Seminario de Álgebra del IMERL

Organizador: Marco A. Pérez
mperez@fing.edu.uy

2do Semestre de 2021

- **Claude CIBILS (IMAG - Université de Montpellier)**

  Controlando la dimensión global de un álgebra

  `Charla 1: 10 de Septiembre de 2021`

  La dimensión global de un álgebra asociativa A sobre un cuerpo es una medida de la complejidad de sus representaciones. Para un álgebra de matrices es cero. Para álgebras de caminos de un carcaj es 1. Es infinita para el álgebra de números duales.

  Veremos una breve introducción a la homología de Hochschild (1945), lo cual nos permitirá enunciar la conjetura de Han (2006): para un álgebra de dimensión finita, la homología de Hochschild debería controlar la finitud de la dimensión global.

  Luego presentaré avances recientes realizados hacia mostrar la conjetura de Han, utilizando la versión relativa de la homología de Hochschild (1956) respecto a una subálgebra (poco usada hasta ahora). Disponemos hoy de una sucesión cercana a exacta de Jacobi-Zariski, que relaciona las versiones absolutas y relativas de la homología de Hochschild. La brecha para que sea exacta se puede aproximar por una sucesión espectral que tiene funtores Tor en su primera página. Esta herramienta nos permite mostrar que la clase de álgebras que verifican la conjetura de Han es cerrada para extensiones acotadas de álgebras.

  Estos resultados han sido obtenidos en colaboración con Marcelo Lanzilotta, Eduardo N. Marcos y Andrea Solotar.

- **José A. VIVERO (IMERL - Universidad de la República)**

  Álgebras Lat-Igusa-Todorov Triangulares

  `Charla 2: 24 de Septiembre de 2021`

  En esta charla voy a trabajar con el concepto de álgebra LIT definido recientemente por D. Bravo, O. Mendoza, M. Lanzilotta y J. Vivero. El objetivo fundamental es explorar el alcance de esta definición. En particular voy a dar condiciones para que un álgebra triangular $(T \;\; 0/M \;\; U)$ sea de tipo LIT en términos de las álgebras T, U y del módulo M. Luego veremos ejemplos interesantes que se desprenden de ese resultado. Para finalizar voy a motivar el planteo de la siguiente interrogante: dadas dos k-álgebras LIT, ¿será que el producto tensorial es LIT? A modo de aplicación del teorema sobre álgebras triangulares, se muestra que si T es una k-álgebra LIT y kQ es un álgebra de caminos de tipo Dynkin, entonces $T \otimes kQ$ es de tipo LIT, dando así una respuesta parcial al problema.

- **Víctor BECERRIL (Centro de Ciencias Matemáticas - UNAM, Morelia)**

  Dimensiones homológicas Gorenstein relativas

  `Charla 3: 8 de Octubre de 2021`

  En los últimos años, diferentes clases de R-módulos Gorenstein han sido estudiados, como lo son: Ding proyectivos, AC-gorenstein proyectivos, $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-Gorenstein relativos a un par de dualidad $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$, $\mathrm{Add}(C)$-Gorenstein con C un módulo débilmente tilting Wakamatzu, etc. Varias generalizaciones en categorías abelianas han sido propuestas alcanzando a reproducir algunos de los resultados conocidos en R-módulos.

  En esta charla presentaremos la noción de par GP-admisible en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ y presentamos la clase de objetos Gorenstein relativos asociados a tal par. Hacemos ver que desde tal noción obtenemos una buena generalización de las clases Gorenstein mencionadas. Veremos cómo podemos obtener pares de cotorsión relativos y pares de Frobenius desde la clase de objetos Gorenstein relativos y veremos cómo el punto de vista de los objetos Gorenstein relativos nos proporciona mayor información de las clases de R-módulos Gorenstein, en particular obtenemos una caracterización de la finitud de la dimensión global Gorenstein en $\mathrm{Mod}(R)$.

- **Valente SANTIAGO-VARGAS (Universidad Nacional Autónoma de México)**

  Teoría homológica de ideales k-idempotentes

  `Charla 4: 29 de Octubre de 2021`

  En esta plática hablaremos de ideales k-idempotentes en variedades dualizantes. Veremos que varios resultados dados por M. Auslander, M. I. Platzeck, y G. Todorov en al artículo [1] se valen en el contexto de variedades dualizantes. Dado un ideal I que es la traza de un módulo proyectivo, construiremos un recollement el cual es el análogo a uno obtenido en categorías de módulos sobre álgebras de Artin. Si el tiempo lo permite veremos ciertas propiedades homológicas involucradas en tal recollement.

  Trabajo conjunto con L. G. Rodríguez-Valdés y M. L. S. Sandoval-Miranda.

  Referencias:

  [1] M. Auslander, M. I. Platzeck, and G. Todorov. Homological theory of idempotent ideals. Transactions of the American Mathematical Society, 332(2):667–692, feb 1992.

  [2] L. G. Rodríguez-Valdés, M. L. S. Sandoval-Miranda, V. Santiago-Vargas. Homological theory of k-idempotent ideals in dualizing varieties. Preprint arxiv: https://arxiv.org/pdf/2008.07158.pdf

- **Sonia TREPODE (Universidad Nacional de Mar del Plata)**

  Extensiones triviales de k-álgebras de dimensión finita

  `Charla 5: 5 de Noviembre de 2021`

  La extensión escindida de un anillo por un bi-módulo es una construcción clásica de la cual la extensión trivial es un caso particular. Esta construcción ha sido usada como herramienta en varios contextos. Por ejemplo Hochschild observó que una extensión trivial de un anillo R por un R-bi-módulo M corresponde a elementos cero en el segundo grupo de cohomología $H^2(R, M)$. Recientemente las extensiones triviales juegan un rol importante en el estudio de las álgebras inclinadas de conglomerado y poseen conexiones con álgebras gentiles y especiales biseriales simétricas.

  En esta charla, estudiamos extensiones triviales de k-álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo k-algebraicamente cerrado, donde por extensión trivial de un álgebra A, entenderemos la extensión trivial de A por el cogenerador inyectivo DA, que denotaremos $T(A)$. Las extensiones triviales de tipo finito fueron caracterizadas por Hughes-Waschbüsch en términos de extensiones triviales isomorfas. Este resultado motivó a Wakamatsu a estudiar el problema de cuándo dos extensiones triviales son isomorfas en el contexto de álgebras de Artin.

  Decidir cuándo un álgebra es la extensión trivial de un álgebra no es una tarea fácil. En esta charla damos un algoritmo, en términos de carcaj con relaciones, para decidir cuándo un álgebra es una extensión trivial o no. En casos particulares, Fernández y Platzeck estudiaron extensiones triviales isomorfas en términos de carcajes con relaciones, y dieron una interpretación del teorema de Wakamatsu. En esta charla usando las técnicas introducidas por las autoras y técnicas de extensiones escindidas, extendemos el resultado de Fernández y Platzeck al contexto general. Por otra parte, obtenemos una prueba independiente del teorema de Wakamatsu.

  Trabajo conjunto con Elsa Fernández, Sibylle Schroll, Hipólito Treffinger y Yadira Valdivieso.

- **Ricardo FRANQUIZ (Universidade Federal de Minas Gerais)**

  Teoría de Bloques para Grupos Profinitos

  `Charla 6: 19 de Noviembre de 2021`

  La teoría de representaciones modulares de grupos finitos se encarga de entender la categoría de $k[G]$-módulos, donde G es un grupo finito y k es un cuerpo de característica $p > 0$, tal que p divide al orden de G. Una forma de afrontar este desafío consiste en descomponer $k[G]$ como un producto directo de álgebras indescomponibles, conocidas como bloques, y enfocarse en entender la teoría de representaciones en cada uno de estos bloques. Obsérvese que al p dividir al orden de G hace que $k[G]$ no sea un álgebra semisimple. Consecuentemente no existe ninguna razón para suponer que sus bloques serán álgebras semisimples. A cada bloque podemos hacerle corresponder un p-subgrupo de G llamado grupo de defecto. Este subgrupo mide la dificultad que posee un bloque para ser una álgebra semisimple. Cuando el grupo de defecto asociado a un bloque es un grupo cíclico, es posible codificar la información del bloque en un grafo finito y describirlo usando la estructura de “álgebra de un árbol de Brauer ”. Estas ideas fueron desarrolladas por Richard Brauer en 1930 usando el enfoque de la teoría de caracteres de grupos finitos. Posteriormente, en la década de 1960, Everett C. Dade tradujo las ideas de Brauer para el lenguaje de los módulos.

Recientemente entre los años 2010 y 2011, John MacQuarrie transfirió las ideas básicas de la teoría de representaciones modulares de grupos finitos para el contexto de los grupos profinitos. Los grupos profinitos forman una categoría cuyos objetos usualmente son grupos infinitos. El álgebra de grupo de un grupo profinito es un álgebra pseudocompacta conocida como álgebra de grupo completa. Las álgebras pseudocompactas pueden tener dimensión infinita. Las álgebras de grupo completas poseen también una descomposición en producto directo de bloques. Usando los resultados obtenidos por MacQuarrie, guiados por la teoría de representaciones modulares de grupos finitos, mostraremos en esta charla cómo asociar un grupo de defecto a un bloque de una álgebra de grupo completa y describiremos los bloques con grupo de defecto cíclico (esto es, grupos de defecto que sean p-subgrupos cíclicos finitos o el grupo de los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$) usando la estructura de álgebra de un árbol de Brauer.

Este trabajo fue realizado conjuntamente con John MacQuarrie.

- **Alejandro ARGUDÍN (IMERL - Universidad de la República)**

  Una caracterización de las categorías Ab4 via el Ext de Yoneda

  `Charla 7: 26 de Noviembre de 2021`

  Cuando trabajamos con categorías donde no existen suficientes proyectivos o inyectivos, necesitamos reemplazar el funtor homológico Ext por un funtor que pueda ser definido sin necesidad de recurrir a resoluciones proyectivas o corresoluciones inyectivas. Una opción para esto es el funtor Ext de Yoneda. A saber, para cada entero positivo n, el n-ésimo funtor de Yoneda está definido como el grupo de clases de equivalencia de sucesiones exactas de longitud n entre dos objetos fijos.

  Recordemos que una categoría Ab3 es una categoría abeliana donde toda familia de objetos indexada por un conjunto admite un coproducto. Una categoría Ab4 es una categoría Ab3 donde el coproducto de monomorfismos es un monomorfismo. Este tipo de categorías surge de manera natural en diferentes contextos. Por ejemplo, la categoría de grupos abelianos es una categoría Ab4, y la categoría dual a la categoría de grupos abelianos de torsión es Ab3 pero no Ab4 (y sin objetos inyectivos no nulos).

  Pues bien, cuando se trabaja con el Ext de Yoneda en categorías Ab4 donde no existen suficientes inyectivos, pueden surgir dudas sobre cómo se comporta este funtor cuando se evalúan coproductos infinitos en la primera entrada. En esta charla mostraremos explícitamente que, al igual que el Ext homológico, tendremos un isomorfismo entre: el Ext de Yoneda evaluado en la primera entrada por un coproducto, y el producto de los grupos de extensiones evaluados en cada uno de los sumandos del coproducto (i.e. $\operatorname{Ext}^1(\oplus A_i, B) \cong \prod \operatorname{Ext}^1(A_i, B)$). Más aún, mostraremos que la categoría es Ab4 si y sólo si siempre se puede construir dicho isomorfismo.

- **Sinem ODABAŞI (Universidad Austral de Chile)**

  Sobre pares de cotorsión inducidos en categoría de funtores

  `Charla 8: 3 de Diciembre de 2021`

  La pregunta de interés que motiva a nuestro trabajo es cómo asegurar que la categoría $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, R\text{-Mod})$ de funtores aditivos tenga una estructura de modelos proyectiva/inyectiva sin poner ninguna condición en el anillo R. Con este objetivo en mente, en esta charla hablaremos de cómo construir 'posibles' pares de cotorsión de Hovey en $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, R\text{-Mod})$, y posteriormente presentaremos una caracterización explícita de sus objetos. Los resultados obtenidos sobre estos pares de cotorsión en $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, R\text{-Mod})$ generalizan los resultados conocidos en las categorías de complejos de cadena y módulos sobre un anillo de matrices triangulares.

  Es un trabajo en curso con Sergio Estrada y Manuel Cortés Izurdiaga.

- **Mindy HUERTA (IMERL - Universidad de la República)**

  Objetos m-periódicos

  `Charla 9: 10 de Diciembre de 2021`

  En 1969 M. Auslander y M. Bridger dieron la noción de G-dimensión para módulos finitamente generados sobre anillos noetherianos y desde entonces se volvió interesante estudiar el comportamiento de dichos módulos de G-dimensión finita debido a que años más tarde L. Christensen, A. Franklin y H. Holm prueban que estas dimensiones coinciden cuando el módulo tiene dimensión proyectiva finita.

  Años después, E. Enochs y O. M. G. Jenda definen la clase de módulos Gorenstein proyectivos como una generalización de los módulos de G-dimensión cero lo cual motivó otros conceptos que a su vez también los generalizan como: los módulos strongly Gorenstein proyectivos y los módulos n-strongly Gorenstein proyectivos (Bennis y Mahdou, 2007 y 2009).

  Estas generalizaciones no se restringen a considerar módulos sobre un anillo. En 2020, V. Becerril, O. Mendoza y V. Santiago, dan otra generalización de módulos Gorenstein proyectivos definiendo los objetos Gorenstein proyectivos relativos para un par de clases de objetos en una categoría abeliana. Lo que nos llevó a la pregunta, '¿Es posible dar una versión de los módulos n-strongly Gorenstein proyectivos pero ahora para un par de clases de objetos usando las herramientas homológicas que una categoría abeliana provee?

  En esta plática, proponemos una definición que responde la pregunta anterior, veremos como resultados conocidos para los módulos n-strongly Gorenstein proyectivos pueden obtenerse con esta definición y daremos algunas aplicaciones cuando el par de clases de objetos cumple ciertas relaciones de ortogonalidad, por ejemplo, para pares hereditarios y subcategorías n-cluster tilting.

- **Javier CÓPPOLA (IMERL - Universidad de la República)**

  Cohomología de Hochschild de álgebras de Nichols y conmutatividad graduada trenzada

  `Charla 10:  17 de Diciembre de 2021`

  Sea (A, ε) un álgebra aumentada sobre un cuerpo k, esto es, un álgebra A junto con un morfismo de álgebras $\varepsilon\colon A \to k$. En este caso, podemos considerar la cohomología de Hochschild a coeficientes triviales $H^*(A, k)$, que resulta ser un álgebra graduada con el producto cup. Es sabido que si A es un álgebra de Hopf y ε es su counidad, el producto cup de $H^*(A, k)$ es conmutativo graduado.

  Por otra parte, en problemas de clasificación de álgebras de Hopf aparecen las llamadas álgebras de Nichols. Estas no son álgebras de Hopf en el sentido usual, pero cumplen un axioma análogo que proviene de verlas como objetos de una categoría monoidal trenzada. Esto les vale el nombre de "álgebras de Hopf trenzadas".

  Un álgebra de Hopf trenzada es en particular un álgebra aumentada, pero su cohomología de Hochschild a coeficientes triviales no es en general un álgebra conmutativa graduada. Cabe entonces la siguiente pregunta: '¿Podremos ver a $H^*(A, k)$ como un álgebra en una categoría monoidal trenzada, de forma que su producto cup sea "conmutativo graduado trenzado"?

  En 2010, Mastnak, Pevtsova, Schauenburg y Witherspoon dan una respuesta afirmativa a esta pregunta, bajo hipótesis que incluyen el caso en el que A es un álgebra de Hopf trenzada en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf H, si A o H es de dimensión finita.

  Luego de presentar el problema con toda la terminología necesaria, veremos un contexto que comprende álgebras de Nichols fuera de las hipótesis antes mencionadas, y en el que se puede responder (una generalización de) esta pregunta.

  Este es un trabajo desarrollado con Andrea Solotar, en el marco de mi tesis de doctorado orientado por ella y por Mariana Pereira.