Trabajo Monográfico

Clasificación de Álgebras de Grupo

Gustavo Mata

Orientadores: Alfredo Jones, Marcelo Lanzilotta (CMAT, FCIEN)

Licenciatura en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

12 de diciembre de 2005

Índice general

Resumen. En este trabajo consideramos las álgebras de grupo kG con G finito y car$k = p$. Mostramos cómo la estructura de los grupos de Sylow $S_p \subset G$ permiten clasificar kG en de tipo finito, mansa, o salvaje.

PALABRAS CLAVE: Álgebras de grupo, Representaciones de grupos, Mansa, Salvaje.

Abstract. In this work we consider the group algebra kG with G finite and car$k = p$, we show how the structure of the p Sylow groups $S_p \subset G$ gives a way to decide if kG is a finite type, a tame, or a wild algebra.

KEY WORDS: Group algebras, Representation of groups, Tame, Wild.

Introducción

Dado un grupo G y un cuerpo k, hay una manera muy sencilla de construir una k-álgebra a partir del cuerpo y el grupo. Esta nueva álgebra lleva el nombre de álgebra de grupo, y la denotaremos kG.

En este trabajo al grupo G le pediremos que sea finito, ya que esto implica que el álgebra kG tenga dimensión finita sobre el cuerpo k. Así kG es un álgebra de Artin, y esto nos permite disponer de muchas herramientas para simplificar problemas.

Podemos dividir el trabajo en dos partes:

- En la primera parte se expone una condición necesaria y suficiente para que haya solamente una cantidad finita salvo isomorfismos de módulos indescomponibles finitamente generados sobre el álgebra. En este caso se dice que el álgebra es de tipo de representación finita.

  Sabemos por el teorema de Maschke (ver [V]) que un álgebra de grupo kG es semisimple si y sólo si la característica del cuerpo k no divide al orden del grupo G. Las álgebras semisimples son las álgebras más sencillas desde el punto de vista de su categoría de módulos. Esto se debe a que todos los módulos sobre dichas álgebras son semisimples, es decir que todo módulo se descompone como suma directa de módulos simples. En particular todos los módulos indescomponibles son simples, y estos son una cantidad finita (salvo isomorfismos). Por lo tanto es de tipo de representación finito.

  Por lo tanto solamente resta considerar el caso en que la característica de k divide al orden de G. En este caso la condición a la que llegaremos es: si tenemos un cuerpo k de característica p y un grupo G tal que p divide a su orden entonces, kG es de tipo de representación finito si y sólo si los p-grupos de Sylow de G son cíclicos.

  Este último resultado llamado el Teorema de Higman, fue probado por Higman en el año 1954.

- En la segunda parte del trabajo se expone una equivalencia al caso en que el álgebra sea mansa. Diremos que una k-álgebra es mansa si no es de representación finita, y los módulos indescomponibles finitamente generados sobre dicha álgebra pueden ser parametrizados de alguna manera por el cuerpo k (la definición exacta del concepto se encuentra en el capítulo 2).

  En caso que el álgebra sea de tipo de representación infinito y no mansa entonces el álgebra se dice salvaje. En estas últimas la clasificación de módulos indescomponibles es en cierta forma imposible. De ahí se ve la importancia de saber si el álgebra es mansa o no.

  Veremos que en caso de que el orden del grupo es dividido por la característica del cuerpo entonces el álgebra de grupo es mansa si y solamente si los 2-grupos de Sylow tienen índice con su conmutador igual a 4. A su vez se tiene que existen solamente tres posibles 2-grupos que cumplen con esta condición. Dichos grupos serán introducidos más adelante.

  Este último resultado es conocido como el Teorema de Drozd-Bondarenko. Dicho resultado fue probado en 1977.

Finalmente se puede resumir el trabajo con el siguiente esquema:

$$
\begin{tikzcd}
 & \textit{cíclico} \arrow[r] & kG \textit{ de representación finita} \\
S_p \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & p = 2,\ [S_p : S_p'] = 4 \arrow[r] & kG \textit{ mansa} \\
 & \textit{otro caso} \arrow[r] & kG \textit{ salvaje}
\end{tikzcd}
$$

siendo S_p un p-grupo de Sylow de G y car(k) $= p$.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Funtores y Categorías

Este cápitulo está dedicado exhibir las nociones básicas para poder entender el resto del texto, entre otras se encuentra la noción de categoría, la de funtor, etc. Además daremos al fin del capítulo algunos resultados conocidos los cuales habremos de usar más adelante.

DEFINICIÓN 1.1.1. *Una categoría, es una terna* $\mathcal{C} = (Ob\ \mathcal{C}, Hom\ \mathcal{C}, \circ)$*, donde* $Ob\ \mathcal{C}$ *es la clase de los objetos de* $\mathcal{C}$*,* $Hom\ \mathcal{C}$ *es la clase de los morfismos de* $\mathcal{C}$ *, y* $\circ$ *es una operación binaria en los morfismos de* $\mathcal{C}$*, que satisfacen:*

1. *si* X, Y *están en* $Ob\ \mathcal{C}$ *definimos* $Hom(X, Y)$ *el conjunto de los morfismos de* X *en* Y *tal que si* $(X, Y) \neq (Z, U)$ *entonces* $Hom(X, Y)$ *y* $Hom(Z, U)$ *son disjuntos.*

2. $\circ : Hom(X, Y) \times Hom(X, Y) \longrightarrow Hom(X, Y)$ *verifica:*

   a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *con* $f \in Hom(X, Y), g \in Hom(Y, Z),\ h \in Hom(Z, U)$*;*

   b) *para todo* X *en* $Ob\ \mathcal{C}$ *existe un único* $id_X \in Hom(X, X)$ *tal que:*
   $f \circ id_X = f$ *con* $f \in Hom(X, Y)$*;* $id_X \circ g = g$ *con* $g \in Hom(Y, X)$

EJEMPLO 1.1.2. *Dada una* k*-álgebra* Λ*, tenemos las siguientes categorías :*

- ModΛ *denota la categoría de módulos izquierdos sobre el álgebra* Λ*. Los objetos de esta categoría son los módulos, los morfismos son los morfismos de módulos y la composición está dada por la composición de morfismos.*

- modΛ*, análoga a la anterior, pero los objetos son los módulos izquierdos que son finitamente generados.*

- $R(\Lambda, \Gamma)$ *es la categoría cuyos objetos son los* $\Lambda - \Gamma$ *bimódulos tales que son libres y finitamente generados sobre* Γ*.*

Notaremos también: mod$\Lambda(d)$ a los módulos de dimensión d sobre Λ e $ind\Lambda(d)$ a los módulos indescomponibles de dimensión d sobre Λ

DEFINICIÓN 1.1.3. *Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ con $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, está definido asignando a cada objeto X en $\mathcal{C}$ en $F(X)$, otro objeto en $\mathcal{D}$, y a cada morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en $Hom(X,Y)$ en un morfismo $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ tal que:*

1. *$F(id_X) = id_{F(X)}$ para todo $X \in Ob\ \mathcal{C}$;*
2. *si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

Dado un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ notaremos F_{XY} a la restricción de F a $Hom(X,Y)$

DEFINICIÓN 1.1.4. *Decimos que un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es :*

- *fiel si $F_{XY} : Hom(X,Y) \longrightarrow Hom(F(X),F(Y))$ es inyectivo para todo X, Y objetos de $\mathcal{C}$;*
- *pleno si $F_{XY} : Hom(X,Y) \longrightarrow Hom(F(X),F(Y))$ es sobreyectivo para todo X, Y objetos de $\mathcal{C}$;*
- *denso si para todo Y en $\mathcal{D}$ existe X en $\mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong Y$.*

DEFINICIÓN 1.1.5. *Si F : mod$\Lambda \longrightarrow mod\Gamma$ es un funtor entre categorías de módulos, decimos que F:*

- *refleja clases de isomorfismo, si $F(X) \cong F(Y)$ implica $X \cong Y$;*
- *preserva indescomponibles, si X indescomponible implica $F(X)$ indescomponible.*

OBSERVACIÓN 1.1.6. *Si F es un funtor fiel y pleno entre dos categorías de módulos entonces F preserva indescomponibles y refleja clases de isomorfismos.*
Demostración:

- Si $F(X) \cong F(Y)$ existen $f : F(X) \longrightarrow F(Y)$, $g : F(Y) \longrightarrow F(X)$ tales que:

  - $f \circ g = id_{F(Y)}$;
  - $g \circ f = id_{F(X)}$.

  Entonces existen $u : X \longrightarrow Y$ con $F(u) = f$ y $v : Y \longrightarrow X$ tal que $F(v) = g$, por ser F pleno. Además:

  - $F(u \circ v) = id_{F(Y)}$
  - $F(v \circ u) = id_{F(X)}$

  Pero como $F(id_X) = id_{F(X)}, F(id_Y) = id_{F(Y)}$ y F es fiel entonces:

- $v \circ u = id_X$;
- $u \circ v = id_Y$;

por lo tanto $X \cong Y$.

- Ahora si tenemos X un módulo indescomponible y suponemos que $F(X)$ no lo es tenemos que:

$$F(X) = M \oplus N \ ,$$

con $M \neq 0$, $N \neq 0$.

Sean $\pi : F(X) \longrightarrow M$ la proyección de $F(X)$ sobre M e $i : M \longrightarrow F(X)$ la inclusión de M en $F(X)$. Entonces $(i \circ \pi) \circ (i \circ \pi) = (i \circ \pi)$.

Como $(i \circ \pi) : F(X) \longrightarrow F(X)$ entonces existe $f : X \longrightarrow X$ tal que $F(f) = (i \circ \pi)$, pero, como $F(f \circ f) = F(f)$, debido a que F es un funtor fiel, entonces $f \circ f = f$.

Como M es indescomponible hay dos casos posibles:

- $f = id_X$ entonces $(i \circ \pi) = id_{F(X)}$ lo que es absurdo porque π no es inyectiva.
- $f = 0$ por lo tanto $i \circ \pi = 0$ por lo tanto $M = 0$ que también es absurdo.

$\square$

PROPOSICIÓN 1.1.7. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo de anillos entonces:*

1. *Si $M \in modB$ entonces M tiene estructura de A módulo, y si $\phi : M \longrightarrow N$ es un morfismo de B módulos, entonces también es de A módulos. Por lo tanto tenemos un funtor $F : modB \longrightarrow modA$ tal que $F(M) = M$ y $F(\phi) = \phi$, $\forall M \in modB$, $\forall \phi \in modB$*
2. *Si $F : modB \longrightarrow modA$ es el funtor definido arriba, F es fiel y pleno.*
3. *Si $M \in indB$ entonces $M \in indA$ con la estructura definida en la parte anterior.*

Demostración:

1. - Si $\cdot : B \times M \longrightarrow M$ es la acción, definimos $* : A \times M \longrightarrow M$ como $a_1 * m = f(a_1) \cdot m$. Con esta definición tenemos que:
     - $a_1 * (a_2 * m) = f(a_1) \cdot (f(a_2) \cdot m) = (f(a_1) f(a_2) \cdot m) = f(a_1 a_2) \cdot m = a_1 a_2 * m$, $\forall a_1, a_2 \in A$,

- $1_A * m = f(1_A) \cdot m = 1_B \cdot m = m$,

por lo tanto M tiene estructura de A módulo.

- $\phi(a * x) = \phi(f(a) \cdot x) = f(a) \cdot \phi(x) = a * \phi(x)$, por lo tanto definimos $F(M) = M$ con la estructura de A módulo y $F(f) = f$ también con dicha estructura.

2. - F es pleno: Si dados M, N dos B módulos y $\phi : F(M) \longrightarrow F(N)$ un morfismo de A módulos, tenemos que ver que ϕ también es de B módulos.

$$\phi(b \cdot m) = \phi(a * m) = a * \phi(m) = f(a) \cdot \phi(m) = b \cdot \phi(m) \ ,$$

donde $a \in f^{-1}(b)$, ya que f es sobreyectiva.

   - F es fiel: Si tenemos $\alpha, \beta \in Hom(M, N)$ tales que $F(\alpha) = F(\beta) = h$ como tenemos $h(m) = \alpha(m) = \beta(m)$, $\forall m \in M$ entonces $\alpha = \beta$.

Por lo tanto $F : modB \longrightarrow modA$ es fiel y pleno.

3. sale como consecuencia de la parte anterior y aplicar la observación 1.1.6

$\square$

1.2. Grupos y Álgebras de Grupo

Dado G un grupo y $x \in G$, notaremos G_x al centralizador de x. Dados H, K dos subgrupos de G definimos $[H, K] = \langle\{hkh^{-1}k^{-1}, \text{con } k \in K,\ h \in H\}\rangle$. En particular llamamos conmutador de G a $G' = [G, G]$ y $Z(G)$ designará al centro de G.

Es bien sabido que $[H, K]$ y $Z(G)$ son subgrupos de G. A continuación daremos algunos resultados básicos acerca del centro de un grupo, los cuales se pueden ver en [W], y veremos como se relaciona kG con kG_1 y kG_2 si $G = G_1 \times G_2$. Luego presentaremos unos grupos que serán de nuestro interés para el resto del trabajo. Finalmente enunciaremos algunos resultados útiles.

LEMA 1.2.1. *Si $|G| = p^n$ con $n \geq 1$ entonces $Z(G) \neq 1$.*

$\square$

LEMA 1.2.2. *Si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.*

$\square$

Ahora definiremos las álgebras de grupo, tema de estudio de esta monografía.

DEFINICIÓN 1.2.3. *Dado un grupo finito G y un cuerpo k, el álgebra de grupo kG se define como el espacio vectorial de base G;*

$$kG = \{\sum_{g\in G} k_g g;\ \text{con } k_g \in k \text{ y } g \in G\},$$

con el producto que resulta de extender por linealidad el producto de G. Esto es :

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h\in G} b_h h) = \sum_{t\in G}(\sum_{gh=t} a_g b_h)t.$$

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Si $G = G_1 \times G_2$ entonces $kG \cong kG_1 \otimes_k kG_2$.*

Demostración:

Sea $\phi : kG_1 \times kG_2 \longrightarrow kG$ definida por:

$$\phi((\sum_{g\in G_1} k_g g)(\sum_{h\in G_2} c_h h)) = \sum_{(g,h)\in\ G_1\times G_2} k_g c_h (gh).$$

Observemos que ϕ es sobreyeciva, bilineal y balanceada ya que $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v)$ siendo $u \in kG_1$, $v \in kG_2$ y $\lambda \in k$. Por lo tanto induce una $\bar{\phi} : kG_1 \otimes_k kG_2 \longrightarrow kG$ que también es sobreyectiva de k-álgebras.

Además como:

$$dim_k kG = |G| = |G_1||G_2|$$

y como sabemos que $\dim_k(kG_1 \otimes kG_2) = \dim_k kG_1 \dim_k kG_2$ entonces:

$$\dim_k kG = \dim_k(kG_1 \otimes_k kG_2)$$

por lo tanto $kG \cong kG_1 \otimes_k kG_2$. □

DEFINICIÓN 1.2.5. *Dado un cuerpo k, un k espacio vectorial V y una k-álgebra A, los morfismos de álgebras $\phi : A \to End_k(V)$ son llamados representaciones de álgebras.*

OBSERVACIÓN 1.2.6. *Toda representación $\phi : A \to End_k(V)$ induce una estructura de A módulo sobre V; recíprocamente todo A módulo V induce una representación de álgebras.*

Demostración:

Si $\phi : A \to End_k(V)$ es una representación induce un A módulo mediante la acción $a \cdot v = \phi(a)(v)$.

Recíprocamente si V es un A módulo induce una representación mediante: $\phi(a) : V \to V$ donde $\phi(a)(v) = a \cdot v$.

DEFINICIÓN 1.2.7. *Dado n natural $n \geq 3$, llamaremos:*

- $D_{n+1} = \langle \{x, y | x^{2^n} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{-1}\} \rangle$
- $SD_{n+1} = \langle \{x, y | x^{2^n} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-1}-1}\} \rangle$
- $W_{n+1} = \langle \{x, y | x^{2^n} = y^2 = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-1}+1}\} \rangle$
- $Q_n \subset SD_{n+1}$ *generado por* $x' = x^2$ *y por* $y' = xy$*. En otras palabras tenemos que* $Q_n = \langle \{x, y | x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = x^{2^{n-2}},\ yxy^{-1} = x^{-1}\} \rangle$.

OBSERVACIÓN 1.2.8. *En cualquiera de los grupos definidos anteriormente su conmutador está generado por* $[y, x]$.

Demostración:

Probemoslo solamente para D_{n+1}, los otros casos son similares.

Primero tenemos que observar que $[y, x] = yxy^{-1}x^{-1} = x^{-2}$.
Todo elemento de D_{n+1} se puede escribir de la forma $x^k y^j$ donde $0 \leq k < 2^n$ y $j = 0, 1$, por lo tanto, si vemos que $[x^k y^j, x^{k'} y^{j'}] = x^k y^j x^{k'} y^{j'} y^j x^{-k} y^{j'} x^{-k'}$ es una potencia de [y,x] tenemos probado el resultado.

- Si $j = 0$ y $j' = 0$ entonces $[x^k y^j, x^{k'} y^{j'}] = 1$ que es potencia de $[y, x]$.
- Si $j = 0$ y $j' = 1$ entonces $[x^k y^j, x^{k'} y^{j'}] = x^k x^{k'} y x^{-k} y x^{-k'} = x^{2k}$ que también es potencia de $[y, x]$.
- Analogamente si $j = 1$ y $j' = 0$ entonces $[x^k y^j, x^{k'} y^{j'}] = x^{-2k'}$.
- Si $j = 1$ y $j' = 1$ entonces $[x^k y^j, x^{k'} y^{j'}] = x^k y x^{k'} y y x^{-k} y x^{-k'} = x^k y x^{k'-k} y x^{-k'} = x^{2k-2k'}$ también es potencia de $[y, x]$.

□

Se tiene entonces el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.2.9.

1. *Si G es uno de los siguientes grupos: $D_{n+1},\ SD_{n+1},\ Q_{n+1}$ entonces $G/G' \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.*
2. *Si $G = W_{n+1}$ entonces $G/G' \cong \mathbf{Z}_{2^{n-1}} \times \mathbf{Z}_2$.*

Demostración:

1. Sabemos por la observación anterior que en todos estos casos G' está generado por $[y,x]$. Entonces consideramos el morfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ definido en los generadores de la siguiente manera:

   a) $\phi(x) = (1,0)$
   b) $\phi(y) = (0,1)$

   - $G = D_{n+1}$ tenemos que $\phi(yxy^{-1}) = (1,0) = \phi(x^{-1})$
   - $G = SD_{n+1}$ tenemos que $\phi(yxy^{-1}) = (1,0) = \phi(x^{2^{n-1}-1})$
   - $G = Q_{n+1}$ tenemos que $\phi(yxy^{-1}) = (1,0) = \phi(x^{-1})$

   Por lo tanto ϕ es morfismo de grupos para los tres casos.

   Como ϕ es sobreyectiva, $ker\phi$ tiene 2^{n-1} elementos ($|ker\phi| = |G|/|\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2|$). Evaluando ϕ en $[y,x]$ se obtiene: $\phi([y,x]) = \phi(yxy^{-1}x^{-1}) = 0$ entonces $[y,x] \in ker\phi$ y por lo tanto $G' \subset ker\phi$, para los tres casos.

   Además sabemos que:

   - $[y,x] = x^{-2}$ en D_{n+1}
   - $[y,x] = x^{2^{n-1}-2}$ en SD_{n+1}
   - $[y,x] = x^{-2}$ en Q_{n+1}

   Cada uno de estos elementos tiene orden 2^{n-2}. Por lo tanto $ker\phi = G'$, Y obtenemos que:

$$G/G' \cong \mathbf{Z_2} \times \mathbf{Z_2}.$$

2. Al igual que en (1) sabemos que G' está generado por $[y,x]$. Definamos análogamente a (1) el morfismo de grupos $\psi : G \longrightarrow \mathbf{Z}_{2^{n-1}} \times \mathbf{Z}_2$ dado por:

   - $\psi(x) = (1,0)$
   - $\psi(y) = (0,1)$

   $\psi(yxy^{-1}) = (1,0) = \psi(x^{2^{n-1}+1})$ ya que $\psi(x^{2^{n-1}}) = 0$. Además tenemos que $\psi(y^2) = 0 = \psi(x^{2^n})$, por lo tanto es morfismo de grupos.

   $\psi([y,x]) = \psi(yxy^{-1}x^{-1}) = \psi(yxy^{-1}) + \psi(x^{-1}) = (1,0) + (-1,0) = 0$, por lo tanto tenemos que $G' \subset ker\psi$. Además $|ker\psi| = 2$ y $[y,x] = x^{2^{n-1}}$ que también tiene orden 2. Concluimos de esto que $G' = ker\psi$. Entonces:

$$G/G' \cong \mathbf{Z_{2^{n-1}}} \times \mathbf{Z_2}.$$

1.3. Algunos resultados adicionales

Los siguientes resultados nos serán útiles en lo que sigue y pueden encontrarse en [A].

LEMA 1.3.1. *Sea Λ un álgebra artiniana, entonces $M \in mod\Lambda$ es indescomponible si y solo si $End_\Lambda M$ es un álgebra local.* $\square$

TEOREMA 1.3.2. *(Teorema de Krull-Schmidt) Sea Λ un álgebra artiniana, si M es finitamente generado entonces $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_m$ con M_i en $ind\Lambda$. Si además $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n$ con N_i en $ind\Lambda$ entonces $n = m$ y $N_i \cong M_{\sigma(i)}$ con $\sigma : \{1, 2, \ldots n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$.* $\square$

TEOREMA 1.3.3. *(Teorema de estructura) Sea M un modulo finitamente generado sobre un dominio de ideales principales A, entonces*

1. *existe una sucesión $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de elementos no invertibles de A con d_i/d_{i+1} tales que: $M \cong \oplus_{i=1}^{n} A/d_iA$.*
2. *Si $\{c_i\}_{i=1}^{m}$ y $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ son dos familias de elementos de A que verifican 1 entonces $m = n$ y existen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ elementos invertibles de A tales que $c_i = u_i d_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$*

$\square$

Obtenemos como consecuencia del teorema anterior

TEOREMA 1.3.4. *Sean M un $k[x]$ módulo de dimensión finita y f su anulador, si M es indescomponible entonces $f = p^r$ con p un polinomio primo. Además M es isomorfo a $K[x]/\langle f\rangle$ como $k[x]/\langle f\rangle$ módulo.* $\square$

TEOREMA 1.3.5. *Si $A = k[x]/\langle f\rangle$ con $f = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$ la descomposición en factores primos de f, entonces los $k[x]/\langle f\rangle$ módulos indescomponibles son de la forma*

$$\frac{k[x]}{\langle p_i^{d_j}\rangle}, \text{donde } d_j \leq r_i.$$

$\square$

Capítulo 2

Nociones de Finitud, Mansedumbre y Salvajismo

En este capítulo veremos las definiciones nuevas con las que trabajaremos el resto de la monografía. Estas son: álgebra de tipo de representación finito, álgebra mansa y álgebra salvaje. Además veremos lo que es una extensión de álgebras, concepto que nos ayudará durante todo el trabajo.

De aquí en más llamaremos módulo a los módulos que son finitamente generados .

Para simplificar la notación, si N, M son dos Λ módulos, notaremos de ahora en más $N|M$ cuando N es sumando directo de M.

2.1. Nociones de Finitud, Mansedumbre y Salvajismo

DEFINICIÓN 2.1.1. *Decimos que un álgebra Λ es de tipo de representación finito, si la categoría de módulos sobre el álgebra tiene una cantidad finita de elementos, tales que todo módulo indescomponible sobre Λ es isomorfo a alguno de estos elementos. En caso contrario diremos que el álgebra es de tipo de representación infinito.*

Si el álgebra es de tipo de representación infinito, se pueden diferenciar dos clases distintas que son las siguientes:

DEFINICIÓN 2.1.2. *Se dice que una k-álgebra Λ de dimensión finita es mansa, si para todo d natural existen $B_1, \ldots, B_n$ $\Lambda - k[x]$ bimódulos tales que si $M \in ind\Lambda(d)$ entonces hay un S simple tal que $M|B_j \otimes_{k[x]} S$ para algún $j = 1, \ldots, n$.*

DEFINICIÓN 2.1.3. *Se dice que una k-álgebra Λ de dimensión finita es salvaje, si existe $B \in R(\Lambda, k\langle x, y\rangle)$ tal que el funtor*

$$F = B \otimes_{k\langle x,y\rangle} (-) : \text{mod}k\langle x, y\rangle \longrightarrow \text{mod}\Lambda$$

conserva indescomponibles y refleja clases de isomorfismos. En este caso decimos que B realiza el salvajismo de Λ.

Que estas clases son distintas, está garantizado por el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1.4. *(Drozd) Si Λ es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces Λ es mansa o salvaje pero no ambas.* $\square$

Como corolario a este teorema tenemos:

COROLARIO 2.1.5. *Si Λ es una k-álgebra con k algebraicamente cerrado y $\Gamma = \Lambda/\mathcal{I}$ siendo $\mathcal{I}$ un ideal de Λ, entonces si Γ es salvaje Λ también lo es.*

Demostración:

Sea $B \in R(\Gamma, k\langle x, y\rangle)$ tal que $F = B\otimes_{k\langle x,y\rangle}(.)$ conserva indescomponibles y clases de isomorfismo (es el bimódulo que realiza el salvajismo de Γ). Sea C el $\Lambda - \Gamma$ bimódulo que se obtiene del $\Gamma - \Gamma$ bimódulo Γ restringiendo a Λ la acción izquierda de los escalares mediante la proyección $\Pi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ como vimos en 1.1.7.

Entonces definimos $G = C\otimes_\Gamma(-) : \text{mod}\Gamma \longrightarrow \text{mod}\Lambda$. Este funtor es fiel y pleno. Por la observación 1.1.6 el funtor preserva indescomponibles y clases de isomorfismo.

Sea $D = C\otimes_\Gamma B$ como $D_{k\langle x,y\rangle} \cong B_{k\langle x,y\rangle}$, entonces sabemos que $D \in R(\Lambda, k\langle x, y\rangle)$.

Como consecuencia de esto $D\otimes_\Gamma(.) = G \circ F(.)$ o sea que D realiza el salvajismo de Λ $\square$

EJEMPLO 2.1.6. *Si $G \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ entonces $k[G]$ es salvaje.*

EJEMPLO 2.1.7. *Sea p un número primo $p \neq 2$ y $Car(k) = p$ entonces Si $G \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ entonces $k[G]$ es una k-álgebra salvaje.*

Las pruebas aparecen en el capítulo 4.

2.2. Extensiones de Álgebras

En esta sección definiremos lo que es una extensión de álgebras. Como resultado llegaremos más adelante a que, en ciertas hipótesis se puede probar que un álgebra es mansa si alguna sub-álgebra es mansa, si y solo si su extensión lo es.

DEFINICIÓN 2.2.1. *Sea Λ una k álgebra finitamente generada, decimos que otra k-álgebra Σ es una extensión de Λ si:*

1. *Λ es una subálgebra de Σ.*

2. *Σ_Λ es un módulo finitamente generado.*

3. *existe una descomposición de el $\Lambda - \Lambda$ bimódulo $\Sigma = \Lambda \oplus B$ donde B es otro $\Lambda - \Lambda$ bimódulo.*

De ahora en más $\Sigma \diagup \Lambda$ significará que Σ es una extensión de Λ.

DEFINICIÓN 2.2.2. *Dada $\Sigma \diagup \Lambda$ una extensión entonces:*

- *llamaremos grado de extensión, al mínimo número de generadores del módulo Σ_Λ. Además si $\Sigma_\Lambda$es libre diremos que la extensión es libre.*

- *Si el morfismo multiplicación $m : \Sigma \otimes_\Lambda \Sigma \longrightarrow \Sigma$ que a $a \otimes b$ lo lleva en ab se escinde como morfismo de $\Sigma - \Sigma$ bimódulos, entonces decimos que la extensión es separable.*

DEFINICIÓN 2.2.3. *Dada una extensión $\Sigma \diagup \Lambda$ definimos los funtores Restricción (Res) e Inducción (Ind) de la siguiente manera:*

- *$Res : mod\Sigma \longrightarrow \operatorname{mod} \Lambda$ tal que $ResM = M_\Lambda$ para los objetos y para los morfismos restringiendo a Λ.*

- *$Ind : \operatorname{mod}\Lambda \longrightarrow \operatorname{mod}\Sigma$ tal que $Ind = \Sigma \otimes_\Lambda (\cdot)$*

OBSERVACIÓN 2.2.4. *Dada una extensión $\Sigma \diagup \Lambda$ libre de grado r tenemos:*

$$dim(IndN) = rdim(N).$$

PROPOSICIÓN 2.2.5. *Si H es un subgrupo de G con $|G| < \infty$ sea $\Sigma = k[G]$ y $\Lambda = k[H]$ entonces:*

- *$\Sigma \diagup \Lambda$ es una extensión libre de grado $[G : H]$.*

- *además si $p \nmid [G : H]$ entonces la extensión es separable.*

Demostración:

- Λ es una sub-álgebra de Σ. Si consideramos $i : H \hookrightarrow G$ la inclusión de H en G, ésta se extiende a un morfismo de álgebras $i : k[H] \longrightarrow k[G]$ que es un monomorfismo.

- Σ_Λ es finitamente generado. Si tomamos $t = [G : H]$ y sean $g_1, \ldots, g_t$ representantes de las coclases izquierdas de H en G, recordemos que se cumple que:

$$g_i H \cap g_j H = \emptyset \quad si \ i \neq j$$

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} g_i H$$

Por lo tanto se tiene que: $\Sigma = \oplus_{i=1}^{t} g_i \Lambda$.

$g_i k[H]$ tiene estructura de Λ módulo a derecha, y además: $\phi : k[H] \hookrightarrow g_i k[H]$ tal que $\phi(1_H) = g_i$ es un isomorfismo de Λ módulos a derecha, por lo tanto:

$$\Sigma = \oplus_{i=1}^{t} \Lambda$$

lo que significa que la extensión será libre de rango $[G : H]$.

- Tenemos que ver que Λ es sumando directo de Γ como Λ-Λ bimódulo.

  Podemos suponer que $g_1 = 1_G$ entonces $k[G] = K[H] \oplus (\oplus_{i=2}^{t} g_i k[H])$. Lo que faltaría ver es que $\oplus_{i=1}^{t} g_i k[H]$ tiene estructura de Λ módulo a izquierda. Para eso hay que probar que si $g_i \neq 1_H$, entonces $hg_1 \neq h'$ para todo $h, h' \in H$.

  Supongamos que no se cumple, si $g_i \neq 1_H$ entonces $hg_1 = h'$. Si multiplicamos por el inverso de h' tenemos $h'^{-1} hg_i = 1$, por lo tanto $Hg_i = H$, lo que significa que $g_i = 1_H$. Esto es absurdo porque $g_i \neq 1_H$, entonces $hg_i \in g_j H$ para algún j. Finalmente $\oplus_{i=2}^{t} g_i k[H]$ es un Λ módulo a izquierda.

- si $p = car(k)$ no divide a t sea:

$$\psi : k[G] \longrightarrow k[G] \otimes_{k[H]} k[G]$$

  La extensión lineal de $\psi(g) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i g$ con $\{w_1, \dots, w_t\}$ representantes de las coclases derechas de H en G

  - Veamos que ψ no depende de los representantes. Sea $v_1, \dots, v_t$ otro conjunto de representantes de las coclases tales que $v_i = h_i w_i$ con $h_i \in H$

$$\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} v_i^{-1} \otimes v_i g = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} {w_i}^{-1} {h_i}^{-1} \otimes h_i w_i g = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} {h_i}^{-1} h_i \otimes w_i g = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i g$$

    Por lo tanto no depende de los representantes.

- ψ es k[H] lineal. Tomemos h y l en H entonces $\psi(hgl) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i hgl$, $w_1h, \ldots, w_th$ es otro conjunto de representantes de las coclases laterales de H en G. Entonces:

$$\psi(hgl) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i hgl = \frac{1}{t}(\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i hg)l = h\frac{1}{t}(\sum_{i=1}^{t} h^{-1}w_i^{-1} \otimes w_i hg)l = h\psi(g)l$$

Entonces ψ es de Λ-Λ bimódulos.

Ahora si $m : \Sigma \longrightarrow \Sigma \otimes_\Lambda \Sigma$ es el morfismo multiplicación. Tenemos que:

$$m \circ \psi(a) = m(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} w_i^{-1} \otimes w_i a) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} m(w_i^{-1} \otimes w_i a) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} {w_i}^{-1} w_i a = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} a = a$$

Entonces m se escinde. □

Capítulo 3

Teorema de Higman

En este capítulo daremos una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de grupo sea de tipo de representación finita.

Como vimos antes solamente nos resta saber que sucede si la característica del cuerpo divide al orden del grupo, ya que en el caso contrario el álgebra es semisimple. En este caso concluiremos que un álgebra de grupo es tipo de representación finito si y sólo si sus p grupos de Sylow son cíclicos, siendo p la característica del cuerpo.

OBSERVACIÓN 3.0.6. *Si k es un cuerpo de característica p, G un grupo cíclico de orden p^n, entonces:*

$$kG \cong k[x]/\langle x^{p^n} \rangle.$$

Demostración:

Sabemos que $kG \cong \frac{k[x]}{\langle x^{p^n}-1 \rangle}$.

Como $x^{p^n}-1 = (x-1)^{p^n}$ debido a que la característica de k es p entonces $kG \cong \frac{k[x]}{\langle (x-1)^{p^n} \rangle}$.

Si $y = x-1$ resulta $kG \cong \frac{k[y+1]}{\langle y^{p^n} \rangle} \cong \frac{k[y]}{\langle y^{p^n} \rangle}$. □

3.1. Álgebras de Grupo

Si G es un grupo finito y H un subgrupo de G por la proposición 2.2.5 sabemos que kG/kH es una extensión de álgebras libre, por tanto tenemos los funtores Restricción e Inducción entre las categorías de módulos sobre kG y kH. De ahora en más usaremos las siguientes notaciones:

- dado un kG módulo M, $Res(M) = M_H$

- dado un kH módulo N, $Ind(N) = N^G$

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Si G es un grupo finito y P es un subgrupo de G, k un cuerpo de característica p, con $p \nmid [G:P]$ la siguiente sucesión $\xi: \ 0 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ es sucesión exacta de kG-módulos entonces ξ se escinde como sucesión de kG-módulos si y solo si se escinde como sucesión de kP-módulos.*

Demostración:

($\Rightarrow$)

Si $\xi: \ 0 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ se escinde como sucesión de kG módulos entonces también se escinde como sucesión de kP módulos.

($\Leftarrow$)

Si $\xi: \ 0 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ se escinde como sucesión de kP módulos, significa que existe $j : N \longrightarrow M$ morfismo de kP módulos tal que $\pi \circ j = id_N$.

Sea $G = \cup_{i=1}^{l} Pg_i$ la descomposición de coclases de G según P. Sea $g \in G$, veamos que la función $\sigma : \{1, \ldots, l\} \longrightarrow \{1, \ldots, l\}$ dada por:

$$g_i g = p_{\sigma(i)} g_{\sigma(i)} \text{ con } p_{\sigma(i)} \in P \tag{3.1}$$

es una permutación, para eso solamente veamos que σ es inyectiva.

Si $\sigma(i) = \sigma(l)$ lo que significa que:

$$g_i g = p_{\sigma(i)} g_{\sigma(i)} = p_{\sigma(l)} g_{\sigma(l)} = g_l g.$$

Entonces como $g_i g = g_l g$, esto implica que $g_i = g_l$ lo que significa que σ es inyectiva.

Definamos $\tilde{j} : N \longrightarrow M$ de la siguiente manera:

$$\tilde{j}(n) = \frac{1}{[G:P]} \sum_{i=1}^{l} g_i^{-1} j(g_i n)$$

observemos que $\frac{1}{[G:P]} \in k$ porque la característica de k no divide a $[G:P]$. Ahora probemos que $\tilde{j}$ es un morfismo de kG módulos, para eso solamente nos falta probar que: $\tilde{j}(gn) = g\tilde{j}(n) \forall g \in G$.

$$\tilde{j}(gn) = \frac{1}{[G:P]} \sum_{i=1}^{l} g_i^{-1} j(g_i g n) = \frac{1}{[G:P]} \sum_{i=1}^{l} g_i^{-1} j(p_{\sigma(i)} g_{\sigma(i)} n)$$

debido a 3.1. Como además ${g_i}^{-1}p_{\sigma(i)} = g{g_{\sigma(i)}}^{-1}$ tenemos:

$$\tilde{j}(gn) = \frac{1}{[G:P]}\sum_{i=1}^{l} gg_{\sigma(i)}^{-1}j(g_{\sigma(i)}n) = \frac{1}{[G:P]}g\sum_{i=1}^{l} g_{\sigma(i)}^{-1}j(g_{\sigma(i)}n) = g\tilde{j}(n).$$

Ahora solamente nos falta probar que $\pi \circ \tilde{j} = id_N$.

$$\pi \circ \tilde{j}(n) = \pi(\frac{1}{[G:P]}\sum_{i=1}^{l} g_i^{-1}j(g_in)) = \frac{1}{[G:P]}\sum_{i=1}^{l} g_i^{-1}\pi(j(g_in)) = \frac{1}{[G:P]}\sum_{i=1}^{l} g_i^{-1}g_in = n$$

Entonces $\pi\tilde{j} = id_N$ □

Desde ahora si tenemos un grupo G y un número primo p tal que $p||G|$ notaremos con S_p a los p-subgrupos de Sylow.

LEMA 3.1.2. *Sea k un cuerpo de característica p, G un grupo, $p||G|$ y S_p un p-subgrupo de Sylow, entonces kG admite solo un número finito de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles, si y solamente si kS_p admite solo un número finito de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles.*

Demostración:

$(\Leftarrow)$

Sean $L_1, \ldots, L_l$ los representantes de las clases de isomorfismos de los kS_p módulos indescomponibles.

Sea M es un kG módulo indescomponible entonces M_{S_p} cumple:

$$M_{S_p} \cong \oplus_{i=1}^{l} L_i^{m_i} \text{ como } kS_p \text{ módulo.}$$

Ahora apliquemos el funtor Inducción a M_{S_p}:

$$(M_{S_p})^G \cong kG \otimes_{kS_p} (\oplus_{i=1}^{l} L_i^{m_i})$$

Sea $\phi : (M_{S_p})^G \longrightarrow M$ morfismo de kG módulos, dado por $\phi(a \otimes m) = am$.

Si definimos ahora $j : M \longrightarrow (M_{S_p})^G$ como $j(m) = e \otimes m$ es un morfismo de kS_p módulos. Este morfismo cumple:

$$\phi(j(m)) = \phi(e \otimes m) = em = m$$

por lo tanto $\phi \circ j = id_M$ y como $p \nmid [G : S_p]$, aplicando la proposición 3.1.1 tenemos que $M|(M_{S_p})^G$ como kG módulos. Aplicando el teorema de Krull-Schmidt tenemos que existe L_i tal que $M|kG \otimes_{kS_p} L_i$. Además sabemos que:

$$dim_k kG \otimes_{kS_p} L_i = [G : S_p]dim_k L_i < \infty.$$

Entonces $(M_{S_p})^G$ tiene un número finito de sumandos indescomponibles y en conclusión kG es de tipo finito.

$(\Rightarrow)$

Si kG tiene un número finito de módulos indescomponibles finitamente generados no isomorfos $M_1, \ldots, M_t$.

Sea L un kS_p módulo indescomponible. Entonces aplicando el funtor inducción a L sabemos que:

$$L^G = \oplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i}$$

Ahora aplicamos el funtor restricción a lo que teníamos y nos deja que:

$$(L^G)_{S_p} = \oplus_{i=1}^{t} (ResM_i)^{n_i}$$

Como kG / kS_p es una extensión de álgebras tenemos que:

$$kG \cong kS_p \oplus H$$

como kS_p bimódulos. Además tenemos que $(L^G)_{S_p} \cong Res(kG) \otimes_{kS_p} L$. Juntando todo tenemos el siguiente isomorfismo de kS_p módulos:

$$(L^G)_{S_p} \cong (kS_p \otimes_{kS_p} L) \oplus (H \otimes_{kS_p} L)$$

De lo que deducimos que $L|(L^G)_{S_p}$ ya que: $L \cong kS_p \otimes_{kS_p} L$.

Entonces, por el teorema de Krull-Schmidt, L es sumando de $Res(M_i)$ para algún M_i y como $Res(M_i)$ es de dimensión finita entonces kS_p solamente admite un número finito de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles. $\square$

PROPOSICIÓN 3.1.3. *Si k es un cuerpo de característica p, G un grupo tal que $p\,||G|$ y supongamos que el p-grupo de Sylow S_p es cíclico. Entonces kG admite un número finito de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles.*

Demostración:

Por el teorema 3.0.6 sabemos que $kP \cong k[x]/\langle x^{p^n} \rangle$ donde $|P| = p^n$, y por el teorema 1.3.5 sabemos que tiene p^n módulos indescomponibles.

Ahora aplicamos el lema anterior y concluimos que kG tiene una cantidad finita de módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. $\square$

LEMA 3.1.4. *$k[x,y]/\langle x,y\rangle^2$ tiene un número infinito de módulos indescomponibles no isomorfos, siendo k un cuerpo infinito. Además si k es infinito, $k[x,y]/\langle x,y\rangle^2$ tendrá infinitos módulos por cada dimensión par.*

Demostración:

Todo módulo M sobre el álgebra $A = k[x,y]/\langle x,y\rangle^2$ lo podemos ver como un morfismo de k-álgebras $\psi : A \longrightarrow End_k(V)$ (observación 1.2.6) tal que:

- $\psi(x) = S : V \to V$
- $\psi(y) = T : V \to V$

Donde $S^2 = T^2 = S \circ T = T \circ S = 0$.

Sean S y $T : k^{2n} \longrightarrow k^{2n}$ definidos de la siguiente manera:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_c & 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $I,\ J_c$ dos matrices cuadradas de n filas y n columnas con $c \in k$ donde:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } J_c = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Es claro que tenemos que $S^2 = T^2 = S \circ T = T \circ S = 0$, por lo tanto definen módulos M_c Sobre A de dimensión $2n$ dependiendo de c. Solamente nos bastaría probar que cada uno de estos módulos es indescomponible.

Como A es un álgebra artiniana (ya que A tiene dimensión finita), solamente con probar que $End_A(M_c)$ es local obtendríamos que M_c es indescomponible (lema 1.3.1).

Sea x un elemento de $End_A(M_c)$ entonces x se puede ver como una matriz de $2n \times 2n$ que hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} k^{2n} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)"'] & k^{2n} \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)"] \\ k^{2n} \arrow[r, "T"] & k^{2n} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k^{2n} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)"'] & k^{2n} \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)"] \\ k^{2n} \arrow[r, "U"] & k^{2n} \end{tikzcd}$$

Para que conmute el diagrama se tiene que cumplir que $x \circ T = T \circ x$ y que $x \circ S = S \circ x$. O lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\text{y}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J_c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

De la ecuación 3.2 obtenemos, $B = 0$ y $D = A$.
Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que:

- x es invertible si y solamente si A es invertible,
- x es nilpotente si y solamente si A es nilpotente.

De la ecuación 3.3 tenemos que $AJ_c = J_cA$, así que si $A = (a_{ij})$ entonces:

$$\begin{aligned}
AJ_c &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} J_c = \begin{pmatrix} ca_{11}+a_{12} & ca_{12}+a_{13} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21}+a_{22} & ca_{22}+a_{23} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1}+a_{n2} & ca_{n2}+a_{n3} & \cdots & ca_{nn} \end{pmatrix} \\
J_cA &= J_c\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ a_{11}+ca_{21} & a_{12}+ca_{22} & \cdots & a_{1n}+ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1}+ca_{n1} & a_{(n-1)2}+ca_{n2} & \cdots & a_{(n-1)n}+ca_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

entonces tenemos que $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$ y que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto la matriz A es diagonal con los coeficientes en la diagonal todos iguales, entonces A es nilpotente si y solo si $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ y A es invertible si y solo si $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} \neq 0$. Por lo tanto A es nilpotente o invertible, así que x es nilpotente o invertible. Por lo que $End_A(M_c)$ es local, y M_c es indescomponible. □

TEOREMA 3.1.5. *Si S_p es un p-grupo no cíclico y k es un cuerpo de característica p, entonces kS_p tiene un número infinito de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles.*

Demostración:

1. Si S_p es abeliano entonces:

$$S_p \cong \mathbf{Z}_{p^{n_1}} \times \ldots \times \mathbf{Z}_{p^{n_l}}$$

para $l > 1$. Entonces existe un subgrupo $H < S_p$ tal que:

$$\frac{S_p}{H} \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$$

2. Si S_p no es abeliano entonces sabemos que:

   - $Z(S_p) \neq S_p$ por no ser abeliano,
   - $Z(S_p) \neq 1$ por el lema 1.2.1,
   - $S_p/Z(S_p)$ no es cíclico por el lema. 1.2.2

   Además como:

$$|S_p| = |Z(S_p)||S_p/Z(S_p)|$$

   Por lo tanto tenemos que $|S_p| > |S_p/Z(S_p)|$. Podemos seguir haciendo cocientes por centros hasta que obtengamos un grupo abeliano, esto se puede consegir en finitos pasos debido a que el grupo es finito y a que el orden del cociente es siempre menor estricto al orden del grupo.

   Entonces tenemos un subgrupo N de S_p tal que:

$$\frac{S_p}{N} \cong \mathbf{Z}_{p^{n_1}} \times \ldots \times \mathbf{Z}_{p^{n_l}}$$

   Por lo tanto, nuevamente caemos en el caso 1.

Sea $\pi : S_p \longrightarrow S_p/H \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ la proyección de S_p sobre el cociente. Entonces esto induce un morfismo de k-álgebras $\phi : kS_p \longrightarrow k(S_p/H) \cong k(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p)$.

Si usamos la proposición 1.1.7 solamente bastaría con probar que $k(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p)$ tiene una cantidad infinita de módulos indescomponibles no isomorfos.

Por la proposición 1.2.4 sabemos que $k(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p) \cong k\mathbf{Z}_p \otimes_k k\mathbf{Z}_p$. Y por 3.0.6 sabemos que:

$$k\mathbf{Z}_p \cong \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle},$$

Por lo tanto:

$$k\mathbf{Z}_p \otimes_k k\mathbf{Z}_p \cong \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle} \otimes_k \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle}$$

Sea ahora ψ un morfismo de k-álgebras definida de la siguiente forma:

$$\psi : k[x, y] \longrightarrow \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle} \otimes_k \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle}$$

definida en x e y de la siguiente manera:

- $\psi(x) = x \otimes 1$,
- $\psi(y) = 1 \otimes y$.

Como $\psi(x^p) = \psi(y^p) = 0$, induce sobre el cociente $\frac{k[x,y]}{\langle x^p, y^p \rangle}$ un morfismo de k-álgebras $\bar{\psi}$ tal que:

$$\bar{\psi} : \frac{k[x, y]}{\langle x^p, y^p \rangle} \longrightarrow \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle} \otimes_k \frac{k[x]}{\langle x^p \rangle}.$$

Como es $\bar{\psi}$ sobreyectivo y las dimensiones de llegada y partida son iguales, entonces $\bar{\psi}$ tiene que ser un isomorfismo de k-álgebras.

Como además tenemos las siguientes inclusiones de ideales en k[x,y]:

$$\langle x^p, y^p \rangle \subset \langle x, y \rangle^p \subset \langle x, y \rangle^2$$

entonces tenemos un morfismo (proyección) π tal que:

$$\pi : \frac{k[x, y]}{\langle x^p, y^p \rangle} \longrightarrow \frac{k[x, y]}{\langle x, y \rangle^2}.$$

Aplicando nuevamente la proposición 1.1.7, solamente bastaría ver que $k[x, y] \diagup \langle x, y \rangle^2$ tiene una cantidad infinita de módulos indescomponibles, pero eso es exactamente lo que dice el lema anterior (3.1.4). $\square$

TEOREMA 3.1.6. *(Higman)Sean k un cuerpo de característica p y G un grupo finito tales que $p||G|$. Entonces kG es de tipo finito si y solamente si los p-grupos de Sylow de G son cíclicos.*

Demostración:

($\Rightarrow$)

Si kG es de tipo finito por el teorema 3.1.5 si tuviese un p-grupo de Sylow S_p no cíclico entonces kS_p no sería de tipo de representación finita, aplicando ahora el teorema 3.1.2, entonces kG tampoco sería de tipo de representación finito, lo que sería absurdo.

($\Leftarrow$)

Si G tiene un p subgrupo de Sylow cíclico entonces aplicamos la proposición 3.1.3 y obtenemos que kG tiene que ser de tipo de representación finito. $\square$

3.2. Segunda conjetura de Brauer-Thrall

La segunda conjetura de Brauer-Thrall afirma que: si tenemos un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k, y esta álgebra tiene infinitos módulos indescomponibles, entonces existe una sucesión de enteros positivos $n_1 < n_2 < \dots$ tal que para cada entero positivo n_i existen un número infinito de módulos indescomponibles de dimensión n_i

TEOREMA 3.2.1. *La segunda conjetura de Brauer-Thrall es cierta para las álgebras de grupo cuando el cuerpo es infinito.*
Demostración:

kG tiene un número infinito de módulos indescomponibles, entonces el p-grupo de Sylow no es cíclico y por el teorema anterior kS_p tiene un número infinito de indescomponibles. Por la demostración del lema 3.1.4 y del teorema 3.1.5 sabemos que hay infinitos módulos indescomponibles de dimensión $2n$ para todo natural n, la conjetura de Brauer-Thrall es cierta para kS_p.

Supongamos que no es cierta para kG (existe n_0 natural tal que $\forall n \geq n_0$ hay finitos módulos indescomponibles con dimensión n).

Además existen infinitos naturales $n_j \geq n$ tal que kS_p tiene una cantidad infinita de módulos indescomponibles $\{L_s\}_{s\in I_j}$ con $dim_k(L_s) = n_j$.

Entonces $(L_s)^G = T_{i_1} \oplus \dots \oplus T_{i_l}$ donde $T_{i_j} \in ind(kG)$.

Como L_s es sumando de $Res((L_s)^G) = Res(T_{i_1}) \oplus \dots \oplus Res(T_{i_l})$, entonces para algún i_{j_0}, sabemos que $L_s|Res(T_{i_{j_0}})$, por el teorema de Krull-Schmidt.

Entonces $n_j = dim_k L_s \leq dim_k T_{i_{j_0}} \leq [G : S_p]n_j = dim_k(L_s)^G$, por hipótesis únicamente hay un número finito de kG módulos indescomponibles que tienen:

$$n_j \leq dim_k T_{i_{j_0}} \leq [G : S_P]n_j$$

por lo que hay solamente un número finito de sumandos indescomponibles de $ResT_{i_{j_0}}$ como kS_p módulos y en consecuencia sólo hay finitos indescomponibles L_i lo que es absurdo. $\square$

Capítulo 4

Teorema de Drozd - Bondarenko

En este capítulo veremos unas equivalencia para que un álgebra de grupo sea mansa.

Si tenemos k con característica p y G un grupo cuyo orden es dividido por p entonces para averiguar si kG es mansa, solamente nos tenemos que fijar en S_p y ver si S_p es alguno de estos grupos: $\{D_n,\ SD_n,\ Q_n\}$, o ver que $[S_p : (S_p)'] \leq 4$.

PROPOSICIÓN 4.0.2. *Dada una extensión $\Sigma\diagup\Lambda$ los funtores Restricción e Inducción satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$N|Res(IndN)$ para todo $N \in \mathrm{mod}\Lambda$;*
2. *Si además $\Sigma\diagup\Lambda$ es separable entonces: $M|Ind(Res(M))$ para todo $M \in mod\Sigma$.*

Demostración:

1. Por definición $Res(Ind(N)) = Res(\Sigma\otimes_\Lambda N)$. Por la parte 3) de la definición (2.2.1) de extensión de álgebras tenemos que:

$$Res(Ind(N)) = (\Lambda \oplus B)\otimes_\Lambda N$$

   Aplicando la propiedad distributiva del producto tensorial respecto a la suma tenemos que:

$$Res(Ind(N)) = (\Lambda\otimes_\Lambda N) \oplus (B\otimes_\Lambda N)$$

   pero como $\Lambda\otimes_\Lambda N \cong N$ entonces resulta que:

$$Res(Ind(N)) \cong N \oplus (B \otimes_\Lambda N)$$

   Por lo tanto $N|Res(Ind(N))$.

2. Sea $I = ker(m : \Sigma\otimes_{\Lambda}\Sigma \longrightarrow \Sigma)$, como tenemos que la siguiente sucesión es exacta y se escinde:
$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Sigma\otimes_{\Lambda}\Sigma \longrightarrow \Sigma \longrightarrow 0$$
Por lo tanto se obtiene el siguiente isomorfismo: $I \oplus \Sigma \cong \Sigma\otimes_{\Lambda}\Sigma$. Por otro lado, dado $M \in mod\Sigma$, tenemos que: $\Sigma\otimes_{\Lambda}M \cong \Sigma\otimes_{\Lambda}(\Sigma\otimes_{\Sigma}M)$ ya que:
$$M \cong \Sigma\otimes_{\Sigma}M$$
Ahora aplicando la propiedad asociativa del producto tensorial se obtiene que:
$$\Sigma\otimes_{\Lambda}M \cong (\Sigma \otimes_{\Lambda} \Sigma) \otimes_{\Sigma} M$$
substituyendo $\Sigma\otimes_{\Lambda}\Sigma$ por $I \oplus \Sigma$ ya que son isomorfos, resulta que:
$$\Sigma\otimes_{\Lambda}M \cong I \oplus (\Sigma\otimes_{\Sigma}M) \cong I \oplus M$$
Por lo tanto $M|Ind(Res(M)) = \Sigma \otimes_{\Lambda} M$ para todo $M \in mod\Sigma$. □

COROLARIO 4.0.3. *Si Σ/Λ es una extensión de k álgebras de dimensión finita libre tal que el grado de Σ/Λ es r entonces:*

1. *Si $N \in ind\Lambda$, existe $M \in ind\Sigma$ con $dim_kM \leq r.dim_kN$ tal que $N|Res(M)$.*
2. *Si además Σ/Λ es separable y $M \in ind\Sigma$ entonces existe $N \in mod\Lambda$ con $dim_kN \leq dim_kM$ tal que $M|Ind(N)$.*

Demostración:

1. Sea $Ind(N) = \oplus_iM_i$ con $M_i \in ind\Sigma$. Por la proposición anterior tenemos que $N|Res(Ind(N)) \cong \oplus_iRes(M_i)$. Aplicando el Teorema de Krull-Schmidt(1.3.2) sabemos que existe un i tal que $N|Res(M_i)$ y por otro lado $dim_k(IndN) = r.dim_kN$. Entonces tenemos que:
$$dim_k(M_i) \leq dim_k(IndN) = r.dim_kN,$$
completando la prueba
2. $Res(M) = \oplus_iN_i$ es una descomposición en indescomponibles de $Res(M)$. Por la parte 2 de la proposición anterior: $M|Ind(Res(M))$ e $Ind(ResM) \cong \oplus_iInd(N_i)$ debido a que el funtor Ind es aditivo. Por el teorema de Krull-Schmidt existe i tal que $M|Ind(N_i)$ y además $dim_k(N_i) \leq dim_k(M)$.

TEOREMA 4.0.4. *Si Σ/Λ es una extensión de álgebras de dimensión finita y libre de grado r, entonces:*

1. *Si Σ es mansa entonces Λ también lo es.*
2. *Si Σ/Λ además es separable entonces si Λ es mansa Σ también lo es.*

Demostración:

1. Sea d natural y sean $\{M_1, \ldots, M_t\}$ un conjunto de $\Sigma - k[x]$ bimódulos tales que cada Σ módulo M indescomponible de dimensión menor o igual a rd verifica $M|M_i \otimes_{k[x]} S_\lambda$ para algún $i = 1, 2, \ldots, t$, con S_λ simple y $\lambda \in k$.

   Consideremos la familia de Λ módulos $\{N_1, \ldots, N_t\}$ tal que $N_i = Res(M_i)$. los N_i tienen estructura de $\Lambda - k[x]$ bimódulos. Ahora si N es un Λ módulo de dimensión d, por la parte 1 del corolario anterior, existe un Σ módulo indescomponible M con $dim_k(M) \leq rd$ tal que $N|Res(M)$ de aquí sabemos que $N|N_i \otimes_{k[x]} S_\lambda$ entonces Λ es mansa.

2. Sean d natural y $\{N_1, \ldots, N_t\}$ un conjunto de $\Lambda - k[x]$ bimódulos tales que, si N es un Λ módulo indescomponible de dimensión menor o igual a d entonces $N|N_i \otimes_{K[x]} S_\lambda$
   Sea M un Σ módulo de dimensión d, entonces existe por el corolario anterior un Λ módulo N con dimensión menor o igual a d tal que $M|Ind(N)$ y además:

   $$N|Ind(N_i \otimes_{k[x]} S_\lambda) \cong (\Sigma \otimes_\Lambda N_i) \otimes_{k[x]} S_\lambda$$

   como $\Sigma \otimes_\Lambda N_i$ es un $\Sigma - k[x]$ bimódulo finitamente generado, entonces Σ es mansa. □

Podemos aplicar el teorema anterior directamente a las álgebras de grupo, utilizando la proposición 2.2.5:

COROLARIO 4.0.5. *Sean k un cuerpo de característica p, G un grupo finito y S_p un p-grupo de Sylow de G. Entonces kG es mansa si y sólo si kS_p es mansa.*

Demostración:

Por la proposicion 2.2.5 sabemos que kG/kS_p es una extensión separable de álgebras. Luego podemos aplicar el teorema 4.0.4 para los dos lados, por lo tanto kG es mansa si y solo si kS_p es mansa. □

4.1. Teorema de Drozd-Bondarenko

Nuestro objetivo en este capítulo es dar una condición necesaria y suficiente para que un álgebra sea de tipo mansa. Como ya vimos en la sección anterior esto depende solamente de los p-grupos de Sylow del grupo.

LEMA 4.1.1. *Si $n \geq 3$ entonces las posibles soluciones de:*

$$x^2 \equiv 1 mod(2^n)$$

Son $\{1, -1, 2^{n-1} - 1, 2^{n-1} + 1\}$.

Demostración:

$x^2 \equiv 1 \ mod(2^n)$ es equivalente a $x^2 - 1 \equiv 0 \ mod(2^n)$ que es lo mismo que $(x-1)(x+1) \equiv 0 \ mod(2^n)$, que a su vez es lo mismo que: $(x-1)(x+1) = k2^N$ donde $2 \nmid k$ y $N \geq n$.

Entonces tenemos que:

- $x + 1 = 2^{N_1}k_1$,
- $x - 1 = 2^{N_2}k_2$, donde $k_1k_2 = k$.

Como $x+1-x-1 = 2$ ambos no pueden ser múltiplos de 4 a la vez, así que se presentan los siguientes casos:

- $x + 1 = 2^{N-1}k_1$ y $x - 1 = 2k_2$;
- $x + 1 = 2^N k_1$ y $x - 1 = k_2$;
- $x + 1 = 2k_1$ y $x - 1 = 2^{N-1}k_2$;
- $x + 1 = 2k_1$ y $x - 1 = 2^N k_2$;

Si $x + 1 = 2^{n-1}2^h k_1$ como $k_1 - 1$ es un número par, entonces sabemos que:

$$2^h 2^{n-1} k_1 \equiv 2^h 2^{n-1} mod(2^n)$$

entonces $x + 1 \equiv 2^{n-1}2^h mod(2^n)$ por lo tanto si $N = n + h$ con $h \geq 0$ tenemos:

1. $x + 1 = 2^{N-1}k_1 \equiv 2^{N-1}mod(2^n)$ entonces $x \equiv 2^{n-1}2^h - 1mod(2^n)$, que dependiendo de si $h = 0$ o $h > 0$ da $x \equiv 2^{n-1} - 1mod(2^n)$ o $x \equiv -1mod(2^n)$ respectivamente.
2. $x + 1 = 2^N k_1 \equiv 2^N mod(2^n)$ entonces $x \equiv -1mod(2^n)$
3. $x - 1 = 2^{N-1}k_1 \equiv 2^{N-1}mod(2^n)$ entonces $x \equiv 2^{n-1}2^h + 1mod(2^n)$, que dependiendo de si $h = 0$ o $h > 0$ da $x \equiv 2^{n-1} + 1mod(2^n)$ o $x \equiv 1mod(2^n)$ respectivamente.
4. $x - 1 = 2^N k_1 \equiv 2^N mod(2^n)$ entonces $x \equiv -1mod(2^n)$. □

LEMA 4.1.2. *Si $|G| = p^n$ con $n \geq 1$, N subgrupo normal de G con $|N| \neq 1$ entonces $|Z(G) \cap N| \neq 1$*

Demostración:

Consideremos la cadena $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_k = G$ definida por recurrencia como sigue: $G_0 = 0$, G_{i+1} tal que $G_{i+1}/G_i = Z(G/G_i) \forall i \geq 1$ (Observación : $G_1 = Z(G)$). Por inducción en $i \geq 0$ y usando 1.2.1 se puede ver que la cadena anterior es estricta.

Dado un subgrupo normal N de G, sea c el mínimo número natural menor que k tal que $|N \cap G_c| \neq 1$. $[N \cap G_c, G]$ es subgrupo de $N \cap G_{c-1}$ debido a que todo elemento de la forma $hkh^{-1}k^{-1}$ con $h \in N \cap G_c$ y $k \in G$ cuando se considera la clase de este elemento en el cociente de G con G_{c-1} es el elemento neutro. Ahora como sabemos que $[N \cap G_c, G]$ es trivial, entonces quiere decir que todos los elementos de $N \cap G_c$ conmutan con los del grupo G, y por lo tanto $N \cap G_c \subset Z(G)$.

En conclusión $N \cap G_c \subseteq N \cap Z(G)$ que no es trivial.

TEOREMA 4.1.3. *Si G es un 2-grupo con un subgrupo maximal cíclico y $|G| = 2^{n+1}$ entonces G es isomorfo a uno de los siguientes grupos.*

1. $Z_{2^{n+1}}$
2. $Z_{2^n} \times Z_2$
3. $D_{n+1}, Q_{n+1}, SD_{n+1}, W_{n+1}$

Demostración:

Ya sabemos que:

- $n = 0$ entonces $G \cong Z_2$
- $n = 1$ entonces $G \cong Z_2 \times Z_2$ o $G \cong Z_4$
- $n = 2$ entonces G es isomorfo a Z_8, $Z_4 \times Z_2$, D_3, o Q_3

Por lo tanto debemos probarlo para $n \geq 3$, observemos que en este caso tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos:

$$1 \longrightarrow \langle x \rangle \hookrightarrow G \longrightarrow \langle \bar{y} \rangle \longrightarrow 1$$

Donde $\langle x \rangle$ es el grupo cíclico maximal, además como $[G : \langle x \rangle] = 2$ entonces $\langle x \rangle$ es un subgrupo normal de G entonces $\langle \bar{y} \rangle = G/\langle x \rangle$ es un grupo.

Como $\langle x \rangle$ es normal entonces $gxg^{-1} \in \langle x \rangle$ por lo tanto conjugar es una accion de G en $\langle x \rangle$. Como además tenemos que: $yx^kxx^{-k}y^{-1} = yxy^{-1}$ no depende del representante de $G/\langle x \rangle$ por lo tanto tenemos una acción de $G/\langle x \rangle = \langle \bar{y} \rangle$ en $\langle x \rangle$.

El morfismo $x \to yxy^{-1} = x^k$ es un elemento de orden 1 o 2 de $\mathrm{Aut}(\langle x\rangle)$ y como $x \to y(yxy^{-1})y^{-1} = (x^k)^k = x^{k^2} = x$ aplicando el lema 4.1.1 tenemos que $k \in \{1, -1, 2^{n-1} - 1, 2^{n-1} + 1\}$. Además sabemos que $y^2 = x^t$ para algún t. Por lo tanto tenemos los siguientes casos:

1. Si $yxy^{-1} = x$. Entonces G es abeliano, entonces $G \cong \mathbf{Z}_{2^{n+1}}$ o $G \cong \mathbf{Z}_{2^n} \times \mathbf{Z}_2$

2. Si $yxy^{-1} = x^{-1}, y^2 = x^t$. Entonces $x^t = y^2 = yy^2y^{-1} = x^{-t}$ por lo tanto 2^n divide a $2t$ entonces $t = 0$ o $t = 2^{n-1}$

   - Si $t = 0$ entonces $G = \langle\{x, y/x^{2^n} = y^2 = 1, yxy^{-1} = x\}\rangle = D_{n+1}$
   - Si $t = 2^{n-1}$ entonces $G = \langle\{x, y/x^{2^n} = 1, y{=}x^{2^{n-1}}, yxy^{-1} = x^{2^{n-1}-1}\}\rangle$ o de otra forma lo podemos ver como: $G = \langle\{x', y'/x'^{2^{n-1}} = 1, y'^2 = x'^{2^{n-2}}, y'x'y'^{-1} = x'^{-1}\}\rangle$ siendo $x' = x^2$ y $y' = xy$

3. Si $xyx^{-}1 = x^{2^{n-1}-1}$. Como G no es cíclico entonces t es par, así que $x^t = y^2 = yx^ty^{-1} = x^{(2^{n-1}-1)t} = x^{-t}$. Por lo tanto $t = 0$ o $t = 2^{n-1}$

   - Si $t = 0$ entonces $G = \langle\{x, y/x^{2^n} = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{2^{n-1}-1}\}\rangle = SD_{n+1}$
   - Si $t = 2^{n-1}$ si llamamos $y' = x^{-}1y$ y reemplazamos a y por y' entonces obtenemos que $G = \langle\{x, y'/x^{2^n} = y'^2 = 1, y'xy'^{-}1 = x^{2^{n-1}-1}\}\rangle$

4. Si $yxy^{-1} = x^{2^{n-1}+1}$ como G no es cíclico entonces t es par, sea $t = 2s$ y sea i entero que es solución de $i(2^{n-2} + 1)s \equiv 0 \ mod(2^{n-1})$ sabemos que tiene solución si $n \geq 3$.

   Sea $y' = x^iy$ entonces $y'^2 = (x^iy)^2 = x^{2(i(2^{n-2}+1)s)} = 1$ y $y'xy'^{-1} = yxy^{-1} = x^{2^{n-1}+1}$. Así que caemos en el caso de que $G = \langle\{x, y/x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, yxy^{-1} = x^{-1}\}\rangle = W_{n+1}$ □

TEOREMA 4.1.4. *Si G es un p-grupo no abeliano de orden p^{n+1} tal que $[G : G'] \leq 4$ entonces $p = 2$ y G es D_{n+1}, Q_{n+1}, SD_{n+1}.*

Demostración:

Si M es un subgrupo maximal de G se tiene que $[G : M] = p$ entonces M es normal en G. Como G/M es cíclico, por lo tanto abeliano, tenemos $G' \subset M$.

- Como G no es cíclico, entonces para todo $x \in G$, $\langle x\rangle \in M \in G$, con M un subgrupo maximal. Entonces para todo $x \in G$, $\langle x, G'\rangle \subset M$. Luego G/G' no es cíclico.

- Como $[G : G'] \leq 4$ entonces $[G : G'] = 4$ porque si $[G : G'] = 1, 2, 3$ esto implicaría por lo anterior que G es abeliano. Como $[G : G'] = 4$ esto implica que $p = 2$ y $G = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ y $n \geq 2$ ya que G no es abeliano.

Solo falta probar que G tiene un subgrupo maximal cíclico y por ya estaría probado el teorema. Hagamoslo por inducción en n.

- Si $n = 2$ entonces $G = D_3$ o $G = Q_3$ que tienen un subgrupo maximal.

- Consideremos $n \geq 3$. Como $|G| = 2^{n+1}$ y $[G : G'] = 4$ entonces $|G'| > 1$. Como G es un 2 grupo entonces aplicando el lema 4.1.2 tenemos que: $G' \cap Z(G) \neq 1$.

  Sea $a \in G' \cap Z(G)$ de orden 2, entonces $\langle a \rangle$ es normal en G porque $\langle a \rangle \subset Z(G)$ y $[G : \langle a \rangle] = 2^n$.

  Consideremos ahora $H = G \diagup \langle a \rangle$, entonces tenemos que:

$$H' \cong G' \diagup \langle a \rangle$$

  y cocientando H por H'

$$H \diagup H' \cong \frac{G \diagup \langle a \rangle}{G' \diagup \langle a \rangle} \cong G \diagup G' \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$$

  Por hipotesis inductiva, H tiene un subgrupo maximal cíclico $\langle \bar{x} \rangle$,con $x \in G$, de orden 2^{n-1}. Entonces se tiene que:

$$x^{2^{n-1}} = a \text{ o } x^{2^{n-1}} = 1$$

  y que el cociente $H \diagup \langle \bar{x} \rangle$ está generado por $\bar{\bar{y}}$ un elemento de orden 2.

  Entonces $G = \langle x, y \rangle$, si esto no se cumpliese tendríamos que $\langle x, y \rangle \subset M$ para algún M maximal y como G' está incluido en todos los grupos maximales, por lo tanto $\langle x, y, G' \rangle \subset M$.

  Además $G = \langle x, y, a \rangle \subset \langle x, y, G' \rangle$ entonces $G = \langle x, y, G' \rangle \subset M$ siendo M un subgrupo maximal de G lo que sería absurdo. Finalmente tenemos que $G = \langle x, y \rangle$.

Ahora solamente resta averiguar cuales son estos grupos:

1. Si $x^{2^{n-1}} = a$ implica que $|\langle x\rangle| = 2^n$ y caemos en el lema anterior. Por lo tanto los posibles grupos serían: $D_{n+1}, Q_{n+1}, SD_{n+1}$ o W_{n+1}

2. Si $x^{2^{n-1}} = 1$ sabemos que $a \notin \langle x\rangle$. Como $\langle \bar{x}\rangle$ es normal en H entonces tenemos que: $\bar{y}\bar{x}\bar{y}^{-1} = \bar{x}^r$, con r impar.

   Esto se traduce a lo siguiente: $yxy^{-1} \in \{x^r, x^r a\}$

   a) Si $yxy^{-1} = x^r$ entonces $\langle x\rangle$ es normal en G y por lo tanto $G/\langle x\rangle$ tiene orden 4, lo significa que es abeliano. De lo anterior sabemos que $G' \subset \langle x\rangle$, pero entonces $a \in \langle x\rangle$ y llegamos a una contradicción.

   b) Si $yxy^{-1} = x^r a$ entonces tenemos que $[y, x] = yxy^{-1}x^{-1} = x^r a x^{-1} = x^{r-1}a$ entonces $\langle x^{r-1}a\rangle \subset G'$.

   Por otro lado $\langle x^{r-1}a\rangle$ es normal en G, ya que $yx^{r-1}ay^{-1} = x^{r(r-1)}a = (x^{r-1}a)^r$ debido a que a está en $Z(G)$ tiene orden 2 y que r es impar. Además al hacer el cociente de G con $\langle x^{r-1}a\rangle$ nos da un grupo abeliano, entonces $G' = \langle x^{r-1}a\rangle$.

   Como $a \in G'$ entonces $a = (x^{r-1}a)^t$ para algún t, tenemos que $1 = a^2 = (x^{r-1}a)^{2t}$. Por lo tanto 2^{n-1} divide a t, así que t es par, luego $a = (x^{r-1}a)^t = x^{t(r-1)} \in \langle x\rangle$. Esto es absurdo, entonces $x^{2^n} = 1$ o sea $\langle x\rangle$ es cíclico maximal.

   Entonces aplicamos nuevamente el lema anterior. y tenemos que los grupos posibles son : $D_{n+1}, Q_{n+1}, SD_{n+1}$ o W_{n+1}. Pero como vimos en la proposición 1.2.9 los posibles grupos son los primeros tres. □

Antes de comenzar con el Teorema final, daremos dos ejemplos de álgebras de grupo salvaje que utilizaremos en la demostración.

EJEMPLO 4.1.5. *Si $G \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ y k tiene característica 2 entonces $k[G]$ es salvaje.*
Demostración:

Si g_1, g_2, g_3 son los generadores de G verifican $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = 1$, viendo a G con estructura multiplicativa.

Definamos $\psi : k[x_1, x_2, x_3] \longrightarrow k[G]$ morfismo de álgebras de la siguiente manera:

- $\psi(x_1) = g_1 - 1$
- $\psi(x_2) = g_2 - 1$
- $\psi(x_3) = g_3 - 1$

Por la definición $\psi((x_u)^2) = 0$ para $u = 1, 2, 3$ lo que significa que ${x_u}^2 \in Ker(\psi)$ para $u = 1, 2, 3$.

Ahora, como $\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{({x_1}^2,{x_2}^2,{x_3}^2)}$ tiene dimensión 8 y $({x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2) \subset Ker(\psi)$ resulta que:

$$\frac{k[x_1, x_2, x_3]}{({x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2)} \cong k[G]$$

Si consideramos $\Lambda = \frac{k[x_1,x_2,x_3]}{(x_u x_v \text{ con } u,\ v=1,2,3)}$, esta k-álgebra resulta ser cociente de $\frac{k[x_1,x_2,x_3]}{({x_1}^2,{x_2}^2,{x_3}^2)}$ y por lo tanto de $k[G]$. Luego si probamos que Λ es salvaje, entonces, aplicando el corolario 2.1.5, concluimos que $k[G]$ es salvaje.

Sea $B \in R(\Lambda, k\langle x, y\rangle)$ con rango de B como $k\langle x, y\rangle$-módulo igual 2 determinado por las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado $M \in modk\langle x, y\rangle$ y $T_x, T_y : M \longrightarrow M$ determinan las acciones de x e y respectivamente.

Sea $F : B \otimes_{k\langle x,y\rangle} (.)$. Entonces $F(M) = B \otimes_{k\langle x,y\rangle} M$ tiene el mismo espacio vectorial subyacente que $M \oplus M$, ya que B tiene rango 2 y la estructura de Λ módulo determinada por las matrices:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & id \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & T_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora si M, N son $k\langle x, y\rangle$ módulos veamos que sucede con la imagen de $Hom(M, N)$ por F. Como $B \otimes_{k\langle x,y\rangle} M \cong M \oplus M$ podemos ver que si $\phi : M \longrightarrow N$ entonces:

$$F(\phi) = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

Si tenemos ahora un morfismo $\psi \in Hom(F(M), F(N))$ entonces existen $A, B, C, D : M \longrightarrow N$ k lineales tales que:

$$\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : M^2 \longrightarrow N^2$$

Ahora como ψ es un morfismo de Λ módulos tiene que conmutar con las acciones de los generadores de Λ en M^2 y N^2 esto es:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & id \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & id \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones matriciales anteriores equivalen a:

$$C = 0$$

$$A = D$$

$$AT_x = T_x D$$

$$AT_y = T_y D$$

Por las Primeras dos ecuaciones se ve que ψ es de la forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Como el morfismo B es lineal y arbitrario sabemos que F no es pleno, y que ψ está en la imagen de F si y solo si $\psi = F(A)$, o sea si y solo si $B = 0$.

A pesar de esto $\psi : F(M) \longrightarrow F(N)$ es un isomorfismo si y solo si $A : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo. Lo que significa que preserva las clases de isomorfismo.

Ahora veamos que F conserva indescomponibles, para ello supongamos que M es un $k\langle x, y\rangle$ módulo indescomponible y que $\psi^2 = \psi$. Esto es equivalente a que $A^2 = A$ y $AB + BA = B$. como M es indescomponible entonces $A = id$ o $A = 0$ porque M es indescomponible y A es idempotente. Ahora si $A = 0$ entonces $B = 0$ y si $A = id$ entonces $2B = B$ entonces $B = 0$ por lo tanto:

$$\psi = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix}$$

y $F(M)$ es indescomponible. Por lo tanto resulta que B realiza el salvajismo de Λ.

EJEMPLO 4.1.6. *Sea p un número primo $p \neq 2$ y $Car(k) = p$ entonces Si $G \cong \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ entonces $k[G]$ es una k-álgebra salvaje.*
Demostración:

Sean g_1, g_2 dos generadores de G, entonces cumplen $g_1 g_2 = g_2 g_1, {g_1}^p = 1 = {g_2}^p$.

Ahora definamos $\phi : k[x, y] \longrightarrow k[G]$ morfismo de álgebras de la siguiente manera:

- $\phi(x) = g_1 - 1$
- $\phi(y) = g_2 - 1$

Por lo tanto $\phi(x^p) = \phi(y^p) = 0$ lo que significa que $(x^p, y^p) \subset Ker(\phi)$. Además como $dim_k(k[G]) = p^2 = dim_k(\frac{k[x,y]}{(x^p,y^p)})$, entonces:

$$k[G] \cong \frac{k[x, y]}{(x^p, y^p)}$$

Como $x^p, y^p \subset (x, y)^p$ y $(x, y)^3 \subset (x, y)^p$ entonces tenemos las sigientes proyecciones:

$$\frac{k[x, y]}{(x^p, y^p)} \longrightarrow \frac{k[x, y]}{(x, y)^p} \longrightarrow \frac{k[x, y]}{(x, y)^3}$$

Por el corolario 2.1.5 solo faltaría ver que $\Gamma = \frac{k[x,y]}{(x,y)^3}$ es salvaje.

Consideremos $B \in R(\Gamma, k\langle x, y\rangle)$ con $r(B) = 4$ y la acción de los generadores x e y de Γ dada por las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix}$$

Igual que en el ejemplo anterior si $T_x, T_y : M \longrightarrow M$ son las acciones de x e y sobre M respectivamente, si $F(.) = B \otimes (.)$ observamos que $F(M) = M^4$ como espacios vectoriales y la acción de Γ en $F(M)$ por sus generadores se puede ver como las dos matrices siguientes:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_x & T_y & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id & T_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora si $\psi : F(M) \longrightarrow F(N)$ es un morfismo de Γ módulos este es de la forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

con $A_j, B_j, C_j, D_j : M \longrightarrow N$ transformaciones k lineares.

Al final resulta que A verifica: $AT_x = T_x A$ y $AT_y = T_y A$ y ψ es de la forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ D_1 & D_2 & D_3 & A_1 \end{pmatrix}$$

Si ψ es un isomorfismo de $F(M)$ en $F(N)$ entonces $det(A)^4 = det(\psi) \neq 0$ así que $det(A) \neq 0$ por lo que A es un isomorfismo $k\langle x, y\rangle$ lineal de M en N, de modo que F conserva las clases de isomorfismo.

Si M es indescomponible y ψ es un endomorfismo idempotente de $F(M)$, entonces resulta que:

$$\begin{aligned} {A_1}^2 &= A_1 \\ B_1 &= B_1A_1 + A_1B_1 \\ C_1 &= C_1A_1 + A_1C_1 \\ D_3 &= D_3A_1 + A_1D_3 \\ D_2 &= D_2A_1 + A_1D_2 \\ D_1 &= D_1A_1 + D_2B_1 + C_1D_3 + A_1D_1 \end{aligned}$$

como M es indescomponible y A es un idempotente de $End(M)$ $A = 0$ o $A = id$. En ambos casos resulta que $G = L = T = S = R = 0$, por lo que ψ es 0 o la identidad en $F(M)$. Por lo tanto Γ es salvaje.

TEOREMA 4.1.7. *(Drozd - Bondarenko) Sea G un p-grupo finito no cíclico. Entonces son equivalentes:*

1. *kG es una k-álgebra mansa*
2. *$[G : G'] \leq 4$*
3. *$p = 2$ y G es uno de los siguientes grupos: D_n, SD_n, Q_n.*

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$

Primero veremos que si G es un grupo donde el álgebra kG es mansa entonces G/G' no es cíclico.

Ya sabemos que todo subgrupo maximal de G es normal (ya que $[G : M] = 2$), entonces tenemos $G' \subset M$. Por lo tanto:

$$G' \subset \bigcap_{M maximal} M$$

si $G/G' = \langle \bar{x} \rangle$ esto implicaría que $\langle x \rangle = G$, de no pasar esto $\langle x \rangle \subset M$ para algún grupo maximal, pero entonces tendríamos que $G = \langle x, G' \rangle \subset M$ lo que sería absurdo. Pero ya sabemos que G no es cíclico por lo tanto G/G' no es cíclico.

Entonces tenemos que G/G' es finito y abeliano pero no es cíclico. Supongamos que $[G : G'] \geq 5$. De lo último sabemos que existe un cociente isomorfo a $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ o a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Estos últimos grupos tienen como álgebras de grupo álgebras salvajes como lo vimos en el capítulo 2, y por lo tanto no son mansas por el teorema de Drozd.

Por lo tanto $[G : G'] \leq 4$ y como $[G : G'] \neq 1, 2, 3$ ya que si se diera eso G/G' sería cíclico. Entonces resulta que $[G : G'] = 4$.

$2 \Rightarrow 3$

Es el teorema 4.1.4.

$3 \Rightarrow 1$

Solamente tendríamos que ver que si G es D_n, SD_n o Q_n entonces son mansas.

- Para ver que D_n es manso recomendamos ver [BDr]
- Q_n es manso ya que como es subgrupo de SD_{n+1} y por lo tanto kSD_{n+1}/kQ_n es una extensión de álgebras por lo tanto también es mansa.
- Finalmente tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow \langle x^{2^{n-1}} \rangle \longrightarrow Q_{n+1} \longrightarrow D_n \longrightarrow 1$$

  Por lo tanto tenemos un morfismo sobreyectivo de grupos desde Q_{n+1} a D_n. Luego lo extendemos linealmente a un morfismo de álgebras sobre las respectivas algebras de grupo.

Si suponemos que kD_n no es mansa, entonces por el teorema de Drozd tiene que ser salvaje. Pero com kD_n es cociente de kQ_{n+1} entonces por el corolario 2.1.5 también kQ_{n+1} sería salvaje, lo que es absurdo. Por lo tanto kD_n debe ser un álgebra mansa. $\square$

Bibliografía

[A] I. Assem, *Algèbres et modules*, Masson, Ottawa (1997).

[BDr] V. M. Bondarenko, Yu. A. Drozd, *The representation type of finite groups*, J. Soviet Math. 20 (1982), 2515-2528.

[LRS] F. Larrión, A. G. Raggi-Cardenas, L Salmerón, *Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, México (1994).

[R] D. Robinson, *A course in Theory of Groups*, Springer-Verlag, E.U.A. (1982).

[V] Roberto Martínez-Villa, *Introducción a la teoría clásica de representaciones de álgebras*, Instituto de Matemática (U. N. A. M.), México (1990).

[W] D. A. R. Wallace, *Groups, rings, and fields*, Springer-Verlag, E.U.A. (1998).