\omega}{2\pi} = \|f\|_\infty \sum\{\|u_j\|^2 + \|v_j\|^2 : 0 \leq j \leq n\} = \sum\{\langle \alpha(k-j)u_k, u_j\rangle_{E_1} + \langle \beta(k-j)v_k, v_j\rangle_{E_2} : 0 \leq k, j \leq n\}$. The result follows.

(5) COROLLARY *An analytic function with development in power series [illegible]round the origin given by $\Psi(z) = \sum\{z^n T_n : n \geq 0\} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ is the [illegible]nction of a linear system iff there exist positive constants c and ρ [illegible] ^{n} $\forall n \geq 0$.*

For [illegible] $r \in (0, \rho^{-1})$ and set $\xi(z) = \sum\{z^n r^n T_n : n \geq 0\}$, so $\xi \in H^\infty(E_1, E_2)$ is [illegible] response function of a system $\{E_1, E_2, X; [B_{jk}]_{j,k=1,2}\}$; setting $A_{11} = B_{11}, A_{12} = B_{12}, A_{21} = r^{-1}B_{21}$ and $A_{22} = r^{-1}B_{22}$, it follows that Ψ is the response function of $\{E_1, E_2, X; [A_{jk}]_{j,k=1,2}\}$, etc.

The energy of an input or output signal h is $\sum \|h(n)\|^2$. Call $H^2(E)$ the space of analytic functions $f : \mathbf{D} \to E$ such that, if $f(z) \equiv \sum\{z^n h(n) : n \geq 0\}$, then $\|f\|_2^2 \equiv \sum\{\|h(n)\|^2 : n \geq 0\} < \infty$. Thus, the signal h has finite energy iff its z-transform f belongs to $H^2(E)$. Since $\|f(z)\|^2 = \sum\{z^n \bar{z}^m \langle h(n), h(m)\rangle : n, m \geq 0\}$, then $\int_{-\pi}^{\pi} \|f(re^{\imath\omega}\|^2 d\omega/2\pi = \sum\{r^{2n}\|h(n)\|^2 : n \geq 0\}$ and $\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(re^{\imath\omega})\|^2 d\omega/2\pi$.

A system δ is called stable (or bounded) if for any input of finite energy the corresponding output is also of finite energy. If $\Psi \equiv \Psi_\delta$ and M_Ψ is the operator of multiplication by Ψ, given by $M_\Psi f(z) \equiv \Psi(z)f(z)$, δ is stable iff $M_\Psi f \in H^2(E_2)$ for every $f \in H^2(E_1)$. That is the case when $\Psi \in H^\infty(E_1, E_2)$ because $\|M_\Psi f\| \leq \|\Psi\|_\infty \|f\|_2$.

(6) **Exercise** Let $\Psi : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ be such that $M_\Psi[H^2(E_1)] \subset H^2(E_2)$. Show as follows that $\Psi \in H^\infty(E_1, E_2)$ and that $\|M_\Psi\| = \|\Psi\|_\infty$:
a) M_Ψ is a closed operator;
b) $\exists c$, a positive constant such that $\|M_\Psi f\|_2 \leq c\|f\|_2$, $\forall f \in H^2(E_1)$;
c) if $E_1 = E_2 = \mathbf{C}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \|\Psi(e^{\imath\omega}\|^2 f(e^{\imath\omega})d\omega/2\pi \leq c^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{\imath\omega})d\omega/2\pi$ for every integrable $f \geq 0$, so $\|\Psi\|_\infty \leq c$;
d) if $v \in E_1$ and $u \in E_2$ are vectors of norm one and $w(z) \equiv \langle \Psi(z)v, u\rangle$, $\|w\|_\infty \leq c$.

Summing up, for every $\Psi \in H^\infty(E_1, E_2)$ there exists a stable system δ such that $\Psi \equiv \Psi_\delta$ and a system δ is stable iff $\Psi_\delta \in H^\infty(E_1, E_2)$.

IX REALIZATION OF CONTRACTIVE ANALYTIC FUNCTIONS

A system is called passive if the energy of any input is not smaller that the energy of the corresponding output; it is called lossless if those energies are equal. Thus, δ is passive iff M_Ψ is a contraction, and it is lossless iff M_Ψ is an isometry. Any unitary colligation δ is a passive system: in fact, from the dynamic equations (VIII.1) it follows that inputs, internal states and outputs are such that

$$\|h_2(n)\|^2 + \|x(n+1)\|^2 = \|x(n)\|^2 + \|h_1(n)\|^2, \forall n \geq 0. \tag{3}$$

Setting $x(0) = 0$, it follows that $\|M_\Psi\| \leq 1$. Thus, the characteristic function of a unitary colligation belongs to the set

$$\mathcal{B}(E_1, E_2) := \{\Psi \in H^\infty(E_1, E_2) : \|\Psi\| \leq 1\}$$

of contractive analytic functions. In this chapter we shall give a proof of the converse assertion, originally stated in [B-S] and essentially contained in [N-F]: if $\Psi \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ there exists a simple unitary colligation δ such that $\Psi = \Psi_\delta$.

That colligation is essentially determined by its characteristic function. In order to prove this, a system theory interpretation of the property of being simple will be given next.

Controllability, observability and simple unitary colligations

A vector x in the state space of a system $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$ is called controllable (or reachable) if there exists a finite sequence of inputs $h_1(0), \ldots, h_1(n)$ such that, for $x(0) = 0$, $x = x(n+1)$, i.e., $x = \sum\{A_{21}^{n-j} A_{22} h_1(j) : 0 \leq j \leq n\}$; x is approximately controllable if for every $\epsilon > 0$ there exist $h_1(0), \ldots, h_1(n)$ such that $\|x - \sum\{A_{21}^{n-j} A_{22} h_1(j) : 0 \leq j \leq n\}\| < \epsilon$. The subspace of the approximately controllable states is $X_c = \vee\{A_{21}^n A_{22} E_1 : n \geq 0\}$ and the system is said approximately controllable if $X = X_c$.

Outputs are given by $h_2(0) = A_{11}x(0) + A_{12}h_1(0)$ and, for $n > 0$, $h_2(n) = A_{11}A_{21}^n x(0) + \sum\{A_{11}A_{21}^{n-j-1} A_{22} h_1(j) : 0 \leq j \leq n-1\} + A_{12}h_1(n)$. Thus, initial states can be distinguished by observing the outputs of the system iff $A_{11}A_{21}^n x = 0$ for every $n \geq 0$ implies $x = 0$. Now, $\cap\{Ker A_{11}A_{21}^n : n \geq 0\}$ is the orthogonal complement of the so called subspace of the approximately observable states $X_{ob} = \vee\{A_{21}^{*n} A_{11}^* E_2 : n \geq 0\}$; consequently, the above mentioned property holds iff the system is approximately observable, i.e., $X = X_{ob}$.

Let $\delta^* = \{E_2, E_1, X; A^*\}$ be the dual system; then, the subspace of the approximately controllable states of δ is the subspace of the approximately observable states of δ^* and conversely.

(1) PROPOSITION *Let $\delta = \{E_1, E_2, X; A\}$ be a unitary colligation. There exists a simple unitary colligation $\delta' = \{E_1, E_2, X'; A'\}$ such that δ and δ' have the same response function; δ is simple iff $X = X_c \vee X_{ob}$.*

Sketch of the proof

Set $L = X \ominus (X_c \vee X_{ob})$. If $x \in L \subset X \oplus E_1$, it can be shown by induction that $A^n x = A_{21}^n x, \forall n > 0$. This and the dual remark show that L is contained in $L' := \{x \in X : A^n x = A_{21}^n x, A^{*n} x = A_{21}^{*n} x, \forall n > 0\}$. Conversely, if $x \in L'$, from $AA_{21}^n x = A_{21}^{n+1} x$ it follows that $A_{11}A_{21}^n x = 0$, so x is orthogonal to X_{ob}; by duality, it is also orthogonal to X_c. Summing up: $L = L'$.

If $x \in L$, $\|A_{21}x\| = \|x\|$ and, since A_{21} is a contraction, $A_{21}^* A_{21} x = x$. It follows that $AL \subset L' = L$. By duality, $A^* L \subset L$. Thus, $AL = L$.

Consequently, if δ is simple, $L = \{0\}$. Let L" be a closed subspace of X such that $A_{21|L''}$ is a unitary operator in L"; then $L'' \subset L'$, so if $L = \{0\}$, δ is simple.

If δ is not simple, set: $X' = X \ominus L$, $A' = A_{|X' \oplus E_1}$, $\delta' = \{E_1, E_2, X'; A'\}$; then δ' is simple and $\Psi = \Psi_{\delta'}$.

(2) PROPOSITION *Two simple unitary colligations are equivalent iff they have the same response function.*

Sketch of the proof

If the colligations $\delta^{(j)} = \{E_1,\ E_2,\ X^{(j)};\ A^{(j)}\}, j = 1,2$, are equivalent there exists a unitary operator $\lambda \in \mathcal{L}(X^{(1)}, X^{(2)})$ such that $A^{(2)}(\lambda \oplus I_{E_1}) = (I_{E_2} \oplus \lambda)A^{(1)}$. It follows that $\Psi_{\delta^{(1)}} = \Psi_{\delta^{(2)}}$. Conversely, assume the last and also that $\delta^{(1)}$ and $\delta^{(2)}$ are simple unitary colligations. With obvious notation, for j=1,2 the space $X^{(j)}$ is the closed span of vectors $[x_j(n+1) + x_j^*(m+1)]$, with $x_j(n+1) = \sum\{{A_{21}^{(j)}}^{n-k} A_{22}^{(j)} h_1(k) : 0 \le k \le n\}$ and $x_j^*(m+1) = \sum\{{A_{21}^{(j)*}}^{n-s} A_{11}^{(j)*} h_2(s) : 0 \le s \le m\}$. Given any input, the corresponding outputs in $\delta^{(1)}$ and $\delta^{(2)}$ are the same; from formula (1) it follows that $\|x_1(n+1)\| = \|x_2(n+1)\|$; by duality, $\|x_1^*(m+1)\| = \|x_2^*(m+1)\|$. Again from $\Psi_{\delta^{(1)}} = \Psi_{\delta^{(2)}}$ it follows that $\langle x_1(n+1), x_1^*(m+1)\rangle = \langle x_2(n+1), x_2^*(m+1)\rangle$. Setting $\lambda[x_1(n+1) + x_1^*(m+1)] \equiv [x_2(n+1) + x_2^*(m+1)]$ the result follows.

Representation of contractions and realization theorems.

We start by reviewing the representation of contractions (II.2) which was the main tool for the proof of the abstract interpolation theorem (II.1).

(3) LEMMA *Let $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ be a contraction between Hilbert spaces. There exist a Hilbert space F and isometries $r_j \in \mathcal{L}(B_j, F), j = 1,2$, which are essentially unique, such that $F = (r_1 B_1) \vee (r_2 B_2)$ and $A = r_2^* r_1$. Moreover, if $U_j \in \mathcal{L}(B_j)$ is a unitary operator, $j = 1,2$, and $U_2 A = U_1 A$, there exists an essentially unique unitary operator $W \in \mathcal{L}(F)$ such that $W r_j = r_j U_j, j = 1,2$.*

Sketch of the proof (see II.2)

Let F be the Hilbert space generated by the linear space $B_1 \times B_2$ and the sesquilinear positive semidefinite form $\langle (b_1, b_2), (b_1', b_2')\rangle \equiv \langle b_1, b_1'\rangle + \langle Ab_1, b_2'\rangle_{B_2} + \langle b_2, Ab_1'\rangle_{B_2} + \langle b_2, b_2'\rangle_{B_2}$; define r_1, r_2 by $b_1 \to (b_1, 0)$ and $b_2 \to (0, b_2)$, respectively; set $W r_j b \equiv r_j U_j b$, etc.

If E is a Hilbert space, $\ell^2(E)$ is the space of sequences $h : \mathbf{Z} \to E$ such that $\|h\|^2 \equiv \sum\{\|h(n)\|_E^2 "n \in \mathbf{Z}\} < \infty$. The translation τ in $\ell^2(E)$ is given by $(\tau h)(n) \equiv h(n-1)$. We may say that a function $f \in L^2(E)$ if there exists $h \in \ell^2(E)$ such that $f(re^{\imath\omega}) = \sum\{r^{|n|}e^{\imath\omega}h(n) : n \in \mathbf{Z}\}, 0 \leq r < 1$; in that case we write $h = \hat{f}$; the norm of f in $L^2(E)$ is given by $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. A trigonometric polynomial is any $f \in L^2(E)$ such that $\hat{f}$ has finite support. The shift $S \in \mathcal{L}[L^2(E)]$ is given by $Sf = g$ if $\hat{g} = \tau\hat{f}$. In an obvious sense, $E \subset L^2(E)$; clearly, $L^2(E) = \bigoplus\{S^n E : n \in \mathbf{Z}\}$. For every $\Psi \in H^\infty(E_1, E_2)$ the multiplication $M_\Psi \in [\mathcal{L}^2(E_1), \mathcal{L}^2(E_2)]$ intertwines the corresponding shifts: $S_2 M_\Psi = M_\Psi S_1$; also, $\|M_\Psi\| = \|\Psi\|_\infty$ and $M_\Psi[H^2(E_1)] \subset [H^2(E_2)]$.

A closed subspace E of a Hilbert space F is called wandering for the isometric operator $W \in \mathcal{L}(F)$ if $W^n E$ is orthogonal to E for every $n > 0$.

(4) PROPOSITION $\Psi \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ *iff there exist a Hilbert space F, a unitary operator $W \in \mathcal{L}(F)$ and isometries $\pi_j \in \mathcal{L}(E_j, F), j = 1, 2$, such that: $(\pi_j E_j)$ is a wandering subspace for $W, j = 1, 2$; $W^n \pi_1 E_1$ is orthogonal to $W^m \pi_2 E_2$ if $n < m$; $F = \vee\{\bigoplus[W^n \pi_j E_j : n \in \mathbf{Z}] : j = 1, 2\}$, and*

$(\#)$ $\Psi(z) = \pi_2^*(I - zW)^{-1}\pi_1, \forall z \in \mathbf{D}$.

For any such W, π_1 and π_2 are unique up to unitary isomorphisms.

Proof

Assume that $\Psi \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$. Since M_Ψ is a contraction, there exist a unitary operator $W \in \mathcal{L}(F)$ and isometries $r_j \in \mathcal{L}[L^2(E_j), F]$ such that $W^* r_j = r_j S_j$, $j = 1, 2$, $M_\Psi = r_2^* r_1$ and $F = \vee\{r_j L^2(E_j) : j = 1, 2\}$. Set $\pi_j = r_{j|E_j}$; then $F = \vee\{\oplus[W^n \pi_j E_j : n \in \mathbf{Z}] : j = 1, 2\}$. Let $\Psi(z) = \sum\{z^k T_k : k \geq 0\}$, with $T_k \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$; then $T_k = P_{E_2} S_2^{-k} M_\Psi i_{E_1}$, $\forall k \geq 0$. Since Ψ is analytic $P_{E_2} S_2^{-k} M_\Psi i_{E_1} = 0$, $\forall k < 0$. Now, $P_{E_2} S_2^{-k} M_\Psi i_{E_1} = P_{E_2} S_2^{-k} r_2^* r_1 i_{E_1}$ $= P_{E_2} r_2^* W^k r_1 i_{E_1} = \pi_2^* W^k \pi_1$. Thus, $\Psi(z) = \sum\{z^k \pi_2^* W^k \pi_1 : k \geq 0\}$, so $(\#)$ holds, and $W^k \pi_1 E_1$ is orthogonal to $\pi_2 E_2$ for every $k < 0$. If $W' \in \mathcal{L}(F')$, π_1' and π_2' are as W, π_1 and π_2, then a unitary operator $\mu \in \mathcal{L}(F, F')$ such that $\mu W = W'\mu$ and $\mu\pi_j = \pi_j', j = 1, 2$, is defined by $\mu(W^k \pi_j v) \equiv W^k \pi_j' v$.

Conversely, let Ψ be given by $(\#)$ with W, π_1 and π_2 as in the above statement. If $f_j = \sum\{S_j^k \hat{f}(k) : k \geq 0\} \in H^2(E_j)$ is any trigonometric polynomial, then

$$\langle M_\Psi f_1, f_2\rangle = \langle \sum_{m,k\geq 0} S_1^{m+k} \pi_2^* W^k \pi_1 \hat{f}_1(m), \sum_{t\geq 0} S_2^t \hat{f}_2(t)\rangle$$

$$= \sum_{m,k\geq 0} \langle W^k \pi_1 \hat{f}_1(m), \pi_2 \hat{f}_2(m+k)\rangle;$$

thus,

$$2|\langle M_\Psi f_1, f_2\rangle| = 2|\sum_{m,n\geq 0} \langle W^{-m}\pi_1 \hat{f}_1(m), W^{-n}\pi_2\hat{f}_2(n)\rangle|$$

$$\leq \|\sum_m W^{-m}\pi_1\hat{f}_1(m)\|^2 + \|\sum_n W^{-n}\pi_2\hat{f}_2(n)\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2,$$

so $\|M_\Psi\| \leq 1$. The result follows.

Remark that the above proposition gives directly another proof of (VIII.6).

A pure contractive function is any $\Psi \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ such that $\|\Psi(0)\| < \|v\|$ for every non zero $v \in E_1$.

(5) THEOREM *Every $\Psi \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ is the characteristic function of a simple unitary colligation. Let F, W, Ψ, π_1 and π_2 be as in (5). Set $E = \{\oplus[W^m\pi_2E_2 : m \geq 1]\}\bigoplus\{\oplus[W^{-n}\pi_1E_1 : n \geq 0]\}$, $X = F \ominus E$, and let $A = [A_{jk}]_{j,k=1,2} \in \mathcal{L}(X \oplus E_1, E_2 \oplus X)$ be given by $A_{11} = \pi^*_{2|X}, A_{12} = \pi_2^*\pi_1, A_{21} = P_XW_{|X}, A_{22} = P_XW\pi_1$. Then $\delta := \{E_1, E_2, X; A\}$ is a simple unitary colligation and $\Psi = \Psi_\delta$. Moreover, W is a unitary dilation of A_{21} and it is minimal iff Ψ is a pure contractive function.*

Proof

From $W[X \oplus (\pi_1E_1)] = X \oplus (W\pi_2E_2)$ it follows that the operator $A = [(\pi_2^*W^*_{|W\pi_2E_2}) \oplus I_X]W[I_X \oplus \pi_1]$ is a unitary operator from $(X \oplus E_1)$ onto $(E_2 \oplus X)$. Since $F = \vee\{W^nE : n \in \mathbf{Z}\}$, $A_{21} \in \mathcal{L}(X)$ is a completely non unitary contraction.

Thus, δ is a simple unitary colligation. Also, $P_EWX \subset W\pi_2E_2$, so W^nP_EWX is orthogonal to X for every $n \geq 0$, and $P_XW^{n+1}{}_{|X} = (P_XW_{|X})^{n+1}$; consequently, W is a unitary dilation of A_{21}. The following equalities hold:

$$F \ominus \vee\{W^nX : n \in \mathbf{Z}\} = \cap\{W^nE : n \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{f \in F : W^nf \in E, \forall n \in \mathbf{Z}\} = \oplus\{W^n[(\pi_1E_1) \cap (\pi_2E_2)] : n \in \mathbf{Z}\};$$

thus, W is a minimal dilation of A_{21} iff $\pi_1E_1 \cap \pi_2E_2 = \{0\}$, i.e., iff $\|v\| > \|\pi_2^*\pi_1v\| = \|\Psi(0)v\|$ for every non zero $v \in E_1$. Now,

$$A_{12} + zA_{11}(I - zA_{21})^{-1}A_{22} = \pi_2^*\pi_1 + z\pi_2^*\sum\{z^nA_{21}^n : n \geq 0\}P_XW\pi_1$$

$$= \pi_2^* \pi_1 + z\pi_2^* \sum \{z^n P_X W^n : n \geq 0\} P_X W \pi_1$$
$$= \pi_2^* \pi_1 + \pi_2^* \sum \{z^{n+1} P_X W^{n+1} : n \geq 0\} \pi_1.$$

Since $P_E W^{n+1} \pi_1 E_1 \subset \oplus[W^m \pi_2 E_2 : m \geq 1]$ it follows that $\pi_2^* P_E W^{n+1} \pi_1 = 0$. Consequently,

$$A_{12} + zA_{11}(I - zA_{21})^{-1} A_{22} = \pi_2^* \pi_1 + \pi_2^* \sum \{z^{n+1} W^{n+1} : n \geq 0\} \pi_1 = \Psi(z).$$

The proof is over.

Unitary extensions of an isometry and contractive analytic functions

We started this part of our exposition by showing that to describe the set $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_V$ of equivalence classes of minimal unitary extensions of an isometry V, with defect subspaces N and M, is equivalent to describe the set of all the (non equivalent) simple unitary colligations $\{N, M, X; A\}$ with given N and M. Thus, the above results show that we may write: $\mathcal{U}_V \leftrightarrow \mathcal{B}(N, M)$. More precisely:

(6) THEOREM *Let V be an isometry acting in a Hilbert space H with domain D, range R and defect subspaces N and M. A bijection between the set $\mathcal{U}_V$ of equivalence classes of minimal unitary extensions of V and the set $\mathcal{B}(N, M)$ of contractive analytic functions can be defined as follows.*
i) Given $(U, F) \in \mathcal{U}_V$ set $X = F \ominus H$ and let $\Psi \equiv \Psi(U, F) \in \mathcal{B}(N, M)$ be the characteristic function of the simple unitary colligation $\{N, M, X; U_{|X \oplus N}\}$, i.e.,

$$\Psi(z) = P_M U_{|N} + zP_M U_{|X}(I - zP_X U_{|X})^{-1} P_X U_{|N}.$$

ii) Given $\Psi \in \mathcal{B}(N, M)$ let the unitary operator $W \in \mathcal{L}(G)$ and the isometries $\nu \in \mathcal{L}[L^2(N), G]$, $\mu \in \mathcal{L}[L^2(M), G]$ be such that $M_\Psi = \nu^* \mu$, $W^* \nu = \nu S$, $W^* \mu = \mu S$, where S is the shift in the corresponding space, and $G = \nu[L^2(N)] \vee \mu[L^2(M)]$. Set $E = \{\oplus[W^{-n} \nu N : n \geq 0]\} \bigoplus \{\oplus[W^m \mu M : m \geq 1]\}$, $X = G \ominus E$, and let $A \in \mathcal{L}(X \oplus N, M \oplus X)$ be given by $A(v, x) = [\mu^*(\nu v + x), P_X W(\nu v + x)]$, $\forall v \in N$ and $x \in X$. If $F = H \oplus X$ and $U = V \oplus A$, then $(U, F) \in \mathcal{U}_V$ and $\Psi(U, F) = \Psi$.

(7) **Exercise** With notation as in theorem (7), $\Psi \equiv 0$ corresponds to the minimal unitary dilation of VP_D. Set $F = H \oplus H$ and $U(h_1, h_2) \equiv (VP_D h_1 + PMh_2, P_N h_1 + V^{-1}P_R h_2)$; then $(U, F) \in \mathcal{U}_V$ corresponds to $\Psi(z) = zP_M(I - zV^{-1}P_R)^{-1}_{|N}$. The extension (U, F) is such that $F = H$ iff the associated function Ψ is constantly equal to a unitary operator $\Psi(0) \in \mathcal{L}(N, M)$, and then $U = VP_D + \Psi(0)$; in this case it is said that (U, F) is a canonic extension of V; when dim N = dim $M = 1$, there is a natural bijection between the set of canonic extensions of V and $\mathbf{T}$.

X OPERATIONS WITH SYSTEMS AND GENERALIZED RESOLVENTS

In Part 1 [A.1] it was shown that there exists a bijection between the set of all the solutions of a generalized interpolation problem and the set $\mathcal{U}_V$ where the isometry V is defined by the data of the problem. Since $\mathcal{U}_V \leftrightarrow \mathcal{B}(N, M)$, such set of solutions can be "parametrized" by contractive analytic functions. Explicit parametrization formulas can be obtained by means of the generalized resolventes of an isometry. Proofs can be established by relating the functions under consideration with response functions of linear systems and taking advantage of the natural operations with systems. Those are the subjects of this chapter.

Operations with colligations

The (direct) sum of the colligations $\delta_j = \{N_j, M_j, X_j; A_j\}$, j = 1,2, is the colligation $\delta_1 \oplus \delta_2 := \{N_1 \oplus N_2, M_1 \oplus M_2, X_1 \oplus X_2; A_1 \oplus A_2\}$. It corresponds to the connection "side by side" of the systems δ_1 and δ_2, so the inputs of $\delta_1 \oplus \delta_2$ are the direct sum of the inputs of δ_1 and the inputs of δ_2. The product of the same colligations, when $M_1 = N_2$, is the colligation $\delta_2\delta_1 := \{N_1, M_2, X_2 \oplus X_1; (A_2 \oplus I_{X_1})(I_{X_2} \oplus A_1)\}$. It corresponds to the connections "one after the other one" of the systems, in such a way that the inputs of δ_2 are the outputs of δ_1.

(1)**Exercise**
a) The characteristic function of the sum of two colligations is the sum of their characteristic functions: $\Psi_{\delta_1\oplus\delta_2}(z) = \Psi_{\delta_1}(z)P_{N_1} + \Psi_{\delta_2}(z)P_{N_2}$.
b) The characteristic function of the product of two colligations is the product of their characteristic functions: $\Psi_{\delta_2\delta_1}(z) = \Psi_{\delta_2}(z)\Psi_{\delta_1}(z)$. For example, the colligation $\eta = \{M, M, M; I\}$ is such that $\Psi_\eta(z) = zI_M$, so for any colligation δ it holds that $\Psi_{\eta\delta}(z) = z\Psi_\delta(z)$.

Generalized resolvents

The generalized resolvent of an isometry V acting in H that corresponds to $(U, F) \in \mathcal{U}_V$ is the function $f_U : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(H)$ given by $f_U(z) = P_H(I - zU)^{-1}_{|H}$.

(2)**Exercise** $(U, F) \approx (U', F')$ in $\mathcal{U}_V$ iff $f_U = f_{U'}$.

A connection between generalized resolvents and characteristic functions is given by the following

(3) PROPOSITION *Let $U \in \mathcal{L}(F)$ be a unitary operator, H a closed subspace of F and S the characteristic function of the unitary colligation $\{H, H, F \ominus H; U\}$. Then, for every $z \in \mathbf{D}$, $P_H(I - zU)^{-1}_{|H} = [I - zS(z)]^{-1}$.*

In order to prove (3) we note that

(4) **Remark** Let the vector space $E = G_1 \oplus G_2$ be the direct sum of the subspaces G_1 and G_2, P_1 and P_2 the associated projections, T a linear operator in E. Then $T^m = \sum_{0\le j\le m}(P_2T)^jP_1^{m-j}T^{m-j}$, $\forall m \ge 1$.

In fact, by induction, assume that the formula holds for m; then

$$T^{m+1} = P_1T^{m+1} + P_2TP_1T^m + P_2TP_2 \sum_{0\le j\le m} (P_2T)^jP_1^{m-j}T^{m-j}$$

$$= P_1T^{m+1} + P_2TP_1T^m + (P_2T)^2 \sum_{0\le k\le m-1} (P_2T)^kP_1^{m-1-k}T^{m-1-k}, \text{ etc.}$$

Now, in (3), if $H' = F \ominus H$, $S(z) = P_HU_{|H} + zP_HU_{|H'}[I - zP'_HU_{|H'}]^{-1}P_{H'}U_{|H}$ $= P_H\sum\{z^n(UP'_H)^n : n \ge 0\}Ui_H$, so, by (4),

$$S(z)P_H(I - zU)^{-1}_{|H} = P_HU\sum\{z^{n+j}(P'_HU)^nP_HU^j : n, j \ge 0\}i_H$$

$$= P_HU\sum\{z^mU^m : m \ge 0\}i_H = P_HU(I - zU)^{-1}_{|H},$$

and (3) follows.

Chumakin's formula

An explicit relation between contractive analytic functions and generalized resolvents is given by the following formula due to Chumakin [Ch].

(5) THEOREM *Let V be an isometry acting in a Hilbert space H with domain D, range R and defect subspaces N and M. A bijection between the set of generalized resolvents of V and $\mathcal{B}(N,M)$ is given by*

$$P_H(I-zU)^{-1}_{|H} = \{I_H - z[VP_D + \Psi(z)P_N]\}^{-1}, \Psi \in \mathcal{B}(N,M).$$

Proof

With notation as in (IX.6), if $\Psi = \Psi(U,F) \in \mathcal{B}(N,M)$, Ψ is the characteristic function of a colligation $\{N,M,X;A\}$ such that $F = H \oplus X$ and $U = V \oplus A$. Thus, $VP_D + \Psi(.)P_N$ is the characteristic function of $\{D,R,\{0\};V\} \oplus \{N,M,X;A\} = \{H,H,F\ominus H;U\}$. From (3) the result follows.

XI THE AROV-GROSSMAN FORMULA

If V is an isometry acting in H, with domain D, range R, and defect subspaces N and M, a unitary extension $B \in \mathcal{L}(H\oplus M, N\oplus H)$ of V is given by $B(h,m) = (P_Nh, m + VP_Dh), \forall h \in H, m \in M$. If L is a closed subspace of H and $L^\perp = H \ominus L$, set $\delta^{(V,L)} = \{L\oplus M, N\oplus L, L^\perp; B\}$ and let $S^{(V,L)} = [S_{jk}]_{j,k=1,2} \in \mathcal{B}(L\oplus M, N\oplus L)$ be the characteristic function of the unitary colligation $\delta^{(V,L)}$. Thus:

$S_{11}(z) = P_N(I - zP_{L^\perp}VP_D)^{-1}_{|L}$, $S_{12}(z) = zP_N(I-zP_{L^\perp}VP_D)^{-1}P_{L^\perp|M}$,

$S_{21}(z) = P_LVP_D(I-zP_{L^\perp}VP_D)^{-1}_{|L}$, $S_{22}(z) = P_L(I-zVP_DP_{L^\perp})^{\perp}{-1}_{|M}$.

Note that if $U \in \mathcal{L}(F)$ is a unitary operator, then $\delta^{(U,L)} = \{L,L,F\ominus L;U\}$ and $S^{(U,L)}(z) = P_LU(I-zP_{F\ominus L}U)^{\perp}{-1}_{|L}$.

(1)**Exercise**

a) $S_{12}(z) = zP_NP_{L^\perp}(I-zVP_DP_{L^\perp})^{-1}_{|M}$.

b) If $\Psi \in \mathcal{B}(N,M)$ and $\Psi(0) = 0$ then $\|\Psi(z)\| \le \|z\|, \forall z \in \mathbf{D}$.

c) $\|S_{12}(z)\| \le |z|, \forall z \in \mathbf{D}$.

The following formula was stated in [A-G].

(2) THEOREM *Let V be an isometry acting in a Hilbert space H with domain D, range R, and defect subspaces N and M. If L is a closed subspace of H and $(U,F) \in \mathcal{U}_V$ corresponds to $\Psi \in \mathcal{B}(N,M)$ in the bijection given by theorem (IX.6) then:*

$$S^{(U,L)}(z) = S_{21}(z) + S_{22}(z)\Psi(z)[I - S_{12}(z)\Psi(z)]^{-1}S_{11}(z), \forall z \in \mathbf{D}.$$

A proof of the Arov-Grossman formula can be given by operating with colligations. The idea is to build a colligation such that its characteristic function is obtained by means of $[S_{jk}]_{j,k=1,2}$ and Ψ.

With notations as in (2), Ψ is the characteristic function of $\delta=\{N,M,X;A\}$, with $X = F\ominus H$ and $A = U_{|F\ominus D}$. Let the colligation $\delta' = \{L\oplus N, L\oplus M, X; A'\}$ be the direct sum of $\{L,L,\{0\};I\}$ and δ. If $\alpha = \{L \oplus N, N \oplus L, L^{\perp} \oplus X; \tau\}$ is the product of δ' and $\delta^{(V,L)}$, and $\Sigma = [\Sigma_{jk}]_{j,k=1,2}$ the characteristic function of α, it follows that $\Sigma_{11} = S_{11}$, $\Sigma_{12} = S_{12}\Psi$, $\Sigma_{21} = S_{21}$, $\Sigma_{22} = S_{22}\Psi$. In order to relate the characteristic function of α with the one of $\delta^{(U,L)}$, we use the following.

(3) PROPOSITION *Let $\alpha = \{Y_1\oplus K, K\oplus Y_2, Y;\tau\}$ be a unitary colligation with characteristic function $\Sigma = [\Sigma_{jk}]_{j,k=1,2}$ and such that $P_K\tau_{|K} = 0$. Define $\omega \in \mathcal{L}(Y \oplus Y_1, Y_2 \oplus Y)$ by $\omega(y,y_1) = P_{Y_2\oplus Y}\tau[y,y_1,P_K\tau(y,y_1,0)], \forall(y,y_1) \in Y \oplus Y_1$. Then: i) $[I - \Sigma_{12}(z)]$ is invertible in $\mathcal{L}(K), \forall z \in \mathbf{D}$; ii) ω is unitary; iii) the characteristic function σ of $\{Y_1,Y_2,Y;\omega\}$ is given by*

$$\sigma(z) = \Sigma_{21}(z) + \Sigma_{22}(z)[I - \Sigma_{12}(z)]^{-1}\Sigma_{11}(z), \forall z \in \mathbf{D}.$$

Assuming (3), we can complete the proof of (2). Set $Y_1 = Y_2 = L, K = N$ and $Y = L^{\perp} \oplus X$. Note that $A' \in \mathcal{L}(X \oplus L \oplus N, L \oplus M \oplus X)$ is given by $A'(x,y,v) = [y, A(x,v)], \forall(x,y,v) \in X \oplus L \oplus N$, and that $\tau = (B \oplus I_X)(I_{L^{\perp}} \oplus A')$ can be considered as an operator from $F \oplus N = X \oplus L^{\perp} \oplus L \oplus X$ to $N \oplus L^{\perp} \oplus L \oplus X = N \oplus F$; for $f \in F$ and $v \in N$ set $x = P_X f$, $y = P_L f$ and $y' = P_{L^{\perp}} f$; then $\tau(f,v) = (B \oplus I_X)[y', A'(x,y,v)]$ $= (B \oplus I_X)[y',y,A(x,v)] = (B[y' + y, P_M U(x + v)], P_X U(x + v)) = (P_N(y'+y), P_M U(x+v)+V P_D(y'+y)+P_X U(x+v)) = (P_N f, U[(P_X+P_D)f+v])$. Thus, $P_N\tau(0,v) = 0$ and $\omega(f) = P_F\tau[f, P_N\tau(f,0)] = P_F\tau(f,P_N f) = Uf$.

Consequently, $\{Y_1, Y_2, Y; \omega\} = \{L, L, L^\perp \oplus X; U\}$, so $\sigma = S^{(U,L)}$ and (2) follows from (3).

We now turn to the proof of the last. Since $\Sigma_{12}(0) = P_K \tau_{|K} = 0$, $\|\Sigma_{12}(z)\| \leq |z|, \forall z \in \mathbf{D}$, so (3.i) holds.

Clearly, $Y \oplus Y_1 \supset \tau_{-1} K$ and $Y \oplus Y_2 \supset \tau K$; since $\omega(\tau^{-1} k) = \tau k, \forall k \in K$, $\omega(y, y_1) = \tau(y, y_1, 0), \forall (y, y_1) \in [(Y \oplus Y_1) \ominus \tau^{-1} K]$, and $\tau[(Y \oplus Y_1) \ominus \tau^{-1} K] = \tau(Y \oplus Y_1 \oplus K) \ominus (K \oplus \tau K) = (Y \oplus Y_2 \oplus K) \ominus (K \oplus \tau K) = (Y \oplus Y_2) \ominus \tau K$, (3.ii) holds.

Let $\{y_2(n) : n \geq 0\}$ be the outputs of $\{Y_1, Y_2, Y; \omega\}$ when the initial state is $y(0) = 0$ and the inputs $\{y_1(n) : n \geq 0\}$ are such that $y_1(n) = 0$ if $n > 0$; then $f(z) := \sum \{z^n y_2(n) : n \geq 0\} = \sigma(z) y_1(0)$. Set $k(0) = P_K \tau[y(0), y_1(0), 0]$, $y(n+1) = P_Y \tau[y(n), y_1(n), k(n)]$, $k(n+1) = P_K \tau[y(n+1), y_1(n+1), 0]$; then $\tau[y(n), y_1(n), k(n)] = \{k(n), \omega[y(n), y_1(n)]\} = [k(n), y_2(n), y(n+1)]$, i.e., with initial state $y(0) = 0$, α answers to inputs $\{y_1(n), k(n)\}$ with outputs $\{k(n), y_2(n)\}$. Consequently, $g(z) := \sum \{z^n k(n) : n \geq 0\}$ is such that

$$\Sigma_{11}(z) y_1(0) + \Sigma_{12}(z) g(z) = g(z), \Sigma_{21}(z) y_1(0) + \Sigma_{22}(z) g(z) = f(z).$$

The result follows.

(4) **Remark**

The Arov-Grossman formula gives a correspondence from $\mathcal{B}(N, M)$ onto $\{S^{(U,L)} : (U, F) \in \mathcal{U}_V\}$. It is a bijection when the function $f_{U,L} : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(H)$ given by $f_{U,L}(z) = P_L (I - zU)^{-1}_{|L}$ determines (U, F) as an element of $\mathcal{U}_V$ and, in particular, when $D \vee L = R \vee L = H$.

In fact, let $(U, F), (U', F') \in \mathcal{U}_V$ be such that $S^{(U,L)} = S^{(U',L)}$; from (X.3) it follows that $P_L U^m_{|L} = P_L U'^m_{|L}$ holds for every $m \geq 0$. If $D \vee L = R \vee L = H$, $P_H U^m_{|H}$ is determined by $P_H U^m_{|D}$, $P_R U^m_{|L}$ and $P_L U^m_{|L}$; from $P_H U^m_{|D} = (P_H U^{m-1}_{|H}) V$ and $P_R U^m_{|H} = V P_D P_H U^{m-1}_{|H}$, for $m > 0$, it follows inductively that $P_H U^m_{|H} = P_H U'^m_{|H}, \forall m \geq 0$, so $(U, F) \approx (U', F')$.

X'I DESCRIPTION OF ALL THE SOLUTIONS OF A GENERAL INTERPOLATION PROBLEM

The theorem to be stated in this chapter solves several interpolation problems for vector valued functions.

Given the aim of this exposition, we want to extend the definition of multiplication operators without stopping to consider measure theoretic issues. In this connection, we may say that $w \in L^\infty(E_1, E_2)$ if $w : \mathbf{D} \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$ is given by $w(re^{\imath t}) = \sum\{r^{|n|}e^{\imath nt}\hat{w}(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ and $\|w\|_\infty = sup\{\|w(re^{\imath t})\| : 0 \leq r < 1\} < \infty$. We shall define the multiplication by w by means of convolutions and Fourier transforms.

For any finitely supported $g \in \ell^2(E_1)$ let the convolution $C_w g : \mathbf{Z} \to E_2$ be defined by $(C_w g)(n) = \sum_j \hat{w}(n-j)g(j)$. Set $\check{g}(re^{\imath t}) = \sum_j r^{|j|}e^{\imath jt}g(j)$. Now,

$$\sum_n \|\sum_j r^{|n-j|}r^{|j|}\hat{w}(n-j)g(j)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\sum_n r^{|n|}e^{\imath nt}\hat{w}(n)\sum_j r^{|j|}e^{\imath jt}g(j)\|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|w(re^{\imath t})\check{g}(re^{\imath t})\|_2 dt \leq \|w\|_\infty^2 \|g\|^2;$$

consequently, $\sum_n \|(C_w g)(n)\|^2 \leq \|w\|_\infty^2\|g\|^2$, so $C_w \in \mathcal{L}[L^2(E_1), L^2(E_2)]$ and $\|C_w\| \leq \|w\|_\infty$.

Extending the definition of the shift, let $M_w \in \mathcal{L}[L^2(E_1), L^2(E_2)]$ be given by $(M_w f)^\wedge \equiv C_w\hat{f}$. Thus, $(M_w f)(re^{\imath t}) = \sum_n r^{|n|}e^{\imath nt}\sum_j \hat{w}(n-j)\hat{f}(j)$; note that, when $w \in H^\infty(E_1, E_2)$ and $f \in H^2(E_1)$, or when f is constant, $(M_w f)(re^{\imath t}) = w(re^{\imath t})f(re^{\imath t})$. If τ_j is the translation in $\ell^2(E_j)$ and S_j the shift in $L^2(E_j)$, since $C_w\tau_1 = \tau_2 C_w$, $M_w S_1 = S_2 M_w$. The converse holds: operators intertwining the shifts are multiplications, and in this way functions that solve interpolation problems may be obtained.

Assume that $W \in \mathcal{L}[L^2(E_1), L^2(E_2)]$ is such that $WS_1 = S_2 W$. Set $\hat{w}(n) = P_{E_2} S_2^{-n} W i_{E_1}, n \in \mathbf{Z}$, and define the function w by $w(re^{\imath t}) = \sum_n r^{|n|}e^{\imath nt}\hat{w}(n)$. Then $w(re^{\imath t})u = (Wu)(re^{\imath t}), \forall u \in E_1$, so, if w is bounded, $W = M_w$. For $v \in E_2$ the scalar function g given by $g(re^{\imath t}) = \langle w(re^{\imath t})u, v\rangle$ is in L^2 because $\sum_n \|\hat{w}(n)u\|^2 = \|Wu\|^2$. Consequently, for any trigonometric polynomial p

and q,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})p(e^{it})\bar{q}(e^{it})dt\right| = \lim_{r\to 1^-}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\langle w(e^{it})p(e^{it})u.q(e^{it})v\rangle\right|$$

$$= \lim_{r\to 1^-}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\langle [Wp(.)u](re^{it}),[q(.)v](re^{it})\rangle dt\right| \leq 2\pi\|W\|\|p(.)u\|_2\|q(.)v\|_2;$$

it follows that, for every continuous scalar function h, $\left|(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})h(e^{it})dt\right|$ $\leq \|W\|\|u\|\|v\|\|h\|_1$, so $\|g\|_\infty \leq \|W\|\|u\|\|v\|$ and $w \in L^\infty(E_1,E_2)$; in fact, $\|w\|_\infty \leq \|W\|$. Thus, $W = M_w$; since $\|M_w\| = \|C_w\| \leq \|w\|_\infty$, it follows that $\|w\|_\infty = \|M_w\|$ for every $w \in L^\infty(E_1,E_2)$.

Now we may state the basic result of this section.

(1) *THEOREM For $j = 1,2$ let E_j be a Hilbert space, S_j the shift in $L^2(E_j)$ and B_j a closed subspace of E_j such that $E_1 \subset B_1 \subset S_1^{-1}B_1$ and $S_2^{-1}E_2 \subset B_2 \subset S_2B_2$. Let $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ be such that $AS_{1|B_1} = P_{B_2}S_2A$. Set*

$$\mathcal{F}_A = \{w \in L^\infty(E_1,E_2) : P_{B_2}M_{w|B_1} = A, \|w\|_\infty = \|A\|\}.$$

Then $\mathcal{F}_A$ is non empty.

When $B_1 = H^2(E_1)$ and $B_2 = H^2_-(E_2) := L^2(E_2)\ominus H^2(E_2)$, the above is Page's extension of Nehari's theorem (I.7). When $E_1 = E_2 = E$, $B_1 = H^2(E)$ and $B_2 = H^2_-(E)\oplus K$, with K a closed subspace of $H^2(E)$ such that $S[H^2(E)\ominus K] \subset H^2(E)\ominus K$, we have Sarason's general interpolation theorem (I.5). For convenient choices of the data, $\mathcal{F}_A$ is the set of all the solutions of the Nevanlinna-Pick problem (III.1) or of the Caratheodory-Fejer problem (III.2). A parametrization of $\mathcal{F}_A$ stems from the proof of theorem (1) we now sketch (See II.1).

We may assume that $\|A\|=1$. By (IX.3) there exist a Hilbert space H and two isometries $u_j \in \mathcal{L}(B_j,H), j=1,2$, such that $A=u_2^*u_1$ and $H=(u_1B_1)\vee(u_2B_2)$; an isometry V acting in H with domain $D=(u_1S_1B_1)\vee(u_2B_2)$ is defined, with obvious notation, by $V(u_1S_1b_1+u_2b_2) \equiv u_1b_1+u_2S_2^{-1}b_2$. If $(U,F)\in\mathcal{U}_V$, for $j=1,2$ an isometric extension $r_j \in \mathcal{L}[L^2(E_j),F]$ of u_j such that $r_jS_j = U^*r_j$ is defined by setting $r_j(S_j^nb) = U^{-n}u_jb$ for every $n\in\mathbf{Z}$ and $b\in B_j$. Since $S_2r_2^*r_1 = r_2^*r_1S_1$, there exists $w \in L^\infty(E_1,E_2)$ such that $M_w = r_2^*r_1$; set $w = w(U,F)$. Now, $P_{B_2}M_wi_{B_1} = (r_2i_{B_2})^*(r_1i_{B_1}) = A$, and $1 \geq \|w\|_\infty \geq \|A\| = 1$. Thus, $\mathcal{F}_A$ is non void.

The definition of r_j shows that, if $(U,F) \approx (U',F')$ in $\mathcal{U}_V$, then with obvious notation $r_2^* r_1 = r_2'^* r_1'$. Conversely, assume the last; since $F = \vee\{U_n H : n \in \mathbf{Z}\} = \vee\{r_j S_j^n B_j : j = 1,2, n \in \mathbf{Z}\} = r_1[L^2(E_1)] \vee r_2[L^2(E_2)]$, it follows that $(U,F) \approx (U',F')$. Moreover, let $w \in \mathcal{F}_A$; (IX.3) shows that there exist a unitary operator $U \in \mathcal{L}(F)$ and isometries $r_j \in \mathcal{L}[L^2(E_j), F]$, $j = 1,2$, such that $M_w = r_2^* r_1$, $F = r_1[L^2(E_1)] \vee r_2[L^2(E_2)]$ and $r_j S_j = U^* r_j$; since $P_{B_2} M_w i_{B_1} = (r_2 i_{B_2})^*(r_1 i_{B_1}) = A$, we may assume that $r_j i_{B_j} = u_j$; then it is clear that $(U,F) \in \mathcal{U}_V$. Summing up: a bijection from $\mathcal{U}_V$ onto $\mathcal{F}_A$ is defined by $(U,F) \to w(U,F)$.

If $w \in L^\infty(E_1,E_2)$ is such that $w(re^{it}) = \sum\{r^{|n|}e^{int}\hat{w}(n) : n \in \mathbf{Z}\}$ then $\hat{w}(n) = P_{E_2} S_2^{-n} M_w i_{E_1}$. Assume $w = w(U,F) \in \mathcal{F}_A$; if $n < 0$,

$$\hat{w}(n) = P_{E_2} S_2 M_w S_1^{-n-1} i_{E_1} = P_{E_2} S_2 P_{B_2} M_w i_{B_1} S_1^{-n-1} i_{E_1} = P_{E_2} S_2 A S_1^{-n-1} i_{E_1},$$

so $\sum\{\bar{z}^{-n}\hat{w}(n) : n < 0\} = \bar{z} P_{E_2} S_2 A (I - \bar{z} S_1)^{-1} i_{E_1}$; also,

$$\hat{w}(n) = P_{E_2} S_2^{-n} r_2^* r_1 i_{E_1} = P_{E_2} S_2 u_2^* P_H U^{n+1} i_H u_1 i_{E_1}.$$

Let the isometries π_1 and π_2 be defined by $\pi_1 = u_1 i_{E_1}$ and $\pi_2 = u_2 S_2^* i_{E_2}$. Then $\mathcal{F}_A = \{w \in L^\infty(E_1,E_2) : w(z) = \bar{z} P_{E_2} S_2 A (I - \bar{z} S_1)^{-1} i_{E_1} + \pi_2^* P_H U (I - zU)^{-1} i_H \pi_1, (U,F) \in \mathcal{U}_V\}$.

Thus, considering Chumakin's formula (X.5), we obtain:

(2) THEOREM *In the same hypothesis of theorem (1) assume* $\|A\| = 1$. *Set*

$$w_-(z) = \bar{z} P_{E_2} S_2 A (I - \bar{z} S_1)^{-1} i_{E_1}.$$

There exist an isometry V acting in a Hilbert space H, with domain D and defect subspaces N and M, and two isometries $\pi_j \in \mathcal{L}(E_j, H), j = 1,2$, such that:

a) A bijection from $\mathcal{U}_V$ onto $\mathcal{F}_A$ is defined by associating to each $(U,F) \in \mathcal{U}_V$ the function $w \in \mathcal{F}_A$ given by

$$w(z) = w_-(z) + \pi_2^* P_H U (I - zU)^{-1} i_H \pi_1.$$

b) A bijection from $\mathcal{B}(N,M)$ onto onto $\mathcal{F}_A$ is defined by associating to each $\Psi \in \mathcal{B}(N,M)$ the function $w \in \mathcal{F}_A$ given by

$$w(z) = w_-(z) + \pi_2^*[V P_D + \Psi(z) P_N]\{I_H - z[V P_D + \Psi(z) P_N]^{-1} \pi_1.$$

Another description of $\mathcal{F}_A$ stems from the Arov-Grossman formula. Keeping the above notation, set $L = (\pi_1 E_1) \vee (\pi_2 E_2)$; given $(U, F) \in \mathcal{U}_V$ let S be the characteristic function of the colligation $\{L, L, F \ominus L; U\}$. By (X.3), $\pi_2^* P_H U(I - zU)^{-1} i_H \pi_1 = \pi_2^* P_L U(I - zU)^{-1} i_L \pi_1 = \pi_2^* S(z)[I - zS(z)]\pi_1$. Then (XI.2) shows that:

(3) THEOREM *In the same hypothesis and with the same notation of theorem (2), set* $L = (\pi_1 E_1) \vee (\pi_2 E_2), L^\perp = H \ominus L$,

$S_{11}(z) = P_N(I - zP_{L^\perp} V P_D)^{-1}_{|L}, S_{12}(z) = zP_N(I - zP_{L^\perp} V P_D)^{-1} P_{L^\perp |M}$,

$S_{21}(z) = P_L V P_D(I - zP_{L^\perp} V P_D)^{-1}_{|L}, S_{22}(z) = P_L(I - zVP_D P_{L^\perp})^{-1}{}_{|M}$.

A bijection from $\mathcal{B}(N, M)$ *onto onto* $\mathcal{F}_A$ *is given by associating to each* $\Psi \in \mathcal{B}(N, M)$ *the function* $w \in \mathcal{F}_A$ *defined by*

$$w(z) = w_-(z) + \pi_2^* S(z)[I_L - zS(z)]^{-1}\pi_1,$$

$$S(z) = S_{21}(z) + S_{22}(z)\Psi(z)[I - S_{12}(z)\Psi(z)]^{-1} S_{11}(z).$$

XIII ON THE MOMENT PROBLEM

In order to summarize and apply previous results, in this chapter we shall describe the set of all the solutions of the trigonometric moment problem.

We start by recalling some facts that were established in chapter I. The trigonometric moments of any complex Borel measure in $\mathbf{T}$, $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$, are the numbers $\hat{\alpha}(n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\alpha(t), n \in \mathbf{Z}$. Let a be a fixed positive integer and $k : \{n \in \mathbf{Z} : |n| \leq a\} \to \mathbf{C}$ a given function of positive type. A solution of the trigonometric moment problem with data k is any positive $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$ such that $\hat{\alpha}(n) = k(n)$ if $|n| \leq a$. The set $\mathcal{K} := \{K = \hat{\alpha} : \alpha \in \mathcal{M}(\mathbf{T}), \alpha \geq 0, \hat{\alpha}(n) = k(n)$ if $|n| \leq a\}$ of all the extensions of positive type of k to $\mathbf{Z}$ can be obtained as follows.

Set $H' = \{h : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}, \operatorname{supp} h \subset [0, a]\}$ and

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{n,m \geq 0} k(n - m) h_1(n) \bar{h}_2(m), \forall h_1, h_2 \in H'.$$

There exist a Hilbert space H and a linear operator $\pi : H' \to H$ such that $\langle h_1, h_2\rangle \equiv \langle \pi h_1, \pi h_2\rangle_H$ and $\pi H'$ is dense in H. Let $\tau : H' \to H'$ be given by $(\tau h)(n) \equiv h(n-1)$ and set $D' = \{h \in H' : h(a) = 0\}$; then $V\pi_{|D'} = \pi\tau_{|D'}$ defines an isometry acting in H, with domain D, the closure of $\pi D'$. Set $\delta_m = \pi\delta'_m$, with $\delta'_m(n) = 0$ if $n \neq m$ and $\delta'_m(m) = 1$. A bijection from $\mathcal{U}_V$ onto $\mathcal{K}$ is obtained by setting, for each $(U, F) \in \mathcal{U}_V$, $K(n) \equiv \langle U^n\delta_0, \delta_0\rangle_F$.

(1) **Exercise**

a) If $e_m(t) \equiv e^{imt}$ and $Sf(z) \equiv zf(z)$, for $K = \hat{\alpha}$ a unitary isomorphism $B : F \to L^2(\alpha)$ is given by $B\delta_m \equiv e_m$, and $BU = SB$.

b) The following conditions are equivalente: $\#(\mathcal{K}) = \infty$; dim $H = a+1$; $\delta_a \notin D$; the positive Toeplitz matrix $[k_{n,m}]_{0 \leq n,m \leq a} \equiv [k(n-m)]$ is non singular.

c) $k(0) \geq 0$; if k(0) $= 0$, $K \equiv 0$ is the only element in $\mathcal{K}$.

d) If $k(0) \neq 0$ and $\#(\mathcal{K}) = 1$, $D = H$ and there exists an integer b such that $0 \leq b < a$ and $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_b\}$ is a basis for H.

Each $K \in \mathcal{K}$ is given by the function $g(z) \equiv g_K(z) := \sum_{n\geq 0} z^n K(n) = \langle (I - zU)^{-1}\delta_o, \delta_o\rangle_F, \forall z \in \mathbf{D}$; the corresponding measure α is obtained by means of its Poisson transform,

$$(P\alpha)(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{int}K(n) = 2Re g(re^{it}) - g(0).$$

We shall describe the set $\{g_K : K \in \mathcal{K}\}$. Assume first that there is only one solution of the moment problem, with notations as in (1.d). There exist $c_o, c_1, \dots, c_b$ belonging to $\mathbf{C}$ such that the matrix $[v_{rs}]_{o\leq r,s\leq b}$ of V with respect to $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_b\}$ is given by: $v_{r+1,r} = 1, 0 \leq r < b$; $v_{rs} = 0, 0 \leq s < b, r \neq s+1$; $v_{rb} = c_r$, $0 \leq r \leq b$. Since $[k(n-m)]_{0\leq n,m\leq b}$ is non singular, those numbers can be obtained as the solutions of $\sum_{0\leq n\leq b} c_n k(n-j) = k(b+1-j), 0 \leq j \leq b$. Now, in this case, $g(z) = \langle (I - zV)^{-1}\delta_o, \delta_o\rangle_H$, so we obtain two polynomials, $p_{b+1}(z) = det(I - zV) \neq 0$ for every $z \in \mathbf{D}$, of degree $b+1$, and q_b, of degree b, such that $g(z) = q_b(z)/p_{b+1}(z), \forall z \in \mathbf{D}$.

Now assume $\#(\mathcal{K}) = \infty$. Let N and M be the defect subspaces of V; by Gram-Schmidt we obtain unit vectors η and μ that generate N and M, respectively. Each $X \in \mathcal{L}(N, M)$ is given by the scalar x such that $X\eta = x\mu$. From Chumakin's formula (X.5) it follows that the bijection from $\mathcal{B} = \{h \in H^\infty : \|h\|_\infty \leq 1\}$ to $\{g_K : K \in \mathcal{K}\}$ is obtained by associating to each $\psi \in \mathcal{B}$ the function $g(z) = \langle \{I - z[VP_D + \psi(z)P_N]\}^{-1}\delta_o, \delta_o\rangle_H$. Now, $[VP_D + \psi(z)P_N]\delta_j = \delta_{j+1}$ for $0 \leq j < a$. Let $\delta_a = \alpha\eta + \sum_{0\leq j<a} d_j\delta_j$ and $\mu = \sum_{0\leq j\leq a}\beta_j\delta_j$. Then $[VP_D + \psi(z)P_N]\delta_a = \alpha\psi(z)\mu + \sum_{0\leq j<a} d_j\delta_{j+1} = \alpha\psi(z)\beta_o\delta_o + \sum_{1\leq j\leq a}[\alpha\psi(z)\beta_j + d_{j-1}]\delta_j$.

Consequently, the matrix $[u_{rs}]_{o\leq r,s\leq a}$ of $[VP_D + \psi(z)P_N] \in \mathcal{L}(H)$ with respect to $\{\delta_o, \delta_1, \ldots, \delta_a\}$ is given by: $u_{r+1,r} = 1, 0 \leq r < a; u_{rs} = 0, 0 \leq s < a, r \neq s+1; u_{oa} = \alpha\psi(z)\beta_o; u_{ra} = \alpha\psi(z)\beta_r + \delta_{r-1}, 0 < r \leq a$. It follows that

(2) PROPOSITION *Let $k : \{n \in \mathbf{Z} : |n| \leq a\} \to \mathbf{C}$ be such that $[k(n-m)]_{0\leq n,m\leq a}$ is a positive non singular matrix. There exist four polynomials $P_j, 1 \leq j \leq 4$, such that degree$P_j = a$ if $1 \leq j \leq 3$, degree$P_4 = a+1$, and that a bijection from $\mathcal{B} = \{\psi \in H^\infty(\mathbf{D}) : \|\psi\|_\infty \leq 1\}$ onto the set of all the extensions of positive type of k to $\mathbf{Z}$ is obtained by associating to each $\psi \in \mathcal{B}$ the extension K of k given by*

$$\sum_{n\geq 0} z^n K(n) = [P_1(z) + P_2(z)\psi(z)]/[P_3(z) + P_4(z)\psi(z)], z \in \mathbf{D},$$

and $K(n) = K(-n)^-, n \leq 0$.

References

Concerning operator colligations, see [B]; concerning operators and systems, see [F].

[A.1] R. Arocena: Unitary extensions of isometries and interpolation problems: dilation and lifting theorems, Publicaciones Matemáticas del Uruguay 6 (1995), 137-158.

[A.2] R. Arocena: Unitary colligations and parametrization formulas, Ukrainian Math. J. 46.3 (1994), 147-154.

[A-G] D. Z. Arov and L. Z. Grossman: Scattering matrices in the theory of dilations of isometric operators, Soviet Math. Doklady 27 (1983), 518-522.

[B-S] V. M. Brodskii and Ja. S. Shvartsman: On invariant subspaces of contractions, Soviet Math. Doklady 12 (1971), 1659-1663.

[B] V. M. Brodskii: Unitary Operator Colligations and Their Characteristic Functions, Russian Math. Surveys 33 (1978), 159-191.

[Ch] M. E. Chumakin: Generalized resolvents of isometric operators, Sbirskii Matm. Zhurnal, Vol. 8, No. 4 (1967), 876-892.

[F] P. A. Fuhrmann: Linear systems and operators in Hilbert space, Mc Graw-Hill, 1981.

[N-F] B. Sz.-Nagy and C. Foias: Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1970.

Centro de Matemática. Facultad de Ciencias de la Universidad de la República
Postal address: José M. Montero 3006, ap. 503, Montevideo - URUGUAY
Fax: (598-2) 402954. E-mail: rarocena@cmat.edu.uy

OPTIMAL STOPPING FOR A COMPOUND POISSON PROCESS WITH EXPONENTIAL JUMPS

E. MORDECKI

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

ABSTRACT. In this paper we give the closed form solution of some optimal stopping problems for processes derived from a compound Poisson process with exponential jumps. Within the possible applications, the results can be interpreted as pricing perpetual American Options under pure jump information.

0.Introduction.

Let be given on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a Poisson process $N = (N_t)_{t\geq 0}$ with intensity $\lambda > 0$ and a sequence of independent nonnegative random variables $Y = (Y_k)_{k\geq 1}$, with identical distribution F.

According to Feller, ([3]), the compound Poisson process $X = (X_t)_{t\geq 0}$, is given by

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \qquad t \geq 0 \tag{0.1}$$

Let $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ denote the filtration generated by X, (that is the minimal filtration such that X is $\mathbb{F}$-adapted and satisfies the "usual" Dellacherie conditions (see Jacod and Shiryaev, [4]). τ is a stopping time (relative to $\mathbb{F}$) if $\tau: \Omega \to [0, +\infty]$ and $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ for all $t \leq 0$. Denote by $\mathcal{M}$ the class of all stopping times.

The aim of this paper is to give the closed form solution to the problem $\sup_{\tau\in\mathcal{M}} E(f(S_\tau))$, that is, we find a pair $(\tau^*, s(x))$, such that

$$(0.2) \qquad s(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{M}} E(f(S_\tau)) = E(f(S_{\tau^*}))$$

where τ^* is the optimal stopping time and $s(x)$ is the cost function in the following four cases. The function f is given either by

$$f(x) = (x-K)^+,$$

or

$$f(x) = (K-x)^+,$$

with K a real constant, and the process S by

$$(0.3) \qquad S_t = x + X_t - at, \qquad x \in \mathbb{R},$$

or

$$(0.4) \qquad S_t = x\exp\{-at + X_t\}, \qquad x > 0.$$

1. Main Results.

Theorem 1. *Let S be given by (0.3), with $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, and $0 < \lambda < a\alpha$. Denote*

$$(1.1) \qquad x_0 = \frac{\lambda}{\alpha(a\alpha-\lambda)} + K, \qquad \rho = \alpha - \frac{\lambda}{a},$$

and define

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq x_0\},$$
$$s(x) = \begin{cases} x - K, & \text{if } x \leq x_0, \\ (x_0 - K)\exp\{\rho(x - x_0)\}, & \text{if } x < x_0. \end{cases}$$

Then the pair $(\tau^*, s(x))$ is the solution to the problem (0.2) with $f(x) = (x-K)^+$.

Theorem 2. *Let S be given by (0.3). For arbitrary F denote $\mu = \int_0^{+\infty} x dF(x)$, that can take the value $\mu = +\infty$. Suppose that $0 < a < \mu\lambda$. Denote by $\rho > 0$ the unique root of the equation*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho y} dF(y) = 1 - \frac{a}{\lambda}\rho, \tag{1.2}$$

and

$$x_0 = K - 1/\rho.$$

Define

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq x_0\},$$

$$s(x) = \begin{cases} K - x, & \text{if } x \leq x_0, \\ (K - x_0)\exp\{-\rho(x - x_0)\}, & \text{if } x > x_0. \end{cases}$$

Then the pair $(\tau^*, s(x))$ is the solution to the problem (0.2), with $f(x) = (K - x)^+$.

Remark: For X given by (0.1) with exponential jumps, that is when $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ we have $\mu = \frac{1}{\alpha}$ and $\rho = \frac{\lambda}{a} - \alpha$.

Theorem 3. *Let S given by (0.4). Assume that $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ with $\alpha > 1 + \frac{\lambda}{a}$. Denote*

$$x_0 = K\frac{a - \lambda/\alpha}{a - \lambda/(\alpha - 1)}, \qquad \rho = \alpha - \frac{\lambda}{a}. \tag{1.3}$$

Define

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq x_0\},$$

$$s(x) = \begin{cases} x - K, & \text{if } x \geq x_0, \\ (x_0 - K)\left(\frac{x}{x_0}\right)^\rho, & \text{if } 0 \leq x < x_0. \end{cases}$$

Then the pair $(\tau^*, s(x))$ is the solution to the problem (0.2), with $f(x) = (x - K)^+$.

Theorem 4. *Let S be given by (0.4). For arbitrary F denote* $\mu = \int_0^{+\infty} x dF(x)$, *that can take the value* $\mu = +\infty$. *Suppose that* $0 < a < \lambda\mu$. *Denote by* $\rho > 0$ *the unique root of the equation (1.2), and*

$$x_0 = K\frac{\rho}{\rho + 1}.$$

Define

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq x_0\},$$

$$s(x) = \begin{cases} K - x, & \text{if } 0 < x \leq x_0, \\ (K - x_0)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\rho}, & \text{if } x > x_0. \end{cases}$$

Then the pair $(\tau^*, s(x))$ *is the solution to the problem (0.2), with* $f(x) = (K - x)^+$.

Remark: For X given by (0.1) with exponential jumps, that is when $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ we have $\mu = \frac{1}{\alpha}$ and $\rho = \frac{\lambda}{a} - \alpha$, as in Theorem 2.

2. Pricing American Options under Poisson-Exponential information.

Beside the probabilistic interest we are motivated by the following interpretation: Suppose that S models the evolution of the price of a risky asset in a financial market. Then, the proposed problems can be seen as the pricing of a perpetual American Option, as described for instance in Karatzas, [5] or Shiryev et al., [8].

For S given by (0.3) we are in the linear case, having an analogous of the Bachelier model, with a compound Poisson process (eventualy compensated) instead of a Wiener process.

When S is given by (0.4), we have American call and put Options, in an analogous of the Black and Scholes model (see [8]). Note that in the call case, we obtain a solution that is not differentiable at the optimal level x_0. This is due to the fact that the process is not stopped at x_0, because it jumps above this critical level, and the "smooth fitting" principle in its classical form, as described in [7] does not apply.

Other applications, for instance to investment under uncertainity can be found in Dixit and Pindyck, [1].

3.Proofs.

We begin with an auxiliary result of independent interest (compare with [6]).

Lemma 3.1. *Let X be a compound Poisson process defined by (0.1). Let $S = (S_t)_{t\geq 0}$ be the solution of the stochastic differential equation*

$$dS_t = (aS_{t-} + b)dt + (cS_{t-} + e)dX_t, \qquad S_0 = x,$$

with a, b, c and e real constants. C^*, the continuation region, is an open interval of the real line of the form $(x_0, +\infty)$, $(-\infty, x_0)$ or $(0, x_0)$ for some x_0 in $\mathbb{R}$. Let s and g denote Borel real functions, with s continuous for $x \in R$ and differentiable for $x \neq x_0$.

Denote by L the infinitesimal generator of the Markov process S, that is

$$(3.1) \qquad (Lf)(x) = \lambda \int_0^{+\infty} [f(x + cxy + ey) - f(x)]dF(y) + (ax + b)f'(x)$$

for f in the domain of L.

Let

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \notin C^*\}.$$

Assume that the following five conditions hold:

(1) $(Ls)(x) = 0 \qquad \forall x \in C^*$.

(2) $(Ls)(x) \leq 0 \qquad \forall x \neq x_0$.

(3) $0 \leq g(x) \leq s(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

(4) $s(S_{\tau^* \wedge T \wedge t}) \leq Z$ *P-a.s for all $T \in \mathcal{M}$ and for all $t \in \mathbb{R}^+$, with Z an integrable random variable, that is $E|Z| < +\infty$.*

(5) $s(S_{\tau^*}) = g(S_{\tau^*})$ *P-a.s.*

Then the pair (τ^*, s) is the solution for the optimal stopping problem

$$s(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} E(g(S_\tau)) = E(g(S_{\tau^*}))$$

Proof. For each $\omega \in \Omega$ we can write

$$s(S_t) - s(x) =$$

$$\int_0^t s'(S_{s-})(aS_{s-} + b)ds + \sum_{0 \le s \le t} \Delta s(S_s) =$$

$$\int_0^t \left\{ s'(S_{s-})(aS_{s-} + b) + \lambda \int_0^{+\infty} [s(S_{s-} + cS_{s-}y + ey) - s(S_{s-})]dF(y) \right\} ds$$

$$+ \sum_{0 \le s \le t} \Delta s(S_s) - \lambda \int_0^t [s(S_{s-} + cS_{s-}y + ey) - s(S_{s-})]ds$$

$$= \int_0^t (Ls)(S_{s-})ds + M_t.$$

with $M = (M_t)_{t \ge 0}$ a local martingale (a compensated sum of jumps, [4]). In view of (1) we obtain that for any $T \in \mathcal{M}$

$$\int_0^{\tau^* \wedge T \wedge t} (Ls)(S_{s-})ds = 0, \tag{3.2}$$

and (2) gives

$$\int_0^{\sigma} (Ls)(S_{s-})ds \le 0 \quad \text{for any} \quad \sigma \in \mathcal{M}. \tag{3.3}$$

Now in view of (2)

$$M_t = s(S_t) - s(x) - \int_0^t (Ls)(S_{s-})ds \ge -s(x) \tag{3.4}$$

and as $M = (M_t)_{t \ge 0}$ is a local martingale (3.4) gives that M is a supermartingale by Fatou's Lemma, and in consequence

$$E(M_\sigma) \le E(M_0) = 0 \quad \text{for any} \quad \sigma \in \mathcal{M}. \tag{3.5}$$

On the other side, by (4) and (3.2)

$$M_{\tau^* \wedge t \wedge T_n} \le s(S_{\tau^* \wedge t \wedge T_n}) \le Z$$

for a localizing sequence (T_n) for M, that gives by dominated convergence

$$E(M_{\tau^* \wedge t}) = 0. \tag{3.6}$$

In conclusion (3.2) and (3.6) give

$$s(x) = E(s(S_{\tau^* \wedge t})), \tag{3.7}$$

and (3.3), (3.5) and (3) gives

$$s(x) \geq E(s(S_\sigma)) \geq E(g(S_\sigma)) \quad \text{for any} \quad \sigma \in \mathcal{M}.$$

By (4), (5) and (3.7) we obtain

$$s(x) = E(s(S_{\tau^*})) = E(g(S_{\tau^*})),$$

and the Lemma is proved.

The proof of the Theorems reduces now to the verification of the five conditions in Lemma 3.1.

Proof of Theorem 1. First observe that

$$(Lf)(x) = \lambda \int_0^{+\infty} [f(x+y) - f(x)] dF(y) - af'(x). \tag{3.8}$$

We now verify conditions (1) to (5) in Lemma 3.1.

(1) For $x < x_0$, by substitution

$$\begin{aligned} as'(x) + \lambda s(x) - \lambda \int_0^{+\infty} [f(x+y) - f(x)] \alpha \exp\{-\alpha y\} dy = \\ (x_0 - K) \exp\{\rho(x - x_0)\} \big(a\rho + \lambda + \frac{\lambda\alpha}{\rho - \alpha}\big) \\ - \lambda\alpha \exp\{\alpha(x - x_0)\} \big((x_0 - K)(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho - \alpha}) + \frac{1}{\alpha^2}\big) = 0 \end{aligned}$$

Because

$$a\rho+\lambda+\frac{\lambda\alpha}{\rho-\alpha}=(x_0-K)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho-\alpha})+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

as can be verified by substitution of the values of ρ and x_0 in (1.1).

(2) If $x > x_0$ we have

$$Ls(x)=\frac{\lambda}{\alpha}-a<0.$$

(3) $s(x) > 0$ by definition, and $s(x) \geq x - K$ can be verified directly if $x \geq x_0$, and considering the tangent line to the convex function $s(x)$, at the point x_0 for $x < x_0$,

$$(x_0-K)\exp\{\rho(x-x_0)\}\geq(x_0-K)+\frac{\lambda}{a\alpha}(x-x_0)\geq x-K \qquad \text{if} \quad x<x_0.$$

because $\frac{\lambda}{a\alpha} < 1$.

(4) Take $Z = s(S_{\tau^*}) + x_0$. $s(S_{\tau^*\wedge T\wedge t}) \leq Z$ follows from the fact that on the set $\{\tau^* < +\infty\}$ we have $S_{\tau^*\wedge T\wedge t} \leq S_{\tau^*}$ and the function s is increasing. On the set $\{\tau^* = +\infty\}$ we have $s(S_{\tau^*\wedge T\wedge t}) \leq x_0$.

Observe now that

$$s(S_{\tau^*})=(S_{\tau^*}-K)^+\leq \sup_{0\leq t<+\infty} S_t = x+\sup_{0\leq t<+\infty}(X_t-at)$$

From [2] we know that

$$P(\sup_{0\leq t<+\infty}(X_t-at)\geq u)=\frac{\lambda\mu}{a}\exp\{-\rho u\} \tag{3.9}$$

so we can compute

$$E(\sup_{0\leq t<+\infty}(X_t-at))=\frac{\lambda}{\alpha(a\alpha-\lambda)}$$

and (4) is proved.

(5) is direct, concluding the proof of Theorem 1.

Proof of Theorem 2. As in Theorem 1, we have to verify conditions (1) to (5) in Lemma 3.1. In this case, as in Theorem 1, L is given by (3.8).

(1) If $x > x_0$, $s(x) = \frac{1}{\rho}\exp\{-\rho(x - x_0)\}$,

$$(Ls)(x) = \exp\{-\rho(x + y - x_0)\}\frac{\lambda}{\rho}\Big(\int_0^{+\infty} \exp\{-\rho y\}dF(y) - 1 + \frac{a\rho}{\lambda}\Big) = 0$$

by (1.2).

(2) If $x < x_0$ denoting $t(x) = \frac{1}{\rho}\exp\{-\rho(x - x_0)\}$,

$$\begin{aligned}(Ls)(x) &= \lambda\int_0^{+\infty} (s(x + y) - s(x))dF(y) + a \\ &\leq \lambda\int_0^{+\infty} (t(x + y) - t(x))dF(y) + a = 0\end{aligned}$$

(3) $s(x) > 0$ is inmediate and $s(x) \geq K - x$ follows from the fact, that $s(x)$ is convex and the function $\frac{1}{\rho}\exp\{-\rho(x - x_0)\}$ has tangent $y = K - x$ at the point $x = x_0$ (here applies the smooth pasting principle, because the function $f(x)$ is decreasing and we have jumps up).

(4) In this case we have $s(S_{\tau^*}) \leq x_0$.

(5) is also inmediate concluding the proof.

Proof of Theorem 3. Assume first that F is arbitrary.

$$S_t = x\exp\{-at + X_t\} = x\exp\{-at\}\prod_{k=1}^{N_t} e^{Y_k}$$

that can be written as

$$S_t = x\mathcal{E}\Big(-at + \sum_{k=1}^{N_t}(e^{Y_k} - 1)\Big),$$

where $\mathcal{E}$ is the stochastic or Doléans-Dade exponential, so S_t verifies the stochastic differential equation

$$dS_t = S_{t-}d(-at + \sum_{k=1}^{N_t} e^{Y_k} - 1), \qquad S_0 = x,$$

and then, it has an infinitesimal generator given by

$$(Lf)(x) = \lambda \int_0^{+\infty} [f(xe^y) - f(x)]dF(y) - axf'(x) \tag{3.10}$$

If $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, we transform this expresion into

$$(Lf)(x) = \lambda \int_0^{+\infty} [f(x(1+y) - f(x)]\alpha(1+y)^{-(\alpha+1)}dy - axf'(x)$$

We now verify conditions (1) to (5) in Lemma 3.1.

(1) For $x < x_0$, by substitution

$$\begin{aligned} axs'(x) + \lambda s(x) - \lambda \int_0^{+\infty} s(x+xy)\alpha(1+y)^{-(\alpha+1)}dy = \\ (x_0 - K)\rho(\frac{x}{x_0})^{\rho}[a + \frac{\lambda}{\rho-\alpha}] \\ + (\frac{x}{x_0})^{\alpha}((\frac{\alpha}{\rho-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1})x_0 - (\frac{\alpha}{\rho-\alpha}+1)K) = 0 \end{aligned}$$

Because

$$a + \frac{\lambda}{\rho-\alpha} = (\frac{\alpha}{\rho-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1})x_0 - (\frac{\alpha}{\rho-\alpha}+1)K = 0$$

as can be verified by substitution of the values of ρ and x_0 in (1.3).

(2) If $x > x_0$ we have

$$Ls(x) = x(\frac{\lambda}{\alpha-1} - a) < 0.$$

(3) $s(x) > 0$ by definition, and $s(x) \geq x - K$ is direct when $x \geq x_0$. When $x < x_0$, it can be verified considering the tangent line to the convex function $s(x)$, at the point x_0, giving

$$s(x) \geq (x_0 - K) + \frac{\lambda}{a(\alpha - 1)}(x - x_0) \geq (x - K) \qquad \text{if} \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

that gives the result because $\frac{\lambda}{a(\alpha-1)} < 1$.

(4) Take $Z = s(S_{\tau^*}) + x_0$. $s(S_{\tau^* \wedge T \wedge t}) \leq Z$ follows from the fact that on the set $\{\tau^* < +\infty\}$ we have $S_{\tau^* \wedge T \wedge t} \leq S_{\tau^*}$ and the function s is increasing. On the set $\{\tau^* = +\infty\}$ we have $S_{\tau^* \wedge T \wedge t} \leq x_0$.

Now, as in the proof of Theorem 1, taking into account (3.9), and $\rho > 1$ we verify $E(Z) < +\infty$.

$$E\big(\sup_{0 \leq t < +\infty} \exp(X_t - at)\big) = \frac{\lambda}{a\alpha} \frac{1}{\rho - 1} < +\infty$$

and (4) is proved.

(5) is direct, concluding the proof of Theorem 3.

Proof of Theorem 4. As in Theorem 1, we have to verify conditions (1) to (5) in Lemma 3.1.

In this case, as in Theorem 3, L is given by (3.10).

(1) If $x > x_0$, $s(x) = (K - x_0)\big(\frac{x}{x_0}\big)^{-\rho}$

$$\begin{aligned}(Ls)(x) &= \lambda \int_0^{+\infty} \big[(K - x_0)\big(\frac{xe^y}{x_0}\big)^{-\rho} - \big(\frac{x}{x_0}\big)^{-\rho}\big] dF(y) \\ &= (K - x_0)\big(\frac{x}{x_0}\big){-\rho}[\lambda(E(e^{-\rho y}) - 1) - a\rho]\end{aligned}$$

by the definition of ρ.

(2) If $x < x_0$ denoting $t(x) = (K - x_0)\big(\frac{x}{x_0}\big)^{-\rho}$

$$\begin{aligned}(Ls)(x) &= \lambda \int_0^{+\infty} (s(xe^y) - s(x)) dF(y) + a \\ &\leq \lambda \int_0^{+\infty} (t(x + y) - t(x)) dF(y) + a = 0\end{aligned}$$

(3) $s(x) > 0$ is inmediate and $s(x) \geq K - x$ follows from the fact, that $s(x)$ is convex and the function $(K - x_0)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\rho}$ has tangent $y = K - x$ at the point $x = x_0$ (here applies the smooth pasting principle, because the function $f(x)$ is decreasing and we have jumps up).

(4) In this case we have $s(S_{\tau^*}) \leq x_0$.

(5) is also inmediate concluding the proof.

Acknowledgements. The author is indebted to A.N. Shiryaev for introducing him in this subject, and to D.O. Kramkov and E. Accinelli for helpful discussion.

References

1. Dixit A.K., Pindyck R.S., *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, New York, 1994.
2. Embrechts P., Klüppelberg C., *Some Aspects of Insurance Mathematics*, Theory of Probability and Applications **38** (1993), 374–416.
3. Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Application, II*, J. Wiley, New York-London-Sydney, 1966.
4. Jacod J. and Shiryaev A.N., *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, 1987.
5. Karatzas I, *On the pricing of American Options*, Applied Math. Optimization **17** (1988), 37–60.
6. Kramkov D.O. and Mordecki E., *Optimal Stopping Rules for Poisson Processes* (1995); Preprint.
7. Shiryaev A.N., *Optimal Stopping Rules*, Springer, 1978.
8. Shiryaev A.N., Kabanov Y. M., Kramkov D.O., Melnikov A.V., *On the pricing of option of European and American types, II: Continuous time.*, Theory of Probability and Applications, **39** (1994), 80-129..

Centro de Matemática, Eduardo Acevedo 1139, Montevideo, Uruguay.
e-mail: mordecki@cmat.edu.uy

Kolmogorov-Smirnov type statistics for testing Multivariate Normality

Adolfo J. Quiroz[1]
Universidad Simón Bolivar
& Juan C. Trabucco [1]
Compañía Anónima Nacional Teléfonos de Venezuela

Abstract: We study some fairly natural (from a geometrical viewpoint) statistics for goodness of fit testing to the composite hypothesis of multivariate normality. The statistics are of the Kolmogorov-Smirnov type. They include and generalize a statistic introduced by Koziol (1982). The asymptotic distribution of the statistics presented is found using tools from the theory of Empirical Processes and the results of MonteCarlo power analysis in various dimensions are presented for some of them. Our simulations show that Koziol's statistic exhibits good power against a variety of alternatives and that this power does not seem to decrease with increasing dimension.

Key words: Multivariate Normality, Hypothesis Testing, Kolmogorov-Smirnov statistics, Empirical processes,

1 Introduction

Although there exists a large number of procedures for testing the hypothesis of univariate normality, and they can be used to asses multivariate normality (by application to each coordinate of the multivariate data) there exist few statistics for goodness of fit to multivariate normality which exploit the multivariate properties of the gaussian distribution. This has been pointed out, for instance, by Barinhaus and Henze, (1988). Among these procedures, we

[1]Research partially supported by BID-CONICIT Proyecto Nuevas Tecnologías I-06

would like to mention those based on the empirical characteristic function of Barinhaus and Henze (1988) and Csörgõ (1986) and those that use the average of certain functions over the standarized data considered in Moore and Stubblebine (1980) and Quiroz and Dudley (1991). In Csörgõ (1986), the reader can find a list of available statistics for testing multivariate normality.

In the present paper, we present and study a fairly natural (from a geometrical viewpoint) family of statistics, of the Kolmogorov-Smirnov type, for testing the null composite hypothesis of multivariate normality. Our statistics include and generalize, a Kolmogorov-Smirnov statistic of Koziol, (1982). This family of statistics, together with the necessary notation is introduced in Section 2. Section 3 contains the theoretical results that provide the limiting distributions of our statistics, as functionals of certain Gaussian "bridge" processes. One attractive feature of our statistics, discussed in Section 3, is the fact that the limiting distribution does not depend on the parameters of the underlying "true" distribution. Section 4 presents a MonteCarlo analysis of the finite sample distribution and power of Koziol statistic and its associated Smirnov statistics, not available in his article. The simulation results are encouraging in that one of the statistics studied presents good power against a variety of alternatives, and that power seems to improve (slightly) in higher dimension.

2 A family of statistics for testing multivariate normality

Let $X_1, X_2, \ldots X_n$ be an i.i.d. sample from a probability law P on $\mathbb{R}^d$. We will consider statistics for testing the composite hypothesis $H_o : P = N(\mu, \Sigma)$ for some unknown $\mu \in \mathbb{R}^d$ and real symmetric positive definite dxd matrix Σ.

Let $\overline{X}$ and S be the usual maximun likelihood estimators for μ and Σ, under H_o. Denote by T_n the Mahalanobis transformation, given by

$$T_n(x) = S^{-1/2}(x - \overline{X}), x \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Following Small (78) the vectors $Y_i = T_n(X_i)$ will be called the *scaled residuals*. For each $r \in \mathbb{R}^d$, let B_r denote the open ball of radius r centered at 0:

$$B_r = B(0, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| < r\}.$$

Since, under the null, the scaled residuals are approximately i.i.d. $N(0,1)$, the fraction of Y_i's in each ball centered at zero should be close to the probability of that ball under the standard Gaussian distribution on $\mathbb{R}^d$. Thus, the following statistics make sense for testing H_o:

$$K_{1,n}^{+} = \sqrt{n} \sup_{r} \left(\frac{\#(i \leq n : Y_i \in B_r)}{n} - N(0,I)(B_r) \right), \tag{2}$$

where I denotes the identity $d \times d$ matrix, and $N(0,I)$ is the standard d-dimensional Gaussian distribution. Replacing the supremum by an infimum in (2) defines the other Smirnov type statistic : $K_{1,n}^{-}$ and the corresponding Kolmogorov statistic is given by

$$K_{1,n} = \sqrt{n} \sup_{r} \left| \frac{\#(i \leq n : Y_i \in B_r)}{n} - N(0,I)(B_r) \right|. \tag{3}$$

$K_{1,n}$ is presented in a paper of Koziol (1982), devoted to the study of certain Cramér-Von Mises statistics. Koziol gives, without proof, the limiting distribution for $K_{1,n}$ and states that *...the somewhat lengthy arguments leading to this result are detailed in a technical report...*

Here, we will introduce two variations to Koziol's idea. One of these variations includes his statistics, but has a more delicate asymptotic analysis, due to the inclusion of a possibly fast growing weight function. A relatively simple asymptotic study of all the statistics considered here, is possible using tools from the modern theory of Empirical Processes. Let us write $K_{1,n}^{+}$ in terms of the original variables $X_1, X_2, \ldots X_n$. For a symmetric real positive definite $d \times d$ matrix A, put

$$\|x\|_A = x^t A^{-1} x, \; x \in \mathbb{R}^d.$$

Let

$$C_{n,r} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - \overline{X}\|_S \leq r\} \text{ and } \mathcal{C}_n = \{C_{n,r} : r > 0\}, \tag{4}$$

and let $\tilde{P}$ denote the $N(\overline{X}, S)$ distribution. Then

$$K_{1,n}^{+} = \sqrt{n} \sup_{r} \left(P_n(C_{n,r}) - \tilde{P}(C_{n,r}) \right) =$$

$$= \sqrt{n} \sup_{C \in \mathcal{C}_n} \left(P_n(C) - \tilde{P}(C) \right), \tag{5}$$

where $P_n(C)$ denotes, as usual, the empirical probability of the set C with respect to the sample $X_1, X_2, \ldots X_n$, that is, the fraction of the sample of size n falling in C. When we write $K_{1,n}^+$ as in (5), two things become evident: In $K_{1,n}$, the empirical probability is being compared to the estimated distribution within the Gaussian family, $N(\overline{X}, S)$, and the class of sets over which the supremum is being computed is data dependent: the set $C_{n,r}$ is an ellipsoid whose center and shape depend on the sample.

Other interesting, and still computationally feasible KS statistics, are obtained if the ellipsoids $C_{n,r}$ are replaced by ellipsoidal annuli as follows: For $r < s$, let $A_{n,r,s} = C_{n,s} \backslash C_{n,r}$, and let $\mathcal{A}_n = \{A_{n,r,s} : 0 < r < s\}$. Then define

$$K_{2,n}^+ = \sqrt{n} \sup_{A \in \mathcal{A}_n} \left(P_n(A) - \tilde{P}(A) \right), \tag{6}$$

and define similarly $K_{2,n}^-$ and $K_{2,n}$.

If one is interested in rejecting alternatives with heavy (or light) tails, then $K_{1,n}$ and its corresponding Smirnov statistics can be modified with the inclusion of a non-negative, non-decreasing weight function $w : I\!R^+ \to I\!R^+$, which will be required to satisfy both

$$\int w^2(\|x\|) dN(0, I)(x) < \infty, \text{ and} \tag{7}$$

$$w^2(r)\, r^d\, e^{-\frac{1}{2}r^2} = O(1), \text{ as } r \to \infty, \tag{8}$$

where I denotes the $d \times d$ identity matrix. For such a function, we define

$$K_{3,n} = \sqrt{n} \sup_r w(r) \left| \frac{\#(i \leq n : Y_i \in B_r)}{n} - N(0, I)(B_r) \right|, \tag{9}$$

and, similarly, $K_{3,n}^+$ and $K_{3,n}^-$. The effect of the inclusion of w in the statistic, is that of emphasizing the discrepancies in the tail, between the empirical probability and the estimated one.

3 Asymptotics of our statistics

In this section we present the theoretical results that provide the asymptotic distributions of the statistics introduced in Section 2. The analysis is restricted to the statistic $K_{3,n}$, since the presence of the weight function makes this the more difficult case, and because it includes, as a particular case, Koziol's statistic. (For the approach followed here, the ellipsoidal annuli in $\mathcal{A}_n$ present no extra difficulty with respect to the ellipsoids in $\mathcal{C}_n$: both classes of sets are Vapnik-Chervonenkis classes). Our attack on the problem of finding the asymptotics of $K_{3,n}$ can be divided in two parts: First, the weak convergence of an *idealized* version of our statistic to a functional of a Gaussian P-bridge process is established. Then, two approximation steps, one of them based on Fisher's Information Matrix, are used to show that, in probability, the idealized version is close to the statistic studied. At the end of this Section, we establish the independence of the **finite sample** distribution of all our statistics from the parameters of the "true" underlying distribution (under the null hypothesis). In what follows, we make frequent use of the "big o in probability" and "little o in probability" notation. An excellent source of information on this notation is the paper of Chernoff (1956).

For $r > 0$, let

$$C_r = \{x \in I\!R^d : \|x - \mu\|_\Sigma \leq r\} \text{ and } \mathcal{C} = \{C_r : r > 0\}, \tag{10}$$

(with $\|.\|_\Sigma$ as defined in Section 2). It is clear that for each r, the random ellipsoid $C_{n,r}$ is converging, with respect to P, to the limiting ellipsoid C_r. A statement on the rate of uniform convergence will be proved and used below.

For a function $f \in \mathcal{L}^1(P)$, let

$$P(f) = \int f(x)dP(x) \text{ and } P_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i).$$

Consider the class of functions $\mathcal{F} = \{f_r = w(r)\mathbf{1}(C_r) : r > 0\}$, and the stochastic process

$$\gamma_n(f) = \sqrt{n}(P_n(f) - P(f)),\ f \in \mathcal{F}, \tag{11}$$

indexed on $\mathcal{F}$. γ_n is called the empirical process over $\mathcal{F}$. It is convenient to notice that the empirical process over $\mathcal{F}$ takes the same values as the empirical process over $\mathcal{F}' = \{f'_r = -w(r)\mathbf{1}(C_r^c) : r > 0\}$. This observation makes easy the proof of the following

Proposition 2.1. If the non-increasing weight function w in (9) satisfies (7), then the class $\mathcal{F}$ is a functional P-Donsker class, that is, γ_n, as a process in $l^\infty(\mathcal{F})$, converges (in the sense of Dudley, 1984, see also Pollard, 1984, Chapter 7) to a sample continuous Gaussian process G_P, indexed on $\mathcal{F}$, with covariance structure given by

$$\mathrm{Cov}\,(G_P(f), G_P(g)) = P(f\,g) - P(f)P(g),\ f, g \in \mathcal{F}.$$

Proof: For each $f' \in \mathcal{F}'$ and $x \in I\!R^d$, we have

$$|f'(x)| \leq F(x) := w(\|x - \mu\|_\Sigma). \tag{12}$$

This means, by (7), that the class $\mathcal{F}'$ has an *envelope* function in $\mathcal{L}^2(P)$. Since the class of ellipsoids in $I\!R^d$ is a Vapnik-Chervonenkis class, the result (for $\mathcal{F}'$, and therefore for $\mathcal{F}$), follows by application of Theorems 9 and 7 in Pollard (1982).

To follow current usage, classes of functions satisfying the statement of Proposition 2.1 will be called Donsker classes in this paper.

For our first approximation step, we need some notation: Let $s = d + d(d+1)/2$. For $m \in I\!R^d$ and C a $d \times d$ positive definite, real symmetric matrix, let $\theta = \theta(m, C)$ be the vector in $I\!R^s$ whose components are the components of m and the non-redundant entries of C. Let $\theta_o = \theta(\mu, \Sigma)$. Denote by φ_θ^2 the density of the $N(m, C)$ distribution (with respect to Lebesgue measure λ), and by φ^2 the density of the $N(\mu, \Sigma)$ distribution. Let $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)^t$ be the vector of s functions obtained by computing the partial derivatives of φ_θ with respect to the components of θ, at $\theta = \theta_o$. For $f \in \mathcal{L}^2(P)$ define the $s \times 1$ vector

$$\Delta(f) = 2 \int f \varphi \psi d\lambda.$$

Let $\tilde{\theta} = \theta(\overline{X}, S)$. Since $\tilde{\theta}$ is a maximum likelihood estimator, we know that

$$\tilde{\theta} - \theta_o = J^{-1} P_n(2\psi/\varphi) + o_P(n^{-1/2}), \tag{13}$$

where J is the Fisher Information matrix, defined by

$$J_{ij} = 4 \int \psi_i \psi_j d\lambda$$

For $f \in \mathcal{L}^2(P)$, let $\tilde{\gamma}_n(f) = \sqrt{n}\left(P_n(f) - \tilde{P}(f)\right)$, and consider the process

$$\tilde{\gamma}_n(f) : f \in \mathcal{F}.$$

Then we have

Proposition 2.2.

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |\gamma_n(f) - \tilde{\gamma}_n(f) - \sqrt{n}\Delta^t(f)J^{-1}P_n(2\psi/\varphi)| \to 0, \text{ in probability, as } n \to \infty,$$

where $(.)^t$ denotes transposition of a vector.

Proof: Since the function F of (12) is in $\mathcal{L}^2(P)$, the result follows by application of Propositions 3 and 4(a) in Quiroz and Dudley (1991).

Propositions 2.1 and 2.2 have, as a consequence, the following result, very relevant for the problem we are considering:

Corollary 2.3. The process $\tilde{\gamma}_n(f) : f \in \mathcal{F}$, converges, in the sense mentioned above, to a sample continuous Gaussian process B_P, indexed on $\mathcal{F}$ (or, equivalently on $r > 0$), with covariance structure given by:

$$\mathrm{Cov}(B_P(f), B_P(g)) = P\left(\hat{f}\hat{g}\right) - P(\hat{f})P(\hat{g}), \quad f, g \in \mathcal{F},$$

where $\hat{f} = f - 2\Delta^t(f)J^{-1}\psi/\varphi$ and $\hat{g} = g - 2\Delta^t(g)J^{-1}\psi/\varphi$.

Proof: Noting that $P(\psi/\varphi) = 0$ (the zero vector in $\mathbb{R}^s$), we have, by Proposition 2.2, that $\tilde{\gamma}_n(f)$ can be uniformly approximated over $\mathcal{F}$ by the process

$$\gamma_n(f) - 2\gamma_n\left(\Delta^t(f)J^{-1}\psi/\varphi\right) =$$

$$= \gamma_n\left(f - \Delta^t(f)J^{-1}\psi/\varphi\right), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Since the components of ψ/φ are a finite set of functions in $\mathcal{L}^2(P)$, they trivially form a Donsker class. On the other hand, the components of the vector $\Delta(f)$ are uniformly bounded (using again Proposition 4(a), Quiroz & Dudley, 1991) by some constant. It follows that the functions of the form $f - \Delta^t(f)J^{-1}\psi/\varphi$ can be written as linear combinations, with bounded coefficients, of functions in two different Donsker classes. Thus, by Proposition 2.6 of Alexander (1987), the class $\mathcal{G} = \{f - \Delta^t(f)J^{-1}\psi/\varphi : f \in \mathcal{F}\}$ is also a Donsker class, and this is equivalent to the statement of Proposition 2.3.

So far we have considered the process $\tilde{\gamma}_n$ over the class $\mathcal{F}$, but the statistic $K_{3,n}$, and the related Smirnov statistics are continuous functionals (with respect to the supremum norm) of the process $\tilde{\gamma}_n$ over the *data dependent* class of functions

$$\mathcal{F}_n = \{f_{n,r} = w(r)\mathbf{1}(C_{n,r}) : r > 0\},$$

with the sets $C_{n,r}$ defined by (4). Thus, the last approximation step for obtaining the distribution of $K_{3,n}$ and its related statistics is the following:

Proposition 2.4. With f_r as defined just above (11) and $f_{n,r}$ as in the previous paragraph,

$$\sup_{r>0} |\tilde{\gamma}_n(f_r - f_{n,r})| \to 0, \text{ in probability, as } n \to \infty.$$

For the proof of this Proposition, we will rely heavily on the following Lemma:

Lemma 2.5. With $C_{n,r}$ and C_r as above, let

$$a_n = \inf\{\epsilon > 0 : \forall r > 1, C_{r(1-\epsilon)} \subset C_r \subset C_{r(1+\epsilon)}\}.$$

Then $a_n = O_P(n^{-1/2})$.

Proof:

$$\|x - \overline{X}\|_S = \|x - \overline{X}\|_S - \|x - \mu\|_S + \|x - \mu\|_S - \|x - \mu\|_\Sigma + \|x - \mu\|_\Sigma. \quad (14)$$

Now

$$|\|x - \overline{X}\|_S - \|x - \mu\|_S| \le \|\overline{X} - \mu\|_S = O_P(n^{-1/2}),$$

by the $\sqrt{n}$-consistency of $\overline{X}$ and S, while

$$|\|x - \mu\|_S - \|x - \mu\|_\Sigma| \le \|x - \mu\|_\Sigma \, u^t(S - \Sigma)^{-1}u,$$

for some unitary vector u, and it follows that

$$|\|x - \mu\|_S - \|x - \mu\|_\Sigma| = O_P(n^{-1/2})\|x - \mu\|_\Sigma.$$

Piecing things together, we have

$$\|x - \overline{X}\|_S = O_P(n^{-1/2}) + (1 + O_P(n^{-1/2}))\|x - \mu\|_\Sigma,$$

which implies the statement of Lemma 2.5.
Proof of Proposition 2.4.: Write

$$\tilde{\gamma}_n(f_r - f_{n,r}) = \gamma_n(f_r - f_{n,r}) + \sqrt{n}(P - \tilde{P})(f_r - f_{n,r}) \tag{15}$$

We will show that both terms in the right hand side of (15) are uniformly $o_P(1)$. As before, rather than considering γ_n on the functions f_r and $f_{n,r}$, we will consider γ_n on the functions in the class $\mathcal{F}'$ (defined before Proposition 2.1), and on the functions in the classes

$$\mathcal{F}'_n = \{f'_{n,r} = -w(r)\mathbf{1}(C^c_{n,r}) : r > 0\}.$$

Denote by $PD(d)$ the set of positive definite real symmetric $d \times d$ matrices. For $\epsilon > 0$, let

$$\mathcal{S}_\epsilon = \{M \in PD(d) : \|M - \Sigma\| < \epsilon\} \text{ and } U_\epsilon = \{c \in I\!R^d : \|c - \mu\| < \epsilon\},$$

where it is irrelevant which norm we choose to apply in the set of matrices. Let $\mathcal{G}_\epsilon$ be the class of functions on $I\!R^d$ defined by

$$\mathcal{G}_\epsilon = \{g_{c,M,r} : g_{c,M,r}(x) = -w(r)\mathbf{1}(\|x - c\|_M > r);\ c \in U_\epsilon,\ M \in \mathcal{S}_\epsilon,\ r > 0\}.$$

The argument of Lemma 2.5 says that, for ϵ small enough, the function $G(x) = w(2\|x - \mu\|_\Sigma \vee 1)$ is an envelope function (a uniform upper bound in absolute value) for the class $\mathcal{G}_\epsilon$. Since, by (7), $G \in \mathcal{L}^2(P)$, $\mathcal{G}_\epsilon$ is a Donsker class, again by Theorems 9 and 7 of Pollard, 1982. By Lemma 2.5, $\mathcal{F}'$ and $\mathcal{F}'_n$ are contained in $\mathcal{G}_\epsilon$, with probability tending to one. Then, by Dudley's equicontinuity condition (Theorem 4.1.1 in Dudley, 1984), if we can show

$$\sup_r P((f_r - f_{n,r})^2) \to 0 \text{ in probability},$$

we shall get that $\gamma_n(f_r - f_{n,r})$ is uniformly $o_P(1)$. But

$$\sup_r P((f_r - f_{n,r})^2) = \sup_r w(r)^2(P(C_{n,r}\backslash C_r) + P(C_r\backslash C_{n,r})) \leq$$

$$\leq 2\sup_r w(r)^2 P(C_{r(1+a_n)}\backslash C_r) = K \sup_r w(r)^2 \int_r^{r(1+a_n)} r^{d-1} e^{-r^2/2} dr,$$

for some constant K which does not depend on r. By (8) and Lemma 2.5, we have

$$K \sup_r w(r)^2 \int_r^{r(1+a_n)} r^{d-1} e^{-r^2/2} dr = O_P(n^{-1/2}), \tag{16}$$

and therefore, by Dudley's equicontinuity condition,

$$\sup_r |\gamma_n(f_r - f_{n,r})| = o_P(1).$$

For the second term in (15), we use again Proposition 3 of Quiroz and Dudley (1991), as well as the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\sqrt{n} \sup_{r>0} |(P - \tilde{P})(f_r - f_{n,r})| = \sqrt{n} \sup_{r>0} |\Delta^t (f_r - f_{n,r})(\theta_o - \tilde{\theta})| + o_P(1) \leq$$

$$\sup_{r>0} \|\Delta(f_r - f_{n,r})\| \, O_P(1) + o_P(1) \leq$$

$$\sum_{j \leq s} \left(\int \psi_j^2 d\lambda \right)^{1/2} \sup_{r>0} \left(P((f_r - f_{n,r})^2) \right)^{-1/2} O_P(1) + o_P(1),$$

which goes to zero by (16).

We are ready to present our main result

Theorem 2.6. If the non-decreasing weight function w satisfies (7) and (8), then, under the null hypothesis, the statistic $K_{3,n}$ converges in distribution to $\sup_{r>0} |B_P(f_r)|$, for the process B_P of Corollary 2.3. The corresponding statements (with sup and inf) hold for the statistics $K_{3,n}^+$ and $K_{3,n}^-$.

Proof: Put together Corollary 2.3 and Proposition 2.4.

To finish our theoretical analysis of all the statistics considered here, we have the following

Proposition 2.7. Under the null hypothesis, the finite sample distributions of the statistics considered in this paper, do not depend on the value of the parameters μ and Σ of the underlying Normal distribution.

Proof: The proof of Proposition 8 of Quiroz and Dudley (1991) includes the following fact: For $1 \leq i \leq n$, $S^{-1/2}(X_i - \overline{X}) = \rho S_U^{-1/2}(U_i - \overline{U})$, where $U_1, U_2, \ldots, U_n$ are i.i.d. $N(0, I)$ random vectors in $I\!R^d$ with average $\overline{U}$ and sample covariance S_U, and ρ is a random orthogonal matrix depending on the

$X_i's$ and possibly on μ and Σ. Now, all our statistics are functions only of the norms

$$\|S^{-1/2}(X_i - \overline{X})\| = \|S_U^{-1/2}(U_i - \overline{U})\|,$$

which do not depend on the parameters of the underlying distribution.

4 MonteCarlo analysis of $K_{1,n}$ and its related Smirnov statistics

In the present section, a MonteCarlo study of the behaviour of the statistics $K_{1,n}$, $K_{1,n}^+$ and $K_{1,n}^-$ is presented. All the simulations described were performed in a Sun power station, running programs written in Fortran (available from the authors) which called routines of the IMSL library.

To obtain approximate quantiles for the statistics considered we run the following simulations: For each dimension d=2, 3, 4 and each sample size n=20, 50, 100, a total of 10,000 samples of size n from the standard Gaussian distribution in $\mathbb{R}^d$ were generated. The values of the three statistics considered are computed for each of the samples, thus producing 10,000 values for each statistic. These values are sorted, and from the sorted list, approximate 90%, 95% and 99% quantiles are obtained. Results are displayed in Tables 1, 2 and 3. A good feature revealed by these tables is that the finite sample distributions of the statistic change very little wuth increasing sample size, suggesting that even for small n, the finite sample distribution is close to the asymptotic distribution. A somewhat surprising fact, is that the quantiles seem to vary little with dimension.

In order to analize the power of the three statistics studied, we run another MonteCarlo experiment: For each alternative in a list of eight, and for each dimension and sample size mentioned above, a total of 10,000 multivariate samples of size n in dimension d with the given distribution, were generated. The statistics considered were calculated for each sample, and the % of samples for which the value of the statistic exceeded the 90% quantile in Table 1, 2 or 3 was computed as approximate power. The multivariate variables were generated in each case, using i.i.d. coordinates with the specified distribution. The results of this power study are given in Tables 4 and 5 for n=50, 100 and d=2, 4. The results for other values of n and d are omitted for reasons of space. These results show that $K^{+}_{1,n}$ is, for some alternatives, the most effective statistic, failing noticeably for other alternatives for which $K^{-}_{1,n}$ has the best performance. $K^{-}_{1,n}$ shows a better performance for alternatives with compact support, as those in the Beta family. Koziol's statistic, $K_{1,n}$ seems to do a very good job of combining the alternative detection power of both Smirnov statistics and should be prefered to the other two when the user has no specific alternative distribution in mind. In all cases, the power increases with sample size, as should be expected. It also seems to increase slightly when the dimension is higher.

5 References

Alexander, K. S. (1987) The Central Limit Theorem for Empirical Processes on Vapnik-Cervonenkis Classes *The Annals of Probability* **15**, 178-203.

Barinhaus, L. and Henze, N. (1988) A Consistent Test for Multivariate Normality Based on the Empirical Characteristic Function *Metrika* **35**, 339-348.

Chernoff, H. (1956) Large Sample Theory: Parametric Case *Annals of Mathematical Statistics* **27**, 1-22.

Csörgõ, S. (1986) Testing for Normality in Arbitrary Dimension *The Annals of Statistics* **14**, 708-723.

Dudley, R.M. (1984) A Course on Empirical Processes. *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, XII-1982. Lecture Notes in Math. 1097* 1-142. Springer, New York.

Koziol, J. A. (1982) A Class of Invariant Procedures for Assesing Multivariate Normality *Biometrika* **69**, 423-427

Moore, D. S. and Stubblebine, J. B. (1981) Chi-Square Tests for Multivariate Normality with Application to Common Stock Prices *Communications in Statistics. Theory and Methods* **A 10**, 713-738.

Pollard, D. (1982) A Central Limit Theorem for Empirical Measures *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)* **33**, 235-248.

Pollard, D. (1984) *Convergence of Stochastic Processes* Springer, New York.

Quiroz, A. J. and Dudley, R. M. (1991) Some New Tests for Multivariate Normality *Probability Theory and Related Fields* **87**, 521-546.

Small, N. J. H. (1978) Plotting Square Radii *Biometrika* **65**, 657-658.

Table 1: MonteCarlo quantiles for d=2, n=20/50/100

Quantile	90%	95%	99%
$K^+_{1,n}$	0.8108/0.8537/0.8642	0.9099/0.9606/0.9757	1.1301/1.1626/1.2006
$K^-_{1,n}$	0.8542/0.8683/0.8691	0.9490/0.9712/0.9774	1.1678/1.1622/1.1722
$K_{1,n}$	0.9329/0.9646/0.9763	1.0300/1.0564/1.0713	1.2153/1.2419/1.2821

Table 2: MonteCarlo quantiles for d=3, n=20/50/100

Quantile	90%	95%	99%
$K_{1,n}^{+}$	0.7818/0.8194/0.8378	0.8706/0.9180/0.9315	1.0582/1.1233/1.1356
$K_{1,n}^{-}$	0.8422/0.8632/0.8579	0.9351/0.9625/0.9590	1.1198/1.1353/1.1588
$K_{1,n}$	0.9045/0.9401/0.9466	0.9973/1.0242/1.0470	1.1610/1.2096/1.2267

Table 3: MonteCarlo quantiles for d=4, n=20/50/100

Quantile	90%	95%	99%
$K_{1,n}^{+}$	0.7722/0.8056/0.8218	0.8496/0.8968//0.9180	1.0035/1.0911/1.1049
$K_{1,n}^{-}$	0.8430/0.8508/0.8448	0.9313/0.9459/0.9456	1.1125/1.1275/1.1384
$K_{1,n}$	0.8861/0.9239/0.9328	0.9678/1.0076/1.0180	1.1358/1.1840/1.2033

Table 4: MonteCarlo power for d=2, n=50/100

Alternative	$K^{+}_{1,n}$	$K^{-}_{1,n}$	$K_{1,n}$
Student t_1	0.9998/0.9999	0.0006/0.0024	1.00/1.00
Student t_3	0.8832/0.9894	0.0013/0.0009	0.8228/0.9796
Student t_5	0.6020/0.8396	0.0072/0.0012	0.4821/0.7466
Beta(1,1)	0.1169/0.4687	0.9171/0.9986	0.8404/0.9925
Beta(3,3)	0.0117/0.0064	0.3789/0.5935	0.2521/0.4237
Gamma(1,1)	0.9204/0.9959	0.0482/0.0402	0.8793/0.9913
Lognormal(0,1)	0.9958/1.00	0.0036/0.0022	0.9919/1.00
Logistic	0.3949/0.5813	0.0184/0.0056	0.2768/0.4460

Table 5: MonteCarlo power for d=4, n=50/100

Alternative	$K_{1,n}^{+}$	$K_{1,n}^{-}$	$K_{1,n}$
Student t_1	0.9991/0.9995	0.0672/0.1077	1.00/1.00
Student t_3	0.9466/0.9985	0.0079/0.0299	0.8994/0.9958
Student t_5	0.6833/0.9181	0.0064/0.0074	0.5467/0.8549
Beta(1,1)	0.4313/0.8364	0.9271/0.9996	0.8761/0.9977
Beta(3,3)	0.0680/0.0730	0.4390/0.6860	0.3180/0.5510
Gamma(1,1)	0.9694/1.00	0.0092/0.053	0.9379/1.00
Lognormal(0,1)	0.9999/1.00	0.0371/0.1762	0.9992/1.00
Logistic	0.4253/0.6653	0.0146/0.0099	0.2763/0.5186

Au delà des potentiels et revêtements tangentiels hyperelliptiques exceptionnels*

Armando TREIBICH[1] et Jean-Louis VERDIER†

[1] Université d'Artois

U.R.A. au C.N.R.S. 751

Résumé

Soient Λ un réseau de C, $\wp$ la fonction Λ-périodique de Weierstrass, $\wp'$ sa dérivée et $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ l'ensemble des demi-périodes de la courbe elliptique $X = C/\Lambda$. Nous prouvons que quelque soit $(a_i) \in N^4$ il existe $\rho \in X$, satisfaisant l'équation $\sum_{i=0}^{3}(2a_i + 1)^2\wp'(\rho - \omega_i) = 0$, tel que la fonction $2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + \sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$ soit un potentiel à nombre fini de zones.

Abstract

Let Λ be a lattice of C, $\wp$ the usual Weierstrass Λ-periodic function, $\wp'$ its derivative and $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ the set of half-periods of the elliptic curve $X = C/\Lambda$. We prove that for any $(a_i) \in N^4$ there exists $\rho \in X$, a solution of the equation $\sum_{i=0}^{3}(2a_i+1)^2\wp'(\rho-\omega_i) = 0$,such that the function $2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho) + \sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$ would be a finite-gap potential.

1 Rappels et notations.

Soit (X, q) une courbe elliptique et $\pi_S : S \to X$ la surface réglée, caractérisée par l'existence d'une unique section $C_0 \subset S$ d'auto-intersection zéro. La multiplication par -1 sur (X, q) se relève en une involution de S, ayant au-desus

*Cette note est l'aboutissement d'un long travail en commun avec J.L. Verdier et suit, en partie, des notes rédigées par ce dernier. Version préliminaire.

de chaque demi-période $\omega_i \in \{\omega_0 = q, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de X deux points fixes: l'un, noté s_i, appartenant à C_0, et l'autre noté r_i. Soit $e : S^{\perp} \to S$ l'éclatement des 8 points fixes $\{r_i, s_i, i = 0, \cdots, 3\}$ et $\{r_i^{\perp}, s_i^{\perp}, i = 0, \cdots, 3\}$ les droites exceptionnelles (dans $S^{\perp}$) correspondantes. L'involution de S se relève en une involution $\tau^{\perp} : S^{\perp} \to S^{\perp}$ laissant fixe $\cup_{i=0}^{3} r_i^{\perp} \cup s_i^{\perp}$, et le quotient de $S^{\perp}$ par $\tau^{\perp}$, est une surface lisse et rationnelle notée $S^{\sim}$ ([3] ; §. 4.1.2.)

Théorème 1.1 ([3]) *Soit $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ un revêtement tangentiel hyperelliptique et $i^{\perp} : \Gamma \to S^{\perp}$ l'unique morphisme tel que $\pi = \pi_S \circ e \circ i^{\perp}$. Alors le vecteur $(\mu_i) \in \mathbf{N}^4$ $(\mu_i := i^{\perp}(\Gamma) \cdot r_i^{\perp})$, appelé "type" de π, et le genre arithmétique g de Γ satisfont les (in)égalités ci-dessous:*

1) $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)$

2) $\sum_{i=0}^{3} \mu_i^2 \leq 2n + 1$ *(et leur différence est un multiple de 4) ;*

3) $2g + 1 \leq \sum_{i=0}^{3} \mu_i$ *et* $g(g + 1) \leq n$.

Théorème 1.2 ([3]) *Quel que soit $n \geq 1$ et $\mu \in \mathbf{N}^4$ "adapté" à n, (c.a.d: tel que $\mu_0 + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)$) il existe un unique élément de $\mathrm{Pic}(S^{\sim})$, noté $\lambda(n, \mu)$, satisfaisant la propriété suivante : quel que soit le revêtement tangentiel hyperelliptique de degré n et type $\mu, \pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$, son image canonique dans $S^{\sim}$, $\varphi \circ i^{\perp}(\Gamma)$, est une courbe rationnelle du système linéaire $|\lambda(n, \mu)|$. Réciproquement, soit $\varphi : S^{\perp} \to S^{\sim}$ le quotient par l'involution $\tau^{\perp}$, C une courbe rationnelle dans $|\lambda(n, \mu)|$ et $j : \hat{C} \to C$ sa normalisée. Alors le produit cartésien de j et φ définit une courbe $\sigma(C) = S^{\perp} \times_{S^{\sim}} \hat{C}$ munie d'une projection naturelle sur X qui en fait un revêtement tangentiel hyperelliptique de degré n, type μ et genre (maximal !) $g = \frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^{3} \mu_i)$.*

Théorème 1.3 ([3]) *Quel que soit $n \geq 1$ et $\mu \in \mathbf{N}^4$ adapté à n tel que $2n + 1 \geq \sum_{i=0}^{3} \mu_i^2$, on a $\dim |\lambda(n, \mu)| = \frac{1}{4}(2n + 1 - \sum_{i=0}^{3} \mu_i^2)$. En particulier, si $2n + 1 = \sum_{i=0}^{3} \mu_i^2$ le système linéaire $|\lambda(n, \mu)|$ est composé d'un seul élément, noté $C^{\sim}(n, \mu)$, lequel est une droite exceptionnelle de $S^{\sim}$. Dans ce cas la courbe $C^{\perp}(n, \mu) := S^{\perp} \times_{S^{\sim}} C^{\sim}(n, \mu)$, munie de la projection naturelle sur X, est l'unique revêtement tangentiel hyperelliptique (dit exceptionnel) de degré n, type μ et genre $\frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^{3} \mu_i)$.*

2 Le premier cas non-exceptionnel

Supposons à présent que l'on choisisse $\mu \in \mathbf{N}^4$ adapté à n tel que $2n-3 = \sum_{i=0}^{3}\mu_i^2$, et notons Red (resp. I) l'ensemble fini des diviseurs réductibles (resp.: intègres et singuliers) du pinceau linéaire $|\lambda(n,\mu)|$. Nous savons dans ce cas que l'élément générique de $|\lambda(n,\mu)|$ est une courbe elliptique. Tout élément de I est alors une courbe rationnelle ayant, soit un node et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 1$, soit un point de rebroussement et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 2$. Rappelons également que I est en correspondance biunivoque avec $R(n,\mu,X)$, l'ensemble (fini!) des classes d'isomorphisme des revêtements tangentiels hyperelliptiques de degré n, type μ et genre arithmétique $g = \frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$.
Soient d'autre part $C_0^{\sim}, s_i^{\sim}$ et $r_i^{\sim}$ les images réduites de $C_0^{\perp}$, $s_i^{\perp}$ et $r_i^{\perp}$ par la projection $\varphi : S^{\perp} \to S^{\sim}$, et $\vec{e}_i \in \mathbf{N}^4$ le multi-indice $\vec{e}_i(j) = \delta_{ij}$, $i,j = 0,1,2,3$. On sait alors que le diviseur $C^{\sim}(n-2,\mu) + 2C_0^{\sim} + \sum_{i=0}^{3} s_i^{\sim}$ appartient à Red $\subset |\lambda(n,\mu)|$, sa caractéristique d'E-P. vaut $\chi = 6$ et les autres diviseurs réductibles de $|\lambda(n,\mu)|$ sont paramétrés par les indices $i \in \{0,1,2,3\}$ tels que $\mu_i = 0$ ([3]§.5.2). Pour un tel indice i, $C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)$ est l'unique élément de $|\lambda(n,\mu+2\vec{e}_i)|$ et on vérifie aisément que $C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)+r_i^{\sim} \in$ Red $\subset |\lambda(n,\mu)|$ et que $C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)\cdot r_i^{\sim} = 2$. Deux cas sont alors possibles: soit $C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)$ intersecte $r_i^{\sim}$ en deux points et la caractéristique d'E-P.de $C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)+r_i^{\sim}$ vaut $\chi = 2$, soit elle est tangente à $r_i^{\sim}$, $\chi = 3$ et le revêtement tangentiel hyperelliptique exceptionnel associé, $S^{\perp} \times_{S^{\sim}} C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)$, est forcément singulier (car $r_i^{\sim}$ appartient au discriminant de $\varphi : S^{\perp} \to S^{\sim}$). Finalement, sachant que $C^{\perp}(n,\mu+2\vec{e}_i) := S^{\perp} \times_{S^{\sim}} C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)$ est lisse pour X générique ou définie par un réseau rectangulaire ([2] §.3.5. iii)), nous en déduisons que, pour presque tout X, $\chi(C^{\sim}(n,\mu+2\vec{e}_i)+r_i^{\sim}) = 2$. Ceci étant précisé nous sommes en mesure d'énoncer notre premier résultat.

Théorème 2.1 [1] *Soient $n \geq 1$ et $\mu \in \mathbf{N}^4$ adapté à n tel que $\sum_{i=0}^{3}\mu_i^2 = 2n-3$, alors il existe un revêtement tangentiel hyperelliptique de degré n et type μ (et genre arithmétique maximal $g = \frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$) si et seulement si μ n'est pas de la forme $(2k+1,0,0,0)$, $k \in \mathbf{N}$. Plus précisément, nous obtenons*

[1] Ce théorème donne une légère amélioration des résultats annoncés (sans preuve) dans [3] 6.7.

les bornes suivantes pour $\#R(n,\mu,X)$, le cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphisme des revêtements tangentiels hyperelliptiques de degré n, type μ et genre $\frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$ au-dessus de X:

a) Quel que soit $\mu \in \{(2k+1,0,0,0), k \in \mathbf{N}\}$, $\#R(n,\mu,X)=0$;

b) S'il existe deux indices $i>0$ tels que $\mu_i=0$ alors $0 \leq \#R(n,\mu,X) \leq 2$ (et $1 \leq \#R(n,\mu,X) \leq 2$ pour X défini par un réseau rectangulaire ou X suffisamment générique) ;

c) S'il existe un seul indice $i \geq 0$ tel que $\mu_i=0$, alors $2 \leq \#R(n,\mu,X) \leq 4$;

d) Si $\mu_i \neq 0$, quel que soit $i=0,1,2,3$, alors $3 \leq \#R(n,\mu,6) \leq 6$.

Démonstration: Au cas où $\sum_{i=0}^{3}\mu_i^2 = 2n-3$, $|\lambda(n,\mu)|$ est un pinceau linéaire admettant un unique point base, indépendant de μ et noté $b(n)$ ([3] §.5.3). En éclatant $b(n) \in S^{\sim}$ et en contractant le transformé strict de la droite exceptionnelle $C^{\sim}(n-2,\mu)$, on obtient une surface rationnelle, notée $S_n^{\sim}$, telle que $\mathrm{Pic}(S_n^{\sim}) \cong \mathbf{Z}^{10}$, munie d'un morphisme $S_n^{\sim} \to |\lambda(n,\mu)|$. Par suite sa caractéristique d'E-P. vaut $\chi=12$ et les fibres du morphisme $S_n^{\sim} \to |\lambda(n,\mu)|$ sont génériquement des courbes elliptiques. Notons à nouveau Red (resp. I) l'ensemble des $y \in |\lambda(n,\mu)|$ tels que la fibre dans $S_n^{\sim}$ soit réductible (resp. intègre et singulière). On sait alors que la caractéristique d'E-P de toute fibre $y \notin \mathrm{Red} \cup I$ est nulle et on a la formule:

$$12 = \chi(S_n^{\sim}) = \sum_{y \in \mathrm{Red}} \chi(y) + \sum_{y \in I} \chi(y) .$$

Compte tenu des estimations obtenues ci-dessus pour $\chi(y)$, $y \in \mathrm{Red} \cup I$, on conclut aisément que $\#I = \#R(n,\mu,X)$ satisfait les inégalités 2.1. ∎

3 Potentiels hyper-elliptiques

Soit Λ un réseau de $\mathbf{C}$, $\wp$ la fonction Λ-périodique de Weierstrass et $(X,q) := (\mathbf{C}/\Lambda, 0)$. Notons, pour tout $n \geq 2$, X_n le n-ième symétrisé de X et $L_n(X)$ la clÙture dans X_n de la sous-variété localement ouverte définie par les équations

$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \wp'(x_i - x_j) = 0$, $(j = 1, \cdots, n)$. On sait alors que si $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ est un revêtement tangentiel hyperelliptique de degré n et ξ est un point de la jacobienne complétée de Γ, le potentiel Λ-périodique à nombre fini de zones (dit *hyper-elliptique*) associé à ξ est égal à $u_\xi(x) = 2\sum_{i=1}^{n} \wp(x - \alpha_i)$, pour un certain $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \in L_n(X)$. Réciproquement, tout point $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \in L_n(X)$ correspond à une unique donnée spectrale $(\pi; \xi)$ comme ci-dessus ([1] ; [3][2.7,2.8]).

Théorème 3.1 *Soit $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ un revêtement tangentiel hyperelliptique de degré n, type μ et genre maximal $g = \frac{1}{2}(-1 + \sum_{i=0}^{3} \mu_i)$, tel que $2n - 3 = \sum_{i=0}^{3} \mu_i^2$. Soit ξ la θ-caractéristique $\xi = \mathcal{O}_\Gamma((g-1)p)$ (resp.: $\xi = \mathcal{O}_\Gamma((n + g - 1)p - \pi^*(q))$). Alors le potentiel hyper-elliptique associé à la donnée spectrale $(\pi; \xi)$ est égal à: $u_\xi(x) = 2\wp(x - \rho) + 2\wp(x + \rho)$ $+ \sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\wp(x - \omega_i)$, où $a_0 = g$ et pour $j = 1, 2, 3$ $a_j(a_j + 1) = (g - \mu_0 - \mu_j)(g - \mu_0 - \mu_j + 1)$ (resp.: $a_i(a_i + 1) = (g - \mu_i)(g - \mu_i + 1)$, $i = 0, 1, 2, 3$). De plus on peut préciser que $\rho \notin \{\omega_i, i = 0, \cdots, 3\}$ et satisfait l'équation $\sum_{i=0}^{3}(2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0$.*

Démonstration: D'après les résultats de [5] §.3.5.(1) le coefficient de $\wp(x - \omega_i)$ $(i = 0, \cdots, 3)$ dans $u_\xi(x)$ est borné inférieurement par l'entier $a_i(a_i + 1)$ défini ci-dessus. Sachant d'autre part que $u_\xi(x)$ est paire et égale à $2\sum_{k=1}^{n} \wp(x - \alpha_k)$, pour un certain $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \in L_n(X)$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \rho + (-\rho) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\omega_i$. Autrement, on aurait $u_\xi(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i(b_i + 1)\wp(x - \omega_i)$ $(b_i \geq a_i)$, lequel est le potentiel hyper-elliptique associé à un revêtement tangentiel hyperelliptique exceptionnel [Ibid] (contradiction!). Finalement, en faisant agir le flot en $t = t_3$ de KdV sur ξ (cf.: [3]§.7) on obtient une famille de diviseurs $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) \in L_n(X)$ $(\alpha_k(t) \neq \alpha_\ell(t)$ si $k \neq \ell$ et $t \neq 0)$ qui converge vers $\rho + (-\rho) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\omega_i$ quand $t \to 0$. Il en résulte en particulier que $\wp'(2\rho) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} a_i(a_i + 1)\wp'(\rho - \omega_i) = 0$ ce qui est équivalent à l'équation $\sum_{i=0}^{3}(2a_i + 1)^2 \wp'(\rho - \omega_i) = 0$. ■

Le résultat ci-dessous est une réciproque du théorème 3.1 et complète l'analogie avec l'ensemble de résultats démontrés dans le cadre dit exceptionnel de [5] (comparer avec A.O. Smirnov, Acta Appl. Math., 36, corollary 3, p. 145).

Théorème 3.2 *Quel que soit* $(a_i) \in \mathbf{N}^4$ *il existe* $\rho \in X$ *tel que la fonction* $2\wp(x-\rho)+2\wp(x+\rho)+\sum_{i=0}^{3} a_i\,(a_i+1)\,\wp(x-\omega_i)$ *soit le potentiel hyper-elliptique associé à une donnée spectrale* $(\pi : (\Gamma,p) \to (X,q);\xi)$ *comme ci-dessus. Plus précisément,* ρ *satisfait l'équation* $\sum_{i=0}^{3}(2a_i+1)^2\wp'(\rho-\omega_i)=0$ *et, si* $\#\{a_i, i=0,1,2,3\} \geq 3$*,* π *est un revêtement tangentiel hyperelliptique de degré* $n=2+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}a_i(a_i+1)$ *et genre arithmétique* $g=\frac{1}{4}\max(4M, 2S+2-(1+(-1)^S)(2m+1))$*, où* $M=\max\{a_i\}$*,* $S=\sum_{i=0}^{3}a_i$ *et* $m=\min\{a_i\}$*. De plus, il existe* $j\in\{0,1,2,3\}$ *tel que* ξ *soit égal à* $\mathcal{O}_\Gamma((n+g-1)p-\pi^*(\omega_j))$ *ou à* $\mathcal{O}_\Gamma((g-1)p+\pi^*(\omega_0-\omega_j))$*, et le type, noté* μ*, de* π *est tel que* $\sum_{i=0}^{3}\mu_i^2=2n-3$ *et* $g=\frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$.

Démonstration: Pour tout $\mu \in \mathbf{N}^4$ adapté à $n=2+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}a_i(a_i+1)$, tel que $\sum_{i=0}^{3}\mu_i^2=2n-3$ et $\#\{i,\mu_i=0\}\leq 1$, il existe $(\pi:(\Gamma,p)\to(X,q)) \in R(n,\mu,X)$, de genre arithmétique $g=\frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$ (cf.: [3]§.6 ou 2.1.)). Notons $\xi_0=\mathcal{O}_\Gamma((g-1)p)$ et $\xi_1=\mathcal{O}_\Gamma((n+g-1)p-\pi^*(\omega_0))$. D'après le 3.1 ci-dessus, les potentiels hyper-elliptiques associés aux θ-caractéristiques $\xi_0(\pi^*(\omega_j-\omega_0))$ et $\xi_1(\pi^*(\omega_j-\omega_0))$ $(j=0,1,2,3)$ sont de la forme $2\wp(x-\rho)+2\wp(x+\rho)+\sum_{i=0}^{3}\alpha_i(\alpha_i+1)\wp(x-\omega_i)$, où $(\alpha_i)\in\mathbf{N}^4$, $n=2+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\alpha_i(\alpha_i+1)$ et $\sum_{i=0}^{3}(2\alpha_i+1)^2\wp'(\rho-\omega_i)=0$. Il suffit alors de vérifier que, si $\#\{a_i, i=0,1,2,3\}\geq 3$, il existe une donnée spectrale $(\pi;\xi)$ comme ci-dessus, dont le potentiel hyper-elliptique associé soit égal à $2\wp(x-\rho)+2\wp(x+\rho)+\sum_{i=0}^{3}a_i(a_i+1)\wp(x-\omega_i)$. Dans ce cas, le couple $(k,j)\in\{0,1\}\times\{0,\cdots,3\}$ tel que $\xi=\xi_k(\pi^*(\omega_j-\omega_0))$, et le type μ du revêtement π correspondant sont univoquement déterminés par (a_i) ([5] §.4.4, 5.3). Il en résulte en particulier que le genre arithmétique $g=\frac{1}{2}(-1+\sum_{i=0}^{3}\mu_i)$ s'obtient en fonction de (a_i) par la formule du 3.3 ci-dessus. Ce résultat reste vrai au cas où $\#\{a_i\}=2$, si X est une courbe elliptique suffisamment générique. Finalement, quelle que soit X, si $\#\{a_i\}\leq 2$ on peut trouver ρ, solution de $\sum_{i=0}^{3}(2a_i+1)^2\wp'(\rho-\omega_i)=0$ tel que 2ρ soit une demi-période non-nulle. On démontre aisément alors que $2\wp(x-\rho)+2\wp(x+\rho)+\sum_{i=0}^{3}a_i(a_i+1)\wp(x-\omega_i)$ est le potentiel hyper-elliptique associé à un revêtement tangentiel hyperelliptique exceptionnel de degré $\frac{n}{2}$ au-dessus d'une courbe elliptique isogène à X. ∎

References

[1] Airault H., McKean H., Moser J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation Comm. Pure App. Math. 30 (1977) 95-148.

[2] Gesztesy F., Weikard R., Math. Zeitschrift 219 (1995) p. 451-476.

[3] Treibich A., Verdier J.L. Solitons Elliptiques Prog in Math, Vol. 88, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Ed. Birkhäuser-Boston (1990).

[4] Treibich A., Verdier J.L. Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires Note C.R.A.S., T. 311, Série I (1990), p. 51-54.

[5] Treibich A., Verdier J.L. Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires Duke Math. J., Vol 68, No2 (Nov. 1992) p. 217-236.

INSTRUCCIONES PARA LA PRESENTACIÓN DE TRABAJOS EN LAS P.M.U.

Se solicita que las contribuciones a las Publicaciones Matemáticas del Uruguay se envíen en un archivo Latex (estilo "article", 11 pt) a la dirección pmu@cmat.edu.uy

Tamaño de página: ancho 13 cm, altura, 16.5 cm.

Datos del autor: A continuación del título se anotará el nombre del autor, y su lugar de trabajo. Al final del artículo, se indicaraá la dirección del autor. Si el trabajo tiene más de un autor, estos datos se indicarán para cada uno de ellos.

Resumen: Se incluirá un resumen en inglés, otro en castellano, y otro en el idioma en que esté redactado el trabajo si es diferente de los indicados.

Referencias: Se solicita que sean presentadas de acuerdo al modelo que se indica al pie.

Para uniformizar el estilo, se utilizarán las directivas de Latex: `\maketitle`, `\section`, `\subsection`, `\begin{abstract}`, `\begin{theorem}`, cuando corresponda. Los interesados que lo soliciten a pmu@cmat.edu.uy recibirán por e-mail un formato tipo.

DIRECTIONS FOR THE SUBMISSION OF ARTICLES TO THE P.M.U.

It is requested that the contributions be sent to the address pmu@cmat.edu.uy in a Latex file (article style, 11 pt).

Page size: The size of the written text is 13 cm width, and 16.5 cm height.

Author's information: Please write the author(s) name(s) and place(s) of work after the title, and the address(es) at the end of the article.

Abstract: Brief summaries in English and in Spanish will be included, as well as another abstract in the article's language, if different of the former ones.

References: The style of presentation of the examples below is requested.

The Latex commands `\maketitle`, `\section`, `\subsection`, `\begin{abstract}`, `\begin{theorem}`, will be used wherever they may be applied. A file with a typical example will be supplied by e-mail to interested contributors who request it to pmu@cmat.edu.uy

— —

[9] PARANJAPE, S. R. and PARK, C. Distribution of the supremum of the two-parameter Yeh-Wiener process on the boundary, *J. Appl. Probability* **10**, 1973, 875-880.

[10] PYKE, R. *Multidimensional Empirical Processes: Some Comments in Statistical Inference and Related Topics.* (M. L. Puri, ed.) Academic Press, New York, 1975, 45-48.

[11] WIDDER, D. V. *The Heat Equation.* Academic Press, New York, 1975.

se terminó de imprimir en los talleres
gráficos de cba s.r.l. (juan carlos
gómez 1439, teléfono 915 70 46,
montevideo, uruguay) en el mes
de febrero de 1998.

depósito legal nº 297.074/98