Seminario de Álgebra del IMERL

Organizador: Diego Bravo

dbravo@fing.edu.uy

1er Semestre de 2019

- **Claude Cibils (IMAG - Université de Montpellier)**

  (Co)homología relativa de Hochschild, álgebras tensoriales y carcajes. (Mini curso - Charla 1). Módulos relativamente proyectivos y resoluciones relativas.

  `15 de Marzo de 2019`

  Presentaremos la teoría relativa de (co)homología descrita por Hochschild, haciendo la relación con las categorías exactas de Quillen. Describiremos los módulos relativamente proyectivos y definiremos Ext y Tor, en sus versiones relativas y usuales.

- **Claude Cibils (IMAG - Université de Montpellier)**

  (Co)homología relativa de Hochschild, álgebras tensoriales y carcajes. (Mini curso - Charla 2). Sucesión exacta de Jacobi-Zariski según A. Kaygun.

  `22 de Marzo de 2019`

  La sucesión exacta larga en (co)homología de Kaygun relaciona la (co)homología relativa de una inclusión de álgebras con la (co)homología usual de cada una, cuando el cociente es un bimódulo proyectivo. La estudiaremos y veremos las aplicaciones.

- **Claude Cibils (IMAG - Université de Montpellier)**

  (Co)homología relativa de Hochschild, álgebras tensoriales y carcajes. (Mini curso - Charla 3). Álgebra tensorial y F-caminos del carcaj aumentado.

  `29 de Marzo de 2019`

  Consideraremos el álgebra tensorial de un álgebra respecto a un bimódulo, veremos que corresponde a aumentar un carcaj con un sistema finito de flechas. Describiremos los caminos pertinentes en esta álgebra, veremos cuando es de dimensión finita, y calcularemos su (co)homología relativa.

- **Claude Cibils (IMAG - Université de Montpellier)**

  (Co)homología relativa de Hochschild, álgebras tensoriales y carcajes. (Mini curso - Charla 4). Teorema de adjunción de un sistema de flechas en cohomología de Hochschild.

  `5 de Abril de 2019 (11:15)`

  Los resultados de las charlas anteriores permitirán demostrar el Teorema principal que describe la (co)homología de Hochschild de un álgebra de carcaj con relaciones al adjuntar al carcaj un numero finito de flechas nuevas. Trataremos ejemplos de álgebras de radical cuadrado cero, Gorenstein, y enunciaremos el Teorema de extensión por un carcaj sin ciclos orientados.

- **Eduardo Marcos (Universidade de São Paulo)**

  Adding or deleting arrows of a bound quiver algebra and Hochschild (co)homology.

  `5 de Abril de 2019 (12:15)`

  This is a talk on a joint work with C. Cibils, M. Lanzilotta and A. Solotar.

  We describe how the Hochschild (co)homology of a bound quiver algebra changes when adding or deleting arrows to the quiver.

  The main tools are relative Hochschild (co)homology, the Jacobi-Zariski long exact sequence obtained by A. Kaygun and a one step relative projective resolution of a tensor algebra.

- **Matías Valdés (IMERL - Universidad de la República)**

  Compressed Sensing: Algoritmo Re-Weighted l_1 con pesos actualizados resolviendo un problema dual. (Defensa de tesis de maestría).

  `12 de Abril de 2019. (10:00)`

  En este trabajo se presentan algunos de los resultados más relevantes de la teoría vinculada al problema de Compressed Sensing (CS) o Sensado Comprimido. Este consiste en: dado un sistema lineal $\Phi x = b$, con infinitas soluciones, hallar una solución con la mayor cantidad de coordenadas nulas posibles. Es decir: la solución más "esparsa". Se propone además una nueva metodología para actualizar los pesos de un algoritmo Re Weighted l_1, basada en la relajación lagrangeana, que se traduce en algoritmos con un desempeño comparable al de la metodología usual.

  El problema CS resulta de gran interés en la adquisición de señales con características esparsas, como las imágenes y señales de audio. Esto es así pues, mientras que el proceso usual de adquisición realiza n medidas $x^* \in \mathbb{R}^n$ y luego las comprime, CS permite sensar y comprimir x^* en un único paso, a partir de m medidas lineales: $b = \Phi x^*$, con $m << n$. Cuando la matriz de medida Φ cumple ciertas propiedades, es posible resolver el problema CS de forma eficiente, recuperando de esta forma la señal esparsa x^* a partir de b. Para esto se resuelve un problema equivalente de optimización convexa, basado en la norma l_1.

  Este proceso de recuperación puede ser mejorado, asignando pesos a las coordenadas de la norma l_1, en un problema convexo conocido como Weighted l_1. Resolviendo repetidas veces este problema, a la vez que se actualizan los pesos, se obtiene un algoritmo del tipo Re-Weighted l_1. La metodología de actualización de pesos propuesta en este trabajo, consiste en considerar dichos pesos como multiplicadores de Lagrange, pudiendo de esta forma utilizar algoritmos clásicos de la relajación lagrangeana para su actualización.

- **Bojana Femic (IMERL - Universidad de la República)**

  Categorías dobles y una aplicación a 2-categorías.

  `26 de Abril de 2019`

  Quien conoce la definición de una 2- o bicategoría y/o (todavía "peor") de una 2-bicategoría monoidal simétrica, sabe qué trabajoso es verificar si un candidato para una tal estructura satisface todos los axiomas requeridos.

  De ahí mi gran entusiasmo cuando descubrí el resultado de Schulman [2010] que afirma que bajo ciertas hipótesis una categoría doble monoidal da lugar a una 2-categoría monoidal simétrica. Las categorías dobles fueron introducidas por Ehresmann en el 1963, y las categorías dobles monoidales las introduce Schulman en el trabajo citado. Chequear las hipótesis de su Teorema es efectivamente mucho más simple que verificar los axiomas de una 2-categoría monoidal simétrica.

  En esta charla pienso presentar la definición de una categoría doble monoidal, algunos ejemplos de ésta, y el teorema mencionado. Veremos en un ejemplo cómo las hipótesis del teorema se cumplen, pero también por qué este teorema no aplica al ejemplo de una 2-categoría al cual yo tan ansiosamente lo quería aplicar.

- **Santiago Vega (Universidad de Buenos Aires)**

  Una demostración del teorema de Bass-Heller-Swan a partir de categorías controladas.

  `3 de Mayo de 2019`

  Dado anillo regular R, el teorema de Bass-Heller-Swan afirma que existe un isomorfismo $K_1(R[t,t^{-1}]) \cong K_0(R) \oplus K_1(R)$. Observemos que podemos describir $R[t,t^{-1}]$ como el álgebra de grupo $R[\mathbb{Z}]$.

  La descripción de la K-teoría de las álgebras de grupo es un problema relevante a distintas áreas del análisis y la topología. Una de las maneras para atacar este problema viene dado por categorías de control. Más precisamente, dado un grupo (discreto) G y un G-complejo simplicial X con acción libre, definimos la categoría $\mathfrak{G}^G(X)$ de R-módulos geométricos G-invariantes sobre X. A partir de esto, definimos la categoría $\mathfrak{D}^G(X)$ como la subcategoría de $\mathfrak{G}^G(X \times [1,+\infty))$ dada por módulos geométricos G-invariantes con soporte $C \subseteq X \times [1,+\infty)$ que se proyecta sobre un conjunto G-compacto de X y cuyos morfismos satisfacen cierta "condición de control" cerca de $X \times \infty$. Definimos la subcategoría $\mathfrak{I}^G(X)$ de $\mathfrak{D}^G(X)$ como la formada por aquellos módulos que tienen soporte acotado cuando se proyecta en $[1,+\infty)$. Entonces existe una categoría cociente $\mathfrak{D}^G(X)$ de modo que se obtiene una filtración de Karoubi $\mathfrak{I}^G(X) \to \mathfrak{D}^G(X) \to \mathfrak{D}^G(X)$. En particular obtenemos una sucesión exacta larga en K-teoría

  $$K_n(\mathfrak{I}^G(X)) \to K_n(\mathfrak{D}^G(X)) \to K_n(\mathfrak{D}^G(X)) \to K_{n-1}(\mathfrak{I}^G(X)).$$

  Por otro lado, la categoría $\mathfrak{I}^G(X)$ es equivalente a la categoría de $R[G]$-módulos libres, por lo que $K_1(\mathfrak{I}^G(X)) = K_1(R[G])$. Entonces, analizando la sucesión exacta larga anterior, recuperamos el teorema de Bass-Heller-Swan a partir de una interpretación geométrica.

  Finalmente, comentaremos por qué es relevante esta interpretación geométrica para las conjeturas de isomorfismo y cómo podemos generalizar algunos de los cálculos explícitos a otros casos más generales.

- **Mauricio Guillermo (IMERL - Universidad de la República)**

  Una breve introducción a la realizabilidad intuicionista.

  `10 de Mayo de 2019`

  El intuicionismo surge por impulso del matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer como una corriente de la filosofía de la matemática. A pesar de ser conocido mundialmente por sus resultados en topología, Brouwer dedicó la mayor parte de su carrera al desarrollo y la prédica del intuicionismo como escuela matemática. Por estar el intuicionismo fuertemente influenciado por la búsqueda de construcciones efectivas, informalmente es claro que está emparentado con la teoría de las funciones calculables (o funciones computables), que se formaliza a partir de los años 20.

  La realizabilidad intuicionista surge en los años 40 a partir de los trabajos de Stephen Cole Kleene. Es un marco teórico en el cual entender con rigor el vínculo entre los métodos constructivos de demostración (en particular, los intuicionistas) y la teoría de las funciones calculables.

  Es mi intención en esta charla comentar brevemente algunos aspectos históricos sobre el desarrollo de las ideas de Brouwer y su posterior vínculo formal con la teoría de las funciones computables, visitando algunos resultados clásicos del área. La charla no tiene ningún prerrequisito en lógica ni en informática teórica.

- **Ana González (IMERL - Universidad de la República)**

  Álgebra de Hopf de Marvenuto-Reutenauer.

  `17 de Mayo de 2019`

  En esta charla analizaremos la estructura de Hopf del álgebra de permutaciones. Usando la base lineal, indexada por las permutaciones, definiremos el producto, el coproducto y daremos una fórmula explícita para calcular la antípoda. Será necesario construir una nueva base, llamada base monomial, para poder calcular el coproducto de forma sencilla sobre ella y de esta manera determinar los elementos primitivos de esta álgebra de Hopf. Dentro de esta base monomial encontraremos una base de los elementos primitivos.

  Esta presentación está basada en el trabajo de Aguiar y Sottile Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra of permutations.

- **Dalia Artenstein (IMERL - Universidad de la República)**

  Tableros de Young estandarizados.

  `24 de Mayo de 2019`

  El álgebra de tableros de Young estandarizados es un álgebra de Hopf combinatoria que hereda gran parte de su estructura del álgebra de Hopf de permutaciones (Malvenuto-Reutenauer). Repasaremos dicha estructura y luego nos centraremos en el problema de hallar los elementos primitivos de esta álgebra de Hopf.

- **José A. Vivero (IMERL - Universidad de la República)**

  Funciones de Igusa-Todorov generalizadas.

  `31 de Mayo de 2019`

  En esta charla voy a presentar un nuevo acercamiento a las funciones de Igusa-Todorov, el cual guiará hacia la definición de sus versiones generalizadas. Enunciaré algunas propiedades fundamentales de estas funciones y su relación con las originales. Además, veremos cómo pueden ser aplicadas para arrojar algo de luz sobre la Conjetura de la Dimensión Finitista.

- **Rafael Parra (IMERL - Universidad de la República)**

  Relaciones de casi pureza y (pre)envolturas en R-Mod.

  `7 de Junio de 2019`

  Un submódulo A de un R-módulo B es llamado casi puro si la sucesión exacta corta

  $$0 \to A \to B \to B/A \to 0$$

  es proyectiva con respecto a R/I, donde I es un ideal finitamente presentado. Con esta definición se consideran un nuevo tipo de R-módulos: Módulos casi planos y módulos casi F-inyectivos (Zhu Zhanmin). Se pretende mostrar las relaciones de casi pureza y existencia de (pre)envolturas en este caso y la generalización de estos conceptos.

- **Marco A. Pérez (IMERL - Universidad de la República)**

  Condiciones de finitud y clases inclinantes en categorías de Grothendieck con suficientes idempotentes: El lado inyectivo.

  `14 de Junio de 2019`

  Recientemente en su artículo "Torsion pairs over n-hereditary rings", Daniel Bravo y Carlos Parra caracterizaron los anillos n-hereditarios en términos de la existencia de pares de torsión y de clases 1-(co)inclinantes asociados a la clase de módulos que son inyectivos o planos respecto a los módulos finitamente n-presentados (los llamados módulos FP_n-inyectivos y FP_n-planos, respectivamente). A saber, ellos probaron que un anillo R es n-hereditario si, y sólo si, los módulos FP_n-inyectivos (resp., FP_n-planos) son una clase de torsión (resp., libre de torsión), o equivalentemente, si dichos módulos forman una clase 1-inclinante (resp., 1-coinclinante).

  El objetivo de esta charla es dar una generalización de esta teoría de pares de torsión y condiciones de finitud en el contexto de categorías de Grothendieck con suficientes idempotentes. Veremos qué significa que un objeto en tales categorías sea finitamente n-presentado y FP_n-inyectivo. Probaremos que los objetos FP_n-inyectivos forman una clase de torsión si, y sólo si, ellos forman una clase de objetos 1-inclinante.

  Esta charla y la siguiente son básicamente una versión extendida de la charla que di en el ERAG en Diciembre del año pasado, y están basadas en un trabajo conjunto con Daniel Bravo, Carlos Parra y Sinem Odabasi.

- **Marco A. Pérez (IMERL - Universidad de la República)**

  Condiciones de finitud y clases coinclinantes en categorías de Grothendieck con suficientes idempotentes: El lado plano.

  `21 de Junio de 2019`

  En la charla anterior probamos que las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier clase $\mathcal{C}$ de objetos finitamente n-presentados de una categoría de Grothendieck con suficientes idempotentes:

  (a) $\mathrm{pd}(C) \leq 1$.

  (b) El complemento ortogonal derecho de $\mathcal{C}$ es una clase de torsión.

  (c) El complemento ortogonal derecho de $\mathcal{C}$ es una clase 1-inclinante.

  En particular, lo anterior implica que los objetos $\mathrm{F}P_n$-inyectivos forman una clase de torsión si, y sólo si, forman una clase 1-inclinante.

  El objetivo de esta charla es extender la equivalencia anterior agregando los objetos FP_n-planos. Es decir, probaremos que tales objetos forman una clase libre de torsión si, y sólo si, ellos forman una clase 1-coinclinante. Como una categoría de Grothendieck con suficientes idempotentes no necesariamente está equipada con un producto tensorial (y por ende no se pueden definir directamente funtores de torsión), nos valdremos de un resultado de Claudia Menini para poder definir los objetos FP_n-planos, usando una equivalencia de categorías entre tales categorías de Grothendieck y la categoría de módulos (unitarios) sobre cierta álgebra con suficientes idempotentes. Estudiaremos además algunas relaciones de dualidad (en el sentido de Pontryagin) entre los objetos FP_n-inyectivos y FP_n-planos.