El significado de constructores de definiciones inductivas en teorias de tipos.

Una propuesta de electiva para el profesorado de informática.

Patricia Peratto
INET

Trabajaremos en una teoría de tipos particular
que es el Cálculo de Construciones.

Usaremos su implementación para hacer pruebas.

La implementación se llama Coq.

Idea de la electiva:

- Coq es un sistema formal implementado como un programa en el que uno puede hacer pruebas lógicas, definir programas y probar los programas son correctos.

La idea de la electiva es:

- Usar Coq para pruebas lógicas.
- Usar Coq para desarrollar programas correctos.

La idea de este trabajo, es ver como damos significado a los constructores de definiciones inductivas en Coq.

Hay otros sistemas en los que podemos definir conjuntos inductivos del mismo tipo.

Éste trabajo también se aplica a ellos.

Es usual definir conjuntos inductivos en Coq.

Definimos conjuntos inductivos dando un nombre al conjunto y dando nombres a los constructores.

En este trabajo estudiamos como les damos significado a los constructores ya que ésto no es parte de la definición del conjunto.

En la teoria de tipos podemos escribir programas y especificaciones y probar que los programas satisfacen las especificaciones.

Ejemplo:

Especificación de programa de ordenamiento:

- Para toda lista l, existe una lista l', tal que
- l' es permutación de l y l' está ordenada.

Escribimos un programa que ordene y probamos satisface la especificación.

Permutacion y Ordenada se definen

dentro de la teoría.

Para todo y existe también forman parte

de la Teoría.

Las teorías de tipos se programan.

A estos programas les llamamos “logical frameworks”.

La definición de programas y especificaciones se hace en los logical frameworks.

En este trabajo estudiamos como se da significado a los constructores de conjuntos inductivos.

Por ejemplo, definimos los naturales diciendo:

```
Inductive nat:Set :=
| O : nat
| S : nat -> nat
```

nat es el nombre del conjunto

O y S son constructores.

Definimos los booleanos diciendo:

```
Inductive bool : Set :=
  | true : bool
  | false : bool
```

Definimos listas diciendo:

```
Inductive list (A:Set) : Set
| nil : list A
| cons : A -> list A -> list A
```

Estudiemos el caso de los naturales.

Peano cuando definió los naturales

dijo que $S(x)=x+1$

En general los articulos y libros

que presentan el conjunto de los naturales,

dicen que $S(x)=x+1$.

Algunos de estos trabajos también

definen suma y producto

Sin embargo en la definición de los naturales en Coq, no decimos a que es igual (S x).

Solo decimos que S es una función de nat en nat.

La pregunta es :

¿ cómo decimos que $S(x)=x+1$?

La respuesta es : consideremos funciones definidas sobre el conjunto.

Vamos a considerar : suma (plus), producto (times) y division (div).

La definición de la suma es:

```
Fixpoint plus (n m:nat) : nat :=
match n with
| O => m
| S p => S (plus p m)
end.
```

Si considero $S(x)=x+2$, no hay contradicción con la definición de suma.

Consideremos la segunda ecuación:

$$S\ p \Rightarrow S\ (plus\ p\ m)$$

Si $S\ p = p + 2$, se cumple

$$S\ p + m = p + 2 + m = p + m + 2.$$

Idem si considero $S\,p = p + 3$ y en general $S\,p = p + q$ satisface la ecuación para todo natural q.

Entonces la función suma no es suficiente para que quede determinada correctamente la función sucesor.

Consideremos ahora la función producto (times). Su definición es:

```
Fixpoint times (n m:nat) : nat :=
match n with
 | O => O
 | S p => plus (times p m) m
 end.
```

consideremos la segunda ecuación:

$$(S\ p) * m = p * m + m$$

si divido entre m obtengo:

$$S(p) = p + 1$$

Que es la definición de sucesor

que buscabamos.

Entonces, para probar en Coq que

$$S(x)=x+1$$

tenemos que definir además de suma y producto la función cociente para poder hacer la división indicada.

La idea de este trabajo es definir las funciones que correspondan para deducir que los constructores tienen el significado esperado.

Resumiendo:

En la electiva:

La idea es estudiar el sistema Coq, su uso para la demostración de proposiciones lógicas y su uso para definir programas, y especificaciones y demostrar su correspondencia.

Trabajo futuro:

preparar material para el dictado de la electiva.

Gracias por su atención.