

TRABAJO MONOGRÁFICO
Entrelazado

Florencia Cubría

Marcelo Lanzilotta, IMERL

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

En este trabajo probaremos la relación existente entre el espectro de ciertas matrices asociadas a un grafo y algunas de sus propiedades. Para ello, nuestra herramienta fundamental será el entrelazado de los valores propios de dichas matrices.

Abstract

In this work we will demonstrate the connection between the spectrum of certain matrices associated with a graph and some of its properties. To this end, our main tool will be eigenvalue interlacing.

Palabras Clave: entrelazado, valores propios, matriz de adyacencia.

Key Words: interlacing, eigenvalues, adjacency matrix.

Índice

1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares	2
2.1. Entrelazado	2
2.2. Partición de una matriz	6
3. Definiciones básicas	10
3.1. Grafos y subgrafos	10
3.2. Matrices	12
4. Grafos y subgrafos	15
4.1. Definiciones previas	15
4.2. Entrelazado y subgrafos	15
5. Número cromático	23
5.1. Definiciones previas	23
5.2. Entrelazado y número cromático	23
6. Diseños	27
6.1. Estructuras de incidencia y diseños	27
6.2. Entrelazado aplicado a diseños	31
7. Laplaciana	38
7.1. Definiciones previas	38
7.2. Entrelazado y matriz Laplaciana	40
8. Regularidad	46
8.1. Definiciones previas	46
8.2. Regularidad y entrelazado	46

1. Introducción

La teoría algebraica de grafos combina resultados de dos ramas de la matemática sin relación aparente: el álgebra y la teoría de grafos. Cabe destacar que tanto se sirve la teoría de grafos del álgebra como el álgebra de la teoría de grafos, de modo de traducir problemas de una rama a la otra y así poder resolverlos.

Este trabajo está basado en un artículo de Willem H. Haemers “Interlacing eigenvalues and graphs” [1] en el cual, teniendo como herramienta principal el entrelazado de los valores propios de matrices asociadas a un grafo, prueba algunos vínculos existentes entre ciertas propiedades de los grafos y el espectro de las matrices consideradas.

Dadas dos secuencias de números reales ordenados con distinta cantidad de elementos, se define su entrelazado de modo de generalizar la idea intuitiva de entrelazado para dos secuencias con n y $n - 1$ elementos.

A lo largo del trabajo, consideraremos como secuencias de números reales los valores propios de matrices reales simétricas de distinto tamaño. Probaremos que los valores propios de una matriz real simétrica dada y una submatriz principal, así como los valores propios de una matriz real simétrica dada y una matriz cociente, se encuentran entrelazados. En el último caso también probaremos que cuando el entrelazado sea estricto, la partición considerada para obtener la matriz cociente será regular.

Dado que la matriz de adyacencia, así como la matriz laplaciana de un grafo G no dirigido, resultan simétricas, podremos aplicar los resultados anteriores a dichas matrices. Para ello, consideraremos una submatriz principal o una partición adecuada, lo cual incluso podremos interpretar en términos del grafo.

En general, obtendremos resultados que vinculen los valores propios de las mencionadas matrices con propiedades del grafo. Algunas de las propiedades con las que trabajaremos al considerar la matriz de adyacencia serán: la regularidad, que se traduce inmediatamente en términos de los valores propios de esta matriz; así como el número de independencia, que a su vez está vinculado con el número cromático. Por otro lado, al trabajar con la matriz laplaciana, las propiedades que utilizaremos serán: el ancho de banda y el diámetro del grafo. También trabajaremos con cierto tipo de estructuras de incidencia denominadas diseños, las cuales poseen un grafo asociado. Finalmente, introduciremos una definición de regularidad más fuerte la cual estará vinculada a lo visto anteriormente.

2. Conceptos preliminares

2.1. Entrelazado

Definición 2.1.1. Consideremos dos secuencias de números reales $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^m$ ordenados en forma descendente, es decir, $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$ y $\mu_{i+1} \leq \mu_i$.

Decimos que las secuencias están *entrelazadas* si

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad i = 1, \dots, m.$$

Decimos que el entrelazado es *estricto* si existe k entre 1 y m tal que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \mu_i & i = 1, \dots, k, \\ \mu_i &= \lambda_{n-m+i} & i = k+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Observación 2.1.2. Si $m = n - 1$ la condición de entrelazado resulta

$$\lambda_{i+1} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad i = 1, \dots, n-1,$$

luego,

$$\lambda_n \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1.$$

Es decir, se alternan los elementos de las secuencias $\{\lambda_i\}$ y $\{\mu_i\}$.

Ejemplo Las secuencias $\{25, 20, 15, 10, 5\}$ y $\{19, 16\}$ están entrelazadas.

Veamos un resultado que será muy útil:

Proposición 2.1.3. *Principio de Rayleigh*

Sea A una matriz real simétrica $n \times n$ con valores propios $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ ordenados en forma descendente y $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de vectores propios asociados, entonces valen las desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda_i &\leq \frac{u^t A u}{u^t u} & \text{si } u \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle & \quad u \neq \mathbf{0}, \\ \frac{u^t A u}{u^t u} &\leq \lambda_i & \text{si } u \in \langle u_i, \dots, u_n \rangle & \quad u \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Además, si vale la igualdad en alguno de los casos entonces u es un vector propio asociado al valor propio λ_i .

Demostración. Sea u en $\langle u_1, \dots, u_i \rangle$ luego $u = \sum_{j=1}^i \alpha_j u_j$ donde $\alpha_j = \langle u, u_j \rangle$ por ser $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal. Luego,

$$\frac{u^t A u}{u^t u} = \frac{\langle u, A u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{\langle u, \sum_{j=1}^i \alpha_j \lambda_j u_j \rangle}{\langle \sum_{j=1}^i \alpha_j u_j, \sum_{j=1}^i \alpha_j u_j \rangle} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^i \alpha_j \lambda_j \langle u, u_j \rangle}{\sum_{j=1}^i \alpha_j \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle} = \frac{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2 \lambda_j}{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2} \geq \frac{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2 \lambda_i}{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2} = \lambda_i \frac{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^i \alpha_j^2} = \lambda_i.$$

La igualdad se da si y sólo si $\lambda_j = \lambda_i$ para todo $j = 1, \dots, i$ tal que $\alpha_j \neq 0$, luego u es combinación lineal de vectores propios asociados al valor propio λ_i y en consecuencia vector propio asociado al valor propio λ_i . Recíprocamente, si u es un vector propio asociado al valor propio λ_i es fácil ver que se obtiene la igualdad.

La prueba de la segunda desigualdad es análoga. □

Observación 2.1.4. Tenemos que $\langle u_i, \dots, u_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle^\perp$ por ser $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de vectores propios. Luego, la segunda desigualdad del principio de Rayleigh podría enunciarse

$$\frac{u^t A u}{u^t u} \leq \lambda_i \quad \text{si } u \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle^\perp \quad u \neq \mathbf{0}$$

y la igualdad implica que u sea un vector propio asociado al valor propio λ_i .

Observación 2.1.5. Recordemos que λ es valor propio de una matriz A si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de la matriz $-A$.

Luego, si A es una matriz real simétrica de tamaño $n \times n$ y sus valores propios son

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1,$$

tendremos que los valores propios de $-A$ resultan

$$-\lambda_1 \leq -\lambda_2 \leq \dots \leq -\lambda_n.$$

Veamos ahora un teorema al cual recurriremos a lo largo de todo el trabajo, que resultará fundamental para poder obtener resultados sobre grafos.

El primer ítem del teorema es un resultado clásico, ver Courant y Hilbert [2].

Teorema 2.1.6. *Sea A una matriz real simétrica $n \times n$ con valores propios $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ ordenados en forma descendente y $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de vectores propios asociados. Sea S una matriz real $n \times m$ con $m < n$, tal que $S^t S = I_m$.*

Consideremos $B = S^t A S$ matriz de tamaño $m \times m$ que resulta simétrica, denominemos $\{\mu_i\}_{i=1}^m$ a los valores propios ordenados en forma descendente y sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortonormal de vectores propios asociados. Entonces vale:

1. *Las secuencias de valores propios $\{\lambda_i\}$ y $\{\mu_i\}$ están entrelazadas.*
2. *Si $\mu_i = \lambda_i$ o $\mu_i = \lambda_{n-m+i}$ para algún i entre 1 y m entonces existe v vector propio de B tal que Sv es vector propio de A ambos asociados al valor propio μ_i .*

3. ■ Si existe l en $\{1, \dots, m\}$ tal que $\mu_i = \lambda_i$ con $i = 1, \dots, l$ entonces Sv_i vector propio de A asociado al valor propio μ_i con $i = 1, \dots, l$.
- Si existe l en $\{1, \dots, m\}$ tal que $\mu_i = \lambda_{n-m+i}$ con $i = l, \dots, m$ entonces Sv_i vector propio de A asociado al valor propio μ_i con $i = l, \dots, m$.
4. Si el entrelazado es estricto entonces $SB = AS$.

Demostración. 1. Dado i consideremos un vector no nulo s_i en

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle S^t u_1, \dots, S^t u_{i-1} \rangle^\perp \quad (1)$$

el cual existe dado que ambos son subespacios de \mathbb{R}^m y se cumple que

$$\dim(\langle v_1, \dots, v_i \rangle) + \dim(\langle S^t u_1, \dots, S^t u_{i-1} \rangle^\perp) \geq i + m - (i - 1) = m + 1.$$

Tenemos que $Ss_i \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle^\perp$ pues, dado u en $\langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle$, se tiene

$$\langle Ss_i, u \rangle = \langle s_i, S^t u \rangle = \langle s_i, S^t \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j u_j \right) \rangle = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \langle s_i, S^t u_j \rangle = 0.$$

Aplicando el principio de Rayleigh a la matriz A con $u = Ss_i \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle^\perp$ y a la matriz B con $u = s_i \in \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ obtenemos

$$\mu_i \leq \frac{s_i^t B s_i}{s_i^t s_i} = \frac{(Ss_i)^t A Ss_i}{(Ss_i)^t Ss_i} \leq \lambda_i, \quad (2)$$

luego,

$$\mu_i \geq \lambda_i.$$

Como consideramos i cualquiera tenemos que la desigualdad vale para todo $i = 1, \dots, m$.

Estos mismos argumentos aplicados a las matrices $-A$ y $-B$ prueban que

$$\mu_i \geq \lambda_{n-m+i} \quad i = 1, \dots, m.$$

2. Si $\lambda_i = \mu_i$ utilizando (2) obtenemos

$$\mu_i = \frac{s_i^t B s_i}{s_i^t s_i} = \frac{(Ss_i)^t A Ss_i}{(Ss_i)^t Ss_i},$$

por lo cual, aplicando nuevamente el Principio de Rayleigh, resulta que s_i es un vector propio de B tal que Ss_i es un vector propio de A , ambos asociados al valor propio μ_i como queríamos probar.

3. Aplicaremos inducción completa en l .

Si $\lambda_1 = \mu_1$ considerando $s_1 = v_1$ en (1) resulta que v_1 es un vector propio de B tal que Sv_1 vector propio de A .

Trabajaremos con una base ortonormal de vectores propios de A $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n\}$ donde $\tilde{u}_i = Sv_i$ cuando $i \leq l$.

Supongamos que vale que Sv_i vector propio de A asociado al valor propio μ_i con $i = 1, \dots, l$, si $\mu_i = \lambda_i$ con $i = 1, \dots, l$. Veamos que si además $\mu_{l+1} = \lambda_{l+1}$ entonces tendremos Sv_{l+1} vector propio de A asociado al valor propio μ_{l+1} .

Tomemos $s_{l+1} = v_{l+1}$ en (1), es decir,

$$\langle v_1, \dots, v_{l+1} \rangle \cap \langle S^t \tilde{u}_1, \dots, S^t \tilde{u}_l \rangle^\perp,$$

observemos que $v_{l+1} \in \langle S^t \tilde{u}_1, \dots, S^t \tilde{u}_l \rangle^\perp$ pues

$$\langle S^t \tilde{u}_1, \dots, S^t \tilde{u}_l \rangle^\perp = \langle v_1, \dots, v_l \rangle^\perp = \langle v_{l+1}, \dots, v_n \rangle.$$

Luego,

$$\mu_{l+1} \leq \frac{v_{l+1}^t B v_{l+1}}{v_{l+1}^t v_{l+1}} = \frac{(Sv_{l+1})^t A Sv_{l+1}}{(Sv_{l+1})^t Sv_{l+1}} \leq \lambda_{l+1},$$

y dado que $\mu_{l+1} = \lambda_{l+1}$, por el principio de Rayleigh resulta que v_{l+1} es un vector propio de B y Sv_{l+1} vector propio de A .

Los mismos argumentos aplicados a las matrices $-A$ y $-B$ prueban el otro ítem.

4. Si el entrelazado es estricto tenemos que $\{Sv_1, \dots, Sv_m\}$ es un conjunto ortonormal de vectores propios de A con Sv_i asociado al valor propio μ_i , luego,

$$ASv_i = \mu_i Sv_i = S\mu_i v_i = SBv_i.$$

Hemos probado que AS y SB coinciden en $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de \mathbb{R}^m por lo cual $AS = SB$.

□

Definición 2.1.7. Sea A una matriz $m \times n$, decimos que B es *submatriz* de A si B se obtiene luego de eliminar filas y columnas en A cualesquiera.

Sea A una matriz $n \times n$, decimos que B es *submatriz principal* de A si B se obtiene luego de eliminar las mismas filas que columnas en A .

Ejemplo Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que la matriz B es submatriz principal de A mientras que la matriz C es submatriz de A , pero no principal.

El siguiente es un resultado de Cauchy por lo que también es conocido como *entrelazado de Cauchy*.

Corolario 2.1.8. Sea B una submatriz principal de A entonces las secuencias de valores propios de B y A están entrelazadas.

Demostración. Sea A una matriz $n \times n$ y B una matriz $m \times m$ con $m < n$. Supongamos en primer lugar, que la matriz B se obtiene tras eliminar las últimas $n - m$ filas y columnas de la matriz A .

Tenemos que A es de la forma $\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$, consideremos S de tamaño $n \times m$ como sigue

$$S = \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$S^t A S = \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix} = B$$

con

$$S^t S = \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix} = I_m$$

por lo que aplica el teorema.

Veamos ahora el caso en el que B es una submatriz principal cualquiera de la matriz A .

Reordenemos las entradas de la matriz A de modo de poder aplicar lo anterior: existe una matriz de permutación P tal que $P^t A P = \tilde{A}$ donde los elementos a remover de la matriz A son los últimos $n - m$ de \tilde{A} .

Luego,

$$B = S^t \tilde{A} S = S^t P^t A P S = (P S)^t A (P S)$$

con

$$(P S)^t (P S) = S^t P^t P S = S^t I_n S = I_m$$

por lo que aplica el teorema. □

2.2. Partición de una matriz

Consideremos $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

En lo que sigue, denotaremos por $C_i(M)$ a la i -ésima columna y $F_i(M)$ a la i -ésima fila de la matriz M .

Definición 2.2.1. Llamamos *matriz característica* de la partición $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ a una matriz P de tamaño $n \times r$ con entradas

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in X_j, \\ 0 & \text{si } i \notin X_j. \end{cases}$$

Observación 2.2.2.

$$(P^t P)_{ij} = \langle C_i(P), C_j(P) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ |X_i| & \text{si } i = j, \end{cases}$$

luego,

$$P^t P = \begin{pmatrix} |X_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |X_2| & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |X_r| \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2.3. Sea A una matriz simétrica $n \times n$.

Llamamos *matriz cociente* de A según la partición $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ a una matriz B $r \times r$ de entradas

$$b_{ij} = \frac{1}{|X_i|} \mathbf{1}^t A_{ij} \mathbf{1}$$

donde A_{ij} es la submatriz de A con filas en X_i y columnas en X_j .

Observación 2.2.4. $\mathbf{1}^t A_{ij} \mathbf{1}$ es la suma de todas las entradas de la submatriz A_{ij} . Otra forma de expresar las entradas de la matriz B es la siguiente

$$b_{ij} = \frac{1}{|X_i|} (P^t A P)_{ij},$$

luego,

$$B = (P^t P)^{-1} P^t A P.$$

Definición 2.2.5. Decimos que una partición es *regular* o *equitativa* si para toda submatriz A_{ij} la suma de los elementos por columna es constante.

Observación 2.2.6. Por ser A simétrica se cumple que $A_{ij}^t = A_{ji}$. Luego, si una partición es regular entonces para todo bloque A_{ij} la suma de los elementos por fila es constante pues $A_{ij}^t = A_{ji}$.

Proposición 2.2.7. Sea A una matriz simétrica $n \times n$, $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ una partición de $\{1, \dots, n\}$ con matriz característica P y matriz cociente B .

La partición es regular si y sólo si $AP = PB$.

Demostración. Observemos que

$$(AP)_{ij} = \langle F_i(A), C_j(P) \rangle = \sum_{k \in X_j} (A)_{ik},$$

$$(PB)_{ij} = \langle F_i(P), C_j(B) \rangle = (B)_{lj} \text{ con } i \in X_l.$$

(\Rightarrow) Si la partición es regular entonces $\sum_{k \in X_j} (A)_{ik}$ es constante c para los i en un mismo subconjunto X_l , luego,

$$(AP)_{ij} = \sum_{k \in X_j} (A)_{ik} = c.$$

Por otro lado, si i pertenece a X_l tenemos

$$(PB)_{ij} = (B)_{lj} = \frac{1}{|X_l|} \sum_{i \in X_l, k \in X_j} (A)_{ik} = \frac{1}{|X_l|} |X_l| c = c,$$

lo que prueba la igualdad entre las matrices AP y PB .

(\Leftarrow) Tenemos que $AP = PB$ por lo cual $\sum_{k \in X_j} (A)_{ik} = B_{lj}$ con $i \in X_l$. Como $\sum_{k \in X_j} (A)_{ik}$ se mantiene constante con $i \in X_l$ queda probada la regularidad. \square

Corolario 2.2.8. *Sea B la matriz cociente de una matriz A simétrica particionada entonces*

1. *Las secuencias de valores propios de B y A están entrelazadas.*
2. *Si el entrelazado es estricto entonces la partición es regular.*

Demostración. 1. Consideremos la matriz $D = P^t P$ que tiene la siguiente forma

$$D = \begin{pmatrix} |X_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |X_2| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |X_r| \end{pmatrix},$$

luego,

$$D^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|X_1|}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|X_2|}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{|X_r|}} \end{pmatrix}.$$

Consideremos $S = PD^{-1/2}$, entonces tenemos que

$$S^t S = (PD^{-1/2})^t (PD^{-1/2}) = (D^{-1/2})^t (P^t P) D^{-1/2} = D^{-1/2} D D^{-1/2} = I_r,$$

luego, los valores propios de A y $\tilde{B} = S^t A S$ están entrelazados.

Por otro lado,

$$\tilde{B} = S^t A S = D^{-1/2} (P^t A P) D^{-1/2},$$

utilizando la observación 2.2.4 obtenemos

$$D^{-1/2} (P^t A P) D^{-1/2} = D^{-1/2} (D B) D^{-1/2} = D^{1/2} B D^{-1/2},$$

por lo cual \tilde{B} y B poseen los mismos valores propios, lo que prueba el entrelazado entre los valores propios de B y A .

2. Si el entrelazado es estricto tenemos que $S \tilde{B} = A S$, por lo tanto

$$\begin{aligned}S(D^{1/2}BD^{-1/2}) &= AS \\PBD^{-1/2} &= APD^{-1/2} \\PB &= AP\end{aligned}$$

lo que prueba la regularidad.

□

Observación 2.2.9. Hemos probado en el corolario que una matriz cociente es diagonalizable a pesar de no ser necesariamente simétrica.

3. Definiciones básicas

3.1. Grafos y subgrafos

Definición 3.1.1. Un *grafo* G es un par (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío cualquiera y $E \subset V \times V$. El conjunto V se denomina *vértices* y el conjunto E *aristas*.

Las aristas de la forma (x, x) se denominan *lazos*.

Decimos que un grafo es *no dirigido* si E es simétrico, es decir,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

Si el grafo es no dirigido nos referiremos a las aristas como $\{x, y\}$ en lugar de (x, y) .

Existe una representación gráfica natural de los grafos en la cual los vértices se representan como puntos y las aristas de la forma (x, y) como segmentos dirigidos o flechas de x a y . Si el grafo es no dirigido las aristas se representan como segmentos que unen los puntos que la componen en lugar de segmentos dirigidos.

Ejemplos

1. Sea V cualquiera, $G_1 = (V, \{\})$ se denomina *grafo vacío*.
2. Sea V cualquiera y $D = \{(x, x) : x \in V\}$, $G_2 = (V, E)$ donde $E = (V \times V) - D$ se denomina *grafo completo*.
3. $G_3 = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ es un ejemplo de grafo dirigido.
4. $G_4 = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ es un ejemplo de grafo no dirigido.

Definición 3.1.2. Decimos que un grafo no dirigido G es *bipartito* si existen V_1 y V_2 subconjuntos de V disjuntos tales que $V_1 \cup V_2 = V$ y que cumplen que $E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$.

Definición 3.1.3. Sea G un grafo y x un vértice.

El *grado de entrada* y el *grado de salida* del vértice x se definen como

$$gr^-(x) = |\{y \in V : (y, x) \in E\}|, \quad gr^+(x) = |\{y \in V : (x, y) \in E\}|.$$

Definición 3.1.4. Sea G un grafo no dirigido.

Decimos que dos vértices x e y son *adyacentes* o *vecinos* y anotaremos $x \sim y$ si $\{x, y\}$ es una arista.

Si además G no posee lazos, el *grado de un vértice* x es el grado de entrada que coincide con el de salida por ser G no dirigido.

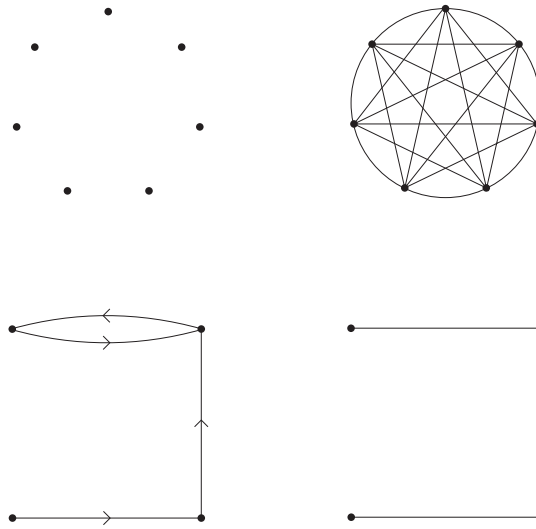


Figura 1: Representación gráfica de los grafos de los ejemplos

Observación 3.1.5. Sea G un grafo no dirigido sin lazos y x un vértice, se tiene que

$$gr(x) = |\{y \in V : y \sim x\}|.$$

Proposición 3.1.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2|E|.$$

Demostración. Cada arista aporta 2 unidades a la sumatoria considerada. □

Definición 3.1.7. Sea G un grafo.

Denominamos *camino de longitud* $r \geq 1$ de x a y a una sucesión de vértices (x_0, x_1, \dots, x_r) donde $x_0 = x$, $x_r = y$ y se cumple que $(x_i, x_{i+1}) \in E$.

Definición 3.1.8. Sea G un grafo no dirigido.

Decimos que dos vértices x e y están *conectados* si existe un camino de uno a otro o si $x = y$.

Observación 3.1.9. Sea G un grafo no dirigido.

La relación en los vértices “estar conectado con” es una relación de equivalencia.

Definición 3.1.10. Sea G un grafo no dirigido.

Las clases de equivalencia de la relación se denominan *componentes conexas* del grafo.

Si existe una única clase de equivalencia decimos que el grafo es *conexo*.

Definición 3.1.11. Sea G un grafo.

Un grafo $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.

El *subgrafo generado* por un subconjunto de vértices V' es el grafo $\langle V' \rangle = (V', E')$ donde $E' = \{(x, y) \in E : x, y \in V'\}$.

Un subgrafo G' de un grafo G se dice *inducido* si existe $V' \subset V$ tal que $\langle V' \rangle = G'$.

Definición 3.1.12. Sea G un grafo no dirigido sin lazos.

Un subconjunto de vértices V' se dice *conjunto independiente* si el subgrafo generado por él es el grafo vacío, es decir, no existen aristas entre los vértices del conjunto.

Un subconjunto de vértices V' se dice *clique* si el subgrafo generado por él es el grafo completo, es decir, existen aristas entre dos vértices cualesquiera del conjunto.

Definición 3.1.13. Un n -ciclo es un grafo no dirigido sin lazos conexo $C = (V, E)$ con n vértices ($n \geq 3$) que cumple que cada vértice posee exactamente 2 vecinos.

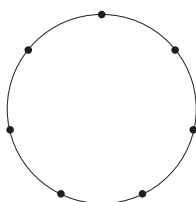


Figura 2: 7-ciclo

Definición 3.1.14. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos.

Decimos que G_1 y G_2 son isomorfos y denotamos $G_1 \cong G_2$ si existe una función biyectiva $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ que cumple que

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in E_2.$$

Definición 3.1.15. Decimos que un grafo no dirigido G posee un n -ciclo si existe un subgrafo isomorfo a un n -ciclo.

3.2. Matrices

Definición 3.2.1. Denominamos *matriz de adyacencia* del grafo G a una matriz $A(G)$ de tamaño $n \times n$ de entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E. \end{cases}$$

Observación 3.2.2. Un grafo G es no dirigido si y sólo si $A(G)$ es simétrica. También tenemos que G' es un subgrafo inducido de G si y sólo si $A(G')$ submatriz principal de $A(G)$.

Observación 3.2.3. La suma de los elementos de la fila i de $A(G)$ es el grado de salida del vértice i -ésimo y la suma de los elementos de la columna j es el grado de entrada del vértice j -ésimo, es decir,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = gr^+(x_j), \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = gr^-(x_j).$$

Si G es un grafo no dirigido entonces la suma de los elementos de la fila o columna i es el grado del vértice i -ésimo.

Lema 3.2.4. $(A(G)^r)_{ij}$ es la cantidad de caminos de longitud r de x_i a x_j .

Demostración. Aplicaremos inducción completa en r .

Si $r = 1$ tenemos que

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E \Leftrightarrow \text{existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E \Leftrightarrow \text{no existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \end{cases}$$

lo que prueba el paso base.

Supongamos que vale para r y veamos que vale para $r + 1$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} (A(G)^{r+1})_{ij} &= (A(G)^r A(G))_{ij} = \sum_{k=1}^n (A(G)^r)_{ik} (A(G))_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^n (|\{\text{caminos de longitud } r \text{ de } x_i \text{ a } x_k\}|) (A(G))_{kj}. \end{aligned}$$

Dado que todos los caminos de longitud $r + 1$ de x_i a x_j pueden descomponerse en un camino de longitud r de x_i a x_k y un camino de longitud 1, es decir una arista, de x_k a x_j para algún x_k , se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|\{\text{caminos de longitud } r \text{ de } x_i \text{ a } x_k\}|) (A(G))_{kj} &= \\ &= |\{\text{caminos de longitud } r + 1 \text{ de } x_i \text{ a } x_j\}| \end{aligned}$$

lo que prueba el paso inductivo. □

Observación 3.2.5. Sea G un grafo no dirigido sin lazos, entonces se cumple que

$$\text{tr}(A(G)) = 0, \quad \text{tr}(A(G)^2) = 2|E| \quad \text{y} \quad \text{tr}(A(G)^3) = 6|T|,$$

donde $T = \{3\text{-ciclos en } G\}$.

Observación 3.2.6. Sea G un grafo no dirigido.

Si en lugar de la matriz $A(G)$ consideramos una matriz $\tilde{A}(G)$ de tamaño $n \times n$ cuyas entradas cumplan que

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= 0 & \text{si } x_i \not\sim x_j, \\ \tilde{a}_{ij} &\neq 0 & \text{si } x_i \sim x_j, \end{aligned}$$

se puede probar de forma análoga que $(\tilde{A}(G)^r)_{ij} \neq 0$ si y sólo si existe un camino de largo r de x_i a x_j .

En lo que sigue trabajaremos con grafos no dirigidos y sin lazos, a menos que se indique lo contrario. La matriz de adyacencia $A(G) = A$ resultará simétrica y en consecuencia, diagonalizable en una base ortonormal. Denotaremos $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ a los valores propios ordenados en forma descendente, $\{v_i\}_{i=1}^n$ a la base ortonormal de vectores propios asociados y D a la matriz diagonal.

Observación 3.2.7. Sea G un grafo no vacío.

Como el grafo no posee lazos, tenemos que $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ por lo cual, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_n < 0$.

Dado que los valores propios de la matriz de adyacencia serán parte importante de nuestro estudio y que esta matriz depende del orden que le demos a los vértices, cabe la pregunta: ¿dependen los valores propios de este orden?, la respuesta la tenemos en la observación que sigue.

Observación 3.2.8. Sean A_1 y A_2 dos matrices de adyacencia que corresponden a un mismo grafo con los vértices ordenados de distintas maneras, tenemos que existe una matriz de permutación P tal que $A_1 = PA_2P^t$. Luego, los valores propios son los mismos en ambas matrices.

4. Grafos y subgrafos

4.1. Definiciones previas

Definición 4.1.1. Llamamos *número de independencia de un grafo* G al natural $\alpha(G) = \max\{|V'| : V' \text{ subconjunto de vértices independiente}\}$.

Llamamos *número de clique de un grafo* G al natural $\omega(G) = \max\{|V'| : V' \text{ clique}\}$.

Definición 4.1.2. Un grafo G se dice *k -regular* si $gr(x) = k$ para todo vértice del grafo.

Proposición 4.1.3. G es un grafo k -regular si y sólo si k es un valor propio de A asociado al vector propio $\mathbf{1}$.

Demostración. Tenemos que

$$(A\mathbf{1})_i = \langle F_i(A), \mathbf{1} \rangle = \sum_{j=1}^n A(G)_{ij} = |\{\text{vecinos de } x_i\}|.$$

(\Rightarrow) Si el grafo es k -regular luego $(A\mathbf{1})_i = k$ por lo cual $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$.

(\Leftarrow) Si $(A\mathbf{1})_i = k$ luego $gr(x_i) = |\{\text{vecinos de } x_i\}| = k$ por lo cual el grafo es k -regular. \square

En la observación 7.1.6, probaremos que k es el mayor valor propio de la matriz A .

4.2. Entrelazado y subgrafos

El siguiente es un resultado de Cvetković [3].

Teorema 4.2.1. Sea G un grafo, entonces se cumple que

$$\alpha(G) \leq |\{i : \lambda_i \geq 0\}| \quad y \quad \alpha(G) \leq |\{i : \lambda_i \leq 0\}|.$$

Demostración. Tenemos que existe un conjunto independiente de tamaño $\alpha(G) = \alpha$, luego, existe una submatriz nula de la matriz de adyacencia A de tamaño $\alpha \times \alpha$ que denominaremos B .

Tenemos que los valores propios de A y B están entrelazados, por lo tanto,

$$0 = \mu_\alpha \leq \lambda_\alpha,$$

luego,

$$\alpha \leq |\{i : \lambda_i \geq 0\}|,$$

ya que de lo contrario estaríamos afirmando que $\lambda_\alpha < 0$.

Otra consecuencia del entrelazado es

$$\lambda_{n-\alpha+1} \leq \mu_1 = 0,$$

luego,

$$-\lambda_{n-\alpha+1} \geq 0.$$

Recordemos que $\lambda_{n-\alpha+1}$ es valor propio de A si y sólo si $-\lambda_{n-\alpha+1}$ es valor propio de $-A$.

Si denominamos $\{\tilde{\lambda}_i\}$ a los valores propios de $-A$ tenemos que $-\lambda_{n-\alpha+1} = \tilde{\lambda}_\alpha$. Luego, $\tilde{\lambda}_\alpha \geq 0$ por lo que

$$\alpha \leq |\{i : \tilde{\lambda}_i \geq 0\}| = |\{i : \lambda_i \leq 0\}|.$$

□

Proposición 4.2.2. *Si A es una matriz simétrica $n \times n$ con suma por fila constante k entonces toda matriz cociente B tiene suma por fila constante k .*

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^n (A)_{ij} = k.$$

Sea $\{X_1, \dots, X_m\}$ una partición de $\{1, \dots, n\}$, estudiemos la suma por fila de la matriz cociente B ,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m (B)_{rl} &= \sum_{l=1}^m \sum_{i \in X_r} \sum_{j \in X_l} \frac{1}{|X_r|} (A)_{ij} = \frac{1}{|X_r|} \sum_{l=1}^m \sum_{i \in X_r} \sum_{j \in X_l} (A)_{ij} = \\ &= \frac{1}{|X_r|} \sum_{i \in X_r} \sum_{j=1}^n (A)_{ij} = \frac{1}{|X_r|} |X_r| k = k \end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación.

□

La cota superior que veremos a continuación lleva el nombre de su autor: *cota de Hoffman*.

Teorema 4.2.3. *Si G es k -regular entonces se cumple que*

$$\alpha(G) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}$$

Además, si existe un conjunto independiente C de tamaño $\frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}$ se cumple que para todo vértice $x \notin C$

$$|\{y \in C : y \sim x\}| = -\lambda_n.$$

Demostración. En primer lugar observemos que $\lambda_1 = k$ por ser el grafo k -regular, como adelantamos luego de la proposición 4.1.3.

Sea $C \subset V$ un conjunto independiente de tamaño $\alpha(G)$ y consideremos la partición de V $\{C, C^c\}$.

Utilizando que la proposición 4.2.2 se puede ver que la matriz cociente resulta la siguiente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{k\alpha}{n-\alpha} & k - \left(\frac{k\alpha}{n-\alpha}\right) \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\mu_1 = k$ y $\mu_2 = \text{tr}(B) - k = -\frac{k\alpha}{n-\alpha}$. Por entrelazado tenemos que $\lambda_n \leq \mu_2$, luego,

$$\lambda_n \leq -\frac{k\alpha}{n-\alpha}$$

$$\alpha \leq \frac{-\lambda_n n}{k - \lambda_n}.$$

Si se cumple la igualdad entonces tenemos que $\lambda_n = \mu_2$ y dado que $\lambda_1 = k = \mu_1$ el entrelazado resulta estricto y la partición regular. Esto es, la suma de los elementos por fila en los bloques A_{ij} es constante. Si consideramos el bloque A_{21} obtenemos que para todo vértice $x \notin C$ $|\{y \in C : y \sim x\}| = \frac{k\alpha}{n-\alpha} = -\mu_2 = -\lambda_n$ \square

Corolario 4.2.4. *Si A es una matriz de tamaño $n \times n$ simétrica que posee suma por fila constante k y menor valor propio λ_n entonces se cumple*

$$\alpha(A) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{k - \lambda_n}$$

donde $\alpha(A) = \text{máx}\{i : \text{existe una submatriz principal nula de tamaño } i\}$.

Demostración. La prueba del teorema 4.2.3 es válida para una matriz A simétrica de tamaño $n \times n$ que posee suma por fila constante k y menor valor propio λ_n . \square

El teorema a continuación es una generalización de la cota de Hoffman para los grafos no regulares:

Teorema 4.2.5. *Sea $\delta = \min\{gr(x) : x \in V\}$ entonces se cumple que*

$$\alpha(G) \leq \frac{n(-\lambda_1 \lambda_n)}{\delta^2 - \lambda_1 \lambda_n}.$$

Demostración. Sea $C \subset V$ un conjunto independiente de tamaño $\alpha(G)$ y tomemos la partición de V dada por $\{C, C^c\}$ nuevamente. Denotemos con la letra k al promedio de grados del los vértices del conjunto independiente, es decir,

$$k = \frac{\sum_{x \in C} gr(x)}{|C|} = \frac{\sum_{x \in C} gr(x)}{\alpha}.$$

Luego, tenemos que la matriz cociente resulta la siguiente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{k\alpha}{n-\alpha} & ? \end{pmatrix}$$

con valores propios μ_1 y μ_2 .

Por entrelazado tenemos que $\lambda_1 \geq \mu_1$ y que $\mu_2 \geq \lambda_n$ por lo cual $-\lambda_n \geq -\mu_2$. Observemos que $\mu_1 > 0$ pues $\mu_1 + \mu_2 = \text{tr}(B) > 0$ y recordemos que $-\lambda_n > 0$. Luego tenemos que

$$-\lambda_n \lambda_1 \geq -\lambda_n \mu_1, \quad -\lambda_n \mu_1 \geq -\mu_2 \mu_1,$$

de donde

$$-\lambda_n \lambda_1 \geq -\mu_2 \mu_1.$$

Como $-\mu_2 \mu_1 = -\det(B) = \frac{k^2 \alpha}{n-\alpha} \geq \frac{\delta^2 \alpha}{n-\alpha}$ se cumple que

$$-\lambda_n \lambda_1 \geq \frac{\delta^2 \alpha}{n-\alpha}$$

$$\alpha \leq \frac{n(-\lambda_1 \lambda_n)}{\delta^2 - \lambda_1 \lambda_n}.$$

□

A continuación introduciremos un nuevo concepto: la capacidad de Shannon de un grafo G , el cual es de gran interés en la teoría de la información, para poder explicar porqué, precisaremos introducir nuevas definiciones.

Definición 4.2.6. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos, denominaremos *producto fuerte de grafos* al grafo $G_1 * G_2$ de vértices y aristas como se definen a continuación

$$V(G_1 * G_2) = V_1 \times V_2$$

$$E(G_1 * G_2) = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2) : (x_1 \sim y_1 \text{ o } x_1 = y_1) \text{ y } (x_2 \sim y_2 \text{ o } x_2 = y_2)\} - D$$

donde $D = \{(x_1, x_2), (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2\}$.

Observación 4.2.7. Se cumple que $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$, luego, se define

$$G^l = G * G^{l-1}$$

que también denotaremos $\prod_{i=1}^l G$.

Observación 4.2.8. Sea G^l , se tiene que

$$V(G^l) = V^l \quad E(G^l) = \{(x, y) : x_i \sim y_i \text{ o } x_i = y_i\} - \{(x, x) : x \in V^l\}$$

Observación 4.2.9. Un conjunto independiente C del grafo G da lugar a un conjunto independiente del grafo G^l : C^l .

Definición 4.2.10. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$ y $p \times q$ respectivamente, el *producto de Kronecker* de las matrices A y B es una matriz $A \otimes B$ de tamaño $mp \times nq$ que se define como sigue

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

Observación 4.2.11. Si A y B son matrices con suma por fila constante a y b respectivamente, entonces $A \otimes B$ es una matriz con suma por fila constante ab . Un resultado análogo se obtiene si la suma por columna es constante.

Observación 4.2.12. Si A y B son matrices simétricas entonces $A \otimes B$ es una matriz simétrica.

Proposición 4.2.13. Si λ es un valor propio de A con u vector propio asociado y μ es un valor propio de B con v vector propio asociado, entonces $A \otimes B$ es una matriz con valor propio $\lambda\mu$ y vector propio asociado $u \otimes v$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(u \otimes v) &= \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1v \\ \vdots \\ u_nv \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}Bu_1v + \dots + a_{1,n}Bu_1v \\ \vdots \\ a_{m,1}Bu_nv + \dots + a_{m,n}Bu_nv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}u_1\mu v + \dots + a_{1,n}u_1\mu v \\ \vdots \\ a_{m,1}u_n\mu v + \dots + a_{m,n}u_n\mu v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (a_{1,1}u_1 + \dots + a_{1,n}u_1)\mu v \\ \vdots \\ (a_{m,1}u_n + \dots + a_{m,n}u_n)\mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda u_1)\mu v \\ \vdots \\ (\lambda u_n)\mu v \end{pmatrix} = \lambda\mu(u \otimes v). \end{aligned}$$

□

Observación 4.2.14. Se cumple que

$$A(G_1 * G_2) = ((A(G_1) + I_n) \otimes (A(G_2) + I_m)) - I_{mn}$$

ordenando los vértices de $G_1 * G_2$ del siguiente modo

$$(x_i, y_j) < (x_k, y_l) \Leftrightarrow \begin{cases} i < k, \\ 0 \\ i = k \text{ y } j < l. \end{cases}$$

Proposición 4.2.15. $A(G^l) = (A(G) + I)^{\otimes l} - I$.

Demostración. Aplicaremos inducción completa en l .

Si $l = 1$ se cumple que que $A(G^1) = A(G) = (A(G) + I)^{\otimes 1} - I$.

Supongamos ahora que vale que $A(G^l) = (A(G) + I)^{\otimes l} - I$, veamos que $A(G^{l+1}) = (A + I)^{\otimes l+1} - I$:

$$\begin{aligned} A(G^{l+1}) &= A(G * G^l) = ((A(G) + I) \otimes (A(G^l) + I)) - I \\ &= ((A(G) + I) \otimes (A(G) + I)^{\otimes l}) - I = (A(G) + I)^{\otimes l+1} - I. \end{aligned}$$

□

Definición 4.2.16. La *capacidad de Shannon* de un grafo G se define como

$$\Theta(G) = \sup\{\sqrt[l]{\alpha(G^l)} : l \in \mathbb{N}^*\}.$$

Veamos la interpretación que la capacidad de Shannon adopta en la teoría de la información según Alon y Lubetzky [4].

Consideremos un canal de comunicación, es decir, un medio de transmisión por el que viajan señales portadoras de información; para fijar ideas supongamos que las señales emitidas son letras. Sucede que, en su pasaje por el canal de comunicación, letras distintas pueden volverse indistinguibles, producto de alguna interferencia denominada ruido del canal. Representaremos entonces el canal de comunicación mediante un grafo cuyos vértices sean las letras consideradas, que denominaremos alfabeto, y cuyas aristas sean los pares de letras distintas que resultan indistinguibles al final del proceso. Luego, $\alpha(G)$ resulta la mayor cantidad de letras que puede enviarse a través del canal sin error.

Si en lugar de letras quisiéramos enviar una palabra de largo l , podríamos modelar esta situación mediante el grafo G^l dado que dos palabras son indistinguibles si todas sus letras lo son, luego, $\alpha(G^l)$ resulta la mayor cantidad de palabras de largo l que puede enviarse a través del canal sin error.

Tenemos que $\alpha(G^l) \geq \alpha(G)^l$ por la observación 4.2.9, luego, el crecimiento de $\alpha(G^l)$ al aumentar l es exponencial. Dado que nos interesa estudiar el crecimiento más allá de este hecho, es que consideraremos $\sqrt[l]{\alpha(G^l)}$ de modo de normalizar $\alpha(G^l)$.

Finalmente, dado un canal, el número real $\sup\{\sqrt[l]{\alpha(G^l)} : l \in \mathbb{N}^*\}$ puede interpretarse como un tamaño efectivo del alfabeto a considerar.

Observación 4.2.17. Sustituyendo por $l = 1$ se obtiene $\alpha(G)$, por lo tanto

$$\alpha(G) \leq \Theta(G).$$

A continuación probaremos que la cota de Hoffman es cota superior del conjunto $\{\sqrt[l]{\alpha(G^l)} : l \in \mathbb{N}^*\}$, por lo cual, $\Theta(G)$ queda bien definido y acotado superiormente por $\frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}$. El autor de este resultado es Lovász [5].

Teorema 4.2.18. Sea G grafo k -regular, entonces vale

$$\Theta(G) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

Demostración. Por la observación posterior al teorema 4.2.3 sabemos que si A es una matriz de tamaño $n \times n$ simétrica que posee suma por fila constante k y menor valor propio λ_n entonces se cumple

$$\alpha(A) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{k - \lambda_n}$$

donde $\alpha(A) = \max\{i : \text{existe una submatriz principal nula de tamaño } i\}$.

Lo que haremos es aplicar la cota de Hoffman a la matriz $(A - \lambda_n I)^{\otimes l} - (-\lambda_n)^l I$ cuya suma por fila es constante y vale $(k - \lambda_n)^l - (-\lambda_n)^l$ además de ser simétrica.

Afirmación $\alpha((A - \lambda_n I)^{\otimes l} - (-\lambda_n)^l I) = \alpha((A + I)^{\otimes l} - I)$.

Tenemos las matrices $A - \lambda_n I$ y $A + I$ solo se diferencian en su diagonal, que en un caso es constante $-\lambda_n \neq 0$ y en otro constante 1, luego, las submatrices principales nulas son las mismas en $(A - \lambda_n I)^{\otimes l}$ que en $(A + I)^{\otimes l}$. Al considerar $(A - \lambda_n I)^{\otimes l} - (-\lambda_n)^l I$ anulamos la diagonal, lo mismo sucede al considerar $(A + I)^{\otimes l} - I$, luego las submatrices principales de una y otra son las mismas, lo que prueba la afirmación.

Luego,

$$\alpha((A - \lambda_n I)^{\otimes l} - (-\lambda_n)^l I) = \alpha(G^l).$$

Por otro lado, se puede ver que 0 es valor propio de la matriz $(A - \lambda_n I)$ y los restantes valores propios positivos, luego, tenemos lo mismo para los valores propios de $(A - \lambda_n I)^{\otimes l}$ por la proposición 4.2.13. Finalmente, el menor valor propio de $(A - \lambda_n I)^{\otimes l} - (-\lambda_n)^l I$ resulta $-(-\lambda_n)^l$.

Tenemos que

$$\alpha(G^l) \leq \frac{n^l(-\lambda_n)^l}{(k - \lambda_n)^l - (-\lambda_n)^l + (-\lambda_n)^l} = \frac{n^l(-\lambda_n)^l}{(k - \lambda_n)^l}$$

$$\alpha(G^l) \leq \frac{n^l(-\lambda_n)^l}{(k - \lambda_n)^l}$$

$$\sqrt[l]{\alpha(G^l)} \leq \frac{n(-\lambda_n)}{k - \lambda_n}$$

tomando supremo obtenemos

$$\Theta(G) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{k - \lambda_n} = \frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

□

Teorema 4.2.19. Sean $G = (V, E)$ grafo k -regular y $G' = (V', E')$ subgrafo inducido. Si $|V'| = n'$ y $|E'| = m'$ entonces se cumple que

$$\lambda_n \leq \frac{2m' \frac{n}{n'} - n'k}{n - n'} \leq \lambda_2.$$

Además, si se verifica alguna de las dos igualdades entonces se tiene que G' y $\langle V - V' \rangle$ son grafos regulares.

Demostración. Consideremos la partición $\{V', V'^c\}$ cuya matriz asociada es la siguiente

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2m'}{n'} & k - \frac{2m'}{n'} \\ \frac{n'k-2m'}{n-n'} & k - \left(\frac{n'k-2m'}{n-n'}\right) \end{pmatrix}$$

y sus valores propios son $\mu_1 = k$ y $\mu_2 = \frac{2m'}{n'} - \frac{n'k-2m'}{n-n'} = \frac{2m'\frac{n}{n'} - n'k}{n-n'}$.

Por entrelazado tenemos que $\lambda_n \leq \mu_2 \leq \lambda_2$, luego,

$$\lambda_n \leq \frac{2m'\frac{n}{n'} - n'k}{n - n'} \leq \lambda_2.$$

Si se alcanza alguna de las igualdades tenemos que el entrelazado es estricto y en consecuencia, la partición es regular. Esto es, la suma por fila es constante en los bloques A_{ij} .

Dado que $A_{11} = A(\langle V' \rangle)$ y $A_{22} = A(\langle V'^c \rangle)$ tenemos que los grafos $\langle V' \rangle$ y $\langle V'^c \rangle$ son regulares como queríamos probar. □

Observación 4.2.20. Sea $V' \subset V$ un conjunto independiente del grafo k -regular G tal que $|V'| = \alpha(G)$.

Luego $m' = 0$ y $n' = \alpha(G)$, lo que sustituyendo en una de las desigualdades del anterior teorema con $\lambda_1 = k$ obtenemos la cota de Hoffman

$$\alpha(G) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

Observación 4.2.21. Si en las condiciones del teorema anterior $m' = \frac{1}{2}n'(n' - 1)$ tenemos que

$$n' \leq \frac{1 + \lambda_2}{n - k + \lambda_2}.$$

Como todo clique satisface que $m' = 1 + 2 + \dots + (n' - 1) = \frac{1}{2}n'(n' - 1)$ tendremos que

$$\omega(G) \leq \frac{1 + \lambda_2}{n - k + \lambda_2}.$$

5. Número cromático

5.1. Definiciones previas

Definición 5.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos no dirigido.

Una k -coloración es una función $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que cumple que $c(x) \neq c(y)$ para x e y adyacentes.

Observación 5.1.2. Los vértices de un mismo color, es decir,

$$X_i = \{x \in V : c(x) = i\}$$

forman un conjunto independiente.

Definición 5.1.3. Se denomina *número cromático* de un grafo G al natural

$$\chi(G) = \min\{k : \text{existe una } k\text{-coloración}\}.$$

5.2. Entrelazado y número cromático

Observación 5.2.1. Consideremos una coloración con $\chi(G)$ colores y particionemos $\{1, 2, \dots, n\}$ en colores. Tenemos que $|V(G)| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_{\chi(G)}| \leq \alpha(G)\chi(G)$, luego,

$$|V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Observación 5.2.2. La observación anterior muestra que

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$$

por lo cual una cota superior de $\alpha(G)$ dará lugar a una cota inferior de $\chi(G)$.

Ejemplo Consideremos un grafo que posee un n_1 -clique y n_2 vértices no pertenecientes al clique, pero adyacentes a todos sus vértices.

Se puede ver que

$$\chi(G) = n_1 + 1 \quad \alpha(G) = n_2,$$

luego,

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = \frac{n_1 + n_2}{n_2} = 1 + \frac{n_1}{n_2} \ll n_1 + 1 = \chi(G),$$

lo que muestra que la anterior cota puede estar muy alejada de $\chi(G)$.

La siguiente observación es un resultado de Hoffman [6].

Observación 5.2.3. Si G es k -regular entonces vale la cota de Hoffman, que indica que $\alpha(G) \leq \frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}$.

Luego,

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{\frac{n(-\lambda_n)}{\lambda_1 - \lambda_n}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{-\lambda_n} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Veamos que esta cota inferior de $\chi(G)$ vale incluso para grafos no regulares.

Teorema 5.2.4. Si G es un grafo no vacío entonces se cumple que

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Demostración. Consideremos la partición $\{X_1, X_2, \dots, X_\chi\}$ y la base ortonormal de vectores propios de A $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ asociados a los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Sea s_i la restricción de u_1 a X_i , es decir,

$$(s_i)_j = \begin{cases} (u_1)_j & \text{si } j \in X_i, \\ 0 & \text{si } j \notin X_i. \end{cases}$$

Consideremos la matriz \tilde{S} cuyas columnas son los vectores s_i no nulos y la matriz $D = \tilde{S}^t \tilde{S}$.

$$\tilde{S} = (s_1, \dots, s_\chi) = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \|s_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|s_2\|^2 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|s_\chi\|^2 \end{pmatrix}$$

D resulta invertible pues $\|s_i\|^2 > 0$, sea $S = \tilde{S}D^{-1/2}$, luego,

$$S^t S = (\tilde{S}D^{-1/2})^t (\tilde{S}D^{-1/2}) = D^{-1/2} (\tilde{S}^t \tilde{S}) D^{-1/2} = D^{-1/2} D D^{-1/2} = I_\chi.$$

Sea $B = S^t A S$, tenemos que λ_1 es valor propio de B pues

$$B D^{1/2} \mathbf{1} = (D^{-1/2} \tilde{S}^t A \tilde{S} D^{-1/2}) D^{1/2} \mathbf{1} = D^{-1/2} \tilde{S}^t A u_1 = \lambda_1 D^{1/2} \mathbf{1}.$$

Sabemos que los valores propios de A y B están entrelazados por el teorema 2.1.6, entonces tenemos

$$\mu_i \leq \lambda_i, \quad \lambda_{n-\chi+i} \leq \mu_i.$$

La primera desigualdad implica que $\mu_1 = \lambda_1$ y la segunda que $\mu_i \geq \lambda_n$.

Por otro lado $tr(B) = 0$ pues

$$(B)_{ii} = (S^t A S)_{ii} = s_i^t A s_i = (P_{X_i}(s_i))^t A_{ii} P_{X_i}(s_i) = (P_{X_i}(s_i))^t \mathbf{0} P_{X_i}(s_i) = 0,$$

luego,

$$0 = tr(B) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\chi \geq \lambda_1 + (\chi - 1)\lambda_n$$

y utilizando que $\lambda_n < 0$ se obtiene

$$\chi \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

□

Observación 5.2.5. Si aplicamos la generalización de la cota de Hoffman para grafos no regulares obtenemos

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{\frac{n(-\lambda_1\lambda_n)}{\delta^2 - \lambda_1\lambda_n}} = 1 - \frac{\delta^2}{\lambda_1\lambda_n}.$$

Si comparamos esta última cota con la obtenida en el teorema 5.2.4 resulta

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \geq \frac{\delta^2}{\lambda_1\lambda_n} \Leftrightarrow \delta \leq \lambda_1$$

y la siguiente proposición prueba que la cota obtenida en un inicio refina la última.

Proposición 5.2.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo, $\delta = \min\{gr(x) : x \in V\}$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ los valores propios asociados ordenados en forma descendente, entonces se tiene que

$$\delta \leq \lambda_1.$$

Demostración. Podemos suponer que el grafo es conexo pues en caso de no serlo realizaríamos el mismo procedimiento en una de sus componentes conexas: la que presente el mayor valor propio del grafo.

Por ser G conexo tenemos que la matriz $A(G) = A$ resulta irreducible, luego, por el teorema de Perron Frobenius [7] capítulo 8, sección 8, sabemos que su radio espectral $\rho(A)$, es un valor propio simple y existe un vector propio asociado con entradas positivas. Por ser $\rho(A)$ valor propio tenemos que $\rho(A) = \lambda_1$, luego, podemos considerar u vector propio asociado con entradas positivas.

Sea

$$u_{i_0} = \min\{u_i : i = 1, \dots, n\}.$$

Tenemos que

$$\lambda_1 u_{i_0} = A u_{i_0} = \sum_{j:j \sim i_0} u_j \geq \sum_{j:j \sim i_0} u_{i_0} \geq \delta u_{i_0},$$

luego,

$$\lambda_1 \geq \delta.$$

□

Teorema 5.2.7. Si $\lambda_2 > 0$ entonces se cumple que

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{n-\chi(G)+1}}{\lambda_2}$$

Demostración. Consideremos s_1, s_2, \dots, s_χ como en la demostración anterior. Sea w no nulo en $\langle u_{n-\chi+1}, \dots, u_n \rangle \cap \langle s_1, \dots, s_\chi \rangle^\perp$, que existe pues

- $\dim(\langle u_{n-\chi+1}, \dots, u_n \rangle) = \chi$ y $\dim(\langle s_1, \dots, s_\chi \rangle^\perp) = n - \chi$,
- $u_1 \in \langle u_{n-\chi+1}, \dots, u_n \rangle^\perp \cap (\langle s_1, \dots, s_\chi \rangle^\perp)^\perp$ dado que $\{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormal y $u_1 = s_1 + \dots + s_\chi$.

Sea w_i la restricción de w a X_i .

Consideremos la matriz \tilde{R} cuyas columnas son los vectores w_i no nulos, la matriz $D = \tilde{R}^t \tilde{R}$ que resulta invertible por los mismos argumentos que antes y la matriz $R = \tilde{R}D^{-1/2}$.

Sea $A' = A - (\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_1^t$, estudiemos sus valores propios:

Utilizando que $u_1^t u_1 = 1$ y $u_1^t u_i = 0$ para todo $i \geq 2$ tenemos que

$$A'u_1 = \lambda_2 u_1, \quad A'u_i = Au_i = \lambda_i u_i,$$

luego, los valores propios de A' son $\lambda'_1 = \lambda_2$ y $\lambda'_i = \lambda_i$.

Sea $B' = R^t A' R = R^t A R - (\lambda_1 - \lambda_2)R^t u_1 u_1^t R$.

Afirmación $\text{tr}(B') = 0$.

$$\text{tr}(B') = \text{tr}(R^t A R) - (\lambda_1 - \lambda_2)\text{tr}(R^t u_1 u_1^t R)$$

Tenemos que $\text{tr}(R^t A R) = 0$ por el mismo argumento que antes, veamos entonces que $\text{tr}(R^t u_1 u_1^t R) = 0$,

$$(u_1^t \tilde{R})_i = \langle u_1, w_i \rangle = \langle u_1, w|_{X_i} \rangle = \langle u_1|_{X_i}, w \rangle = \langle s_i, w \rangle = 0,$$

luego tenemos que $u_1^t R = u_1^t \tilde{R}D^{-1/2} = \mathbf{0}$ por lo que $\text{tr}(R^t u_1 u_1^t R) = 0$ como queríamos probar.

Afirmación $\mu'_\chi \leq \lambda'_{n-\chi+1}$.

Sea $d = D^{1/2}\mathbf{1}$, tenemos que

- $\mu'_\chi \leq \frac{d^t B' d}{d^t d}$ por el principio de Rayleigh con $u = d \in \langle v'_1, \dots, v'_\chi \rangle$,
- $\frac{d^t B' d}{d^t d} = \frac{w^t A' w}{w^t w}$ pues $\frac{d^t B' d}{d^t d} = \frac{(Rd)^t A' Rd}{d^t d}$ y se cumple que $Rd = w$ y $d^t d = w^t w$,
- $\frac{w^t A' w}{w^t w} \leq \lambda'_{n-\chi+1}$ por el principio de Rayleigh con $u = w \in \langle u_{n-\chi+1}, \dots, u_n \rangle = \langle u'_{n-\chi+1}, \dots, u'_n \rangle$.

Luego,

$$0 = \text{tr}(B') = \mu'_1 + \dots + \mu'_\chi \leq (\chi-1)\mu'_1 + \lambda'_{n-\chi+1} \leq (\chi-1)\lambda'_1 + \lambda'_{n-\chi+1} = (\chi-1)\lambda_2 + \lambda_{n-\chi+1},$$

de donde

$$\chi \geq 1 - \frac{\lambda_{n-\chi+1}}{\lambda_2}.$$

□

6. Diseños

6.1. Estructuras de incidencia y diseños

Esta sección está basada en el libro de Godsil y Royle “Algebraic Graph Theory” [7] capítulo 5, secciones 1 y 10.

Definición 6.1.1. Dados dos conjuntos disjuntos \mathcal{P} y \mathcal{L} (denominados puntos y líneas respectivamente) y una relación $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, decimos que la terna $\mathcal{Y} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ es una *estructura de incidencia*.

Diremos que $P \in \mathcal{P}$ y $L \in \mathcal{L}$ son *incidentes* si $(P, L) \in I$.

Definición 6.1.2. Sea $\mathcal{Y} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ una estructura de incidencia, llamamos *estructura de incidencia dual* a la estructura $\mathcal{Y}^* = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, I^*)$ donde $I^* = \{(L, P) : (P, L) \in I\}$.

Sea $\mathcal{Y} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ una estructura de incidencia, el *grafo asociado* $G(\mathcal{Y}) = (V, E)$ donde $V = \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ y $E = \{\{P, L\} : (P, L) \in I\}$.

Observación 6.1.3. $G(\mathcal{Y})$ es un grafo bipartito y recíprocamente, dado un grafo bipartito podemos determinar una estructura de incidencia. También tenemos que $G(\mathcal{Y}) = G(\mathcal{Y}^*)$.

Definición 6.1.4. Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} estructuras de incidencia, decimos que \mathcal{X} es una *subestructura* de \mathcal{Y} si $G(\mathcal{X})$ es un subgrafo de $G(\mathcal{Y})$.

Definición 6.1.5. Decimos que una estructura de incidencia $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ es un t - (v, k, λ_t) *diseño* donde \mathcal{P} se denomina conjunto de puntos y \mathcal{B} conjunto de bloques (cada uno de los cuales estará identificado con los puntos incidentes a él) si $|\mathcal{P}| = v$, cada bloque posee exactamente k elementos y para todo $T \subset \mathcal{P}$ tal que $|T| = t$ se cumple que

$$|\{B \in \mathcal{B} : T \subset B\}| = \lambda_t > 0.$$

Proposición 6.1.6. \mathcal{D} t - (v, k, λ_t) *diseño* entonces \mathcal{D} s - (v, k, λ_s) *diseño* para todo $s \leq t$.

Demostración. Sea $S \subset \mathcal{P}$ tal que $|S| = s$, contemos los pares (T, B) tales que $S \subset T \subset B$ tales que $|T| = t$ de dos modos distintos:

- contemos los conjuntos T de tamaño t que contienen a S y multipliquemos por la cantidad de bloques en los que está contenido T ,
- contemos la cantidad de bloques B en los que está contenido S y multipliquemos por la cantidad de conjuntos T que cumplen que $S \subset T \subset B$.

Obtenemos que

$$\binom{v-s}{t-s} \lambda_t = \binom{k-s}{t-s} \lambda_s \quad (3)$$

de donde

$$\lambda_s = \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} \lambda_t.$$

Luego, la cantidad de bloques en los que está contenido S es la misma para todo subconjunto de tamaño s . \square

Observemos que $\lambda_s \in \mathbb{N}$, lo cual no es evidente.

Denotaremos con la letra b al valor de λ_0 y con la letra r al de λ_1 ,

$$\lambda_0 = |\{B \in \mathcal{B} : \phi \subset B\}| = |\mathcal{B}| = b \quad \text{y} \quad \lambda_1 = |\{B \in \mathcal{B} : \{p\} \subset B\}| = r.$$

La igualdad (3) con $s = 0$ y $t = 1$ resulta

$$bk = rv. \tag{4}$$

Además, si consideramos el grafo $G(\mathcal{D})$ tenemos que $gr(P) = r$ para todo P en \mathcal{P} y $gr(B) = k$ para todo B en \mathcal{B} , es decir, el grafo $G(\mathcal{D})$ es un grafo bipartito semirregular.

Observación 6.1.7. La secuencia $\{\lambda_i\}_{i=1}^t$ es decreciente.

Definición 6.1.8. Llamamos *matriz de incidencia* de un diseño a una matriz N de tamaño $v \times b$ y entradas

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in B_j, \\ 0 & \text{si } p_i \notin B_j. \end{cases}$$

Observación 6.1.9. Si N matriz de incidencia de \mathcal{D} entonces N^t matriz de incidencia de \mathcal{D}^* .

Observación 6.1.10. Se cumple que

$$\sum_{j=1}^b n_{ij} = |\{B \in \mathcal{B} : \{p_i\} \subset B\}| = r,$$

$$\sum_{i=1}^v n_{ij} = |\{p_i : p_i \in B_j\}| = k.$$

Proposición 6.1.11. La matriz de incidencia de un 2-diseño cumple que

$$NN^t = (r - \lambda_2)I + \lambda_2 J.$$

Demostración. Observemos que el vector fila de la matriz N , $F_i(N)$, posee 1s en los bloques a los que pertenece p_i .

Luego,

$$(NN^t)_{ij} = \langle F_i(N), F_j(N) \rangle = \begin{cases} r & \text{si } i = j, \\ \lambda_2 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

□

Observación 6.1.12. Dada una matriz de ceros y unos con suma por fila y columna constante que satisfaga la ecuación anterior corresponde a un 2 diseño.

Lema 6.1.13. Sea \mathcal{D} un 2 - (v, k, λ_2) diseño y $k < v$ entonces se cumple que $b \geq v$.

Demostración. Consideremos la igualdad (3) con $s = 1$ y $t = 2$, luego,

$$(v - 1)\lambda_2 = (k - 1)r \quad (5)$$

dado que $v - 1 > k - 1$ tenemos que $\lambda_2 < r$.

Veamos que $NN^t = (r - \lambda_2)I + \lambda_2 J$ resulta invertible

- $r - \lambda_2 > 0$ por lo que $(r - \lambda_2)I$ es definida positiva,
- $\lambda_2 > 0$ por lo que $\lambda_2 J = \lambda_2 \mathbf{1}\mathbf{1}^t$ es semidefinida positiva,

luego, NN^t resulta definida positiva y en consecuencia invertible.

Por otro lado,

$$\mathbb{R}^v \xrightarrow{N^t} \mathbb{R}^b \xrightarrow{N} \mathbb{R}^v$$

de donde se deduce que $b \geq v$.

□

Proposición 6.1.14. El dual de un 1 diseño es un 1 diseño.

Demostración. Tenemos que

$$|\{P \in \mathcal{P} : \{B\} \subset P\}| = |\{P \in \mathcal{P} : (B, P) \in I^*\}| = |\{P \in \mathcal{P} : (P, B) \in I\}| = |B| = k,$$

luego, \mathcal{D}^* es un 1-diseño.

□

Observación 6.1.15. En general, el dual de un 2 diseño no es un 2 diseño.

Ejemplo Consideremos el 2 diseño dado por la matriz de incidencia

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que es un 2 pues dadas dos filas de la matriz existen existe una única columna que posee 1 en ambas filas, es decir, dados dos puntos existe un único

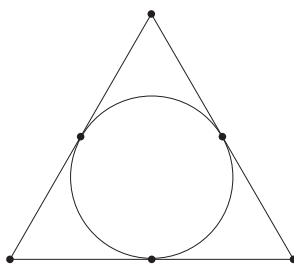
bloque al cual ambos pertenecen.

Sin embargo, al considerar la matriz de incidencia del diseño dual

$$N^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lo anterior no se obtiene para los puntos 1 y 4.

Otra forma de representar el diseño dual es mediante el siguiente dibujo, en el cual, los puntos son los puntos del 2 diseño, y las líneas los bloques.



Se puede ver también en el dibujo que hay pares de puntos que no tienen líneas en común, mientras que otros pares sí las tienen.

Definición 6.1.16. Decimos que un 2 diseño es *simétrico* si $b = v$.

Lema 6.1.17. *El dual de un 2 diseño simétrico es un 2 diseño simétrico con los mismos parámetros.*

Demostración. Observemos primero que $\lambda_2 < r$. Sabemos que $\lambda_2 \leq r$ pero si $\lambda_2 = r$ utilizando (5) obtenemos que $v = k$, luego, $b = 1$ pues el tamaño de los bloques es igual a la cantidad de puntos. Además, por ser el diseño simétrico tenemos que $b = v$ entonces $1 = v$. Finalmente, \mathcal{D} no podría ser un 2-diseño ya que $\lambda_2 = 0$.

Sabemos que $\lambda_2 < r$, luego, $NN^t = (r - \lambda_2)I + \lambda_2 J$ y en consecuencia N , resultan invertibles.

Tenemos entonces que,

$$N^t = N^{-1}((r - \lambda_2)I + \lambda_2 J).$$

Afirmación $JN^{-1} = N^{-1}J$

Veamos que $JN = NJ$:

$$(NJ)_{ij} = \langle F_i(N), \mathbf{1} \rangle = r,$$

$$(JN)_{ij} = \langle \mathbf{1}^t, C_j(N) \rangle = k.$$

Utilizando (4) y que el diseño es simétrico obtenemos que $k = r$ por lo que $JN = NJ$ y en consecuencia $JN^{-1} = N^{-1}J$.

Luego,

$$N^t = (r - \lambda_2)IN^{-1} + \lambda_2JN^{-1} = ((r - \lambda_2)I + \lambda_2J)N^{-1}$$

$$N^t(N^t)^t = (r - \lambda_2)I + \lambda_2J$$

Lo que, sumado a que N^t tiene suma por fila y columna constante, prueba que N^t corresponde a un 2 diseño.

Tenemos que \mathcal{D}^* un 2 -(v', k', λ'_2) diseño, por ser \mathcal{D} simétrico sabemos que $v' = v$ y de la identidad

$$N^t(N^t)^t = (r - \lambda_2)I + \lambda_2J$$

se desprende que $\lambda'_2 = \lambda_2$ y $r' = r$. Utilizando la igualdad (4) se concluye que $k' = k$. □

6.2. Entrelazado aplicado a diseños

Dada una matriz N no simétrica podemos usar los resultados de entrelazado aplicados a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^t & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que obtendremos resultados en términos de los valores propios de A que denominaremos λ_i , el parámetro λ_t será denominado λ de aquí en más.

Proposición 6.2.1. *El espectro de A es simétrico.*

Demostración. Sea $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ un vector propio de A asociado al valor propio λ .

Dado que

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nw \\ N^tu \end{pmatrix},$$

$$\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda w \end{pmatrix},$$

tenemos

$$Nw = \lambda u, \quad N^tu = \lambda w.$$

Veamos que $\tilde{v} = \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio $-\lambda$,

$$A\tilde{v} = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Nw \\ N^tu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u \\ \lambda w \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} = -\lambda\tilde{v}. \quad \square$$

Observación 6.2.2. A es la matriz de adyacencia del grafo $G(\mathcal{D})$.

Observación 6.2.3. La suma por fila en A es r en las primeras v filas y k en las últimas b filas.

Proposición 6.2.4. λ es valor propio de A si y sólo si λ^2 es valor propio de N^tN .

Demostración. (\Rightarrow) Sea $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ vector propio de A asociado al valor propio λ , por argumentos ya usados tenemos que

$$Nw = \lambda u, \quad N^t u = \lambda w,$$

de donde

$$N^t N w = N^t \lambda u = \lambda N^t u = \lambda(\lambda w) = \lambda^2 w.$$

Luego, λ^2 resulta valor propio de N^tN .

(\Leftarrow) Sea w vector propio de N^tN asociado al valor propio $\sigma \geq 0$ y $u = Nw$, tenemos que $N^t N w = N^t u = \sigma w$.

Luego,

$$A \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} u \\ \sigma w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} u \\ \sigma w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma N w \\ \sqrt{\sigma} N^t u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma u \\ \sqrt{\sigma} \sigma w \end{pmatrix} = \sqrt{\sigma} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} u \\ \sigma w \end{pmatrix}$$

por lo que $\sqrt{\sigma}$ resulta un valor propio de A y por ser el espectro A es simétrico $-\sqrt{\sigma}$ también lo es. □

Observación 6.2.5. La proposición anterior se prueba para NN^t en lugar de N^tN de forma análoga.

Observación 6.2.6. La suma por fila en N^tN y NN^t es constante rk .

Observación 6.2.7. Si realizamos una construcción análoga a la construcción que permite probar la observación 7.1.6 obtenemos que rk es el mayor valor propio de la matriz N^tN , y en consecuencia,

$$\lambda_1 = \sqrt{rk} \quad y \quad \lambda_n = -\sqrt{rk}.$$

Teorema 6.2.8. Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ un 1 -(v, k, r) diseño y $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ una subestructura de \mathcal{D} .

Denotemos

$$|\mathcal{P}'| = v', \quad |\mathcal{B}'| = b' \quad y \quad |E(G(\mathcal{D}'))| = m',$$

entonces se cumple que

$$(m'(v/v') - b'k)(m'(b/b') - v'r) \leq \lambda_2^2(v - v')(b - b').$$

Además, la igualdad implica que las subestructuras dadas por $(\mathcal{P}', \mathcal{B}')$, $(\mathcal{P}'^c, \mathcal{B}')$, $(\mathcal{P}', \mathcal{B}'^c)$ y $(\mathcal{P}'^c, \mathcal{B}'^c)$ son 1 diseños.

Demostración. Consideremos la partición $\{\mathcal{P}', \mathcal{P}'^c, \mathcal{B}', \mathcal{B}'^c\}$ de $\mathcal{P} \cup \mathcal{B}$ cuya matriz asociada resulta

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{m'}{v'} & r - \left(\frac{m'}{v'}\right) \\ 0 & 0 & \frac{b'k-m}{v-v'} & r - \left(\frac{b'k-m}{v-v'}\right) \\ \frac{m'}{b'} & k - \left(\frac{m'}{b'}\right) & 0 & 0 \\ \frac{v'r-m'}{b-b'} & k - \left(\frac{v'r-m'}{b-b'}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r}{k}} \\ \sqrt{\frac{r}{k}} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{r}{k}} \\ -\sqrt{\frac{r}{k}} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de B asociados a los valores propios \sqrt{rk} y $-\sqrt{rk}$ respectivamente.

Sean $C = \begin{pmatrix} \frac{m'}{v'} & r - \left(\frac{m'}{v'}\right) \\ \frac{b'k-m}{v-v'} & r - \left(\frac{b'k-m}{v-v'}\right) \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} \frac{m'}{b'} & k - \left(\frac{m'}{b'}\right) \\ \frac{v'r-m'}{b-b'} & k - \left(\frac{v'r-m'}{b-b'}\right) \end{pmatrix}$,
luego,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(C)\det(D) = r(\operatorname{tr}(C) - r)k(\operatorname{tr}(D) - k) = \\ &= rk \left(\frac{m(v/v') - b'k}{b - b'} \right) \left(\frac{m'(b/b') - v'r}{v - v'} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, como consecuencia del entrelazado tenemos que

$$\mu_2 \leq \lambda_2, \quad -\mu_3 \leq -\lambda_{n-1}$$

y utilizando que $-\mu_3 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$ obtenemos

$$-\mu_2\mu_3 \leq -\lambda_2\lambda_{n-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\det(B)}{rk} &= \frac{\det(B)}{-\mu_1\mu_4} = -\mu_2\mu_3 \leq -\lambda_2\lambda_{n-1} = \lambda_2^2, \\ \left(\frac{m'(v/v') - b'k}{b - b'} \right) \left(\frac{m'(b/b') - v'r}{v - v'} \right) &\leq \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Si se da la igualdad tenemos que

$$-\mu_2\mu_3 = -\lambda_2\lambda_{n-1}$$

lo cual, dado que $0 < \mu_2 \leq \lambda_2$ y $0 < -\mu_3 \leq -\lambda_{n-1}$ implica que

$$\mu_2 = \lambda_2 \quad \text{y} \quad \mu_3 = \lambda_{n-1}.$$

Entonces el entrelazado es estricto y la partición regular. Luego, se cumple que la suma por fila y columna en todos los bloques A_{ij} es constante.

Si consideramos la subestructura $(\mathcal{P}', \mathcal{B}')$ el hecho de tener suma por fila y columna constante en el bloque A_{13} nos permite concluir que $(\mathcal{P}', \mathcal{B}')$ es un 1 diseño cuya matriz de incidencia es A_{13} .

Considerando los bloques A_{14} , A_{31} y A_{41} se prueba que las subestructuras $(\mathcal{P}', \mathcal{B}'^c)$, $(\mathcal{P}'^c, \mathcal{B}')$ y $(\mathcal{P}'^c, \mathcal{B}'^c)$ resultan también 1 diseños. \square

Observación 6.2.9. El resultado anterior es particularmente útil cuando logramos expresar λ_2 en términos de los parámetros del diseño.

Proposición 6.2.10. Sea \mathcal{D} un 2 - (v, k, λ) diseño, entonces se cumple que

$$\lambda_2^2 = r - \lambda = \lambda \frac{v - k}{k - 1}.$$

Demostración. Si denominamos $\{\sigma_i\}_{i=1}^v$ a los valores propios de NN^t ordenados en forma descendente, probaremos que $\sigma_2 = r - \lambda$. Luego, por la proposición 6.2.4 para NN^t obtendremos que $r - \lambda = \lambda_2^2$.

Por la proposición 6.1.11 tenemos que

$$NN^t = (r - \lambda)I + \lambda J.$$

Estudiaremos los valores propios de la matriz NN^t , mediante el estudio de los de la matriz λJ .

Dado que $rg(\lambda J) = v - 1$, tenemos que 0 es valor propio de λJ con multiplicidad $v - 1$. A su vez, por tener λJ suma por fila constante, resulta que λv también es valor propio de la matriz. Luego, $r - \lambda$ y $r - \lambda + \lambda v$ son los valores propios de la matriz NN^t y por estar considerando los valores propios ordenados en forma descendente se cumple que $\sigma_2 = r - \lambda$.

Por otro lado, la igualdad (5) afirma que

$$(v - 1)\lambda = r(k - 1),$$

de donde,

$$r - \lambda = \lambda \frac{v - k}{k - 1}.$$

\square

Corolario 6.2.11. Sean \mathcal{D} un 2 - (v, k, λ) diseño simétrico y \mathcal{D}' un 2 - (v', k', λ') sub-diseño simétrico, entonces se cumple

$$(k'v - kv')^2 = (k - \lambda)(v - v')^2.$$

Demostración. Por ser \mathcal{D} y \mathcal{D}' diseños simétricos tenemos que $b = v$ y $b' = v'$. Por (4) tenemos que $bk = rv$ de donde $k = r$, análogamente concluimos que $k' = r'$. Además, $m = vr = vk$ y $m' = v'r' = v'k'$. La desigualdad del teorema 6.2.8 resulta

$$((v'k')(v/v') - v'k)((v'k')(v/v') - v'k) \leq \lambda_2^2(v - v')(v - v').$$

Como $\lambda_2^2 = r - \lambda = k - \lambda$ tenemos que

$$(k'v - v'k)^2 \leq (k - \lambda)(v - v')^2.$$

□

Corolario 6.2.12. *Sea \mathcal{D} un 2 -(v, k, λ) diseño. Sean $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ donde $|\mathcal{P}'| = v'$ y $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ donde $|\mathcal{B}'| = b'$ tales que P y B no son incidentes para todo P en \mathcal{P}' y B en \mathcal{B}' .*

Entonces se cumple que

$$krv'b' \leq (r - \lambda)(v - v')(b - b').$$

Además, si se da la igualdad la estructura dada por $(\mathcal{P}', \mathcal{B}'^c)$ es un 2 diseño.

Demostración. Aplicando el teorema 6.2.8 con $m' = 0$ y $\lambda_2^2 = r - \lambda$ tenemos que

$$(b'kv'r) \leq (r - \lambda)(v - v')(b - b')$$

y en caso de obtener la igualdad tenemos que la estructura dada por $(\mathcal{P}', \mathcal{B}'^c)$ es un 1 diseño. Veamos que es un 2 diseño: sean P_i, P_j en \mathcal{P}' , sabemos que $P_i, P_j \notin B$ para todo $B \in \mathcal{B}'$.

Luego,

$$|\{B \in \mathcal{B}'^c : \{P_i, P_j\} \subset B\}| = |\{B \in \mathcal{B} : \{P_i, P_j\} \subset B\}| = \lambda.$$

□

Definición 6.2.13. Decimos que ρ es *número de intersección* de un \mathcal{D} 2 -(v, k, λ) diseño si existen B_i, B_j en \mathcal{B} tales que $|B_i \cap B_j| = \rho$.

Los primeros dos ítems del teorema a continuación son resultados de Majumdar [8] y los dos restantes de Beker y Haemers [9].

Teorema 6.2.14. *Sea ρ número de intersección de un 2 -(v, k, λ) diseño \mathcal{D} , entonces se cumple:*

1. $\rho \geq k - r + \lambda$.
2. La relación en \mathcal{B} definida como

$$B_i \sim B_j \text{ si } B_i = B_j \text{ o } |B_i \cap B_j| = k - r + \lambda$$

es de equivalencia.

3. $||[B]|| \leq \frac{b}{b-v+1}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

4. Si para todo $B \in \mathcal{B}$, $|[B]| = \frac{b}{b-v+1}$ entonces existen l_1 y l_2 tales que

$$|B_i \cap B_j| = \begin{cases} l_1 & B_i \sim B_j, \\ l_2 & B_i \not\sim B_j. \end{cases}$$

Demostración. A lo largo de esta prueba consideraremos la matriz $C = N^t N$ de la cual conocemos dos de sus valores propios:

$$\sigma_1 = rk \quad \text{y} \quad \sigma_2 = r - \lambda.$$

Además sabemos que

$$N^t N = \langle C_i(N), C_j(N) \rangle = \begin{cases} k & \text{si } i = j, \\ |B_i \cap B_j| & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Dado que existen B_i, B_j en \mathcal{B} tales que $|B_i \cap B_j| = \rho$ tenemos que

$$(N^t N)_{ij} = \begin{cases} k & \text{si } i = j, \\ \rho & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

por lo cual

$$B = \begin{pmatrix} k & \rho \\ \rho & k \end{pmatrix}$$

es submatriz de $N^t N$ y en consecuencia, los valores propios de ambas matrices entrelazados, en particular, $\mu_2 \leq \sigma_2$.

Como $\mu_2 = k - \rho$ resulta

$$k - r + \lambda \leq \rho.$$

2. Sean B_i, B_j tales que $|B_i \cap B_j| = k - r + \lambda$. Si consideramos la submatriz de la parte anterior tenemos que $\mu_2 = \sigma_2$, y como el vector propio asociado a μ_2 es

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por la parte (3) del teorema 2.1.6 sabemos que el vector propio asociado a σ_2 tiene la siguiente forma

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ -1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

lo cual implica que las entradas de C cumplen que $c_{ki} = c_{kj}$ para todo $k \neq i, j$, es decir, $|B_k \cap B_i| = |B_j \cap B_k|$ para todo $k \neq i, j$. Luego tenemos que si $|B_k \cap B_i| = k - r + \lambda$ se cumple que $|B_j \cap B_k| = k - r + \lambda$, lo que prueba la transitividad de la relación.

Las propiedades idéntica y simétrica son inmediatas, lo que prueba que la relación es de equivalencia.

3. Sea $[B]$ la clase de equivalencia del bloque B y $|[B]| = b'$. Podemos suponer que los b' primeros bloques son los de $[B]$. Consideremos la partición $\{[B], [B]^c\}$ de la matriz C , se puede ver que

$$C_{11} = \begin{pmatrix} k & \rho & \dots & \rho \\ \rho & k & \dots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \dots & k \end{pmatrix}$$

con $\rho = k - r + \lambda$. Luego se puede ver que la matriz cociente resulta

$$B = \begin{pmatrix} k + \rho(b' - 1) & rk - (k + \rho(b' - 1)) \\ \frac{b'}{b-b'}(rk - (k + \rho(b' - 1))) & rk - \frac{b'}{b-b'}(rk - (k + \rho(b' - 1))) \end{pmatrix}$$

y sus valores propios

$$\mu_1 = rk \quad y \quad \mu_2 = k + \rho(b' - 1) - \frac{b'}{b-b'}(rk - (k + \rho(b' - 1))).$$

Por entrelazado tenemos que

$$\mu_2 \geq \lambda_b \geq 0$$

de donde, utilizando que $bk = vr$ y $rk - v\lambda = r - \lambda$, se obtiene

$$b' \leq \frac{b}{b-v+1}.$$

4. Si vale la igualdad anterior, tenemos que el entrelazado es estricto, por lo cual la suma por fila es constante en todos los bloques, en particular, en el bloque C_{21} .

Como además tenemos que

$$c_{ki} = c_{kj} \text{ para todo } i, j = 1, \dots, b' \text{ y } k \neq i, j$$

las entradas de cada fila C_{21} son iguales y en consecuencia todas las entradas del bloque C_{21} son iguales, es decir,

$$C_{21} = cJ$$

Luego, tenemos que

$$|B_i \cap B_j| = \begin{cases} k - r + \lambda & B_i \sim B_j, \\ c & B_i \not\sim B_j. \end{cases}$$

□

7. Laplaciana

7.1. Definiciones previas

Definición 7.1.1. Llamamos *matriz laplaciana* de un grafo G a una matriz L de tamaño $n \times n$ y entradas

$$l_{ij} = \begin{cases} gr(x_i) & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } x_i \sim x_j, \\ 0 & \text{si } x_i \not\sim x_j. \end{cases}$$

Observación 7.1.2. $L(G) = \Delta(G) - A(G)$ donde $\Delta(G)$ es una matriz diagonal de tamaño $n \times n$ que cumple que $\Delta(G)_{ii} = gr(x_i)$.

Luego, la suma por fila de la matriz $L(G)$ resulta constante 0, y por argumentos análogos a los usados en la prueba de la proposición 4.1.3, 0 es un valor propio de $L(G)$ asociado al vector propio $\mathbf{1}$.

Definición 7.1.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos.

Una *orientación* del grafo G es un grafo dirigido $G^\sigma = (V, E^\sigma)$ donde E^σ es asimétrico y se cumple que

$$\{\{x, y\} : (x, y) \in E^\sigma\} = E.$$

Definición 7.1.4. Sea $G^\sigma = (V, E^\sigma)$ un grafo donde $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $E^\sigma = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ son conjuntos finitos con sus elementos ordenados.

Denominamos *matriz de incidencia del grafo orientado* G^σ a una matriz $D(G^\sigma)$ de tamaño $n \times m$ de entradas

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe } x \text{ tal que } e_j = (x, x_i), \\ -1 & \text{si existe } x \text{ tal que } e_j = (x_i, x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 7.1.5. $L = D(G^\sigma)D(G^\sigma)^t$ para toda orientación σ del grafo G .

Demostración. Veamos que $D(G^\sigma)D(G^\sigma)^t = \Delta(G) - A(G)$.

Observemos que la fila i -ésima de $D(G^\sigma) = D$ posee un 1 por cada arista incidente al vértice x_i y -1 por cada arista saliente del vértice x_i .

Luego,

$$(DD^t)_{ii} = \langle F_i(D), F_i(D) \rangle = gr_{G^\sigma}^+(x_i) + gr_{G^\sigma}^-(x_i) = gr_G(x_i).$$

Estudiemos ahora $(DD^t)_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik}d_{kj}$ con $i \neq j$.

Tenemos que

$$d_{ik}d_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_{ik} \neq 0 \\ d_{kj} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_k = (y, x_i) \text{ o } e_k = (x_i, y) \\ e_k = (y, x_j) \text{ o } e_k = (x_j, y) \end{cases} \Leftrightarrow \\ e_k = (x_i, x_j) \text{ o } e_k = (x_j, x_i),$$

como entre dos vértices puede existir sólo una arista, resulta que

$$\sum_{k=1}^n d_{ik}d_{kj} = d_{ik_0}d_{k_0j} = -1 \quad \text{si } x_i \sim x_j,$$

entonces tenemos que si $i \neq j$

$$(DD^t)_{ij} = -(A(G))_{ij}.$$

□

Observación 7.1.6. Si G es un grafo k -regular tenemos que $L(G) = kI - A(G)$ por lo cual tenemos que los valores propios de $L(G)$ son de la forma $k - \lambda_i$. Como los valores propios de $L(G)$ son no negativos tenemos que $k \geq \lambda_i$ y por ser k valor propio de $A(G)$ tenemos que $\lambda_1 = k$.

Proposición 7.1.7. Si c es la cantidad de componentes conexas del grafo G entonces

$$\dim(\ker(L(G))) = c.$$

Demostración. Sea $D = D(G^\sigma)$ y $L = L(G)$.

Basta ver que si G es conexo entonces $\dim(\ker(L)) = 1$ pues en caso de tener más de una componente conexas, la matriz L resulta de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & \vdots & & & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & * & \dots & * \end{array} \right)$$

con c bloques no nulos, los cuales representan la matriz L para el subgrafo generado por los vértices de cada componente conexas. Luego, $\dim(\ker(L)) = c$.

Afirmación $\ker(L) = \ker(D^t)$.

(C) Sea z en $\ker(L) = \ker(DD^t)$, luego, $DD^t z = \mathbf{0}$. Entonces se cumple que

$$0 = z^t DD^t z = (D^t z)^t D^t z = \|D^t z\|^2 = 0$$

por lo cual $D^t z = \mathbf{0}$

(\supset) Sea z en $\ker(D^t)$, luego, $D^t z = \mathbf{0}$ y en consecuencia $Lz = DD^t z = \mathbf{0}$.

Si z en $\ker(D^t)$ tenemos que

$$0 = (D^t z)_k = \langle F_k(D^t), z \rangle = \langle C_k(D), z \rangle.$$

Dado que la arista e_k es de la forma (x_i, x_j) tenemos que $z_i - z_j = 0$, es decir, $z_i = z_j$. Luego, si existe un camino en G de x_i a x_j también tenemos que $z_i = z_j$, y por ser el grafo conexo, existen caminos entre dos vértices cualesquiera y esto prueba que todas las coordenadas del vector z son iguales, por lo cual

$$\ker(D^t) \subset \langle \mathbf{1} \rangle.$$

Es fácil ver que $D^t \mathbf{1} = \mathbf{0}$ lo que prueba la otra inclusión y en consecuencia

$$\langle \mathbf{1} \rangle = \ker(D^t).$$

Finalmente, tenemos que $\dim(\ker(D^t)) = 1$. □

Observación 7.1.8. Como consecuencia de la proposición 7.1.5 tenemos que la matriz Laplaciana es semidefinida positiva, por lo cual sus valores propios $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, que ordenaremos en forma ascendente son todos no negativos

$$0 = \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n.$$

7.2. Entrelazado y matriz Laplaciana

Lema 7.2.1. Sean X e Y subconjuntos disjuntos de V tales que

$$x \approx y \quad \forall x \in X, y \in Y$$

entonces se cumple que

$$\frac{|X||Y|}{(n - |X|)(n - |Y|)} \leq \left(\frac{\theta_n - \theta_2}{\theta_n + \theta_2} \right)^2.$$

Demostración. Sea $\theta = -\frac{1}{2}(\theta_n + \theta_2)$, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & L + \theta I \\ L + \theta I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Afirmación El espectro de A es simétrico.

Afirmación λ es valor propio de A si y sólo si λ^2 es valor propio de $(L + \theta I)^2$.

Ambas afirmaciones se prueban utilizando las proposiciones 6.2.1 y 6.2.4 con $N = N^t = L + \theta I$.

Estudiemos ahora los valores propios de la matriz A .

Como θ_i valor propio de L , tenemos que $\theta_i + \theta$ valor propio de $L + \theta I$, luego, los valores propios de A resultan

$$\theta_1 + \theta \leq \theta_2 + \theta \leq \dots \leq \theta_n + \theta \quad y$$

$$-(\theta_n + \theta) \leq \dots \leq -(\theta_2 + \theta) \leq -(\theta_1 + \theta).$$

Se puede ver que $\theta_2 + \theta = -(\theta_n + \theta)$, luego, si denominamos $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2n}$ a los valores propios de A ordenados en forma descendente, tenemos que $\lambda_{2n} = -\lambda_1 = \theta_1 + \theta = \theta$ y $\lambda_{2n-1} = -\lambda_2 = \theta_2 + \theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_n)$.

Consideremos ahora la partición $\{Y, Y^c, X^c, X\}$ del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ identificando los últimos n vértices con $\{1, 2, \dots, n\}$, sea B la matriz cociente correspondiente a dicha partición.

Dado que la matriz A restringida a las primeras n filas y columnas es nula al igual que cuando la restringimos a las últimas n filas y columnas, vale que

$$(B)_{11} = (B)_{12} = (B)_{21} = (B)_{22} = 0$$

y

$$(B)_{33} = (B)_{34} = (B)_{43} = (B)_{44} = 0.$$

Estudiemos el resto de las entradas de B , la matriz $A + \theta I$ posee la siguiente forma si particionamos las columnas según $\{X, X^c\}$ y las filas según $\{Y, Y^c\}$

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} \theta & \dots & * & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \theta & * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ * & \dots & * & * & \dots & * & \theta & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & \theta \end{array} \right)$$

ya que $|X| \leq |Y^c|$, por ser X e Y disjuntos y no existir aristas entre X e Y .

También sabemos que la suma por fila en $A + \theta I$ es constante θ , entonces las entradas de B resultan

$$(B)_{13} = \theta, \quad (B)_{14} = 0, \quad (B)_{23} = \theta - \theta \frac{|X|}{n - |Y|} \quad \text{y} \quad (B)_{24} = \theta \frac{|X|}{n - |Y|}.$$

De forma análoga podemos calcular las entradas $(B)_{31}, (B)_{32}, (B)_{41}$ y $(B)_{42}$. Luego, la matriz resulta

$$B = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta - \theta \frac{|X|}{n - |Y|} & \theta \frac{|X|}{n - |Y|} \\ \theta \frac{|Y|}{n - |X|} & \theta - \theta \frac{|Y|}{n - |X|} & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \end{array} \right)$$

cuyos valores propios son

$$\mu_1 = \lambda_1 = \theta, \quad \mu_2 = \theta \frac{|X|}{n - |Y|}, \quad \mu_3 = \theta \frac{|X|}{n - |Y|} \quad \text{y} \quad \mu_4 = \lambda_{2m} = -\theta$$

los cuales, por estar entrelazados con los valores propios de A , entre otras desigualdades, cumplen que

$$\mu_2 \leq \lambda_2 \quad \lambda_{2n-1} \leq \mu_3.$$

Luego, utilizando que $-\mu_2$ y $-\mu_3$ son ambos positivos tenemos que

$$\theta^2 \frac{|X||Y|}{(n - |X|)(n - |Y|)} = \frac{\det B}{\theta^2} = -\mu_2 \mu_3 \leq -\lambda_2 \lambda_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_n)\right)^2$$

de donde se deduce la desigualdad requerida. \square

Definición 7.2.2. Decimos que una matriz simétrica M tienen *ancho de banda* w si $(M)_{ij} = 0$ para todo i, j tal que $|i - j| > w$.

Definición 7.2.3. Decimos que un grafo G tiene *ancho de banda* $w(G)$ si es el menor ancho de banda de todas sus posibles matrices de adyacencia.

Observación 7.2.4. El ancho de banda de la matriz laplaciana de un grafo no vacío es igual al de la matriz de adyacencia, por lo cual el ancho de banda de un grafo podría definirse también como el menor ancho de banda de todas sus posibles matrices laplacianas.

Teorema 7.2.5. Sea G un grafo no vacío y $b = \lceil n(\theta_2/\theta_n) \rceil$ entonces se cumple que

$$w(G) \leq \begin{cases} b & \text{si } n - w(G) \text{ es par,} \\ b - 1 & \text{si } n - w(G) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ los vértices del grafo G ordenados como en la matriz $L(G)$ que minimiza el ancho de banda que denotaremos w .

Si $n - w$ es par, consideremos los conjuntos

$$X = \{x_i : i \leq \frac{1}{2}(n - w)\}, \quad Y = \{x_{n-i} : i \leq \frac{1}{2}(n - w)\}.$$

No existen adyacencias entre x_i en X y x_j en Y pues $|i - j| > w$, luego, podemos aplicar el lema 7.2.1 de donde

$$\frac{(\frac{1}{2}(n - w))^2}{(n - \frac{1}{2}(n - w))^2} \leq \left(\frac{\theta_n - \theta_2}{\theta_n + \theta_2}\right)^2$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_n} n \leq w.$$

Utilizando que w es un natural se obtiene la tesis.

Si $n - w$ es par, considerando los conjuntos

$$X = \{x_i : i \leq \frac{1}{2}(n - w - 1)\}, \quad Y = \{x_{n-i} : i \leq \frac{1}{2}(n - w - 1)\},$$

la prueba es análoga. □

Definición 7.2.6. Sea G un grafo no dirigido.

La *distancia* entre 2 vértices conectados x e y se define como

$$d(x, y) = \text{mín}\{r : \text{existe camino de largo } r \text{ de } x \text{ a } y\}.$$

Definición 7.2.7. Sea G un grafo no dirigido conexo.

Decimos que G posee *diámetro* d si

$$d = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \text{ en } V\}.$$

El siguiente lema es un resultado de Van Dam y Haemers [10].

Lema 7.2.8. *Sea G un grafo conexo de diámetro d que posee n vértices ($n \geq 2$) y P un polinomio de grado menor que d y término independiente 1. Entonces se cumple que*

$$\frac{1}{n-1} \leq \text{máx}\{|P(\theta_i)| : i = 2, \dots, n\}.$$

Demostración. Podemos suponer que x_1 y x_n son los vértices que se encuentran a distancia d . Utilizando la observación (3.2.6) con la matriz $L = \tilde{A}(G')$, donde G' es un grafo que posee las adyacencias del grafo G y lazos en todos los vértices, se puede ver que $(L^r)_{1n} = 0$ si $r < d$ ya que si no existe un camino de largo menor que d en G tampoco existe en G' . Luego, tenemos que $(P(L))_{1,n} = 0$.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & P(L) \\ P(L) & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora la partición $\{\{1\}, \{2, \dots, n\}, \{n+1, \dots, 2n-1\}, \{2n\}\}$ del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Se tiene que $(A)_{1,2n} = (A)_{2n,1} = 0$.

Afirmación La suma por fila y columna de la matriz A es constante 1.

En primer lugar observemos que la matriz A es simétrica dado que L lo es, luego, si probamos que la suma por fila es constante 1, queda probado para la suma por columna.

Sabemos que L posee suma por fila constante 0, es decir, $\theta_1 = 0$ es valor propio de L asociado al vector propio $\mathbf{1}$. Es fácil ver que $P(\theta_1)$ es valor propio de $P(L)$ asociado al mismo vector propio: $\mathbf{1}$. Luego, la suma por fila de la matriz $P(L)$ es constante $P(\theta_1) = P(0) = 1$, y en consecuencia la suma por fila de la matriz A también es lo es, como queríamos probar.

Utilizando la afirmación se puede ver que la matriz cociente resulta

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 1 - \frac{1}{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sus valores propios $\mu_1 = -\mu_4 = -1$ y $\mu_2 = -\mu_3 = \frac{1}{n-1}$.

Como los valores propios de B y A están entrelazados se cumple

$$\frac{1}{n-1} = \mu_2 \leq \lambda_2$$

dado que $\lambda_i = \pm P(\theta_j)$ y sabemos que $\lambda_1 = 1$, se cumple que

$$\lambda_2 \leq |P(\theta_i)| \quad \text{si } i \geq 2.$$

Luego,

$$\frac{1}{n-1} \leq \max\{|P(\theta_i)| : i = 2, \dots, n\}.$$

□

Observación 7.2.9. Si para todo $i \geq 2$ se tiene que $|P(\theta_i)| \neq 0$ entonces la tesis del anterior lema también podría enunciarse como

$$\min\{1/|P(\theta_i)| : i = 2, \dots, n\} \leq n-1.$$

Observación 7.2.10. Sea G en las condiciones del lema anterior. Sabemos que $\theta_2 > 0$ por ser G conexo, entonces podemos considerar el polinomio

$$P(x) = \frac{\prod_{\theta_i: i \geq 2} (x - \theta_i)}{\prod_{\theta_i: i \geq 2} (-\theta_i)}$$

Sea l la cantidad de valores propios distintos de la matriz laplaciana, tenemos que $gr(P) = l - 1$.

Supongamos que $l - 1 < d$, por el lema anterior obtenemos que $0 \geq \frac{1}{n-1}$ lo cual es absurdo. Luego,

$$l - 1 \geq d.$$

Definición 7.2.11. Se denomina *polinomio de Chebyshev* de grado l al polinomio

$$T_l(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^l + \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 1})^l.$$

Utilizaremos las siguientes propiedades de los polinomios de Chebyshev [11]:

1. $|T_l(x)| \leq 1$ si $|x| \leq 1$.
2. $|T_l(x)| \geq 1$ si $|x| \geq 1$.
3. $|T_l(\frac{x+y}{x-y})| > \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{x+\sqrt{y}}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}})^l$ si $x > y \geq 0$.

Teorema 7.2.12. *Sea G un grafo conexo de diámetro $d > 1$, entonces se cumple que*

$$d < 1 + \frac{\log(2(n-1))}{\log(\sqrt{\theta_n} + \sqrt{\theta_2}) - \log(\sqrt{\theta_n} - \sqrt{\theta_2})}.$$

Demostración. Consideremos el polinomio $Q(x) = T_{d-1}(\frac{\theta_n + \theta_2 - 2x}{\theta_n - \theta_2})$ que queda bien definido ya que $\theta_n \neq \theta_2$ porque de ser iguales tendríamos que la cantidad de valores propios distintos es 2 lo que implica que el diámetro es 1.

Sea

$$P(x) = \frac{Q(x)}{Q(0)},$$

también queda bien definido pues $Q(0) = T_{d-1}(\frac{\theta_n + \theta_2}{\theta_n - \theta_2}) \geq 1$ por ser $\frac{\theta_n + \theta_2}{\theta_n - \theta_2} \geq 1$. Como $P(0) = 1$ estamos en las condiciones del lema 7.2.8, luego,

$$\min\{1/|P(\theta_i)| : i = 2, \dots, n\} \leq n - 1.$$

Además

$$|Q(\theta_i)| = \left| T_{d-1} \left(\frac{\theta_n + \theta_2 - 2\theta_i}{\theta_n - \theta_2} \right) \right| \leq 1 \quad \text{si } i \geq 2$$

pues

$$\left| \frac{\theta_n + \theta_2 - 2\theta_i}{\theta_n - \theta_2} \right| \leq \frac{|\theta_n - \theta_i| + |\theta_2 - \theta_i|}{\theta_n - \theta_2} = \frac{(\theta_n - \theta_i) + (\theta_i - \theta_2)}{\theta_n - \theta_2} = 1$$

luego,

$$\frac{1}{|P(\theta_i)|} = \left| \frac{Q(0)}{Q(\theta_i)} \right| \geq |Q(0)| \quad \text{si } i \geq 2.$$

Entonces tenemos

$$n-1 \geq \min\{1/|P(\theta_i)| : i = 2, \dots, n\} \geq Q(0) = T_{d-1} \left(\frac{\theta_n + \theta_2}{\theta_n - \theta_2} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\theta_n} + \sqrt{\theta_2}}{\sqrt{\theta_n} - \sqrt{\theta_2}} \right)^{d-1}.$$

Al aplicar la función creciente logaritmo a ambos lados de la desigualdad, se obtiene la tesis. □

8. Regularidad

8.1. Definiciones previas

Definición 8.1.1. Sea A una matriz simétrica $n \times n$, λ un valor propio y S_λ es subespacio propio asociado.

E_λ es la matriz $n \times n$ asociada a la transformación lineal que proyecta un vector de \mathbb{R}^n en el subespacio propio S_λ .

Observación 8.1.2. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los valores propios distintos de A , entonces se cumple que

1. $(E_{\lambda_i})^2 = E_{\lambda_i}$.
2. $E_{\lambda_i}E_{\lambda_j} = \mathbf{0}$ si $i \neq j$.
3. $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i E_{\lambda_i}$.
4. $A^n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n E_{\lambda_i}$.
5. $p(A) = \sum_{i=1}^r p(\lambda_i) E_{\lambda_i}$ con p en $\mathbb{R}[x]$.

Proposición 8.1.3. Se cumple que $|\{\lambda : \lambda \text{ valor propio de } A\}| = \dim(\mathbb{R}[A])$.

Demostración. En primer lugar observemos que $\mathbb{R}[A] = \{p(A) : p \text{ en } \mathbb{R}[x]\}$ es un espacio vectorial.

Si consideramos $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que

$$P(\lambda_i) = 1, \quad P(\lambda_j) = 0 \text{ si } i \neq j,$$

por la última observación tenemos que $p(A) = E_{\lambda_i}$ de donde $E_{\lambda_i} \in \mathbb{R}[A]$.

Veamos ahora que que el conjunto $\{E_{\lambda_i} : i = 1, \dots, r\}$ es L.I., consideremos

$$\alpha_1 E_{\lambda_1} + \dots + \alpha_r E_{\lambda_r} = \mathbf{0}$$

al multiplicar a ambos lados por $v_i \in S_{\lambda_i}$ no nulo obtenemos $\alpha_i v_i = \mathbf{0}$ luego, $\alpha_i = 0$. La última observación prueba también que $\{E_{\lambda_i} : i = 1, \dots, r\}$ es un generador de $\mathbb{R}[A]$ por lo cual es base.

Tenemos entonces que $\dim(\mathbb{R}[A]) = r = |\{\lambda : \lambda \text{ valor propio de } A\}|$ como queríamos probar. \square

8.2. Regularidad y entrelazado

Observación 8.2.1. Sea G un grafo con n vértices y m aristas. Consideremos la partición $\{V(G)\}$, la matriz cociente resulta ser $B = \begin{pmatrix} 2m \\ n \end{pmatrix}$, luego por entrelazado tenemos que

$$\frac{2m}{n} \leq \lambda_1.$$

Además, la igualdad implica que la partición es regular, y en consecuencia, el grafo G es regular. Recíprocamente, tenemos la igualdad cuando el grafo es regular debido a la proposición 3.1.6.

Hemos probado la siguiente equivalencia:

Proposición 8.2.2. *Un grafo G es regular si y sólo si $\frac{2m}{n} = \lambda_1$.*

Observación 8.2.3. Sabemos que $2m = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, luego, el grafo resulta regular si y sólo si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = n\lambda_1.$$

En lo que sigue utilizaremos las particiones que definimos a continuación:

Definición 8.2.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de diámetro d y $v \in V$

$$G_i(v) = \{x \in V : d(x, v) = i\} \quad i = 0, \dots, d.$$

Observación 8.2.5. $G_i(v) \cap G_j(v) = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Definición 8.2.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de diámetro d y v un vértice. Denominaremos *partición en vecinos* respecto al vértice v a la partición

$$\{G_0(v), G_1(v), \cup_{i=2}^d G_i(v)\},$$

y *partición en distancia* respecto al vértice v a la partición

$$\{G_0(v), G_1(v), \dots, G_d(v)\}.$$

Definición 8.2.7. Sea G un grafo conexo y v un vértice.

El grafo se dice *distancia regular respecto al vértice v* si la partición en distancia respecto al vértice v es regular y se dice *distancia regular* si la partición en distancia respecto al vértice v es regular para todo vértice y la matriz cociente asociada es la misma para todas las particiones. Si además el grafo tiene diámetro 2, lo denominamos *fuertemente regular*.

En esta sección trabajaremos con grafos distancia regulares, para lo cual será muy útil contar con una definición alternativa que es la utilizada por Brower, Cohen y Neumaier en [12]:

Definición 8.2.8. Sea G un grafo conexo de diámetro d .

El grafo G es *distancia regular** si es k -regular y para todo $i = 0, \dots, d$, existen constantes b_i y c_i tales que dados x e y vértices a distancia i se cumple que

$$b_i = |\{z : z \sim x, z \in G_{i+1}(y)\}|,$$

$$c_i = |\{z : z \sim x, z \in G_{i-1}(y)\}|.$$

Sea G un grafo conexo de diámetro d distancia regular*, consideremos x e y vértices a distancia i . Si $z \sim x$, z pertenece a uno de los siguientes conjuntos: $G_{i-1}(y)$, $G_i(y)$ o $G_{i+1}(y)$, luego, si definimos $a_i = |\{z : z \sim x, z \in G_i(y)\}|$ tenemos que

$$a_i = k - b_i - c_i.$$

Dado que

$$\{z : z \sim x, z \in G_{d+1}(y)\} = \{z : z \sim x, z \in G_{-1}(y)\} = \{\}$$

se tiene que $b_d = c_0 = 0$.

A su vez

$$b_0 = |\{z : z \sim x, z \in G_1(y)\}| = |\{z : z \sim x, z \in G_1(x)\}| = k,$$

$$c_1 = |\{z : z \sim x, z \in G_0(y)\}| = |\{z : z \sim x, z \in \{y\}\}| = |\{y\}| = 1.$$

Proposición 8.2.9. *Ambas definiciones son equivalentes.*

Demostración. Sea G un grafo conexo de diámetro d .

Sea y un vértice cualquiera y la partición en distancia respecto de dicho vértice $\{G_0(y), G_1(y), \dots, G_d(y)\}$. Consideremos los bloques A_{ij} que dicha partición genera con $i, j = 0, 1, \dots, d$ y B la matriz cociente.

Observación 1. $A_{ij} = \mathbf{0}$ si $j \neq i-1, i, i+1$, pues un vértice en $G_i(y)$ solo puede ser adyacente a vértices de $G_{i-1}(y)$, $G_i(y)$ y $G_{i+1}(y)$.

Observación 2. Sea x en $G_i(y)$, la suma de los elementos del bloque A_{ij} en la fila correspondiente al elemento x es igual a $|\{z : z \sim x, z \in G_j(y)\}|$ con $j = i-1, i, i+1$.

Observación 3. Si la suma por fila del bloque A_{ij} es constante C , se tiene que $b_{ij} = C$.

Veamos que G es distancia regular $\Leftrightarrow G$ es distancia regular*.

(\Rightarrow) Si G es distancia regular sabemos que la matriz cociente es la misma si consideramos la partición en distancia respecto de un vértice y cualquiera. Además, sabemos que dicha partición es regular, lo que implica que

- las entradas en el bloque A_{ii} tendrán suma por fila constante b_{ii}
- las entradas en el bloque $A_{i(i+1)}$ tendrán suma por fila constante $b_{i(i+1)}$ para $i < d$
- las entradas en el bloque $A_{i(i-1)}$ tendrán suma por fila constante $b_{i(i-1)}$ para $i > 0$

Luego, tenemos que existen constantes $b_{i(i+1)}$, b_{ii} y $b_{i(i-1)}$ tales que

$$\begin{aligned} b_{ii} &= |\{z : z \sim x, z \in G_i(y)\}|, \\ b_{i(i+1)} &= |\{z : z \sim x, z \in G_{i+1}(y)\}|, \\ b_{i(i-1)} &= |\{z : z \sim x, z \in G_{i-1}(y)\}|. \end{aligned}$$

También tenemos que el grafo G resulta $b_{0,1}$ regular, lo que termina de probar la distancia regularidad*.

(\Leftarrow) La definición de distancia regularidad* indica que que si consideramos la partición en distancia para un vértice cualquiera se cumple que

- las entradas en el bloque A_{ii} tendrán suma por fila constante a_i
- las entradas en el bloque $A_{i(i+1)}$ tendrán suma por fila constante b_i
- las entradas en el bloque $A_{i(i-1)}$ tendrán suma por fila constante c_i

lo que prueba que la partición es regular y la matriz cociente resulta la siguiente

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{d-2} & b_{d-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{d-1} & a_{d-1} & b_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_d & a_d \end{pmatrix}$$

Como la matriz cociente es la misma si consideramos la partición en distancia respecto de cualquier vértice, queda probada la distancia regularidad. \square

Los autores de los resultados expuestos a continuación son Brower, Cohen y Neumaier [12].

Lema 8.2.10. *Sea G un grafo conexo de diámetro d distancia regular y x un vértice. Si denotamos $k_i = |G_i(x)|$ se cumple que*

$$k_{i+1} = \frac{k_i b_i}{c_{i+1}}$$

Demostración. Sea z un vértice del grafo. Contemos las aristas de la forma $\{x, y\}$ tales que $d(x, z) = i$ y $d(z, y) = i + 1$ de 2 modos distintos:

- contemos los vértices que se encuentran a distancia $i + 1$ de z y multipliquemos por la cantidad de vértices adyacentes a z que se encuentran a distancia i de z .
- contemos los vértices que se encuentran a distancia i de z y multipliquemos por la cantidad de vértices adyacentes a z que se encuentran a distancia $i + 1$ de z .

Luego, $k_{i+1}c_{i+1} = k_i b_i$ como queríamos probar. \square

Observemos que $k_0 = 1$ y $k_1 = k$. Luego,

$$n = k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_d = 1 + k + k_2 + \dots + k_d.$$

Definición 8.2.11. Sea G un grafo conexo de diámetro d distancia regular. La matriz $A(l)$ con $k = 0, \dots, d$ es una matriz de tamaño $n \times n$ de entradas

$$a_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(x_i, x_j) = l, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 8.2.12. Si $a_{ij}^{(l)} \neq 0$ entonces $a_{ij}^{(r)} = 0$ para todo $r \neq l$ y además se cumple que

$$\begin{aligned} A(0) &= I, & A(1) &= A(G), \\ A(0) + A(1) + \dots + A(d) &= J. \end{aligned}$$

Lema 8.2.13. Sea G un grafo conexo de diámetro d distancia regular. Se cumple que

$$A.A(l) = c_{l+1}A(l+1) + a_lA(l) + b_{l-1}A(l-1) \quad l = 1, \dots, d-1.$$

Demostración. Veamos cuales son las entradas de ambas matrices:

$$\begin{aligned} (A.A(l))_{ij} &= \langle F_i(A), C_j(A(l)) \rangle = \sum_{\substack{x_r: x_r \sim x_i \\ d(x_r, x_i) = l}} 1 = |\{x_r : x_r \sim x_i, d(x_r, x_i) = l\}|, \\ (c_{l+1}A(l+1) + a_lA(l) + b_{l-1}A(l-1))_{ij} &= \begin{cases} c_{l+1} & \text{si } d(x_i, x_j) = l+1, \\ a_l & \text{si } d(x_i, x_j) = l, \\ b_{l-1} & \text{si } d(x_i, x_j) = l-1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad. □

Definición 8.2.14. El polinomio de grado l $\nu_l(x)$ es el que queda definido por recurrencia como sigue:

$$\begin{aligned} \nu_0(x) &= 1, & \nu_1(x) &= x, \\ c_{l+1}\nu_{l+1}(x) &= (x - a_l)\nu_l(x) - b_{l-1}\nu_{l-1}(x). \end{aligned}$$

Proposición 8.2.15. Sea $\nu_l(x)$ el polinomio de grado l definido anteriormente, entonces tenemos que

$$\nu_l(A) = A(l) \quad \text{y} \quad \nu_l(k) = k_l$$

para todo $l = 0, \dots, d$.

Demostración. Probaremos ambas identidades utilizando inducción completa. Veamos la primera igualdad, tenemos que

$$\nu_0(A) = I = A(0), \quad \nu_1(A) = A = A(1),$$

lo que prueba el paso base.

Supongamos que vale que $\nu_i(A) = A(i)$ para $i \leq l$ y veamos que $\nu_{l+1}(A) = A(l+1)$,

$$c_{l+1}\nu_{l+1}(A) = (A - a_l)\nu_l(A) - b_{l-1}\nu_{l-1}(A) = A.A(l) - a_lA(l) - b_{l-1}A(l-1),$$

luego,

$$c_{l+1}\nu_{l+1}(A) + a_lA(l) + b_{l-1}A(l-1) = A.A(l)$$

y utilizando el lema 8.2.13 obtenemos que $\nu_{l+1}(A) = A(l)$.
Veamos la segunda igualdad, tenemos que

$$\nu_0(k) = 1 = k_0, \quad \nu_1(k) = k = k_1,$$

por lo que queda probado el paso base. Supongamos que vale que $\nu_i(k) = k_i$ para $i \leq l$, veamos que $\nu_{l+1}(k) = k_{l+1}$, tenemos que

$$c_{l+1}\nu_{l+1}(k) = (k - a_l)\nu_l(k) - b_{l-1}\nu_{l-1}(k)$$

y utilizando el lema 8.2.10 obtenemos

$$c_{l+1}\nu_{l+1}(k) = (b_l + c_l)k_l - c_l k_l = b_l k_l = c_{l+1}k_{l+1}$$

de donde $\nu_{l+1}(k) = k_{l+1}$. □

Proposición 8.2.16. *Un grafo distancia regular de diámetro d posee exactamente $d + 1$ valores propios que coinciden con los valores propios de la matriz cociente B .*

Demostración. Tenemos que $\{\nu_0(A), \nu_1(A), \dots, \nu_d(A)\}$ es un conjunto L.I. incluido en $\mathbb{R}[A]$, luego,

$$d + 1 \leq \dim(\mathbb{R}[A]),$$

además $\nu_{d+1}(A) = \mathbf{0}$ por lo que tenemos que

$$\dim(\mathbb{R}[A]) \leq d + 1.$$

Finalmente,

$$|\{\lambda : \lambda \text{ valor propio de } A\}| = \dim(\mathbb{R}[A]) = d + 1.$$

Veamos ahora que los valores propios de A son los mismos que los de la matriz cociente B .

Tenemos que

$$A.A(l) = c_{l+1}A(l+1) + a_l A(l) + b_{l-1}A(l-1) \quad l = 1, \dots, d-1,$$

es decir,

$$A\nu_l(A) = c_{l+1}\nu_l(A) + a_l\nu_l(A) + b_{l-1}\nu_{l-1}(A) \quad l = 1, \dots, d-1.$$

Sea λ valor propio de A y v un vector propio asociado, utilizando la igualdad anterior tenemos que

$$(\lambda\nu_l(\lambda))v = (c_{l+1}\nu_l(\lambda) + a_l\nu_l(\lambda) + b_{l-1}\nu_{l-1}(\lambda))v \quad l = 1, \dots, d-1.$$

Definamos $u_i(\lambda) = \frac{\nu_i(\lambda)}{k_i}$ y reescribamos la igualdad anterior dividiendo entre $\frac{1}{k_{i-1}k_i k_{i+1}}$

$$\lambda u_i(\lambda) = \frac{k_{i+1}c_{i+1}}{k_i}u_{i+1}(\lambda) + a_i u_i(\lambda) + \frac{k_{i-1}b_{i-1}}{k_i}u_{i-1}(\lambda)$$

y utilizando el lema 8.2.10 obtenemos

$$\lambda u_i(\lambda) = b_i u_{i+1}(\lambda) + a_i u_i(\lambda) + c_i u_{i-1}(\lambda).$$

Si consideramos $u(\lambda) = (u_0(\lambda), u_1(\lambda), \dots, u_d(\lambda))^t$, la igualdad anterior implica que $u(\lambda)$ es un vector propio de B asociado al valor propio λ , lo que termina la prueba. \square

Teorema 8.2.17. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo regular de grado k con $0 \leq k \leq n - 1$, $v \in V$ y $t_v = |\{3\text{-ciclos que contienen a } v\}|$.*

Entonces se cumple que

$$nk - 2k^2 + 2t_v \leq -\lambda_2\lambda_n(n - k - 1).$$

Además, si se cumple la igualdad para todo vértice entonces G es fuertemente regular.

Demostración. Consideremos la partición en vecinos $\{G_0(v), G_1(v), \cup_{i=2}^d G_i(v)\}$ y B la matriz cociente.

Se puede ver que $|\{(x_i, x_j) : \{x_i, x_j\} \in E, x_i, x_j \in G_1(v)\}| = 2t_v$, luego, $(B)_{22} = \frac{2t_v}{k}$. Además, tenemos que la suma por fila en la matriz cociente es constante k , entonces,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & \frac{2t_v}{k} & \frac{k^2 - k - 2t_v}{k} \\ 0 & \frac{k^2 - k - 2t_v}{n - k - 1} & \frac{nk - 2k^2 + 2t_v}{n - k - 1} \end{pmatrix}.$$

Denominemos $\mu_1 = k, \mu_2$ y μ_3 a los valores propios ordenados en forma descendente, por entrelazado tenemos que

$$\mu_2 \leq \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_n \leq \mu_3$$

utilizando que $\mu_2 \geq 0$ o $\mu_3 \leq 0$ obtenemos que

$$\lambda_2\lambda_n \leq \mu_2\mu_3.$$

Por otro lado tenemos que

$$\det(B) = -k \left(\frac{nk - 2k^2 + 2t_v}{n - k - 1} \right) = k\mu_2\mu_3,$$

luego,

$$k\lambda_2\lambda_n \leq -k \left(\frac{nk - 2k^2 + 2t_v}{n - k - 1} \right)$$

de donde

$$nk - 2k^2 + 2t_v \leq -\lambda_2\lambda_n(n - k - 1).$$

Si se da la igualdad entonces se tiene que

$$\mu_2 = \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_n = \mu_3$$

lo cual, dado que $\mu_1 = \lambda_1$ implica que el entrelazado es estricto y la partición en vecinos regular.

Observemos que la regularidad de una partición $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ implica que la

cantidad de vecinos que un vértice posee en X_i sólo dependa del conjunto X_j en el que el vértice se encuentra, es decir,

$$|\{y : x \sim y, y \in X_i\}| = |\{y : \tilde{x} \sim y, y \in X_i\}| \text{ para todo } x, \tilde{x} \text{ en } X_j.$$

La regularidad de la partición $\{G_0(v), G_1(v), \cup_{i=2}^d G_i(v)\}$ nos permite afirmar que cualquier vértice en $\cup_{i=2}^d G_i(v)$ tiene la misma cantidad de vecinos en $G_1(v)$, que por la conexión sabemos es al menos 1, luego, cualquier vértice se encuentra a distancia menor o igual a 2 del vértice v .

Si se da la igualdad para todo vértice, tenemos que todo vértice se encuentra a distancia menor o igual a 2 de cualquier otro vértice, luego, el diámetro del grafo resulta ser 2 por lo que la partición en vecinos resulta ser la partición en distancia. También tenemos que t_v es el mismo para todo vértice, y en consecuencia la matriz cociente es la misma, lo que nos permite concluir que el grafo es fuertemente regular. \square

Observación 8.2.18. Consideremos el promedio de $\{t_v : v \in V\}$ que denotaremos con la letra t .

Entonces la desigualdad anterior vale para t , es decir,

$$nk - 2k^2 + 2t \leq -\lambda_2 \lambda_n (n - k - 1).$$

Además, la igualdad implica la igualdad para todo t_v por lo cual el grafo resulta fuertemente regular.

Por otro lado, observemos que t puede expresarse en términos de los valores propios de la matriz

$$t = \frac{t_{v_1} + t_{v_2} + \dots + t_{v_n}}{n} = \frac{3t}{n} = \frac{6t}{2n} = \frac{1}{2n} \text{tr}(A^3) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^3,$$

luego, si los valores propios verifican la ecuación

$$nk - 2k^2 + 2 \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = -\lambda_2 \lambda_n (n - k - 1)$$

podemos afirmar que el grafo es fuertemente regular.

Lema 8.2.19. Sea A una matriz simétrica particionada cuyos bloques verifican que

$$A_{i,j} = \mathbf{0} \text{ si } |i - j| > 1,$$

consideremos B la matriz cociente con valores propios μ_i y vectores propios asociados v_i con $i = 1, \dots, m$. Si se cumple que $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_n = \mu_m$ y tres filas consecutivas de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & v_{m,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & v_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,m} & v_{2,m} & v_{m,m} \end{pmatrix}$$

forman un conjunto L.I., entonces la partición es regular.

Demostración. Sea v_i el vector propio asociado a λ_i para $i = 1, 2, m$; por la parte (2) del teorema 2.1.6 sabemos que $ASv_i = \mu_i Sv_i$.

Como $S = PD^{-1/2}$ donde

$$D = \begin{pmatrix} |X_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |X_2| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |X_r| \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos $w_i = D^{-1/2}v_i$, luego,

$$APw_i = \mu_i Pw_i.$$

Si consideramos la anterior igualdad vectorial restringida a las coordenadas correspondientes a X_l obtenemos

$$A_{l,l-1}w_{i,l-1}\mathbf{1} + A_{l,l}w_{i,l}\mathbf{1} + A_{l,l+1}w_{i,l+1}\mathbf{1} = \mu_i w_{i,l}\mathbf{1}.$$

Luego, para cualquier fila del l -ésimo bloque se cumple que

$$w_{i,l-1} \sum_{fila} A_{l,l-1} + w_{i,l} \sum_{fila} A_{l,l} + w_{i,l+1} \sum_{fila} A_{l,l+1} = \mu_i w_{i,l},$$

lo que puede expresarse de forma matricial como

$$M \begin{pmatrix} \sum_{fila} A_{l,l-1} \\ \sum_{fila} A_{l,l} \\ \sum_{fila} A_{l,l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 w_{1,l} \\ \mu_2 w_{2,l} \\ \mu_3 w_{3,l} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} w_{1,l-1} & w_{1,l} & w_{1,l+1} \\ w_{2,l-1} & w_{2,l} & w_{2,l+1} \\ w_{3,l-1} & w_{3,l} & w_{3,l+1} \end{pmatrix}.$$

Como M resulta invertible por serlo $\begin{pmatrix} v_{1,l-1} & v_{1,l} & v_{1,l+1} \\ v_{2,l-1} & v_{2,l} & v_{2,l+1} \\ v_{3,l-1} & v_{3,l} & v_{3,l+1} \end{pmatrix}$, tenemos que,

$$\begin{pmatrix} \sum_{\text{fila}} A_{l,l-1} \\ \sum_{\text{fila}} A_{l,l} \\ \sum_{\text{fila}} A_{l,l+1} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 w_{1,l} \\ \mu_2 w_{2,l} \\ \mu_3 w_{3,l} \end{pmatrix}$$

por lo cual, la suma por fila del bloque $A_{l,l-1}$, $A_{l,l}$ y $A_{l,l+1}$ resulta constante. Considerando l adecuado obtenemos que la suma por fila de todo bloque lo es, y en consecuencia la partición regular. \square

Willem H. Haemers [13] es el autor del lema a continuación.

Lema 8.2.20. *Sea G un grafo conexo y v un vértice.*

Sea B la matriz cociente de la partición en distancia respecto al vértice v con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ valores propios ordenados en forma descendente y v_1, v_2, \dots, v_m vectores propios asociados. Entonces tres filas consecutivas de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & v_{m,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & v_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,m} & v_{2,m} & v_{m,m} \end{pmatrix}$$

forman un conjunto linealmente independiente.

Demostración. *Afirmación* El vector propio v_1 posee todas sus entradas positivas. Tenemos que la matriz B es irreducible dado que

$$b_{i,i-1}, b_{i,i}, b_{i,i+1} \neq 0,$$

lo que implica que el grafo asociado sea fuertemente regular. Además, dicha matriz es no negativa, por lo cual se encuentra en las hipótesis del teorema de Perron Frobenius [7] capítulo 8, sección 8. Tenemos entonces que el radio espectral de la matriz B , $\rho(B)$, es un valor propio simple y existe un vector propio asociado con entradas positivas. Por ser $\rho(B)$ valor propio tenemos que $\rho(B) = \mu_1$, como además el valor propio es simple, se puede considerar v_1 con entradas positivas.

Afirmación Las coordenadas del vector v_i poseen $i - 1$ cambios de signo.

Si definimos para cada $j = 0, \dots, m - 1$,

$$p_j(x) = \det(B_j - xI) \quad \text{con} \quad B_j = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{1,j} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j,1} & b_{j,2} & \dots & b_{j,j} \end{pmatrix},$$

$$p_0(x) = 1,$$

utilizando resultados de matrices tridiagonales [14], se puede concluir que

$$v_{i,j+1} = \frac{p_j(\mu_i)}{b_{1,2} \dots b_{j,j+1}} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, m \text{ y } j = 0, \dots, m - 1.$$

y que $p_{j+1}(\mu_i)$ posee $i - 1$ cambios de signo al variar j desde 0 hasta $m - 1$. Como $b_{k,k+1} > 0$ tenemos que las coordenadas del vector v_i posee $i - 1$ cambios de signo. Además resulta que $v_{i,1} = 1$ para todo i .

Afirmación La secuencia $(\frac{v_{2,1}}{v_{1,1}}, \frac{v_{2,2}}{v_{1,2}}, \dots, \frac{v_{2,m}}{v_{1,m}})$ es monótona estricta.

Consideremos

$$\alpha_j = \frac{v_{2,j}}{v_{1,j}} \quad \text{con } j = 1, \dots, m$$

De la igualdad matricial $Bv_i = \mu_i v_i$ se obtiene que

$$b_{1,1}v_{i,1} + b_{1,2}v_{i,2} = \mu_i v_{i,1}, \quad b_{m,m-1}v_{i,m-1} + b_{m,m}v_{i,m} = \mu_i v_{i,m},$$

$$b_{j,j-1}v_{i,j-1} + b_{j,j}v_{i,j} + b_{j,j+1}v_{i,j+1} = \mu_i v_{i,j},$$

con $i = 1, \dots, m$ y $j = 2, \dots, m - 1$.

Si consideramos las primeras igualdades con $i = 1$ e $i = 2$ se prueba que

$$(\alpha_1 - \alpha_2)v_{1,2}b_{1,2} = (\mu_1 - \mu_2)v_{2,1}, \quad (\alpha_m - \alpha_{m-1})v_{1,m-1}b_{m,m-1} = (\mu_1 - \mu_2)v_{2,m}.$$

También tenemos que

$$b_{k,k+1} > 0, \quad b_{k,k-1} > 0, \quad v_{1,j} = 1, \quad v_{2,1}v_{2,m} < 0$$

y supondremos que $v_{2,m} < 0 < v_{2,1}$ (si $v_{2,1} < 0 < v_{2,m}$ la prueba es análoga).

Luego, se obtiene que

$$\alpha_2 < \alpha_1, \quad \alpha_m < \alpha_{m-1}.$$

De la misma manera, se puede probar que

$$(\alpha_j - \alpha_{j-1})v_{1,j-1}b_{j,j-1} + (\alpha_j - \alpha_{j+1})v_{1,j+1}b_{j,j+1} = (\mu_1 - \mu_2)v_{2,j}$$

y como consecuencia

$$\alpha_j < \alpha_{j-1} \Rightarrow \alpha_{j+1} < \alpha_j \quad \text{si } v_{2,j} > 0$$

$$\alpha_{j+1} < \alpha_j \Rightarrow \alpha_j < \alpha_{j-1} \quad \text{si } v_{2,j} < 0.$$

Recordemos que el vector v_2 posee exactamente un cambio de signo, sea k tal que $v_{2,k} > 0$ y $v_{2,k+1} < 0$. Luego, se puede probar inductivamente que

$$\alpha_{j+1} < \alpha_j \quad \text{si } j \leq k$$

$$\alpha_j < \alpha_{j-1} \quad \text{si } k + 1 \leq j$$

de donde se deduce la monotonía estricta.

Sea $F_j = (v_{1,j} \ v_{2,j} \ v_{m,j})$, tenemos que

$$\{F_{j-1}, F_j, F_{j+1}\} \text{ es L.I.} \Leftrightarrow \left\{ \frac{F_{j-1}}{v_{1,j-1}}, \frac{F_j}{v_{1,j}}, \frac{F_{j+1}}{v_{1,j+1}} \right\} \text{ es L.I..}$$

Estudiemos entonces la dependencia lineal del conjunto de vectores

$$\left\{ \left(1 \ \frac{v_{2,j-1}}{v_{1,j-1}} \ \frac{v_{m,j-1}}{v_{1,j-1}}\right), \left(1 \ \frac{v_{2,j}}{v_{1,j}} \ \frac{v_{m,j}}{v_{1,j}}\right), \left(1 \ \frac{v_{2,j+1}}{v_{1,j+1}} \ \frac{v_{m,j+1}}{v_{1,j+1}}\right) \right\}.$$

El comportamiento de las secuencias formadas por la i -ésima coordenada de los vectores anteriores es el siguiente:

- constante si $i = 1$,
- monótona estricta si $i = 2$,
- alternada si $i = m$,

luego, tenemos que el conjunto de vectores es L.I. lo que termina la prueba. \square

Los lemas anteriores prueban el siguiente teorema:

Teorema 8.2.21. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y consideremos la partición en distancia respecto a un vértice v .*

Si $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ y $\lambda_n = \mu_m$ entonces el grafo G es distancia regular respecto al vértice v .

Definición 8.2.22. Un grafo fuertemente regular $G = (V, E)$ se dice *pseudogeométrico a un cuadrángulo generalizado de orden (s, t)* si $|V| = (s + 1)(st + 1)$ y la partición en distancia posee la siguiente matriz cociente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & st + s & 0 \\ 1 & s - 1 & st \\ 0 & t + 1 & st + s - t - 1 \end{pmatrix}$$

Observación 8.2.23. Si G es un grafo pseudogeométrico a un cuadrángulo generalizado de orden (s, t) entonces $gr(G) = st + s$.

Observación 8.2.24. Si G es un grafo pseudogeométrico a un cuadrángulo generalizado de orden (s, t) en particular es fuertemente regular de diámetro 2 por lo cual sabemos que posee exactamente 3 valores propios distintos que coinciden con los valores propios de B .

Como la matriz B es conocida sus valores propios también lo son:

$$\mu_1 = st + s, \quad \mu_2 = s - 1 \quad \text{y} \quad \mu_3 = -t - 1.$$

Los valores propios de la matriz A y la matriz cociente B se encuentran entrelazados, por lo que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\mu_1 \leq \lambda_1, \quad \mu_2 \leq \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_n \leq \mu_3,$$

luego,

$$\lambda_n \leq \mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1.$$

Como además el entrelazado debe ser estricto se cumple que

$$\lambda_1 = \mu_1 \quad \lambda_n = \mu_3 \quad \lambda_2 = \mu_2.$$

Proposición 8.2.25. *Sea G un grafo pseudogeométrico a un cuadrángulo generalizado de orden (s, t) y C una componente conexa del grafo inducido por los vecinos de un vértice v cualquiera. Si $|C| = c$ entonces se cumple que*

$$c = \dot{s} \text{ y } |\{u \in C : u \sim w\}| = \frac{c}{s} \quad \forall w \approx v.$$

Demostración. Estudiemos los siguientes casos

1. $C = G_1(v)$

Tenemos que $c = st + s = s(t + 1) = \dot{s}$.

Sea w en $G_1(v)$, como $|\{u \in C : u \sim w\}|$ es constante para todo w en $G_1(v)$, tenemos que

$$|\{u \in C : u \sim w\}| = B_{3,2} = t + 1 = \frac{c}{s}.$$

2. $C \neq G_1(v)$

Tenemos que $c < st + s$.

Consideremos la partición $\{\{v\}, C, G_1(v) - C, G_2(v)\}$, la matriz cociente resulta

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c & st + s - c & 0 \\ 1 & s - 1 & 0 & st \\ 1 & 0 & s - 1 & st \\ 0 & \frac{c}{s} & t + 1 - \frac{c}{s} & st + s - t - 1 \end{pmatrix}$$

y sus valores propios

$$\mu_1 = st + s = \lambda_1, \quad \mu_2 = \mu_3 = s - 1 = \lambda_2, \quad \mu_4 = -t - 1 = \lambda_n,$$

por lo cual la partición es regular. Si consideramos un vértice w en $G_2(w)$ tenemos que

$$|\{u \in C : u \sim w\}| = B_{4,2} = \frac{c}{s},$$

luego, como $\frac{c}{s}$ debe ser un entero tenemos que $c = \dot{s}$.

□

Referencias

- [1] W. H. Haemers, Interlacing Eigenvalues and Graphs, *Linear algebra and its applications* 227-228: 593-616, 1995.
- [2] R. Courant y D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin, 1924.
- [3] D. M. Cvetković, *Graphs and their spectra (Tesis)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 354-356: 1-50, 1971.
- [4] N. Alon y E. Lubetzky, The Shannon capacity of a graph and the independence numbers of its powers, *IEEE Transactions on Information Theory* 52(5): 2172-2176, 2006.
- [5] L. Lovász, On the Shannon capacity of a graph, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-25: 1-7, 1979.
- [6] A. J. Hoffman, On eigenvalues and colourings of graphs, *Graph Theory and its Applications*, Academic Press, New York, 1970.
- [7] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York, 2001.
- [8] K. N. Majumdar, On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs, *The Annals of Mathematical Statistics* 24: 379-389, 1953.
- [9] H. J. Beker y W. H. Haemers, 2-designs with an intersection number $k-n$, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 28: 64-81, 1980.
- [10] E. R. Van Dam y W. H. Haemers, Eigenvalues and the Diameter of Graphs, Discussion paper 9343, Center for Economic Research, Tilburg University, 1993.
- [11] T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials*, Wiley, New York, 1990.
- [12] A. E. Brouwer, A. M. Cohen y A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer, Berlin, 1989.
- [13] W. H. Haemers, Distance-Regularity and The Spectrum of Graphs, *Linear algebra and its applications* 236: 265-278, 1996.
- [14] J. Stoer y R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, New York, 2002.