Seminario de Álgebra del IMERL

Organizador: Diego Bravo
dbravo@fing.edu.uy

2do Semestre de 2020

- **Mindy HUERTA (Universidad Nacional Autónoma de México)**

  Pares de Frobenius vs Contextos AB (cortados)

  `Charla 1: 28 de Agosto de 2020`

  La teoría AB fue desarrollada en 1989 por M. Auslander y R.-O. Buchweitz y consiste en métodos para obtener precubiertas y preenvolventes a través de generadores y cogeneradores de una subcategoría plena de una categoría abeliana. Utilizando esta teoría, en 2019, V. Becerril, O. Mendoza, M. A. Pérez y V. Santiago definieron en el contexto más general que una categoría abeliana provee, las nociones de par de Frobenius, contexto AB y par de cotorsión relativo, y demostraron que existe una estrecha relación entre estos conceptos. Específicamente, probaron que existe una correspondencia biyectiva entre pares de Frobenius y los contextos AB, y que estos últimos coinciden con ciertos pares de cotorsión relativos que cumplen una condición extra. En esta plática, daremos la definición de ?par de cotorsión cortado? como un intento de generalizar a los pares de cotorsión relativos, definiremos las nociones cortadas de par de Frobenius y contextos AB y mostraremos que la correspondencia anterior puede ser extendida usando estas nuevas nociones.

- **Gustavo MATA (IMERL - Universidad de la República)**

  Álgebras sizigia finitas y sizigia infinitas

  `Charla 2: 11 de Septiembre de 2020`

  En esta charla daremos una recorrida por algunos de los resultados que se tienen para la phi-dimensión sobre las álgebras sizigia finitas y también para algunos casos de las álgebras sizigia infinitas. Finalmente veremos un ejemplo de un álgebra en que su phi-dimensión es infinita.

- **Eugenia ELLIS (IMERL - Universidad de la República)**

  K-teoría de anillos n-coherentes

  `Charla 3: 25 de Septiembre de 2020`

  Sea R un anillo fuertemente n-coherente tal que cada R-módulo finitamente n-presentado tiene dimensión proyectiva finita. Consideramos $\mathrm{FP}_n(R)$ la subcategoría plena de R-módulos finitamente n-presentados. Probamos que $K_i(R) = K_i(\mathrm{FP}_n(R))$ para todo i mayor o igual a cero y obtenemos una nueva expresión para los grupos $\mathrm{Nil}_i(R)$.

  Trabajo en colaboración con Rafael Parra.

- **Víctor BECERRIL (IMERL - Universidad de la República)**

  Álgebras de Weyl

  `Charla 4: 9 de Octubre de 2020`

  Una familia importante de álgebras es el álgebra de Weyl $A_n(k)$, la cual se define como sigue: sean $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n \in \mathrm{End}_k(k[X])$, definidos sobre un polinomio $f \in k[X]$, por la expresión $\hat{x}_i(f) := x_i f$. Similarmente $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{End}_k(k[X])$ son definidos por $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial xi}$. La n-ésima álgebra de Weyl $A_n(k)$ es la k-subálgebra de $\mathrm{End}_k(k[X])$ generada por los operadores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ y $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

  En esta charla damos a conocer las herramientas necesarias para aplicarlas al problema planteado por Bernstein en el congreso de Amsterdam 1963. Empezamos por ver que $A_n(k)$ posee una base de Pincaré-Birkoff y usamos este hecho para probar que $A_n(k)$ es una álgebra casi-conmutativa. Damos a conocer una cota inferior de la dimensión de Gelfand-Kirillov para los $A_n(k)$-módulos. Llamamos holonómicos a aquellos $A_n(k)$-módulos que alcanzan la cota inferior en la dimensión de Gelfand-Kirillov y vemos que los módulos holonómicos forman una categoría abeliana, finalmente construimos un módulo holonómico que es esencial en la prueba del problema planteado por Bernstein.

- **Marcelo LANZILOTTA (IMERL - Universidad de la República)**

  Conjetura de Han para extensiones limitadas

  `Charla 5: 23 de Octubre de 2020`

  Sea $B \subseteq A$ una extensión acotada de álgebras de dimensión finita (definiremos el concepto). En esta charla describimos cómo usar la secuencia larga casi exacta de Jacobi-Zariski, que hemos obtenido recientemente, para mostrar que B verifica la conjetura de Han si y sólo si A la verifica.

  Esta es una charla basada en el trabajo conjunto con Claude Cibils, Eduardo Marcos y Andrea Solotar.

- **Marco A. PÉREZ (IMERL - Universidad de la República)**

  Cortes de cotorsión y algunas aplicaciones

  `Charla 6: 30 de Octubre de 2020`

  En esta charla presentaremos el concepto de par de cotorsión cortado a lo largo de una subcategoría de una categoría abeliana. Esta noción generaliza la de par de cotorsión completo y hereda algunas de sus propiedades, y por otro lado, presenta un enfoque local a la construcción de aproximaciones de objetos.

  Comenzaremos definiendo este tipo de pares, para luego ver algunas de sus propiedades y ejemplos. Después, nos enfocaremos en tres aplicaciones. Acá la idea será ver cómo se caracterizan algunos resultados importantes en diversas áreas del álgebra, dentro del lenguaje de cortes de cotorsión, a saber:

  1. Daremos una caracterización de la conjetura de la dimensión finitista en términos de la existencia de cierto par de cotorsión cortado.

2. Veremos que el funtor cociente de Serre asociado a una subcategoría de Serre, admite un adjunto a derecha si, y sólo si, existe un par de cotorsión cortado a lo largo del complemento ortogonal de esta subcategoría.
3. Pasando al terreno un poco más general de las categorías extrianguladas, y usando algunas herramientas de (2), veremos cómo las co-t-estructuras dan lugar a ciertos cortes de cotorsión, y viceversa.

(Trabajo en conjunto con Mindy Huerta y Octavio Mendoza).

- **Florencia CUBRÍA (IMERL - Universidad de la República)**

  Espectro complementario de un digrafo

  `Charla 7: 13 de Noviembre de 2020`

  El problema de determinar si dos grafos son o no isomorfos es un problema computacionalmente difícil, por lo que aquellas propiedades estructurales que puedan determinarse a partir de su espectro (espectro de su matriz de adyacencia) son de particular interés. A su vez, desde 1957 se sabe que existen familias de grafos no isomorfos coespectrales, a las cuales podemos incluso imponerle ciertas características (conexión y tamaño entre otras).

  Recientemente, el concepto de valor propio complementario de una matriz [1,2], así como el de valor propio complementario de un grafo [3,4] fueron introducidos, y la pregunta de si el espectro complementario distingue grafos no isomorfos se mantiene abierta.

  En el marco de mi doctorado y junto Marcelo Fiori, además de mis tutores Diego Bravo y Vilmar Trevisan, abordamos el anterior problema para digrafos. Comenzamos por introducir el concepto de valor propio complementario de un digrafo y logramos caracterizar en términos de propiedades estructurales aquellos digrafos con 1 y 2 valores propios complementarios. Si bien allí se encuentran pares de digrafos con igual espectro complementarios (complementariamente coespectrales) no isomorfos, estos ejemplos no son fuertemente conexos. El estudio de digrafos con tres valores propios complementarios, familia que logramos caracterizar, nos permitió obtener pares de digrafos de tamaño arbitrario fuertemente conexos complementariamente coespectrales no isomorfos.

  [1] A. Seeger, Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions, Linear Algebra and its Applications 292(1999) 1–14.

  [2] A. Pinto da Costa, A. Seeger, Cone-constrained eigenvalue problems: theory and algorithms, Computational Optimization and Applications 45(2010) 25–57.

  [3] R. Fernandes, J. Judice, V. Trevisan, Complementarity eigenvalues of graphs, Linear Algebra Appl. 527 (2017) 216–231.

  [4] A. Seeger, Complementarity eigenvalue analysis of connected graphs, Linear Algebra Appl. 543 (2018) 205–225.

- **Carlos PARRA (ICFM - Universidad Austral de Chile)**

  Corazones localmente coherentes

  `Charla 8: 20 de Noviembre de 2020`

  Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Diremos que $\mathcal{A}$ es AB5 si tiene coproductos y si el funtor límite directo $\varinjlim\colon [I, \mathcal{A}] \longrightarrow \mathcal{A}$ es exacto para cada conjunto dirigido I. A una categoría abeliana AB5 $\mathcal{G}$ con un conjunto de generadores (o equivalentemente, con un generador) se le llama categoría de Grothendieck. El comportamiento de este tipo de categorías es similar al de la categoría de módulos sobre un anillo. Por otro lado, la noción de t-estructura fue introducida por Beilinsion, Bernstein y Deligne (ver [BBD]). Esta noción nos permite asociar a cada objeto de una categoría triangulada arbitraria su correspondiente objeto de cohomología, el cual vive en alguna subcategoría abeliana de tal categoría triangulada. A esta subcategoría se le llama el corazón de la t-estructura. En los noventas, Happel, Reiten y Smalø(ver [HRS]) observaron que existe una manera natural de asociar a una t-estructura a la categoría derivada de una categoría abeliana equipada con un par de torsión. La t-estructura HRS es quizás la t-estructura más conocida para categorías trianguladas. Sin embargo, otras t-estructuras, como la t-estructura compactamente generada, también han sido bien documentadas en la literatura. Para estos dos tipos de t-estructuras, varios autores han investigado condiciones bajo las cuales el corazón es una categoría de Grothendieck o una categoría de módulos. Por lo tanto, es natural proponer la siguiente pregunta.

Pregunta: ¿cuándo el corazón de la t-estructura de Happel-Reiten-Smaløy/o de la t-estructura compactamente generada es una categoría de Grothendieck localmente finitamente presentada (resp., localmente coherente)?

Propuesta de manera tan general, esta pregunta es inabordable. Por lo tanto, es natural colocar algunas condiciones o restricciones sobre la categoría triangulada, y además sobre la t-estructura que se considera en ella. Por esta razón, nos concentraremos en el caso donde la categoría abeliana es de Grothedieck, para la t-estructura de HRS, y sobre la categoría derivada de un anillo conmutativo R, para las t-estructuras compactamente generadas. En ambos casos, caracterizaremos cuando sus corazones son categorías de Grothendieck localmente coherentes.

(Trabajo previo en conjunto con Manuel Saorín y Simone Virili, Universidad de Murcia).

(Trabajo en progreso en conjunto con Lorenzo Martini, Università di Trento).

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux Pervers, (en Francés) [Perverse sheaves], Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Asterisque, 100, Soc. Math. France, Paris, (1982).

[HRS] D. Happel, I. Reiten, S.O. Smalø, Tilting in abelian categories and quasitilted algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996).

- **Sergio ESTRADA (Universidad de Murcia)**

  La categoría de singularidades (grande) de un esquema no afín

  `Charla 9: 27 de Noviembre de 2020`

  Un resultado clásico de Buchweitz establece que la categoría de singularidades de un anillo Gorenstein local A es equivalente a la categoría estable de A-módulos proyectivos finitamente generados y a la categoría de homotopía de complejos totalmente acíclicos de A-módulos finitamente generados. En la presente charla daremos una versión no afín de este resultado, para lo cual definiremos una versión "grande" de la categoría de singularidades de Orlov.