Tesis de Maestría

Medida de Gabriel-Roiter en categorías de comódulos

Gustavo Mata

Orientador: Marcelo Lanzilotta (CMAT, FCIEN - IMERL, FING)

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

22 de noviembre de 2008

Resumen. En este trabajo consideramos las coálgebras de caminos $\Bbbk Q$ con Q carcaj cualquiera. Definimos la medida de Gabriel-Roiter para las categorías de comódulos y, utilizando dicha medida, mostramos cómo la forma del carcaj Q nos permite determinar si $\Bbbk Q$ tiene comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

Abstract. In this work we consider the path coalgebras $\Bbbk Q$ with Q a quiver. We define the Gabriel-Roiter measure for comodules categories and, using it, we prove when a path coalgebra have a indecomposable infinite dimensional comodule.

PALABRAS CLAVE: Cóalgebra, Coálgebra de Caminos, Medida de Gabriel-Roiter.

KEY WORDS: Coalgebra, Path Coalgebra, Gabriel-Roiter Measure.

Introducción

Este trabajo se enmarca en el área de Representaciones Álgebras, y en particular dentro de la teoría de Representaciones de Coálgebras. Nuestro objetivo es utilizar técnicas de Representaciones de Álgebras para definir la medida de Gabriel-Roiter para la categoría de comódulos sobre una coálgebra y obtener algunas aplicaciones a partir de ella.

La primer conjetura de Brauer-Thrall afirma que si un álgebra de Artin es de tipo acotado (todos los módulos indescomponibles finitamente generados tienen la longitud acotada) entonces es de tipo de representación finita (hay una cantidad finita de módulos indescomponibles finitamente generados salvo isomorfismos). Roiter probó en 1968 que la afirmación es cierta, y del esquema de inducción que aparecía en dicha prueba, dio la idea a Gabriel en 1972 de introducir un invariante que llamó medida de Roiter (actualmente llamado medida de Gabriel-Roiter) para las álgebras de tipo acotado.

Los siguientes trabajos que usan la medida de Gabriel-Roiter aparecieron en los años 2005 y 2006 ([Rin],[Rin2]) y fueron de autoría de Ringel. En estos artículos se vio la importancia de esta medida para las álgebras de Artin en general. En el año 2006 Krause extendió la medida de Gabriel-Roiter para las categorías abelianas de longitud finita (categorías abelianas donde se puede definir la longitud). Estas últimas contienen la categoría de módulos sobre un álgebra de Artin así como la categoría de comódulos sobre una coálgebra.

El trabajo consta de tres capítulos:

- El primero es preliminar. Allí se definen los conceptos básicos.

- En el segundo capítulo trabajamos con la medida de Gabriel-Roiter en las categorías de longitud finita. Aquí se verá entre otras cosas que la medida de Gabriel-Roiter parte en tres clases disjuntas los objetos de la categoría: la parte de despegue, la parte de aterrizaje y la parte central.

    - La parte de despegue está formada por los objetos que tienen las medidas más pequeñas. Los objetos simples se encuentan en esta clase.

- La parte de aterrizaje está formada por los objetos que tienen las medidas mayores. Aquí se encuentran los objetos inyectivos con longitud mayor.

Estas dos clases son discretas (en el sentido de que todo elemento no extremal tiene sucesor o predecesor inmediato).

- Finalmente, la parte central está formada por objetos que tienen medida mayor a cualquier objeto de la parte de despegue, y medida menor a cualquier objeto de la parte de aterrizaje.

▪ En el último capítulo vamos a considerar exclusivamente la categoría de comódulos sobre una coálgebra. Probaremos que si la coálgebra tiene un comódulo inyectivo indescomponible de dimensión infinita, entonces existen comódulos con medidas $\{1, 2, \ldots, n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además daremos una prueba, usando la medida de Gabriel-Roiter, que nos asegura la existencia de comódulos indescomponibles de dimensión infinita en algunas coálgebras.

Finalmente llegaremos a un teorema de clasificación para las coálgebras de caminos del estilo del teorema de Gabriel. Probaremos que una coálgebra de caminos tiene un comódulo indescomponible de dimensión infinita si y solamente si su grafo asociado:

1. no es Dynkin

   - $A_n =$ $\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[r, dash] & \cdot 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \cdot n{-}1 \arrow[r, dash] & \cdot n \end{tikzcd}$
   - $D_n =$ $\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[dr, dash] & & & & & \\ & \cdot 3 \arrow[r, dash] & \cdot 4 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \cdot n{-}2 \arrow[r, dash] & \cdot n{-}1 \\ \cdot 2 \arrow[ur, dash] & & & & & \end{tikzcd}$
   - $E_6 =$ $\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$
   - $E_7 =$ $\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$
   - $E_8 =$ $\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$

2. ni es de las siguientes formas

- $A_\infty = \quad \cdot \;\text{———}\; \cdot \;\text{———}\; \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$
- ${}_\infty A_\infty = \quad \cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \;\text{———}\; \cdots \cdot \;\text{———}\; \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$
- $D_\infty =$
$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
\cdot \arrow[dr] & & & & & & \\
& \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "", ->] & \cdot \arrow[r, ->] & \cdots \\
\cdot \arrow[ur] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Si bien este resultado aparece en [DS], la prueba que presentamos nos parece más elemental.

Índice general

1. Coálgebras y comódulos **11**
- 1.1. Conceptos Básicos 11
- 1.2. Comódulos de Coálgebras de Caminos 21
- 1.3. Subcoálgebras de Coálgebras de Caminos 30
- 1.4. Comódulos Inyectivos 36
  - 1.4.1. Conceptos Básicos y Ejemplos 36
  - 1.4.2. Envolventes Inyectivas 42

2. Medida de Gabriel-Roiter **45**
- 2.1. Cadenas y Funciones de Longitud 45
- 2.2. Categorías de Longitud Finita y Medida de Gabriel Roiter 50
  - 2.2.1. Categorías de Longitud finita 50
  - 2.2.2. Medida de Gabriel-Roiter 51
- 2.3. Parte de Despegue y Parte de Aterrizaje 55

3. Medida de Gabriel-Roiter y comódulos **69**
- 3.1. Medida de Gabriel-Roiter para Categorías de Comódulos 69
  - 3.1.1. Existencia de comódulos indescomponibles de dimensión infinita. 74
- 3.2. Aplicación a las Coálgebras de Caminos 75
  - 3.2.1. Funtores de Reflexión 75
  - 3.2.2. Teorema final 85

Capítulo 1

Coálgebras y comódulos

En este primer capítulo se verán los conceptos básicos para comprender el resto del trabajo. La primer sección contiene las propiedades principales que cumplen las coálgebras y los comódulos sobre una coálgebra. La segunda sección trabaja con los comódulos sobre coálgebras de caminos, en la cual damos una descripción de dicha categoría. En la sección que está a continuación se trabajará con las subcoálgebras de las coálgebras de caminos. Finalmente en la sección 4 veremos algunas propiedades que cumplen los comódulos inyectivos.

1.1. Conceptos Básicos

Para comenzar definiremos el concepto de coálgebra y comódulo que son duales a los de álgebra y módulo. Dichos conceptos son básicos para comprender el resto del trabajo.

Podemos definir las álgebras de la forma que sigue:

DEFINICIÓN 1.1.1. *Una $\Bbbk$-**álgebra** es una terna (A, μ, u) donde A es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\mu : A \otimes A \to A$, $u : \Bbbk \to A$ son transformaciones $\Bbbk$-lineales llamadas multiplicación y unidad respectivamente tales que:*

- $\mu(\mu \otimes 1_A) = \mu(1_A \otimes \mu)$ *(asociativa),*
- $\mu(1_A \otimes u)m^{-1} = 1_A = \mu(u \otimes 1_A)n^{-1}$,

donde $m : A \otimes \Bbbk \to A$ y $n : \Bbbk \otimes A \to A$ son los isomorfismos canónicos. Las dos condiciones anteriores pueden expresarse como la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes 1_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "m^{-1}"'] & A \\ A \otimes \Bbbk \arrow[r, "1_A \otimes u"'] & A \otimes A \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "n^{-1}"'] & A \\ \Bbbk \otimes A \arrow[r, "u \otimes 1_A"'] & A \otimes A \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Dualizando los diagramas de la definición 1.1.1 obtenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.2. *Una $\Bbbk$-**coálgebra** es una terna (C, Δ, ε) donde C es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \Bbbk$ son transformaciones $\Bbbk$-lineales llamadas comultiplicación y counidad respectivamente tales que:*

- $(\Delta \otimes 1_C)\Delta = (1_C \otimes \Delta)\Delta$ *(coasociativa),*
- $m(1_C \otimes \varepsilon)\Delta = 1_C = n(\varepsilon \otimes 1_C)\Delta$,

donde $m : C\otimes\Bbbk \to C$ y $n : \Bbbk\otimes C \to C$ son los isomorfismos canónicos. Las dos condiciones anteriores pueden expresarse como la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes 1_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "1_C\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \\ C \otimes C \arrow[r, "1_C\otimes\varepsilon"'] & C \otimes \Bbbk \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \\ C \otimes C \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1_C"'] & \Bbbk \otimes C \arrow[u, "n"'] \end{tikzcd}$$

Si nos ocupamos ahora de los morfismos, podemos definirlos de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 1.1.3. *Sean (A, μ_A, u_A) y (B, μ_B, u_B) dos $\Bbbk$-álgebras. Una transformación lineal $f : A \to B$ es un **morfismo** de $\Bbbk$-álgebras si:*

- $f\mu_A = \mu_B(f \otimes f)$
- $u_B = fu_A$

Dichas condiciones se pueden ver como los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \Bbbk \arrow[u, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Nuevamente, dualizando los diagramas en 1.1.3 obtenemos la definición que sigue.

DEFINICIÓN 1.1.4. *Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos $\Bbbk$-coálgebras. Una transformación lineal $f : C \to D$ es un **morfismo** de $\Bbbk$-coálgebras si:*

- $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C$

- $\varepsilon_C = \varepsilon_D f$

Notar que las condiciones anteriores equivalen a la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

Ahora daremos algunos ejemplos de coálgebras.

EJEMPLO 1.1.5. *Si $\Bbbk$ es un cuerpo entonces $(\Bbbk, \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra, siendo*

- $\Delta : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$ *el isomorfismo canónico y*
- $\varepsilon : \Bbbk \to \Bbbk$ *la identidad en $\Bbbk$.*

EJEMPLO 1.1.6. *Si S es un conjunto, sea $\Bbbk S$ el $\Bbbk$-espacio vectorial con base S. Así $(\Bbbk S, \Delta, \varepsilon)$ es una $\Bbbk$-coálgebra definiendo*

- $\Delta : \Bbbk S \to \Bbbk S \otimes \Bbbk S$ *como $\Delta(s) = s \otimes s$ para todo $s \in S$ y*
- $\varepsilon : \Bbbk S \to \Bbbk$ *como $\varepsilon(s) = 1$ para todo $s \in S$.*

Otro ejemplo muy importante para este trabajo es el siguiente:

EJEMPLO 1.1.7. *Un **grafo orientado** o **carcaj** es una cuaterna $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 (**vértices**) y Q_1 (**flechas**) son dos conjuntos y $s, t : Q_1 \to Q_0$ dos funciones tales que s define el comienzo de una flecha y t su final. Un **camino** μ de largo $l \geq 1$ con comienzo a y final b en Q es una sucesión*

$$\mu = (b|\alpha_l, \alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1|a)$$

donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq l$, $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, para todo $1 \leq k < l$ y $t(\alpha_l) = b$. Decimos que μ comienza en a y finaliza en b.

*Para cada vértice a en Q_0 definimos e_a un camino de largo 0 llamado el **camino trivial** en a. Si un camino de largo $l \geq 1$ tiene el mismo comienzo y final entonces diremos que es* *un* ***ciclo****.*

Diremos que el vértice a es un ***pozo (fuente)*** *si para cada* $\alpha \in Q_1$ $s(\alpha) \neq a$ $(t(\alpha) \neq a)$.

Se dirá que ν *es un subcamino de* μ *si* $\nu = (t(\alpha_k)|\alpha_k, \dots, \alpha_i|s(\alpha_i))$ *y* $\mu = (b|\alpha_l, \dots, \alpha_1|a)$ *donde* $1 \leq i \leq k \leq l$. *Si* ν *es un subcamino de* μ *entonces lo notaremos* $\nu \preceq \mu$. *Si además* $\mu \neq \nu$ *entonces lo notaremos* $\nu \prec \mu$.

Denotaremos $\mathbb{P}(a,-)$ *el conjunto de los caminos de* Q *que comienzan de* a, $\mathbb{P}(-,b)$ *el conjunto de los caminos que finalizan en* b, $\mathbb{P}(a,b)$ *el conjunto de caminos que comienzan en* a *y finalizan en* b *y* $\mathbb{P}$ *el conjunto de todos los caminos de* Q.

Definimos $\Bbbk Q$ *como el espacio vectorial con base todos los caminos de* Q. *Análogamente definimos* $\Bbbk\mathbb{P}(a,-)$ *como el espacio vectorial de base* $\mathbb{P}(a,-)$, $\Bbbk\mathbb{P}(-,b)$ *el espacio vectorial cuya base es* $\mathbb{P}(-,b)$ *y* $\Bbbk\mathbb{P}(a,b)$ *el espacio vectorial de base* $\mathbb{P}(a,b)$.

Dados dos caminos $\mu = (b|\alpha_l, \dots, \alpha_1|a)$ *y* $\nu = (d|\beta_k, \dots, \beta_1|c)$ *entonces se define el camino* $\nu\mu$ *como:*

$$\nu\mu = \begin{cases} (c|\beta_k, \dots, \beta_1, \alpha_l, \dots, \alpha_1|a), & \textit{si } b = c; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos $\Delta : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$ *y* $\varepsilon\Bbbk$
rightarrow$\Bbbk$ *dos transformaciones lineales de la siguiente manera:*

1. Δ
   - $\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$ *para todo* $i \in Q_0$
   - $\Delta(\mu) = \sum_{\nu\nu'=\mu} \nu \otimes \nu'$ *con* μ *camino de largo* $l \geq 1$
2. ε
   - $\varepsilon(e_i) = 1$ *para todo* $i \in Q_0$
   - $\varepsilon(\mu) = 0$ *con* μ *camino de largo* $l \geq 1$

Veamos que la terna $(\Bbbk Q, \Delta, \varepsilon)$ *es una coálgebra.*

Si e_i *es un camino trivial entonces* $(\Delta \otimes 1)\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i \otimes e_i = (1 \otimes \Delta)\Delta(e_i)$ *y* $n(\varepsilon \otimes 1)\Delta(e_i) = e_i = m(1 \otimes \varepsilon)\Delta(e_i)$.

Si μ *es un camino no trivial* $(\Delta \otimes 1)\Delta(\mu) = \sum_{\nu_1\nu_2\nu_3=u} \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \nu_3 = (1 \otimes \Delta)\Delta(\mu)$ *y* $n(\varepsilon \otimes 1)\Delta(\mu) = n(\varepsilon \otimes 1)(\sum_{\nu\nu'=\mu} \nu \otimes \nu') = n(\varepsilon(e_{t(\mu)}) \otimes \mu) = \mu$ *(análogamente* $m(1 \otimes \varepsilon)\Delta(\mu) = \mu$*).*

OBSERVACIÓN 1.1.8. *Si* (C, Δ, ε) *es una* $\mathbb{k}$*-coálgebra entonces* $(\hom_{\mathbb{k}}(C, \mathbb{k}), *, \varepsilon)$ *tiene estructura de* $\mathbb{k}$*-álgebra definiemdo:*

- $(f * g)(c) = \mu(f \otimes g)\Delta(c)$ *con* $f, g \in \hom_{\mathbb{k}}(C, \mathbb{k})$*, para cada* $c \in C$*,*

siendo $\mu : \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \to \mathbb{k}$ *definida por* $\mu(a \otimes b) = ab$

Demostración:

- Veamos que ε es la unidad
  $(\varepsilon * g)(c) = \mu(\varepsilon \otimes g)\Delta(c) = \mu(1_{\mathbb{k}} \otimes g)(\varepsilon \otimes 1_C)\Delta(c) = \mu(1_{\mathbb{k}} \otimes g)(1 \otimes c) = g(c)$
  Análogamente $g * \varepsilon = g$.
- Veamos ahora que $*$ es asociativo
  $((f*g)*h)(c) = \mu(f*g \otimes h)\Delta(c) = \mu(1_{\mathbb{k}} \otimes h)(f*g \otimes 1_C)\Delta(c) = \mu(1_{\mathbb{k}} \otimes h)(\mu \otimes 1_C)(f \otimes g \otimes 1_C)(\Delta \otimes 1_C)\Delta(c) = \mu(\mu \otimes 1_{\mathbb{k}})(f \otimes g \otimes h)(\Delta \otimes 1_C)\Delta(c) = \mu(1_{\mathbb{k}} \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h)(1_C \otimes \Delta)\Delta(c) = \mu(f \otimes 1_{\mathbb{k}})(1_C \otimes \mu)(1_C \otimes g \otimes h)(1_C \otimes \Delta)\Delta(c) = \mu(f \otimes g * h)\Delta(c) = (f * (g * h))(c)$. ■

A partir de ahora denotaremos C^* en lugar de $(\hom_{\mathbb{k}}(C, \mathbb{k}), *, \varepsilon)$.

DEFINICIÓN 1.1.9. *Sea* (C, Δ, ε) *una* $\mathbb{k}$*-coálgebra. Un subespacio vectorial* D *de* C *es una* ***subcoálgebra*** *de* C *si* $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$*. En particular* $(D, \Delta|_D, \varepsilon|_D)$ *es también una* $\mathbb{k}$*-coálgebra.*

OBSERVACIÓN 1.1.10. *La intersección de subcoálgebras de una coálgebra* C *es también una subcoálgebra de* C*.*

DEFINICIÓN 1.1.11. *Sea* C *una* $\mathbb{k}$*-coálgebra, entonces:*

- *Si* $S \subseteq C$ *entonces la* ***subcoálgebra generada por*** S *es la intersección de todas las subcoálgebras de* C *que contienen a* S*.*
- C *es una coálgebra* ***finitamente generada*** *si existe* $S \subseteq C$ *finito tal que* C *es igual a la subcoálgebra generada por* S*.*

DEFINICIÓN 1.1.12. *Si* C *es una* $\mathbb{k}$*-coálgebra, diremos que* C *es* ***simple*** *si* $C \neq \{0\}$ *y sus únicas subcoálgebras son* $\{0\}$ *y* C*.*

El concepto de coálgebra es dual al de álgebra. De manera análoga la noción de comódulo aparece como dual a la noción de módulo.

Se puede definir los módulos sobre un álgebra de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.1.13. *Sea (A, μ, u) una $\Bbbk$-álgebra, un A-**módulo a derecha (izquierda)** es un par (M, ρ) donde M es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\rho : M \otimes A \to M$ $(\rho : A \otimes M \to M)$ es una transformación $\Bbbk$-lineal, tales que*

- $\rho(\rho \otimes 1_A) = \rho(1_M \otimes \mu)$ $(\rho(1_A \otimes \rho) = \rho(\mu \otimes 1_M))$
- $\rho(1_M \otimes u)m^{-1} = 1_M$ $(\rho(u \otimes 1_M)n^{-1} = 1_M)$ *siendo* $m : M \otimes \Bbbk \to M$ $(n : \Bbbk \otimes M \to M)$ *el isomorfismo canónico.*

Las condiciones de módulo a derecha se expresan mediante los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_M \otimes \mu"] \arrow[d, "\rho \otimes 1_A"'] & M \otimes A \arrow[d, "\rho"] \\
M \otimes A \arrow[r, "\rho"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "m^{-1}"] \arrow[d, "1_M"'] & M \otimes \Bbbk \arrow[d, "1_M \otimes u"] \\
M & M \otimes A \arrow[l, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

Si dualizamos los diagramas de 1.1.13 obtenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.14. *Sea (C, Δ, ε) una $\Bbbk$-coálgebra, un C-**comódulo a derecha (izquierda)** es un par (M, ρ) donde M es un espacio vectorial y $\rho : M \to M \otimes C$ $(\rho : M \to C \otimes M)$ es una transformación lineal, tales que*

- $(\rho \otimes 1_C)\rho = (1_M \otimes \Delta)\rho$ $((1_C \otimes \rho)\rho = (\Delta \otimes 1_M)\rho)$
- $m(1_M \otimes \varepsilon)\rho = 1_M$ $(m(\varepsilon \otimes 1_M)\rho = 1_M)$ *siendo* $m : M \otimes \Bbbk \to M$ $(n : \Bbbk \otimes M \to M)$ *el isomorfismo canónico.*

Las condiciones de comódulo a derecha se expresan mediante los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "1_M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes 1_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "1_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "1_M \otimes \varepsilon"] \\
M & M \otimes \Bbbk \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.1.15. *Si (C, Δ, ε) es una $\Bbbk$-coálgebra entonces (C, Δ) es un C- comódulo a derecha e izquierda. La conmutatividad de los diagramas anteriores se verifica a partir de la propiedad asociativa de C.*

Ahora definiremos los morfismos de módulos de la manera siguiente:

DEFINICIÓN 1.1.16. *Si (M, ρ_M) y (N, ρ_N) son dos A-módulos a derecha (izquierda), decimos que $f : M \to N$ es un* ***morfismo*** *de A-módulos a derecha (izquierda) si*

- $\rho_N(f \otimes 1_A) = f\rho_M$ $(\rho_N(1_A \otimes f) = f\rho_M)$

Las condiciones de morfismo de módulo a derecha se expresan mediante los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "f\otimes 1_A"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \otimes A \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Si existe $g : N \to M$ otro morfismo de A-módulos a derecha (izquierda) tal que $fg = 1_N$ y $gf = 1_M$ decimos que f es un ***isomorfismo de módulos a derecha (izquierda)*** *y que N y M son* ***isomorfos como módulos a derecha (izquierda)*** *y lo denotamos $N \cong M$.*

Si dualizamos los diagramas en 1.1.16 obtenemos la definición que sigue:

DEFINICIÓN 1.1.17. *Si (M, ρ_M) y (N, ρ_N) son dos C-comódulos a derecha (izquierda), decimos que $f : M \to N$ es un* ***morfismo*** *de C-comódulos a derecha (izquierda) si*

- $(f \otimes 1_C)\rho_M = \rho_N f$ $((1_C \otimes f)\rho_M = \rho_N f)$

Las condiciones de morfismo de comódulo a derecha se expresan mediante los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f\otimes 1_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Si existe $g : N \to M$ otro morfismo de C-comódulos a derecha tal que $fg = 1_N$ y $gf = 1_M$ decimos que f es un ***isomorfismo de comódulos a derecha (izquierda)*** *y que N y M son* ***isomorfos como comódulos a derecha (izquierda)*** *y lo denotamos $N \cong M$.*

DEFINICIÓN 1.1.18. *Sea (M, ρ) un comódulo a derecha (izquierda), un subespacio vectorial N de M es un* ***subcomódulo*** *de M si $\rho(N) \subseteq N \otimes C$ $(\rho(N) \subseteq C \otimes N)$. En particular $(N, \rho|_N)$ es un comódulo a derecha (izquierda).*

DEFINICIÓN 1.1.19. *Decimos que un comódulo a derecha (izquierda) M es* ***descomponible*** *si $M \cong N_1 \oplus N_2$ con N_1 y N_2 comódulos a derecha (izquierda) no triviales. En caso contrario decimos que M es* ***indescomponible****.*

DEFINICIÓN 1.1.20. *Si M es un comódulo a derecha (izquierda), decimos que es* ***simple*** *cuando $M \neq \{0\}$ y sus únicos subcomódulos son M y $\{0\}$. Decimos que M es un comódulo a derecha (izquierda)****semisimple*** *si es 0 o si $M \cong \oplus_i S_i$ donde los comódulos a derecha (izquierda) S_i son simples.*

DEFINICIÓN 1.1.21. *Dado un comódulo a derecha (izquierda) M, el* ***zócalo*** *de M es la suma de todos los subcomódulos simples de M. Al zócalo de un comódulo a derecha (izquierda) M lo denotaremos como $Soc(M)$.*

OBSERVACIÓN 1.1.22. *La intersección de subcomódulos de un comódulo a derecha (izquierda) M es también un subcomódulo de M.*

DEFINICIÓN 1.1.23. *Sea M un C-comódulo a derecha, entonces:*

- *Si $S \subseteq C$ entonces el* ***subcomódulo generado por*** *S es la intersección de todos los subcomódulos de M que contienen a S.*

- *M es un comódulo a derecha (izquieda)* ***finitamente generado*** *si existe $S \subseteq M$ finito tal que M es igual al subcomódulo generado por S.*

OBSERVACIÓN 1.1.24. *Los C-comódulos a derecha (izquierda) y los morfismos de comódulos forman una categoría que es abeliana. A esta categoría la notaremos $\mathcal{M}^C$ $({}^C\mathcal{M})$. La categoría plena formada por los C-comódulos a derecha (izquierda) finitamente generados, también forman una categoría abeliana que denotaremos $\mathcal{M}^C_f$ $({}^C\mathcal{M}_f)$.*

Si la coálgebra es de dimensión finita tenemos los siguientes resultados que nos relacionan ${}^C\mathcal{M}_f$, ${}_{C^*}\mathcal{M}_f$ y $\mathcal{M}_{C^*f}$.

PROPOSICIÓN 1.1.25. *Si C es una $\mathbb{k}$-coálgebra, definimos una correspondencia $\mathfrak{F}$: ${}^C\mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_{C^*f}$ mediante lo siguiente:*

- *Si (M, ρ) es un comódulo a izquierda entonces $\mathfrak{F}(M) = (M, \mu)$ donde:*

$$\mu \quad = \quad M \otimes C^* \xrightarrow{\rho\otimes 1} C \otimes M \otimes C^* \xrightarrow{1\otimes\tau} C \otimes C^* \otimes M \xrightarrow{ev\otimes 1_M} \mathbb{k} \otimes M \xrightarrow{\cong} M$$

  Siendo $\tau : M \otimes C^* \to C^* \otimes M$ tal que $\tau(m \otimes c) = c \otimes m$, y $ev : C \otimes C^* \to \mathbb{k}$ la evaluación.

- *Si $f : M \to N$ es morfismo de comódulos entonces $\mathfrak{F}(f) = f$.*

Entonces la correspondencia $\mathfrak{F}$: ${}^C\mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_{C^*f}$ definida arriba es un funtor.

Demostración:

Ver [Swe] capítulo 2. ■

TEOREMA 1.1.26. *Si C es una $\Bbbk$-coálgebra de dimensión finita entonces el funtor*

$$\mathfrak{F} : {}^{C}\mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_{C^*f}$$

definido en 1.1.25 es una equivalencia.

Demostración:

Ver [Swe] capítulo 2. ■

COROLARIO 1.1.27. *Si C es una $\Bbbk$-coálgebra de dimensión finita entonces existe una dualidad $\mathfrak{D} : {}^{C}\mathcal{M}_f \to {}_{C^*}\mathcal{M}_f$.*

Demostración:

La dualidad surge de componer la equivalencia de 1.1.26 y la dualidad entre $\mathcal{M}_{C^*f}$ y ${}_{C^*}\mathcal{M}_f$. ■

OBSERVACIÓN 1.1.28. *En forma análoga se prueba que si $\dim_{\Bbbk} C$ que existe una dualidad $\mathfrak{D} : \mathcal{M}_f^C \to \mathcal{M}_{C^*f}$*

Para terminar esta sección, probaremos que las coálgebras y los comódulos finitamente generados son de dimensión finita. Vale la pena observar que esto no se cumple para las álgebras, ya que, por ejemplo, el álgebra de polinomios $\Bbbk[X]$ es finitamente generada como álgebra por X y como módulo sobre sí misma por 1 pero es de dimensión infinita.

TEOREMA 1.1.29. ***Teorema Fundamental de los Comódulos.***
Dado un C-comódulo a derecha (M, ρ), si $m \in M$ entonces existe un subcomódulo N de M con $\dim_k N < \infty$ y $m \in N$.

Demostración:

Dada $\{c_i\}_{i \in I}$ una base de C, podemos escribir $\rho(m)$ así

$$\rho(m) = \sum_i w_i \otimes c_i$$

siendo $\{w_i\}_{i \in I} \subseteq M$ y todos los w_i salvo una cantidad finita son no nulos. Además podemos escribir $\Delta(c_i)$ de la siguiente manera

$$\Delta(c_i) = \sum_{j,k} \alpha_{ijk} c_j \otimes c_k,$$

donde los α_{ijk} están en el cuerpo. Por la definición de comódulo sabemos que se debe cumplir la siguiente ecuación

$$(\rho \otimes 1_C)\rho = (1_M \otimes \Delta)\rho$$

Esta última ecuación nos queda como sigue si evaluamos en m

$$\sum_i \rho(w_i) \otimes c_i = \sum_{s,j,k} w_s \otimes \alpha_{sjk} c_j \otimes c_k$$

Por lo tanto $\rho(w_i) = \sum_{s,j} w_s \otimes \alpha_{sji} c_j$ debido a que $\{c_i\}_{i \in I}$ es una base de C. Entonces tomando N el espacio vectorial generado por $\{m, w_i\}$ nos queda un subcómodulo de M con generador lineal finito. ■

COROLARIO 1.1.30. *Si M es un C-comódulo a derecha simple entonces* $\dim_{\Bbbk}(M) < \infty$

Demostración:

Si M es simple, está generado por un sólo elemento, luego aplicamos 1.1.29. ■

COROLARIO 1.1.31. *Si M es un C-comódulo a derecha finitamente generado entonces* $\dim_{\Bbbk}(M) < \infty$.

Demostración:

Si M está generado por una cantidad finita de elementos, aplicamos 1.1.29 para cada elemento. ■

OBSERVACIÓN 1.1.32. *Si M es un C-comódulo y $M \neq \{0\}$ entonces $Soc(M) \neq \{0\}$.*
Demostración:

Tomemos $N \subset M$ un subcomódulo finitamente generado. Por 1.1.31 tiene dimensión finita. Por lo tanto si tomamos el subcomódulo de dimensión mínima (distinto de $\{0\}$) dentro de N, éste será simple. ■

OBSERVACIÓN 1.1.33. *Si M es un C-comódulo a derecha descomponible entonces $Soc(M)$ no es simple.*
Demostración:

Si $M \cong M_1 \oplus M_2$ con $M_i \neq \{0\}$ para $i = 1, 2$. Entonces $Soc(M_1) \oplus Soc(M_2) \subseteq Soc(M)$, por lo tanto, usando 1.1.32 se tiene que $Soc(M)$ no es simple. ■

TEOREMA 1.1.34. ***Teorema Fundamental de las Coálgebras.***
Dada una coálgebra C, si $c \in C$ entonces existe una subcoálgebra $D \subseteq C$ con $\dim_k D < \infty$ y $c \in D$.

Demostración:

Aplicamos el teorema 1.1.29 a $M = C$ con la estructura vista en 1.1.15. Entonces existe un subcomódulo N de C con $\dim_{\Bbbk} N < \infty$ y $c \in N$.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de N. En esta base tenemos $\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes c_{ij}$. Aplicando la propiedad coasociativa de Δ obtenemos:

$$(\Delta \otimes 1_C)\Delta(v_j) = (1_C \otimes \Delta)\Delta(v_j)$$

Por lo tanto llegamos a que $\sum_i v_i \otimes \Delta(c_{ij}) = \sum_{i,k} v_k \otimes c_{ki} \otimes c_{ij}$. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de N entonces $\Delta(c_{ij}) = \sum_s c_{is} \otimes c_{sj}$. Como los $\{c_{ij}\}_{i,j}$ son finitos debido a que por cada i hay finitos $\{c_{ij}\}_j$, tenemos que las combinaciones lineales de $\{v_i, c_{ij}\}$ forman una coálgebra, pues $\Delta(v_j) \in \Bbbk\{v_i, c_{ij}\} \otimes \Bbbk\{v_i, c_{ij}\}$ y $\Delta(c_{ij}) \in \Bbbk\{v_i, c_{ij}\} \otimes \Bbbk\{v_i, c_{ij}\}$,y además es de dimensión finita. ■

1.2. Comódulos de Coálgebras de Caminos

Ahora se definirán las representaciones de un carcaj. En particular nos interesarán las llamadas representaciones racionales por su relación con los comódulos sobre la coálgebra asociada al carcaj.

A partir de ahora trabajaremos siempre con comódulos a derecha, por lo que los llamaremos siempre comódulos.

DEFINICIÓN 1.2.1. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Una* ***representación*** *M se define de la siguiente manera*

- *Para cada vértice $a \in Q_0$ le asociamos un $\Bbbk$-espacio vectorial M_a.*
- *Para cada flecha $\alpha \in Q_1$ le asociamos una transformación $\Bbbk$-lineal $T_\alpha : M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$.*

Esta representación la denotaremos $M = (M_a, T_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ o de manera más simple $M = (M_a, T_\alpha)$.

DEFINICIÓN 1.2.2. *Sea $M = (M_a, T_\alpha)$ una representación, entonces*

- *si μ es un camino de $\mathbb{P}$ de la forma $\mu = \alpha_n \ldots \alpha_2\alpha_1$, entonces definimos $T_\mu = T_{\alpha_n} \ldots T_{\alpha_2} T_{\alpha_1}$,*

- *Si e_a es un camino trivial, entonces definimos $T_{e_a} = 1_{M_a}$.*

DEFINICIÓN 1.2.3. *Dadas $M = (M_a, T_\alpha)$ y $M' = (M'_a, T'_\alpha)$ dos representaciones de Q, un **morfismo** de representaciones $f : M \to M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de transformaciones $\Bbbk$-lineales $f_a : M_a \to M'_a$ tales que para toda $\alpha : a \to b$ en Q_1 se tiene que $T'_\alpha f_a = f_b T_\alpha$. Se representa equivalentemente esta condición con un diagrama conmutativo para cada $\alpha \in Q_1$.*

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "T'_\alpha"'] & M'_b \end{tikzcd}$$

OBSERVACIÓN 1.2.4. *Las representaciones y los morfismos de representaciones forman una categoría abeliana. La denotaremos $Rep_\Bbbk Q$.*

DEFINICIÓN 1.2.5. *Decimos que una representación $M = (M_a, T_\alpha)$ es **racional** si para cada vértice a se cumple que para cada $x \in M_a$ el conjunto $\{\mu \in \mathbb{P}(a, \_) : T_\mu(x) \neq 0\}$ es finito.*

La subcategoría plena de $Rep_\Bbbk(Q)$ formada por las representaciones racionales la denotaremos $Rat_\Bbbk(Q)$.

DEFINICIÓN 1.2.6. *Dados U un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\phi : \mathbb{P} \times U \to U$ lineal en la segunda variable con $\phi_\mu(m) = \phi(\mu, m)$ con $(\mu, m) \in \mathbb{P} \times U$ que para cada $m \in U$ se anula en casi todo μ. Sea $\rho_U : U \to U \otimes \Bbbk Q$ definida por $\rho_U(m) = \sum_{\mu \in \mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu$.*

LEMA 1.2.7. *En el contexto de la definición 1.2.6 (U, ρ_U) es un comódulo si y solamente si se cumplen*

1. *Para todo $m \in U$, $\mu, \nu \in \mathbb{P}$ entonces $\phi_\nu(\phi_\mu(m)) = \begin{cases} \phi_{\nu\mu}(m) & \text{si } \nu\mu \neq 0; \\ 0 & \text{si } \nu\mu = 0. \end{cases}$*

2. *Para todo $m \in U$ entonces $m = \sum_{a \in Q_0} \phi_{e_a}(m)$.*

Demostración:

1. $(\rho_U \otimes 1_{\Bbbk Q})\rho_U(m) = (1_U \otimes \Delta)\rho_U(m)$ para todo $m \in U$ si y solamente si

   $(\rho_U \otimes 1_{\Bbbk Q})(\sum_{\mu \in \mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu) = (1_U \otimes \Delta)(\sum_{\mu \in \mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu)$ para todo $m \in U$ si y solamente si

$\sum_{\mu\in\mathbb{P}}(\sum_{\nu\in\mathbb{P}}\phi_\nu(\phi_\mu(m))\otimes\nu)\otimes\mu = \sum_{\eta\in\mathbb{P}}\phi_\eta(m)\otimes(\sum_{\nu_1\nu_2=\eta}\nu_1\otimes\nu_2)$ para todo $m\in U$ y $\nu,\mu,\eta\in\mathbb{P}$ si y solamente si

$\phi_\nu(\phi_\mu(m)) = \phi_{\nu\mu}(m)$

Lo que es equivalente a 1)

2. $(1_U\otimes\varepsilon)\rho_U(m) = m$ si y solamente si

   $(1_U\otimes\varepsilon)(\sum_{\mu\in\mathbb{P}}\phi_\mu(m)\otimes\mu) = m$ si y solamente si

   $\sum_{\mu\in\mathbb{P}}\phi_\mu(m)\delta_{0,l(\mu)} = m$ si y solamente si

   $\sum_{a\in Q_0}\phi_{e_a}(m) = m.$ ■

PROPOSICIÓN 1.2.8. *1. Si $M = (M_a, T_\alpha)_{a\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ es una representación racional entonces $\oplus_{a\in Q_0}M_a$ tiene estructura de $\Bbbk Q$-comódulo, via $\rho_M(m) = \sum T_\mu(m)\otimes\mu$.*

2. Si $f: M\to N$ es un morfismo de representaciones entre dos representaciones racionales entonces $\oplus f_a : \oplus M_a \to \oplus N_a$ es un morfismo de $\Bbbk Q$-comódulos.

Demostración:

1. Haciendo un abuso de notación, llamamos $M = \oplus_{a\in Q_0}M_a$ Dado $m\in M_a$ definimos $\rho_M : M\to M\otimes\Bbbk$ mediante $\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(a,-)}T_\mu(m)\otimes\mu$. Esta suma tiene sentido debido a que la representación es racional.

   Definimos $\phi_\mu(m) = \begin{cases} T_\mu(m), & \text{si } m\in M_{s(\mu)};\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$

   Dicha ϕ cumple las propiedades 1) y 2) del lema 1.2.7, por lo tanto (M,ρ_M) tiene estructura de $\Bbbk Q$-comódulo a derecha.

2. Ahora si $f: M\to N$ es un morfismo de representaciones entre dos representaciones racionales $M = (M_a, T_\alpha)$ y $N = (N_a, S_\alpha)$ entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} M_b \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "f_b"'] & M_{b'} \arrow[d, "f_{b'}"] \\ N_b \arrow[r, "S_\alpha"'] & N_{b'} \end{tikzcd}$$

siendo $s(\alpha) = b$ y $t(\alpha) = b'$. Queremos probar que $\oplus f_a : \oplus M_a \to \oplus N_a$ es un morfismo de comódulos.

Si $m \in M_b$ se tiene que

$(\oplus f_a \otimes 1_C)\Delta_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(b,-)}(\oplus f_a)T_\mu(m) \otimes \mu = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(b,-)} f_{t(\mu)}T_\mu(m) \otimes \mu.$

Por otro lado

$\rho_N((\oplus f_a)(m)) = \rho_N(f_b(m)) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(b,-)} S_\mu f_b(m) \otimes \mu.$

Como $f_{t(\mu)}T_\mu(m) = S_\mu f_b(m)$ por ser f un morfismo de representaciones, se obtiene el resultado. ■

DEFINICIÓN 1.2.9. *Sea $\Bbbk Q_0$ el espacio vectorial con base $\{e_a : a \in Q_0\}$. Definimos $\Pi : \Bbbk Q \to \Bbbk Q_0$ con:*

$$\Pi(\mu) = \begin{cases} 0, & si\ l(\mu) > 1; \\ \mu, & si\ l(\mu) = 0. \end{cases}$$

extendida por linealidad.

Dado (M, ρ_M) un $\Bbbk Q$-comódulo, sabemos que para cada $m \in M$ podemos escribir de manera única

$$\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu$$

con $\phi_\mu(m) \in M$ porque $\mathbb{P}$ es una base de $\Bbbk Q$, siendo $\phi_\mu : M \to M$ $\Bbbk$-lineal por ser ρ_M $\Bbbk$-lineal. Entonces definimos $V = (V_a, T_\alpha)_{a\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ donde

- $V_a = \{m \in M : (1_M \otimes \Pi)\rho_M(m) = m \otimes e_a\}$
- $T_\alpha(m) = \phi_\alpha(m)$ *donde* $\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu.$

LEMA 1.2.10. *Sea (M, ρ_M) un $\Bbbk Q$-comódulo, entonces para todo $a \in Q_0$ tenemos*

1. $V_a = \{m \in M : m = \phi_{e_a}(m)\}$
2. $\phi_\alpha(V_a) \subseteq V_b$ *donde* $s(\alpha) = a$ *y* $t(\alpha) = b$.

Por lo tanto $(V_a, T_\alpha)_{a\in Q_0,\alpha\in\mathbb{P}}$ es una representación.

Demostración:

1. $(1_M \otimes \Pi)\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \Pi(\mu) = \sum_{i\in Q_0} \phi_{e_i}(m) \otimes e_i$,

   entonces $(1_M \otimes \Pi)\rho_M(m) = m \otimes e_a$ si y solamente si $\begin{cases} \phi_{e_i}(m) = m, & \text{si } i = a; \\ \phi_{e_i}(m) = 0, & \text{si } i \neq a. \end{cases}$

   entonces $V_a \subseteq \{m \in M : m = \phi_{e_a}(m)\}$.

   Ahora si $m = \phi_{e_a}(m)$,

   $(1_M \otimes \Pi)\rho_M(m) = (1_M \otimes \Pi)\rho_M(\phi_{e_a}(m)) = \sum_{i\in Q_0} \phi_{e_i}\phi_{e_a}(m) \otimes e_i = \phi_{e_a}(m) \otimes e_a$, donde la última igualdad surge de aplicar 1.2.7, dado que M es un kQ-comódulo.

2. Sea $m \in V_a$ entonces $\phi_{e_b}(\phi_\alpha(m)) = \phi_{e_b\alpha}(m) = \phi_\alpha(m)$. Entonces $\phi_\alpha(m) \in V_b$. ■

LEMA 1.2.11. *Si (M, ρ_M) es un $\Bbbk Q$-comódulo, entonces para todo $a \in Q_0$ y $m \in V_a$ tenemos*

1. *Si $\mu \notin \mathbb{P}(a, -)$, entonces $\phi_\mu(m) = 0$;*
2. *$T_{e_a}(m) = \phi_{e_a}(m)$;*
3. *si $\mu = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ para $n > 0$, entonces $T_\mu(m) = \phi_\mu(m)$.*

Demostración:

1. $m = \phi_{e_a}(m)$ entonces $\phi_\mu(m) = \phi_{\mu e_a}(m) = 0$ si μ no está en $\mathbb{P}(a, -)$.
2. $T_{e_a}(m) = \phi_{e_a}(m) = m$.
3. $T_\mu(m) = T_{\alpha_n}T_{\alpha_{n-1}}\dots T_{\alpha_1}(m) = \phi_{\alpha_n}\phi_{\alpha_{n-1}}\dots\phi_{\alpha_1} = \phi_\mu(m)$. ■

PROPOSICIÓN 1.2.12. *Si V es la representación sobre Q obtenida del $\Bbbk Q$-comódulo M, entonces*

1. *V es racional.*
2. *$M = \oplus V_a$ como espacios vectoriales.*

3. *Para todo $a \in Q_0$ y $m \in V_a$ tenemos*

$$\rho_M(m) = \sum_{\mu \in \mathbb{P}(a,-)} T_\mu(m) \otimes \mu$$

Demostración:

1. Si m está en V_a entonces $\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}} \phi_\mu(m) \otimes \mu$, por lo que hay una cantidad finita de $\phi_\mu(m)$ no nulos. Entonces $\{\mu \in \mathbb{P}(a,-) : T_\mu(m) \neq 0\}$ es finito.

2. $m = \sum \phi_{e_a}(m)$, con cada $\phi_{e_a}(m) \in V_a$. Además $V_a \cap V_b = 0$ porque $\phi_{e_a}\phi_{e_b} = 0$.

3. Si $m \in V_a$ entonces $\phi_{e_a}(m) = m$, por lo tanto $\rho_M(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(a,-)} T_\mu(m) \otimes \mu$. ■

EJEMPLO 1.2.13. *Calculemos la representación asociada a $\Bbbk Q$.*

Recordando 1.1.15 sabemos que $\Bbbk Q$ tiene estructura de $\Bbbk Q$-comódulo y por 1.2.9 podemos calcular la representación racional asociada.

- $V_a = \{m \in \Bbbk Q : m = \phi_{e_a}(m)\}$
  $= \{m \in \Bbbk Q :$ *caminos de* $\Bbbk Q$ *que empiezan en* a $\} = \Bbbk\mathbb{P}(a,-)$

- *Si α es tal que $s(\alpha) = a$ y $t(\alpha) = b$ entonces $T_\alpha : V_a \to V_b$ y dado un camino $\mu \in V_a$*

$$T_\alpha(\mu) = \begin{cases} \nu, & \textit{si } \mu = \nu\alpha; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 1.2.14. *Si $f : M \to N$ es un morfismo de comódulos entonces $(f_a)_{a\in Q_0} : V \to W$ es un morfismo de representaciones, siendo V y W las representaciones asociadas a M y N respectivamente y $f_a = f|_{V_a}$.*

Demostración:

Sean $V = (V_a, T_\alpha)$ y $W = (W_a, S_\alpha)$. Tomemos $m \in V_a$, ya sabemos que $(f \otimes 1_C)\rho_M(m) = \rho_N(f(m))$. Además por 1.2.12 tenemos

- $(f \otimes 1_C)\rho_M(v) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(a,-)} fT_\mu(v) \otimes \mu$.

- $\rho_N(f(v)) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(a,-)} S_\mu(f(v)) \otimes \mu$.

Entonces $fT_\mu(m) = S_\mu f(m)$, para todo $\mu \in \mathbb{P}(a,-)$. Por lo tanto $(f_a)_{a\in Q_0}$ es un morfismo de representaciones. ■

Los resultados de esta sección nos llevan al siguiente teorema, que nos muestra que podemos trabajar con representaciones racionales para interpretar los comódulos sobre una coálgebra de caminos.

DEFINICIÓN 1.2.15. *Sean* $\Psi : \mathcal{M}^{\Bbbk Q} \to Rat_{\Bbbk}(Q)$ *y* $\Phi : Rat_{\Bbbk}(Q) \to \mathcal{M}^{\Bbbk Q}$ *tales que*

- $\Phi(M) = (M_a, T_\alpha)$ *como en 1.2.9 y* $\Phi(f) = (f|_{M_a})_{a\in Q_0}$ *si* $f : M \to N$ *y*
- $\Psi((M_a, T_\alpha)) = (\oplus M_a, \Delta)$ *y* $\Psi((f_a)_{a\in Q_0}) = \oplus f_a$ *si* $(f_a)_{a\in Q_0} : (M_a, T_\alpha) \to (N_a, S_\alpha)$ *como en 1.2.8.*

Con las construcciones hechas hasta ahora obtenemos la siguiente observación:

OBSERVACIÓN 1.2.16. Φ *y* Ψ *son funtores.*

TEOREMA 1.2.17. $\Psi : \mathcal{M}^{\Bbbk Q} \to Rat_{\Bbbk}(Q)$ *es una equivalencia cuya casi inversa es* Φ.

Demostración:

Supongamos que $V = (V_a, T_\alpha)$ una representación. Por 1.2.8 sabemos que $\Phi(V) = (M, \Delta)$ es un comódulo donde $M = \oplus V_a$ como espacio vectorial y si $m \in V_a$ entonces $\Delta(m) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(a,-)} \phi_\mu(m) \otimes \mu$ como en 1.2.8. Sea $\Psi(M) = W = (W_a, S_\alpha)$.

Probemos que $W \cong V$.

- $W_a = V_a$.

  $W_a = \{m \in M : m = \phi_{e_a}(m)\} = \{m \in M : m = \Pi_{V_a}(m)\} = V_a$

- $T_\alpha = S_\alpha$.

  Si $m \in W_a$ y $s(\alpha) = a$ entonces $S_\alpha(m) = \phi_\alpha(m) = T_\alpha(m)$ donde la primer igualdad es por 1.2.8 y la segunda por 1.2.9.

Si $(f_a)_{a\in Q_0} : \Phi(M) \to \Phi(N)$ es un morfismo de representaciones, por 1.2.8 sabemos que $\oplus f_a : M \to N$ es un morfismo de comódulos y se cumple que $\Phi(\oplus f_a) = (f_a)_{a\in Q_0}$ por lo tanto Φ es pleno.

Ahora si hubiese dos morfismos de comódulos $g, h : M \to N$ tales que $\Phi(g) = (f_a) = \Phi(g)$ entonces tenemos que $\Psi\Phi(g) = \oplus f_a = \Psi\Phi(h)$ lo que implica que g y h sean iguales, por lo tanto Φ es fiel.

Dado que ψ es fiel pleno y denso, concluímos que es una equivalencia. ■

DEFINICIÓN 1.2.18. *Denotaremos $rep_{\Bbbk}(Q)$ y $rat_{\Bbbk}(Q)$ las subcategorías plenas de $Rep_{\Bbbk}(Q)$ y $Rat_{\Bbbk}(Q)$ respectivamente formadas por las representaciones cuyos espacios vectoriales son de dimensión finita.*

Usando el teorema 1.2.17 obtenemos como corolario el siguiente resultado.

COROLARIO 1.2.19. *Las categorías $\mathcal{M}_f^{\Bbbk Q}$ y $rat_{\Bbbk}(Q)$ son equivalentes.*

Demostración:

Basta notar que Ψ transforma comódulos de dimensión finita en representaciones de $rat_{\Bbbk}(Q)$. ■

OBSERVACIÓN 1.2.20. *Si Q es un carcaj finito y sin ciclos, entonces las categorías $rep_{\Bbbk}(Q)$ y $rat_{\Bbbk}(Q)$ son las mismas.*

Los siguientes ejemplos nos muestran que si el carcaj no es finito o tiene ciclos las categorías $rep_{\Bbbk}(Q)$ y $rat_{\Bbbk}(Q)$ no son las mismas.

EJEMPLO 1.2.21.

- *Si $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ con $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \mathbb{N}$, $s(\alpha) = 1$ y $t(\alpha) = 2$ para $\alpha \in Q_1$, entonces $V = (V_a, T_\alpha)$ con $V_a = \Bbbk$ para $a = 1, 2$ y $T_i = 1_{\Bbbk}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ está en $rep_{\Bbbk}(Q)$ poro no en $rat_{\Bbbk}(Q)$.*
- *Si $Q =$ $\alpha \circlearrowright \cdot 1$*

  entonces la representación $(\Bbbk, 1_{\Bbbk})$ está en $rep_{\Bbbk}(Q)$ pero no está $rat_{\Bbbk}(Q)$.

Si tomamos un carcaj finito Q (esto es que tenga finitas flechas y finitos vértices), se puede definir el álgebra de caminos sobre Q de la siguiente manera:

- Como espacio vectorial tomamos, al igual que en las coálgebras el espacio vectorial de base todos los caminos de Q.
- Para multiplicar dos caminos tomamos la concatenación de ellos, si tiene sentido, o 0 cuando no.

Dicha álgebra también la denotaremos por $\Bbbk Q$.

A partir de esto tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 1.2.22. *Si Q es un carcaj finito y sin ciclos, entonces la categoría de módulos finitamente generados sobre el álgebra $\Bbbk Q$ es equivalente a la categoría de comódulos finitamente generados sobre la coálgebra $\Bbbk Q$.*

Demostración:

Es bien sabido que la categoría de módulos finitamente generados sobre el álgebra $\Bbbk Q$ es equivalente a $rep_{\Bbbk}(Q)$ (ver [ASS]) y como vimos $rat_{\Bbbk}(Q)$ es equivalente a la categoría de comódulos finitamente generados sobre la coálgebra $\Bbbk Q$. Finalmente usando 1.2.20 se obtiene el resultado. ■

PROPOSICIÓN 1.2.23. *Si M es un $\Bbbk Q$-comódulo simple entonces $M \cong \Bbbk e_b = S(b)$ para algún $b \in Q_0$.*

Demostración:

Sea M un $\Bbbk Q$-comódulo simple, entonces por 1.1.29 sabemos que $\dim_{\Bbbk} M < \infty$. Como $M \neq 0$ existe $b \in Q_0$ con $V_b \neq 0$ siendo $\Psi(M) = (V_a, T_\alpha)$. Tomemos $m \in V_b$ tal que $m \neq 0$.

Sea $n = \text{máx}\{l(\mu) : \mu \in \mathbb{P}(b, -) \text{ y } T_\mu(m) \neq 0\}$.

Podemos tomar $W = (W_i, S_\alpha)$ la representación que sea:

- Si $n = 0$,

  $$W_i = \begin{cases} km, & \text{si } i = a; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  $S_\alpha = 0$ para todo α.

- Si $n > 0$ consideremos μ tal que $T_\mu(m) \neq 0$ y $l(\mu) = n$,

  $$W_i = \begin{cases} \Bbbk T_\mu(m), & \text{si } i = t(\mu); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  $S_\alpha = 0$ para todo α.

Es claro que W es un subcomódulo de V. Por lo tanto $\Phi(W)$ es un subcomódulo de $\Phi(V) = M$. Como M es simple se tiene $\Phi(W) = M$.

A partir de ahora identificaremos los $\Bbbk Q$-comódulos con las representaciones racionales de Q.

PROPOSICIÓN 1.2.24. *Si C es una subcoálgebra simple de $\Bbbk Q$ entonces $C = \Bbbk e_a$ para algún $a \in Q_0$.*

Demostración:

Tomamos $M \subset C \subset \Bbbk Q$ un subcomódulo de C que sea simple. Entonces $M = \Bbbk e_a$ para algún $a \in Q_0$. Pero además M es una subcoálgebra de C, por lo tanto $C = \Bbbk e_a$. ■

1.3. Subcoálgebras de Coálgebras de Caminos

En esta sección trabajaremos con subcoálgebras de coálgebras de caminos. Dichas subcoálgebras no siempre contienen caminos como veremos en el ejemplo 1.3.1, pero se pueden encontrar bases convenientes como se verá al final de la sección.

EJEMPLO 1.3.1. *Tomemos* $Q = \begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & \cdot 2 \end{tikzcd}$

Dentro de $\Bbbk Q$ tomemos el conjunto linealmente independiente $\{e_1, e_2, \alpha+\beta\}$. Si tomamos $C = \Bbbk\{e_1, e_2, \alpha+\beta\}$, este espacio vectorial tiene estructura de coálgebra ya que:

- $\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i \in C \otimes C$.
- $\Delta(\alpha+\beta) = \Delta(\alpha)+\Delta(\beta) = e_2\otimes\alpha+e_2\otimes\beta+\alpha\otimes e_1+\beta\otimes e_1 = e_2\otimes(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\otimes e_1 \in C \otimes C$.

Tanto α como β no están en la coálgebra, sin embargo es fácil ver que $C \cong \Bbbk Q'$ con

$$Q' = \cdot 1 \xrightarrow{\gamma} \cdot 2$$

Las subcoálgebras de una coálgebra de caminos no siempre son coálgebras de caminos como se ve en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.3.2. *Tomemos ahora* $Q = \begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$

Dentro de $\Bbbk Q$ tomemos el conjunto linealmente independiente $\{e_1, \alpha+\beta\}$. Si se toma el espacio vectorial $D = \Bbbk\{e_1, \alpha+\beta\}$ tiene estructura de coálgebra porque:

- $\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 \in D \otimes D$.
- $\Delta(\alpha+\beta) = \Delta(\alpha)+\Delta(\beta) = e_1\otimes\alpha+e_1\otimes\beta+\alpha\otimes e_1+\beta\otimes e_1 = e_1\otimes(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\otimes e_1 \in D \otimes D$.

Como D tiene dimensión 2 y la única coálgebra de caminos de dimensión 2 es $\Bbbk Q'$ con

$$Q' = \ \cdot_1 \qquad \cdot_2 \ ,$$

esta coálgebra no puede ser una coálgebra de caminos.

El siguiente es un lema técnico de algebra lineal.

LEMA 1.3.3. *Sea A un espacio vectorial y $B \subset A$ un subespacio. Si $\sum_i x_i \otimes y_i$ está en $B \otimes B$ e $\{y_i\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces cada x_i está en B.*

Demostración:

Si $A \cong B \oplus C$ entonces $A \otimes A \cong (B \otimes A) \oplus (C \otimes A)$.

Supongamos que $x_i = v_i + w_i$ con $v_i \in B$ y $w_i \in C$. Por lo tanto se tiene que:

$$\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i v_i \otimes y_i + \sum_i w_i \otimes y_i$$

donde $\sum_i v_i \otimes y_i \in B \otimes A$ y $\sum_i w_i \otimes y_i \in C \otimes A$. Además $\sum_i x_i \otimes y_i \in B \otimes B$ por lo tanto $\sum_i w_i \otimes y_i \in (C \otimes A) \cap (B \otimes A) = \{0\}$. Por esto último se deduce que $w_i = 0$ para todo i. ■

PROPOSICIÓN 1.3.4. *Si $C \subset \Bbbk Q$ es una subcoálgebra y si $\mu \in C \cap \mathbb{P}$ entonces para todo $\nu \prec \mu$, $\nu \in C$.*

Demostración:

Si $\mu = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$, entonces $\Delta(\mu) = t(\alpha_n)\otimes\mu+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_n\dots\alpha_{i+1}\otimes\alpha_i\dots\alpha_1+\mu\otimes s(\alpha_1)$.

Como $\{t(\alpha_n), \alpha_n, \alpha_n\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2, \mu\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces usando el lema 1.3.3 tenemos que $s(\alpha_1), \alpha_1, \alpha_2\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\dots\alpha_2\alpha_1$ están en C. Análogamente tenemos que $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2, \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_3, \dots, \alpha_n, t(\alpha_n)$ están todos en C. Entonces todos los subcaminos de μ que comienzan en $s(\alpha_1)$ o que finalizan en $t(\alpha_n)$ están en C.

Repitiendo este proceso se llega a que todos los subcaminos de μ están en C. ■

LEMA 1.3.5. *Sea Q tal que para todo $x, y \in Q_0$ la cantidad de elementos de $\mathbb{P}(x,y) \cup \mathbb{P}(y,x)$ es a lo sumo 1. Si $D \subset \Bbbk Q$ es una subcoálgebra de $\Bbbk Q$, y $\sum_{i=1}^{r} a_i\mu_i \in D$ con $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ caminos linealmente independientes y $a_i \in \Bbbk$, entonces $\mu_i \in D$ $\forall i = 1, \ldots, r$.*

Demostración:

Supongamos primero que $r = 2$.

Si $\mu = \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ y $\nu = \beta_m\beta_{m-1}\ldots\beta_1$ son dos caminos distintos, entonces

$\Delta(a\mu + b\beta) = a(t(\alpha_n) \otimes \mu + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_n \ldots \alpha_{i+1} \otimes \alpha_i \ldots \alpha_1 + \mu \otimes s(\alpha_1)) + b(t(\beta_m) \otimes \nu + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_m \ldots \beta_{i+1} \otimes \beta_i \ldots \beta_1 + \nu \otimes s(\beta_1))$.

Sabemos que $s(\alpha_1) \neq s(\beta_1)$ o $t(\alpha_n) \neq t(\beta_m)$ porque en caso contrario serían el mismo camino. Podemos suponer que $s(\alpha_1) \neq s(\beta_1)$ (el otro caso es análogo). Entonces $as(\alpha_1)$ y $bs(\beta_1)$ son linealmente independientes. Por lo tanto se puede escribir:

$$\Delta(a\mu + b\beta) = \mu \otimes s(\alpha_1) + \nu \otimes s(\beta_1) + \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

con $\{a\mu, b\nu, y_i / i = 1, \ldots, k\}$ linealmente independientes. Aplicando el lema 1.3.5 deducimos que $\mu, \nu \in D$.

Supongamos ahora que $r > 2$.

Sabemos que dados dos caminos μ_i tienen comienzo o final distinto. Al calcular $\Delta(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i)$ primero juntamos las combinaciones lineales de caminos que comienzan en los mismos vértices. Éstas están en D (se usa la misma idea que en la parte anterior). Luego cada uno de los caminos de estas combinaciones lineales sabemos que tiene los finales distintos, entonces cada camino μ_i está en D (se usa nuevamente la misma idea). ■

COROLARIO 1.3.6. *En las condiciones anteriores $D \subset \Bbbk Q$ tiene una base formada por caminos de Q.*

Como vimos en los ejemplos 1.3.1 y 1.3.2, no se puede asegurar que si $\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$ está en una subcoálgebra $D \subset \Bbbk Q$, los caminos μ_i están en D. Sin embargo se demuestra que los vértices de cada μ_i están en D.

LEMA 1.3.7. *Sea $C \subset \Bbbk Q$ una subcoálgebra. Sean $\mu = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$ y $\nu = \beta_m\beta_{m-1}\dots\beta_1$ dos caminos distintos de Q tales que:*

- $m, n \geq 2$,
- *μ y ν no son uno subcamino del otro,*
- *$s(\alpha_1) = s(\beta_1)$, $t(\alpha_n) = t(\beta_m)$ y*
- *exiten $a, b \in \Bbbk$ no nulos tales que $a\mu + b\nu \in C$, entonces*
- *$\alpha_{n-r-1}\alpha_{n-r-2}\dots\alpha_1$, $\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_{l+2}$ están en C y*
- *$\beta_{m-r-1}\beta_{m-r-2}\dots\beta_1$, $\beta_m\beta_{m-1}\dots\beta_{l+2}$ también están en C, siendo*
- $r = \begin{cases} 0, & si\ \alpha_n \neq \beta_m; \\ max\{i : \alpha_n\dots\alpha_{n-i+1} = \beta_m\dots\beta_{m-i+1}\}, & si\ \alpha_n = \beta_m. \end{cases}$
- $l = \begin{cases} 0, & si\ \alpha_1 \neq \beta_1; \\ max\{i : \alpha_i\dots\alpha_1 = \beta_i\dots\beta_1\}, & si\ \alpha_1 = \beta_1. \end{cases}$

Demostración:

$\Delta(a\mu+b\nu) = t(\alpha_n)\otimes(a\mu+b\nu)+\alpha_n\otimes(a\alpha_{n-1}\dots\alpha_1+b\beta_{m-1}\dots\beta_1)+\dots+\alpha_n\dots\alpha_{n-r+1}\otimes(a\alpha_{n-r}\dots\alpha_1+b\beta_{m-r}\dots\beta_1)+a(\alpha_n\dots\alpha_{n-r}\otimes\alpha_{n-r-1}\dots\alpha_1+\dots+\alpha_n\dots\alpha_{l+2}\otimes\alpha_{l+1}\dots\alpha_1)+b(\beta_m\dots\beta_{m-r}\otimes\beta_{m-r-1}\dots\beta_1+\dots+\beta_m\dots\beta_{l+2}\otimes\beta_{l+1}\dots\beta_1)+(a\alpha_n\dots\alpha_{l+1}+b\beta_n\dots\beta_{l+1})\otimes\alpha_l\dots\alpha_1+\dots+(a\alpha_n\dots\alpha_2+b\beta_m\dots\beta_2)\otimes\alpha_1+(a\mu+b\nu\otimes s(\alpha_1)))$.

Ahora por independencia lineal sabemos que tenemos:

$s(\alpha_1) = s(\beta_1), \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2\alpha_1 = \beta_2\beta_1, \alpha_l\dots\alpha_1 = \beta_l\dots\beta_1 \in C$

$\alpha_{l+1}\dots\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r-1}\dots\alpha_1, \beta_{l+1}\dots\beta_1, \dots, \beta_{m-r-1}\dots\beta_1 \in C$

$(a\alpha_{n-r}\dots\alpha_1 + b\beta_{m-r}\dots\beta_1), \dots, (a\alpha_{n-1}\dots\alpha_1 + b\beta_{m-1}\dots\beta_1) \in C$

En otras palabras, $\alpha_{n-r-1}\dots\alpha_1, \beta_{m-r-1} \in C$.

Tomando ahora la otra coordenada tenemos:

$t(\alpha_n) = s(\beta_m), \alpha_n = \beta_m, \dots, \alpha_n\dots\alpha_{n-r+1} = \beta_m\dots\beta_{m-r+1} \in C$

$\alpha_n\dots\alpha_{n-r}, \dots, \alpha_n\dots\alpha_{l+2}, \beta_m\dots\beta_{m-r}, \dots, \beta_m\dots\beta_{l+2} \in C$

$(a\alpha_n \dots \alpha_{l+1}) + b\beta_(m) \dots \beta_{l+1}, \dots, (a\alpha_n \dots \alpha_2 + b\beta_m \dots \beta_2) \in C$

En otras palabras, $\alpha_n \dots \alpha_{l+2}, \beta_m \dots \beta_{l+2} \in C$. ■

OBSERVACIÓN 1.3.8. *El resultado anterior puede reescribirse de la sigiente forma.*

Sea $\sum_{i=1}^k a_i\mu_i \in C$ *con los* $\mu_i = \alpha^i_{n_i} \dots \alpha^i_1$ *linealmente independientes y con* $s(\alpha^i_1) = s(\alpha^j_1)$, $t(\alpha^i_{n_i}) = t(\alpha^j_{n_j})$ $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. *Llamemos* $\Lambda = \{1, 2, \dots, k\}$ *y definamos para* $1 \leq t \leq M$ *donde* $M = \text{máx}\{l(\mu_i) : i \in \Lambda\}$ $\Lambda^t = \Lambda_t/R_t$ *siendo* $\Lambda_t = \{i \in \Lambda : t \leq l(\mu_i)\}$ *y* R_t *la relación de equivalencia* $iR_tj \Leftrightarrow \alpha^i_t \dots \alpha^i_1 = \alpha^j_t \dots \alpha^j_1$. *Entonces*

$\Delta(\sum_{i=1}^k a_i\mu_i) = t(\alpha^1_{n_1}) \otimes (\sum_{i=1}^k a_i\mu_i) + \sum_{i=1}^k a_i\mu_i \otimes s(\alpha^1_1) + \sum_{t=1}^M (\sum_{[i]_t \in \Lambda_t} (\sum_{j \in [i]_t} a_j\alpha^j_{n_j} \dots \alpha^j_{t+1}) \otimes \alpha^i_t \dots \alpha^i_1)$

Como los caminos en la segunda coordenada son todos de longitudes distintas, entonces son linealmente independientes y por lo tanto $t(\alpha^1_{n_1}), \sum_{j \in [i]_t} a_j\alpha^j_{n_j} \dots \alpha^j_{t+1} \in C$ *para cada* $[i]_t \in \Lambda_t$ *y* $\forall t$.
Si ahora definimos ${}_t\Lambda = \Lambda^t/{}_tR$ *donde* ${}_tR$ *es la relación de equivalencia* $i_tRj \Leftrightarrow \alpha^i_{n_i} \dots \alpha^i_{n_i-t+1} = \alpha^j_{n_j} \dots \alpha^j_{n_j-t+1}$. *Entonces*

$\Delta(\sum_{i=1}^k a_i\mu_i) = t(\alpha^1_{n_1}) \otimes (\sum_{i=1}^k a_i\mu_i) + (\sum_{i=1}^k a_i\mu_i) \otimes s(\alpha^1_1) + \sum_{t=1}^M (\sum_{{}_t[i] \in {}_t\Lambda} \alpha^i_{n_j} \dots \alpha^i_{n_j-t+1} \otimes (\sum_{j \in {}_t[i]} \alpha^j_{n_j-t} \dots \alpha^j_1))$

Como ahora son los caminos de la primera coordenada los que son linealmente independientes tenemos que $s(\alpha^1_1), \sum_{j \in {}_t[i]} a_j\alpha^j_{n_j-t} \dots \alpha^j_1 \in C$ *para cada* ${}_t[i] \in_t \Lambda$ *y* $\forall t$.

DEFINICIÓN 1.3.9.

- *Si* $\mu = \alpha_n \dots \alpha_1$, *llamamos* $V(\mu) = \{s(\alpha_1), \dots, s(\alpha_n), t(\alpha_n)\}$.
- *Si* $p = \sum_{i=1}^k a_i\mu_i \in \Bbbk Q$ *con* $\mu_i \in \mathbb{P}$, *llamamos* $V(p) = \cup_{i=1}^k V(\mu_i)$.
- *Si* $C \subset kQ$ *es una subcoálgebra de* $\Bbbk Q$ *entonces definimos* $V(C) = \cup_{q \in C} V(q)$.

COROLARIO 1.3.10. *Sea* $C \subset \Bbbk Q$ *una subcoálgebra de* $\Bbbk Q$, *si* $p = \sum_{i=1}^k a_i\mu_i \in C$ *con* $\mu_i \in \mathbb{P}$, *entonces todos los vértices de* μ_i *están en* C $(V(C) \subset C)$.

Demostración:

$p = \sum_{i=1}^k a_i\mu_i = \sum_{a \in Q_0} \sum_{s(\mu_j)=a} a_j\mu_j$ entonces $\sum_{s(\mu_j)=a} a_j\mu_j \in C$ (ver 1.3.14).

Ahora $\sum_{s(\mu_j)=a} a_j\mu_j = \sum_{s(\mu_k)=a} \sum_{t(\mu_k)=b \in Q_0} a_k\mu_k$ entonces $\sum_{s(\mu_l)=a, t(\mu_l)=b} a_l\mu_l \in C$.

Con lo anterior solamente nos basta con ver que se cumple para combinaciones en las que todos los caminos empiezan en un mismo vértice y terminan también en un vértice fijo. Para terminar aplicamos 1.3.8. ■

OBSERVACIÓN 1.3.11. *Si $C \subset \Bbbk Q$ es una subcoálgebra de $\Bbbk Q$, entonces $V(C) = C \cap Q_0$.*

DEFINICIÓN 1.3.12. *Dada $C \subset kQ$ una subcoálgebra de kQ llamaremos $F(C)$ al conjunto de flechas de los caminos que aparecen en cada elemento de C, en otras palabras:*

Si $q = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i$ entonces

- $F(q) = \cup_{i=1}^{k} \{\alpha \in Q_1 : \alpha \preceq \mu_i\}$
- $F(C) = \cup_{q \in C} F(q)$.

OBSERVACIÓN 1.3.13. *Como vimos en 1.3.1 y en 1.3.2 $F(C) \nsubseteq C$ si C es una subcoálgebra de kQ.*

TEOREMA 1.3.14. *Sea $C \subset \Bbbk Q$ una subcoálgebra de $\Bbbk Q$, entonces C tiene una base formada por combinaciones lineales de caminos que comienzan y terminan en los mismos vértices.*

Demostración:

Sea $q = \sum_i q_i$ con los q_i combinaciones lineales de caminos que comienzan y terminan en los mismos vértices. Entonces $q_i \in C$.

Sean

- $f_{s(q_i)} \in \Bbbk Q^*$ tal que $f_{s(q_i)}(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } s(p) = s(q_i); \\ 0, & \text{en otro camino en } Q. \end{cases}$
- $f_{t(q_i)} \in \Bbbk Q^*$ tal que $f_{t(q_i)}(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } t(p) = t(q_i); \\ 0, & \text{en otro camino en } Q. \end{cases}$

$m(f_{s(q_i)} \otimes 1_C)\Delta(q) = \sum_j m(f_{s(q_i)} \otimes 1_C)\Delta(q_j) = \sum_{s(q_k)=s(q_i)} q_k = q'$, entonces $q' \in C$.

Ahora $m(1_C \otimes f_{t(q_i)})\Delta(q') = q_i \in C$.

Entonces si $\{q^j\}$ es una base de C y cada $q^j = \sum_i q_i^j$ con q_i^j combinaciones lineales de caminos que empiezan y terminan en los mismos vértices entonces $\{q_i^j\}$ es un generador de C. Luego tomamos un subconjunto de $\{q_i^j\}$ que sea una base. ■

1.4. Comódulos Inyectivos

En esta sección se verán propiedades que cumplen los comódulos inyectivos sobre una coálgebra. Algunas de estas propiedades se siguen cumpliendo más en general, por ejemplo la existencia de envolventes inyectivas, y otras son más específicas de la propia categoría, por ejemplo que el coproducto (suma directa) arbitrario de comódulos inyectivos es inyectivo.

1.4.1. Conceptos Básicos y Ejemplos

Comencemos con algunas propiedades que cumple la categoría ${}^C\mathcal{M}$. Luego veremos ejemplos de cálculo de comódulos inyectivos en $Rat_{\Bbbk}(Q)$, la categoría de comódulos sobre coálgebras de caminos.

DEFINICIÓN 1.4.1. *Un comódulo I sobre una coálgebra C es inyectivo si, por cada morfismo de comódulos inyectivo $f : M \to N$ y cada morfismo $g : M \to I$ existe $h : N \to I$ tal que $hf = g$. También se puede ver como el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Dualmente se puede definir el concepto de comódulo proyectivo.

DEFINICIÓN 1.4.2. *Un comódulo P sobre una coálgebra C es proyectivo si, por cada morfismo de comódulos sobreyectivo $f : M \to N$ y cada morfismo $g : P \to N$ existe $h : P \to M$ tal que $fh = g$. También se puede ver como el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

OBSERVACIÓN 1.4.3. *Si M es un C-comódulo e I es un C-comódulo inyectivo, entonces si $f : I \to M$ es un morfismo de comódulos inyectivo f se escinde.*

Demostración:

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_I"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

por lo tanto f se escinde. ■

De forma dual obtenemos el siguiente resultado:

OBSERVACIÓN 1.4.4. *Sea $f : M \to P$ un morfismo sobreyectivo de comódulos f. Si P es proyectivo entonces f se escinde.*

La siguiente proposición presenta un ejemplo fundamental de comódulo inyectivo.

PROPOSICIÓN 1.4.5. *Sea (C, Δ, ε) una $\Bbbk$-coálgebra, entonces C visto como C-comódulo es inyectivo.*

Demostración:

Sea $f : M \to N$ un morfismo inyectivo y $h : M \to C$ otro morfismo.

Sea $\lambda : N \to \Bbbk$ lineal tal que si $N = M \oplus M'$ como espacios vectoriales entonces $\lambda|_M = \varepsilon h$ y $\lambda|_{M'} = 0$.

Si $\rho_N(x) = \sum x_i \otimes c_i$ definimos $\gamma(x) = \sum \lambda(x_i) \otimes c_i = m(\lambda \otimes 1)\rho_N(x)$ siendo m el ismorfismo canónico entre $\Bbbk \otimes C$ y C.

- γ es $\Bbbk$-lineal por ser composición de transformaciones $\Bbbk$-lineales.
- $\gamma f(x) = m(\lambda \otimes 1_C)\rho_N(f(x)) = m(\lambda \otimes 1_C)(f \otimes 1_C)\rho_M(x) = m(\lambda f \otimes 1_C)\rho_M(x) = m(\varepsilon h \otimes 1_C)\rho_M(x) = (\varepsilon \otimes 1_C)(h \otimes 1_C)\rho_M(x) = (\varepsilon \otimes 1_C)\rho_N(h(x)) = h(x)$.
- Solamente falta ver que γ es un morfismo de comódulos, lo que significa que

$$\Delta_C \gamma = (\gamma \otimes 1_C)\rho_N$$

  Por la definición de γ sabemos que $\Delta\gamma(x) = \Delta m(\lambda \otimes 1_C)\rho_N(x)$ y que $(\gamma \otimes 1_C)\rho_N(x) = (m(\lambda \otimes 1_C)\rho_N \otimes 1_C)\rho_N(x) = (m \otimes 1_C)(\lambda \otimes \Delta)\rho_N(x)$.

  Tomemos $x \otimes y \in N \otimes C$.

  - $\Delta m(\lambda \otimes 1_C)(x \otimes y) = \Delta m(\lambda(x) \otimes y) = \Delta(\lambda(x)y) = \lambda(x)\Delta(y)$.

- $(m \otimes 1_C)(\lambda \otimes \Delta)(x \otimes y) = (m \otimes 1_C)(\lambda(x) \otimes \Delta(y)) = \lambda(x)\Delta(x)$. ■

PROPOSICIÓN 1.4.6. *Todo sumando directo de un comódulo inyectivo es inyectivo.*

Demostración:

Sean $f : L \to L'$ y $\alpha : L \to M$. Si $i : M \hookrightarrow M \oplus N$ es la inclusión en la primer coordenada y $\pi : M \oplus N \twoheadrightarrow M$ es la proyección sobre M, sabemos que existe $\gamma : L' \to M \oplus N$ tal que $\gamma f = i\alpha$. Visto como diagrama es

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i\alpha"'] & L' \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & M \oplus N & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto tenemos que $\alpha = \pi i\alpha = \pi\gamma f$, lo que significa que M es un comódulo inyectivo. ■

Dualmente se puede probar que:

PROPOSICIÓN 1.4.7. *Todo sumando directo de comódulo proyectivo es proyectivo.*

EJEMPLO 1.4.8. *Cálculo de inyectivos en $\Bbbk Q$.*

$\Bbbk Q = \oplus_{b \in Q_0} \Bbbk\mathbb{P}(-, b)$ *como espacios vectoriales.*

$\Bbbk\mathbb{P}(-, b) = (W_a, S_\alpha)$ *donde*

- $W_a = \Bbbk\mathbb{P}(a, b)$ *y*
- *si α es una flecha que cumple $s(\alpha) = a$, y $m \in V_a$ entonces* $S_\alpha(m) = \begin{cases} n, & \text{si } m = n\alpha; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Si α es un camino que cumple $s(\alpha) = i$, entonces $\Delta(\alpha) = \sum_{uv=\alpha} u \otimes v$, con lo cual $\Delta(\alpha) \in \Bbbk\mathbb{P}(-, j) \otimes kQ$. Por lo tanto $\Bbbk\mathbb{P}(-, j)$ es un subcomódulo de $\Bbbk Q$ que es un sumando directo. Por 1.4.6 también sabemos que son inyectivos. a $\Bbbk\mathbb{P}(-, j)$ lo llamaremos $I(j)$

Además como el zócalo de $I(j)$ es simple ($Soc(I(j)) = \Bbbk e_j$), porque el único subcómodulo simple que tiene es $\Bbbk e_j$, entonces es indescomponible por 1.1.33.

Ahora veamos ejemplos más concretos del cálculo de comódulos inyectivos sobre una coálgebra de caminos, y un ejemplo de que los comódulos proyectivos no nulos no tienen por qué existir.

EJEMPLO 1.4.9. *Sea $\Bbbk Q$ la coálgebra de caminos del siguiente carcaj*

$$Q = \quad \cdot 1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdot 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdot n \xrightarrow{\alpha_n} \cdots$$

Entonces $I(n) = \quad \Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \cdots \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$

Por lo tanto $\dim_\Bbbk I(n) = n$.

Probemos ahora que kQ-Comod no tiene comódulos proyectivos. Comencemos primero por probar que no tiene proyectivos de dimensión finita.

Sea P un proyectivo de dimensión finita

$P = \quad V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$

Sea ahora $P' = \quad V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{1_{V_n}} V_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$

Tenemos el siguiente epimorfismo $f : P' \to P$

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[d, "f"] & V_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "1_{V_1}"'] & V_2 \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "1_{V_2}"'] & \cdots \arrow[r, "T_{n-1}"] & V_n \arrow[r, "1_{V_n}"] \arrow[d, "1_{V_n}"'] & V_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
P & V_1 \arrow[r, "T_1"] & V_2 \arrow[r, "T_2"] & \cdots \arrow[r, "T_{n-1}"] & V_n \arrow[r, "1_{V_n}"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Es claro que f no se escinde. De la observación 1.4.4 concluimos que P no es proyectivo.

Si ahora tomamos un comódulo arbitrario P y suponemos que es proyectivo

$P = \quad V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1} \xrightarrow{T_{n+1}} \cdots \quad .$

Como P es una representación racional sabemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $kerT_i = 0$ $\forall i < r$ y $kerT_r \neq 0$. Sea $v \in kerT_r$, a partir de v formemos la siguiente representación $W = (W_n, S_n)$.

- $W_n = \begin{cases} 0, & \textit{si } r < n; \\ \Bbbk v, & \textit{si } n = r; \\ \Bbbk((T_{r-1}T_{r-2}\dots T_n)^{-1}(v)), & \textit{si } n < r \textit{ y existe dicha preimagen;} \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

- $S_n = \begin{cases} 0, & \textit{si } k \leq n; \\ T_n|_{W_n}, & \textit{si } n < k. \end{cases}$

Se obtiene que W es un subcomódulo de P.

Ahora formemos la representación $W' = (W'_a, S'_a)$. W'_1 debe cumplir $W_1 \oplus W'_1 = V_1$. Supongamos construido W'_n entonces $W'_{n+1} = U_{n+1} \oplus T_n(W'_n)$ siendo U_{n+1} de tal forma que $V_{n+1} = W_{n+1} \oplus T_n(W'_n) \oplus U_{n+1}$. Las transformaciones S'_n las definiremos simplemente como $S_n = T_n|_{W'_n}$.

Se ve que $W \oplus W' = P$ y por lo tanto usando 1.4.7 vemos que W debe ser un comódulo proyectivo, lo que no es posible porque $\dim_k W < \infty$.

EJEMPLO 1.4.10. *Sea kQ la coálgebra de caminos del siguiente carcaj*

$$Q = \quad \cdots \xrightarrow{\alpha_n} \cdot n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_2} \cdot 2 \xrightarrow{\alpha_1} \cdot 1$$

Entonces $I(n) = \quad \cdots \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0$ *(donde la cantidad de ceros es n)*

Por lo tanto $\dim_\Bbbk I(n) = \infty$

Ahora vamos a probar que la suma directa arbitraria de comódulos es inyectiva. Con ese objetivo presentamos primero el siguiente lema.

LEMA 1.4.11. *Sea C una $\Bbbk$-coálgebra y X un $\Bbbk$-espacio vectorial, entonces $X \otimes C$ es un C-comódulo inyectivo.*

Demostración:

$X \otimes C$ tiene estructura de C-comódulo tomando $\rho_{X \otimes C} = 1_X \otimes \Delta$. De ahora en adelante llamemos I a $X \otimes C$.

Si tenemos $i : N \to L$ un morfismo inyectivo de comódulos y $f : N \to I$ otro morfismo de comódulos, tendríamos que probar la existencia de $g : L \to I$ otro morfismo de comódulos tal que el siguiente diagrama sea conmutativo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

$\rho_I : I \to I \otimes C$ es un morfismo de comódulos y $j : I \otimes C \to I$ tal que $j = 1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C$ también lo es. Además tenemos que:

$$j\rho_I = (1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(1_X \otimes \Delta) = 1_X \otimes 1_C = 1_I$$

Consideremos $\Pi_N : L \to N$ la proyección como espacios vectoriales, y $g : L \to I$ definida como $g = j(f\Pi_N \otimes 1_C)\rho_L$. g es un morfismo de comódulos ya que tanto j, $f\Pi_N \otimes 1_C$ y ρ_L son morfismos de comódulos. $f\Pi_N \otimes 1_C$ es morfismo de comódulos debido a que la estructura de comodulo de $L \otimes C$ y $I \otimes C$ está dada por C.

Ahora si hacemos la composición gi obtenemos $gi = j(f\Pi_N \otimes 1_C)\rho_L i = (1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(f\Pi_N \otimes 1_C)\rho_L i = (1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(f\Pi_N \otimes 1_C)(i \otimes 1_C)\rho_N = (1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C)(f \otimes 1_C)\rho_N = (1_X \otimes \varepsilon \otimes 1_C)\rho_I f = f$. ■

PROPOSICIÓN 1.4.12. *La suma directa de C-comódulos inyectivos es inyectiva.*

Demostración:

Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una familia de C-comódulos inyectiva, tenemos que:

$$I_j \hookrightarrow I_j \otimes C, \ \forall j \in J.$$

Pero como los I_j son inyectivos por 1.4.3 tenemos que $I_j \otimes C \cong M_j \oplus I_j$.

Además tenemos que $(\oplus_{j\in J} M_j) \oplus (\oplus_{j\in J} I_j) \cong \oplus_{j\in J}(M_j \oplus I_j) \cong \oplus(I_j \otimes C) \cong (\oplus_{j\in J} I_j) \otimes C$.

Por lo tanto $\oplus_{j\in J} I_j$ es inyectivo porque es sumando directo de $\oplus_{j\in J} I_j \otimes C$, que es inyectivo por 1.4.11. ■

1.4.2. Envolventes Inyectivas

Continuemos ahora el camino para probar que en la categoría ${}^{C}\mathcal{M}$ hay envolventes inyectivas.

DEFINICIÓN 1.4.13. *Dado un morfismo inyectivo de comódulos $i : I \hookrightarrow E$, decimos que E es una* ***extensión esencial*** *si para todo N subcomódulo de E, $N \cap I \neq \{0\}$.*

PROPOSICIÓN 1.4.14. *En la categoría ${}^{C}\mathcal{M}$ hay extensiones esenciales maximales.*

Demostración:

Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de extensiones esenciales de M totalmente ordenada por la inclusión.

Probemos que $M \subset \cup_{i\in I} E_i$ es una extensión esencial. Si $N \subset \cup_{i\in I} E_i$ entonces existe j tal que $N_j = N \cap E_j \neq \{0\}$ por lo tanto $M \cap N_j \neq \{0\}$, lo que implica $M \cap N \neq \{0\}$. Luego por el Lema de Zorn tenemos extenciones esenciales maximales. ■

PROPOSICIÓN 1.4.15. *Un comódulo es inyectivo si y solamente si no posee extensiones esenciales propias.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si I es inyectivo e $I \subsetneq E$ entonces $E \cong I \oplus M$ con $M \neq \{0\}$ entonces $M \cap I = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Sea M que no posee extensiones esenciales propias. Consideremos $j : M \hookrightarrow M \otimes C = E$, que es un comódulo inyectivo por lo visto en 1.4.11.

Tomemos $N \hookrightarrow E$ que es maximal con la propiedad de $N \cap M = 0$ y $\Pi_N : E \twoheadrightarrow \frac{E}{N}$ la proyección canónica. Entonces $\Pi_N j : M \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \frac{E}{N}$ es un monomorfismo.

Ahora $M \hookrightarrow \frac{E}{N}$ es una extensión esencial de M porque si $\{0\} \neq \frac{L}{N} \hookrightarrow \frac{E}{N}$ entonces, como $M \cap L \neq \{0\}$, pues N era maximal, se obtiene $M \cap \frac{L}{N} \neq \{0\}$. Como M no tenía extensiones esenciales propias entonces $M \cong \frac{E}{N}$, por lo tanto $E \cong M \oplus N$ y por 1.4.6 entonces M es inyectivo. ■

PROPOSICIÓN 1.4.16. *Si E es una extensión esencial maximal del comódulo M entonces E es el mínimo comódulo inyectivo que contiene a M.*

Demostración:

Como E es una extensión esencial maximal entonces E es inyectivo, en caso contrario no sería maximal.

Si ahora consideramos $M \subseteq I \subsetneq E$ con I un comódulo inyectivo, entonces $E \cong I \oplus J$ por lo tanto E no sería esencial porque $J \cap M = \{0\}$. ■

DEFINICIÓN 1.4.17. *Sea M un comódulo. Una envolvente inyectiva de M es un par (E, j) tal que E es un comódulo inyectivo y $j : M \to E$ es un monomorfismo de comódulos, tal que si (I, k) es otro par con I un comódulo inyectivo y $k : M \to I$ un monomorfismo de comódulos entonces existe un monomorfismo $f : E \to I$ tal que $fj = k$. Visto como diagrama conmutativo resulta.*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"'] & E \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 1.4.18. *La envolvente inyectiva es única salvo isomorfismos, y es isomorfa a la extensión esencial.*

Demostración:

(Existencia) Sea $M \hookrightarrow E$ una extensión esencial maximal.

Si $f : M \hookrightarrow I$ es un monomorfismo de comódulos, con I un comódulo inyectivo, se cumple que existe $j : E \to I$ tal que $ji = f$.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[dl, dashed, "j"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Si $kerj \neq \{0\}$ entonces $M \cap kerj \neq \{0\}$, con lo cual f no es inyectiva.

(Unicidad) Si además $f : M \hookrightarrow I$ es otra envolvente inyectiva. Entonces existe un monomorfismo de comódulos $g : I \hookrightarrow E$ tal que $gf = i$.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E \\ & I \arrow[ur, dashed, "g"] & \end{tikzcd}$$

Como E es un comódulo inyectivo se tiene por 1.4.6 que $E = I \oplus I'$, entonces se cumpliría $I \cap I' = \{0\}$. Si suponemos $I' \neq \{0\}$ y sabemos que $M \cap I' = \{0\}$, esto nos lleva a un absurdo porque E es una extensión esencial de M. Por lo tanto $E \cong I$. ■

PROPOSICIÓN 1.4.19. *Si I es un comódulo indescomponible finitamente generado entonces $Soc(I)$ es un subcomódulo simple.*

Demostración:

Sean S_1 y S_2 dos subcómodulos simples distintos de I.

Como $S_1 \hookrightarrow I$ es una inclusión de un comódulo simple en un comódulo inyectivo entonces el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & \\ E(S_1) \arrow[r, hook] & I \end{tikzcd}$$

siendo $E(S_1)$ la envolvente inyectiva de S_1. Por lo tanto como I es indescomponible entonces usando la proposición 1.4.6 se concluye que $E(S_1) \cong I$.

Ahora como $S_1 \hookrightarrow I$ es una extensión esencial, $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ pero como S_1 y S_2 son simples distintos esto es absurdo. ■

Capítulo 2

Medida de Gabriel-Roiter

En las categorás de longitud finita (categorías donde hay un concepto de longitud) la medida de Gabriel-Roiter será una herramienta mas fina que la longitud. En este capítulo darémos su definición y probaremos los teoremas de existencia de la parte de despegue y la parte de aterrizaje, todo esto en el contexto de categorías de longitud finita. Este capítulo esta basado en [Kr].

2.1. Cadenas y Funciones de Longitud

En esta sección definiremos las funciones de longitud y trabajaremos con el orden lexicográfico, para que luego en la siguiente sección se podamos definir la medida de Gabriel-Roiter.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Si* $(S, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado,* $X \subset S$ *es una* ***cadena*** *si* $\forall x_1, x_2 \in X$ $x_1 \leq x_2$ *o* $x_2 \leq x_1$.

Si X *es una cadena finita,* $\text{mín}\, X$ *y* $\text{máx}\, X$ *denotarán su mínimo y su máximo respectivamente. En caso de que* $X = \emptyset$ *definimos* $\text{mín}\, X = \infty$.

Denotaremos con $Ch(S)$ *al conjunto de todas las cadenas finitas de* S *y sea* $Ch(S, x) = \{X \in Ch(S) : \text{máx}\, X = x\}$.

DEFINICIÓN 2.1.2. *En* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *definimos el* ***orden lexicográfico*** *de la siguiente manera:*

$I \leq J$ *si y solamente si* $\text{mín}(J \backslash I) \leq \text{mín}(I \backslash J)$ $\forall I, J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Si además $I \neq J$ *lo denotaremos* $I < J$.

DEFINICIÓN 2.1.3. *Si $I, J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ decimos que J **comienza** en I si:*

- *$I \subset J$,*
- *y $\forall a \in I$ y $\forall b \in J \backslash I$ tenemos que $a < b$.*

Lo denotaremos $I \ll J$.

OBSERVACIÓN 2.1.4. *Si $I \ll J$ entonces $I \leq J$.*

PROPOSICIÓN 2.1.5. *El orden lexicográfico en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es transitivo.*

Demostración:

Supongamos que $K \leq I$. Sean $\text{mín}(I \triangle J) = \alpha_{IJ}$, $\text{mín}(J \triangle K) = \alpha_{JK}$ y $\text{mín}(I \triangle K) = \alpha_{IK}$.

- Si $K = I$ es absurdo.
- Si $K < I$ entonces $\alpha_{IK} \in I \backslash K$.

  Tenemos dos opciones

  - a) $\alpha_{IK} \in J$.
  - b) $\alpha_{IK} \notin J$.

- a) Si $\alpha_{IK} \in J$ entonces $\alpha_{IK} \in J \backslash K$ y esto implica que $\alpha_{JK} < \alpha_{IK}$. Como $\alpha_{JK} \in K \backslash J$, $\alpha_{IK} \in I \backslash K$, se concluye que $\alpha_{JK} \in I \backslash J$ (caso contrario $\alpha_{JK} \in K \backslash I$ con $\alpha_{JK} < \alpha_{IK}$, absurdo).

  Como $\alpha_{IJ} = \text{mín}(I \triangle J)$, se tiene que $\alpha_{IJ} \leq \alpha_{JK}$. De hecho $\alpha_{IJ} < \alpha_{JK}$ pues $\alpha_{IJ} \in J \backslash I$. Entonces $\alpha_{IJ} \in K \backslash I$ (si no $\alpha_{IJ} < min(J \triangle K)$).

  Finalmente tenemos $\alpha_{IK} < \alpha_{IJ}$ pues $\alpha_{IK} = \text{mín}(I \triangle K)$ y $\alpha_{IJ} \in K \backslash I$, por lo tanto tenemos $\alpha_{IK} < \alpha_{IJ} < \alpha_{JK} < \alpha_{IK}$, lo que es absurdo.

- b) Si $\alpha_{IK} \notin J$ entonces $\alpha_{IJ} < \alpha_{IK}$ pues $\alpha_{IJ} = \text{mín}(I \triangle J)$ y $\alpha_{IK} \in I \backslash J$. Luego $\alpha_{IJ} \notin K$ (si no $\alpha_{IJ} < \text{mín}(I \triangle K)$).

  Ahora $\alpha_{JK} < \alpha_{IJ}$ pues $\alpha_{JK} = \text{mín}(K \triangle J)$ y $\alpha_{IJ} \in J \backslash K$, entonces $\alpha_{JK} \notin I$ (si no $\alpha_{JK} < \text{mín}(I \triangle J)$).

  Finalmente $\alpha_{IK} < \alpha_{JK}$ pues $\alpha_{IK} = \text{mín}(K \triangle I)$ y $\alpha_{JK} \in K \backslash I$, por lo tanto tenemos $\alpha_{IK} < \alpha_{JK} < \alpha_{IJ} < \alpha_{IK}$, lo que es absurdo. ■

PROPOSICIÓN 2.1.6. *Sean $I, J, K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si se cumple*

- $I \leq J \leq K$ *y*
- $I \ll K$

Entonces $I \ll J$.

Demostración:

Podemos suponer que $I < J < K$, en otro caso es claro. Llamemos $\alpha_{IJ} = \text{mín}(I \triangle J) \in J \backslash I$ y $\alpha_{IK} = \text{mín}(I \triangle K) \in K \backslash I$.

- Afirmación: $I \subset J$.

  Supongamos que $I \not\subseteq J$ entonces $I \backslash J \neq \emptyset$. Tomemos $x = \text{mín}\{I \backslash J\}$, ya que $\alpha_{IJ} \in J \backslash I$ implica que $\alpha_{IJ} < x$. Por otro lado $x < \alpha_{IK}$ porque $I \ll K$. Como tenemos que $\alpha_{IJ} < x < \alpha_{IK}$ entonces $\alpha_{IJ} \notin K$ (ya que si $\alpha_{IJ} \in K$ entonces $\alpha_{IJ} \in K \backslash I$, y $\alpha_{IJ} < \alpha_{IK}$ lo que es absurdo). Luego $\alpha_{IJ} \in J \backslash K$, además $J \leq K$ por lo tanto $\alpha_{JK} < \alpha_{IJ} < x < \alpha_{IK}$. Ahora tenemos dos casos:

  - $\alpha_{JK} \in I$ entonces $\alpha_{JK} \in I \backslash J$ y $\alpha_{JK} < x$, absurdo.
  - $\alpha_{JK} \notin I$ entonces $\alpha_{JK} \in K \backslash I$ y $\alpha_{JK} < \alpha_{JK}$, también es absurdo.

  Por lo tanto $I \subset J$

- Afirmación: $\forall a \in I$ y $\forall b \in J \backslash I$ tenemos que $a < b$.

  Si existen $x \in J \backslash I$ e $y \in I$ con $y > x$, entonces $x \in J \backslash K$. Como $I \subset J$ e $I \ll K$ entonces $x < k \forall k \in K \backslash J$ lo que sería absurdo porque $J < K$. ■

OBSERVACIÓN 2.1.7.

- *Si $X \subset Y$ entonces $X \leq Y$.*
- *Si S está totalmente ordenado, entonces $Ch(S)$ también lo está.*

EJEMPLO 2.1.8. *Si tomamos $\{1, 2, 3\}$, entonces los elementos de $Ch(\{1, 2, 3\})$ son, con su orden:*

$$\emptyset < \{3\} < \{2\} < \{2, 3\} < \{1\} < \{1, 3\} < \{1, 2\} < \{1, 2, 3\}.$$

DEFINICIÓN 2.1.9. *Si X es una cadena en S denotamos $X^* = X \backslash \{\text{máx}\, X\}$.*

LEMA 2.1.10. *Sean $X, Y \in Ch(S)$ entonces:*

1. $X^* = \max\{X' \in Ch(S) : X' < X \text{ y } \max X' < \max X\}$.
2. *Si* $X^* < Y$ *y* $\max X \geq \max Y$ *entonces* $X \leq Y$.

Demostración:

1. Sea X' tal que $X' < X$ y $\max X' < \max X$.
   - Si $X' \subset X^*$ es claro que $X' \leq X^*$.
   - En el otro caso tenemos dado $\lambda \in X' \backslash X^*$, $\lambda < \max X$. Como $X' < X$ existe $\mu < \lambda$ tal que $\mu \in X \backslash X'$. Entonces $\mu \in X^* \backslash X'$.

     Por lo tanto $\min(X^* \backslash X') = \min(X \backslash X') < \min(X' \backslash X) = min(X' \backslash X^*)$. O sea $X' < X^*$.
2. Si $X^* < Y$ entonces $\min(Y \backslash X^*) < \min(X^* \backslash Y)$.
   - Si $X^* \subset Y$ y $X \subset Y$ entonces $X \leq Y$. En caso que $X \not\subseteq Y$ $\min(Y \backslash X) < \max X = \min(X \backslash Y)$ entonces $X < Y$.
   - Si $X^* \not\subseteq Y$ entonces existe $\mu \in X^* \backslash Y$ con $\mu < \max X$. Entonces $\min(Y \backslash X^*) < \mu < \max X$, con lo cual se obtiene que: $\min(Y \backslash X) = \min(Y \backslash X^*)$ y que $\min(X \backslash Y) = \min(X^* \backslash Y)$.

     Entonces $\min(Y \backslash X) = \min(Y \backslash X^*) < \min(X^* \backslash Y) = \min(X \backslash Y)$. ■

DEFINICIÓN 2.1.11. *Sea $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si $\lambda : S \to \mathbb{N}$ cumple que para cada $x < y$ verifica que $\lambda(x) < \lambda(y)$, decimos que λ es una **función de longitud**.*

OBSERVACIÓN 2.1.12.

- *λ induce un mapa que también vamos a denotar $\lambda : Ch(S, x) \to Ch(\mathbb{N}, \lambda(x))$ tal que a una cadena $X = \{x_1, \dots x_n\}$ la lleva en $\lambda(X) = \{\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)\}$.*
- *Podemos ahora definir $\lambda^* : S \to Ch(\mathbb{N})$ con $\lambda^*(x) = \max\{\lambda(X) : X \in Ch(S, x)\}$.*

PROPOSICIÓN 2.1.13. *Sea $x \in S$ entonces*

(C0) $\lambda^*(x) = \max_{x' < x} \lambda^*(x') \cup \{\lambda(x)\}$.

Demostración:

Si $X = \lambda^*(x)$ entonces $\max X = \lambda(x)$.

Sabemos por 2.1.10 que $X \setminus \max X = \max\{X' \in Ch(\mathbb{N}) : X' < X \text{ y } \max X' < \max X\}$. Entonces $\max_{x'<x} \lambda^*(x') \leq \max\{X' \in Ch(\mathbb{N}) : X' < X \text{ y } \max X' < \max X\} \cup \{\lambda(x)\} = \lambda^*(x)$.

Si $\lambda^*(x) = \lambda(X_0)$ con $X_0 \in Ch(S,x)$ y si $y = \max\{X_0 \setminus \max X_0\}$, entonces $\lambda^*(y) = \lambda(X_0) \setminus \max \lambda(X_0)$ (en caso contrario se cumpliría $\lambda(Y_0) = \lambda^*(y) > \lambda(X_0) \setminus \max \lambda(X_0) = X \setminus \max X$ pero esto implicaría que $\lambda(Y_0 \cup \{x\}) = \lambda(Y_0) \cup \lambda(x) > X$ con $Y_0 \cup \{x\} \in Ch(S,x)$).

Finalmente $\lambda^*(y) \cup \lambda(x) = X = \lambda^*(x)$. Y como $y < x$ se obtiene lo querido. ■

PROPOSICIÓN 2.1.14. *Sean $x, y \in S$ con $(S, \leq)$ parcialmente ordenado*

- ***(C1)*** *Si $x \leq y$ entonces $\lambda^*(x) \leq \lambda^*(y)$.*
- ***(C2)*** *Si $\lambda^*(x) = \lambda^*(x)$ entonces $\lambda(x) = \lambda(y)$.*
- ***(C3)*** *Si $\lambda^*(x') < \lambda^*(y)$ $\forall x' < x$ y $\lambda(x) \geq \lambda(y)$ entonces $\lambda^*(x) \leq \lambda^*(y)$.*

Demostración:

- (C1) Si $x \leq y$, para todo$X \in Ch(S,x)$ consideramos $Y = X \cup \{y\} \in Ch(S,y)$. Entonces, por definición, $\lambda^*(x) \leq \lambda^*(y)$.
- (C2) Si $\lambda^*(x) = \lambda^*(y)$ entonces $\lambda(x) = \max \lambda^*(x) = \max \lambda^*(y) = \lambda(y)$.
- (C3) Sean $X = \lambda^*(x)$ e $Y = \lambda^*(y)$.

  Como $\lambda^*(x') < \lambda^*(y) \forall x' < x$ entonces por (C0) $X^* < Y$. Además tenemos $\lambda(x) \geq \lambda(y)$ que implica $\max X \geq \max(Y)$. Por 2.1.10 concluimos $X \leq Y$. ■

PROPOSICIÓN 2.1.15. *Si $x, y \in S$ con $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces*

- ***(C4)*** *$\lambda^*(x) \leq \lambda^*(y)$ o $\lambda^*(y) \leq \lambda^*(x)$.*
- ***(C5)*** *$\{\lambda^*(x) : \max X \leq n\}$ es finito $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

- (C4) Es claro porque $Ch(\mathbb{N})$ es un conjunto totalmente ordenado.
- (C5) Es consecuencia de que $\{X \in Ch(\mathbb{N}) : \text{máx}\, X \leq n\}$ es finito (está incluido en el conjunto de las partes de $\{1, 2, \ldots n\}$). ■

2.2. Categorías de Longitud Finita y Medida de Gabriel Roiter

En esta sección, como ya dijimos, trabajaremos con la medida de Gabriel-Roiter en un contexto más general, el de las categorias de longitud finita. Ciertas categorías de módulos son de longitud finita, también lo es la categoría de comódulos sobre una coálgebra (ver ejemplo 2.2.6).

2.2.1. Categorías de Longitud finita

Para comenzar daremos las definiciones básicas para poder trabajar en categorías de longitud finita.

DEFINICIÓN 2.2.1.

- *Una categoría $\mathcal{A}$ es **aditiva** si:*
  - *Tiene coproductos finitos,*
  - $\hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ *es un grupo abeliano para todo par de objetos* (A, B) *de* $\mathcal{A}$
  - *y la composición* $\circ : \hom_{\mathcal{A}}(B, C) \hom_{\mathcal{A}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{A}}(A, C)$ *es bilineal.*
- *Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es **abeliana** si todo morfismo en $\mathcal{A}$ $\phi : A \to B$, admite núcleo y conúcleo, y además el morfismo $\bar{\phi}$ inducido por ϕ según el siguiente diagrama es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} ker\phi \arrow[r, "\phi'"] & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\phi''"] \arrow[d] & Coker\phi \\ & Coker\phi' \arrow[r, "\bar{\phi}"] & ker\phi'' & \end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 2.2.2.

- *Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, decimos que dos monomorfismos $X_1 \hookrightarrow X$, $X_2 \hookrightarrow X$ son **equivalentes** si existe un isomorfismo $\phi : X_1 \to X_2$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, hook] & & X_2 \arrow[dl, hook'] \\ & X & \end{tikzcd}$$

- *Una clase de equivalencia de monomorfismos en X es llamada un* ***subobjeto*** *de X.*
- *Denotamos $X_1 \subset X_2$ si existe un morfismo que hace conmutativo al diagrama de arriba.*

DEFINICIÓN 2.2.3. *Si A es una categoría abeliana, un objeto X tiene* ***longitud finita*** *si tiene una serie de composición*

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X$$

(donde X_i/X_{i-1} es simple).

OBSERVACIÓN 2.2.4. *Por el teorema de Jordan-Hölder la longitud de una serie de composición es invariante, por lo que se puede definir la* ***longitud*** *de un objeto de $\mathcal{A}$.*

DEFINICIÓN 2.2.5. *Una categoría abeliana $\mathcal{A}$ es una categoría de longitud finita, si todos los objetos de $\mathcal{A}$ tienen longitud finita y las clases de isomorfismo de los objetos forman un conjunto.*

Ejemplos de categorías de longitud finita son:

EJEMPLO 2.2.6.
- *Si Λ es un anillo artiniano entonces ${}_\Lambda\mathcal{M}_f$ es una categoría de longitud finita.*
- *Si C es una coálgebra entonces $\mathcal{M}_f^C$ es una categoría de longitud finita.*

OBSERVACIÓN 2.2.7. *Un objeto de longitud finita admite una descomposición como suma directa finita de indescomponibles con anillos de endomorfismos locales. Por el Teorema de Krull-Remak-Schmidt esa descomposición es única salvo isomorfismo.*

DEFINICIÓN 2.2.8. *Dada una categoría $\mathcal{A}$, decimos que Q es un cogenerador de $\mathcal{A}$ si $\forall X$ en $\mathcal{A}$ existe un monomorfismo $X \hookrightarrow \oplus_i Q$*

2.2.2. Medida de Gabriel-Roiter

Ahora definiremos la medida de Gabriel-Roiter para categorías de longitud finita.

DEFINICIÓN 2.2.9. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría de longitud finita. Entonces las clases de isomorfismo de objetos de $\mathcal{A}$ están parcialmente ordenadas de la siguiente forma:*

$X \leq Y$ si y solamente si existe un monomorfismo $\varphi : X \hookrightarrow Y$.

A partir de ahora $\mathcal{A}$ denotará una categoría de longitud finita.

DEFINICIÓN 2.2.10. *Dada $l : Ind\mathcal{A} \to \mathbb{N}$ la función de longitud de $\mathcal{A}$, definimos el mapa $\mu = l^* : Ind\mathcal{A} \to Ch(\mathbb{N})$ que llamamos **medida de Gabriel-Roiter** de $\mathcal{A}$.*

Es fácil ver que:

OBSERVACIÓN 2.2.11. *$\mu(X) = \{1\}$ si y solo si X es un objeto simple.*

DEFINICIÓN 2.2.12. *Sean $X, Y \in Ind\mathcal{A}$. Decimos que X es un **predecesor de Gabriel-Roiter** de Y si $X < Y$ y $\text{máx}_{Y'<Y} \mu(Y')$. Además decimos que $\varphi(X) \subset Y$ es una **inclusión de Gabriel-Roiter** con φ como en 2.2.9.*

OBSERVACIÓN 2.2.13. *Si $Y \in Ind\mathcal{A}$ no es simple, entonces por (C5) tiene un predecesor de Gabriel-Roiter.*

DEFINICIÓN 2.2.14. *Una sucesión $X_1 < \ldots < X_{n-1} < X_n = X$ con $X_i \in Ind\mathcal{A}$ es una **filtración de Gabriel-Roiter** de X si X_{i-1} es un predecesor de X_i para $i = \{2, \ldots n\}$ y X_1 es simple.*

PROPOSICIÓN 2.2.15. *Sean $X, Y \in Ind\mathcal{A}$, entonces:*

- ***(C6)*** *$X \in Ind\mathcal{A}$ es simple si y solamente si $\mu(X) \leq \mu(Y)$ $\forall Y \in Ind\mathcal{A}$.*
- ***(C7)*** *Si $\mu(X) \leq \mu(Y)$ entonces existen $Y' < Y'' \leq Y$ en $Ind\mathcal{A}$ tales que Y' es predecesor de Y'' con $\mu(Y') \leq \mu(X) < \mu(Y'')$ y $l(Y') \leq l(X)$.*

Demostración:

- (C6) $\mu(X) = \{1\}$ si y solamente si X es simple. Si Y no es simple siempre tiene un subobjeto simple, por lo tanto $\mu(Y) > \{1\}$.
- (C7) Sea $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n = Y$ una filtración de Gabriel-Roiter de Y. Dicha filtración existe iterando el resultado de 2.2.13.

  Sabemos que $\mu(Y_1) \leq \mu(X)$ porque Y_1 es simple. Por (C4) existe i tal que $\mu(Y_i) \leq \mu(X) < \mu(Y_{i+1})$. Llamemos $Y' = Y_i$, $Y'' = Y_{i+1}$.

  Si $\mu(Y') = \mu(X)$ por (C2) $l(Y') = l(X)$.

  Si $l(Y') > l(X)$ entonces $l(Y'') > l(X)$ aplicamos el lema 2.1.10 y obtenemos $\mu(X) \geq \mu(Y_{i+1})$ lo que sería absurdo. ■

EJEMPLO 2.2.16. *Un objeto X de $\mathcal{A}$ es uniserial si tiene una única serie de composición. En este caso la serie de composición es una filtración de Gabriel-Roiter (observar que esto implica que X es indescomponible).*

PROPOSICIÓN 2.2.17. ***Propiedad Principal***
Sean $X, Y_1, \ldots, Y_k \in Ind\mathcal{A}$. Supongamos que $X \subset Y = \oplus_{i=1}^{k} Y_i$. Entonces

- $\mu(X) \leq \{\max \mu(Y_i)\}$
- *Si* $\mu(X) = \max\{\mu(Y_i)\}$ *entonces X es sumando directo de Y.*

Demostración:

Sea $\phi : X \hookrightarrow Y$. Hagamos la prueba de ambas afirmaciones por inducción en $n = l(X) + l(Y)$.

- Si $n = 2$ entonces ϕ es un isomorfismo.
- Supongamos $n > 2$, podemos diferenciar dos casos según las coordenadas $\phi = (\phi_i)_{i=1,\ldots k}$
  - Existe i_0 tal que ϕ_{i_0} no es un epimorfismo

    Sea $\phi_{i_0}(X) = Y'_{i_0} = \oplus_j Y_{ij}$ la descomposición en indescomponibles. Entonces $\mu(X) \leq \max\{\mu(Y_{ij}), \mu(Y_i)$ con $i \neq i_0\} \leq \max\{\mu(Y_i)\}$ porque $l(X) + l(Y') < n$ y $Y_{ij} \leq Y_{i_0}$ $\forall j$, siendo $Y' = \oplus_{j \neq i_0} Y_j \oplus Y'_{i_0}$.

  - $\phi_i : X \to Y_i$ son epimorfismos $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

    Como todos los ϕ_i son epimorfismos entonces $l(X) \geq l(Y_i)$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $X' \subsetneq X$ entonces $\max \mu(X') \leq \max\{\mu(Y_i)\}$ (porque $l(X') + l(Y) < n$).

    De hecho se tiene que: $\mu(X') < \max\{\mu(Y_i)\}$(pues en caso contrario tendríamos $X' \hookrightarrow X \hookrightarrow \oplus Y_i \to Y_i$ es un isomorfismo entonces X' sería sumando directo de X lo que es absurdo).

    Aplicamos (C3) y obtenemos $\mu(X) \leq \max\{\mu(Y_i)\}$.

Ahora supongamos que $\mu(X) = \max\{\mu(Y_i)\} = \mu(Y_k)$. Podemos tomar a ϕ_k epimorfismo. (si no cambiamos a los Y_i con $\mu(X) = \mu(Y_i)$ por las imágenes $\phi_i(X) = Y'_i = \oplus Y_{ij}$ como antes y obtenemos que $\mu(X) \leq \max \mu(Y_{ij}, \mu(Y_l)) < \mu(Y_k)$ lo que es absurdo).

De hecho ϕ_k es un isomorfismo porque $\mu(X) = \mu(Y_k)$ implica por (C2) que $l(X) = l(Y_k)$. En particular X es sumando directo de Y. ■

COROLARIO 2.2.18. *Sean $X, Y \in Ind\mathcal{A}$ y $X \subset Y$ con $\mu(X) = \text{máx}_{Y'<Y}\mu(Y')$. Si $X \subseteq U \subset Y$ en $\mathcal{A}$ entonces X es sumando directo de U.*

Demostración:

Sea $U = \oplus U_i$ la descomposición en indescomponibles. Ahora aplicamos 2.2.17 y tenemos: $\mu(X) \leq \text{máx}\,\mu(U_i) < \mu(Y)$.

Además sabemos por hipótesis que $\mu(U_i) \leq \mu(X)$, $\forall i$.

Por lo tanto tenemos $\mu(X) = \text{máx}\,\mu(U_i)$ y por 2.2.17 sabemos que X es sumando directo de U. ■

EJEMPLO 2.2.19.

1. *Si $Y \in Ind\mathcal{A}$ y $\mu(X) \leq \mu(Y)$ para cada $X \in Ind\mathcal{A}$, entonces Y debe ser inyectivo porque todo monomorfismo $Y \hookrightarrow Z$ escinde por la proposición 2.2.17 (observar que vale la demostración de 1.4.14 para categorías de longitud finita).*

2. *Si $\mathcal{A}$ tiene un cogenerador $Q = \oplus Q_i$, con los Q_i indescomponibles, entonces $\mu(X) \leq \text{máx}\,\mu(Q_i)$ para todo $X \in Ind\mathcal{A}$.*

PROPOSICIÓN 2.2.20. *Sean $X, Y \in Ind\mathcal{A}$ y $X \subset Y$ una inclusión de Gabriel-Roiter. Entonces Y/X es indescomponible.*

Demostración:

Sea $Z = Y/X$ y supongamos que $Z = Z' \oplus Z''$ con $Z'' \neq 0$.

Entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Z'' \arrow[r, "1_{Z''}"] \arrow[d] & Z'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos $X \subseteq Y' \subset Y$ y por lo tanto $X \hookrightarrow Y'$, por 2.2.18, escinde. Por lo tanto $Z' \hookrightarrow Z$ se factoriza a través de de $Y \twoheadrightarrow Z$ por el monomorfismo $Z' \hookrightarrow Y$. Como Y es indescomponible entonces $Z' = 0$. ■

Como corolario a la propposición anterior tenemos:

COROLARIO 2.2.21. *Sea $Y \in Ind\mathcal{A}$ que no sea simple, entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ en $\mathcal{A}$ tales que X y Z son indescomponibles.*

Demostración:

Basta tomar $X \subset Y$ con $\mu(X) = \text{máx}_{Y' < X}\, \mu(Y')$ y aplicar la proposición 2.2.20. ■

2.3. Parte de Despegue y Parte de Aterrizaje

En esta sección llegaremos a un resultado sobre la estructura de las medidas de Gabriel-Roiter en las categorías de longitud finita. Este resultado nos dice que las medidas más pequeñas y más grandes tienen una cantidad finita de objetos de la categoría (salvo isomorfismos) y que se pueden "discretizar". El resto de las medidas (que no tienen por qué tener una cantidad finita de objetos de la categoría) quedan ubicadas en el medio.

DEFINICIÓN 2.3.1. *Una subcategoría $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ es **covariantemente finita** si cada objeto X en $\mathcal{A}$ admite una $\mathcal{C}$-aproximación a izquierda. Esto es un mapa $X \to Y$ con Y en $\mathcal{C}$ tal que el mapa inducido $\hom_{\mathcal{A}}(Y, C) \to \hom_{\mathcal{A}}(X, C)$ es sobreyectivo $\forall C$ en $\mathcal{C}$. Dualmente definimos una categoría **contravariantemente finita**.*

OBSERVACIÓN 2.3.2. *La definición 2.3.1 es equivalente a decir que dado X en $\mathcal{A}$ existe $\phi : X \to Y$ con Y en $\mathcal{C}$ tal que si $X \to C$ es un morfismo de $\mathcal{A}$ con C en $\mathcal{C}$ entonces existe un morfismo $Y \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[dl, dashed] \\ C & \end{tikzcd}$$

El siguiente lema nos será útil para reconocer subcategorías covariantemente finitas.

LEMA 2.3.3. *Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ cerrada por sumas directas y subobjetos, entonces $\mathcal{C}$ es una subcategoría covariantemente finita de $\mathcal{A}$.*

Demostración:

Fijemos X en $\mathcal{A}$. Sean $\mathfrak{F} = \{X' \hookrightarrow X : X' \hookrightarrow X = ker(X \to Y)$ con Y en $\mathcal{C}$ $\}$ y $n = \text{mín}\{l(X') : X' \in \mathfrak{F}\}$.

- Si $n = 0$ entonces $X \hookrightarrow Y$ con Y en $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada por subobjetos entonces X está en $\mathcal{C}$. Entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ C & \end{tikzcd}$$

- Si $n > 0$ sea X' tal que $l(X') = n$, entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & Y \\ & & I \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

siendo I la imagen de f. Como $I \hookrightarrow Y$ entonces I está en $\mathcal{C}$.

Como $Ker(X \twoheadrightarrow I) = Ker(X \to Y) = X' \hookrightarrow X$ e $Im(X' \hookrightarrow X) = X' \hookrightarrow X$ entonces $I = X/X'$.

Ahora si tenemos $X \to C$ con C en $\mathcal{C}$ entonces $X \twoheadrightarrow X/X'$ va a ser nuestro candidato a $\mathcal{C}$-aproximación a izquierda para X.

Si tenemos $X_1 \hookrightarrow X = Ker(X \to Y_1)$ y $X_2 \hookrightarrow X = Ker(X \to Y_2)$, entonces $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X = Ker(X \to Y_1 \oplus Y_2)$. Entonces $X_1 \cap X_2 \subset X$ pertenece a $\mathfrak{F}$ (recordar que en $\mathcal{C}$ tenemos sumas directas).

Sean $X \to C$ un morfismo en $\mathcal{A}$ con C en $\mathcal{C}$, y $K = Ker(X \to C)$. En caso de que $X' \cap K \subsetneq X'$ tendríamos $l(X' \cap K) < n$ lo que sería absurdo usando lo observado en el párrafo anterior. Por lo tanto podemos asumir que $X' \hookrightarrow K$ y obtenemos que $X' \to X \to C$ es el morfismo nulo.

Como $X \twoheadrightarrow X/X' = Coker(X' \to X)$ entonces existe $g : X/X' \to C$ tal que el diagrama siguiente queda conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, hook] & \\
X' \arrow[r, hook] & X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X/X' \arrow[dl, dashed, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

■

DEFINICIÓN 2.3.4. *Si $\mathcal{M}$ es un conjunto de valores de $\mu(X)$, entonces definimos $\mathcal{A}(M) = \{\oplus X_i : \mu(X_i) \in M, \forall i\}$.*

PROPOSICIÓN 2.3.5. *Si $\mathcal{M}$ es un conjunto de valores $\mu(X)$ que es cerrado por predecesores entonces $\mathcal{A}(M)$ es covariantemente finita.*

Demostración:

$\mathcal{A}(M)$ es cerrada por subobjetos (aplicar la proposición 2.2.17 a cada indescomponible) y sumas directas, luego aplicamos el lema 2.3.3. ■

DEFINICIÓN 2.3.6.

- *Decimos que $\phi : X \to Y$ en $\mathcal{A}$* ***casi escinde a izquierda****, si ϕ no es un monomorfismo que escinde y cada mapa $X \to Y'$ en $\mathcal{A}$ que no es un monomorfismo que escinda se factoriza a través de ϕ como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Y \arrow[dl, dashed] \\ Y' & \end{tikzcd}$$

- *Dualmente decimos que $\psi : Y \to Z$ en $\mathcal{A}$* ***casi escinde a derecha****, si ψ no es un epimorfismo que escinde y cada mapa $Y' \to Z$ en $\mathcal{A}$ que no es un epimorfismo que escinde se factoriza a través de ψ como se ve en el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\psi"] & Z \\ & Y' \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

EJEMPLO 2.3.7. *Si $\mathcal{A} = mod\Lambda$ con Λ un álgebra de artin, entonces todo objeto que sea indescomponible X admite un morfismo que casi escinde a izquierda que comienza en X, si X no es un inyectivo simple y un morfismo que casi escinde a derecha que termina en X, si X no es un proyectivo simple.*

DEFINICIÓN 2.3.8. *Sea $X \in Ind\mathcal{A}$, un* ***sucesor inmediato*** de *$\mu(X)$ es por definición un elemento minimal en $\{\mu(Y) : Y \in Ind\mathcal{A}$ con $\mu(X) < \mu(Y)\}$.*

LEMA 2.3.9. *Sean $X, Y \in Ind\mathcal{A}$ tales que X es un predecesor de Gabriel-Roiter de Y. Si $X \to \bar{X}$ es un morfismo que casi escinde a izquierda, entonces Y es un cociente de $\bar{X}$.*

Demostración:

Como $X \hookrightarrow Y$ es un monomorfismo que no escinde entonces existe ϕ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \bar{X} \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $X \to \bar{X}$ es un monomorfismo. Sea $U \hookrightarrow Y = Im(\bar{X} \to Y)$, entonces $X \hookrightarrow \bar{X} \twoheadrightarrow U$ es un monomorfismo.

Si $U = \oplus U_i$ con los U_i indescomponibles entonces $\mu(X) \leq \text{máx}\, \mu(U_i) = \mu(U_{i_0})$. Ahora tenemos dos opciones $\mu(X) = \text{máx}\, \mu(U_i)$ o $\mu(X) < \text{máx}\, \mu(U_i)$.

- Si se cumple lo primero entonces $X \hookrightarrow \bar{X} \to U$ escinde, lo que implica que $X \hookrightarrow \bar{X}$ también escinda. Esto último es absurdo por ser $X \hookrightarrow \bar{X}$ un morfismo que casi escinde.

- Supongamos que se cumpla lo segundo. Esto implica que $\mu(Y) = \mu(U_{i_0})$ pues X es un predecesor de Gabriel-Roiter de Y. Entonces $l(Y) = l(U_{i_0})$ y como $U_{i_0} \hookrightarrow \oplus U_i \hookrightarrow Y$ esto implica que $Y \cong U_{i_0}$, de lo que se deduce que Y es un cociente de $\bar{X}$. ■

la siguiente proposición vos asegura la exitencia de sucesores inmediatos.

PROPOSICIÓN 2.3.10. *Sea X en $\mathcal{A}$ y supongamos que existe $n_X \in \mathbb{N}$ tal que cada $V \in Ind\mathcal{A}$ con $\mu(V) \leq \mu(X)$ y $l(V) \leq l(X)$ admite un mapa que casi escinde a izquierda $V \to \bar{V}$ con $l(\bar{V}) \leq n_X$. Entonces existe un sucesor inmediato de $\mu(X)$ siempre que $\mu(X)$ no sea maximal.*

Demostración:

Como sabemos que $\mu(X)$ no es maximal, existe Y con $\mu(X) < \mu(Y)$. Si aplicamos (C7) encontramos $Y' < Y'' \leq Y \in Ind\mathcal{A}$ tales que Y' es un predecesor de Gabriel-Roiter de Y'' con $\mu(Y') \leq \mu(X) < \mu(Y'') \leq \mu(Y)$ y $l(Y') \leq l(X)$.

Por 2.3.9 Y'' es cociente de cada $Y' \hookrightarrow \bar{Y}'$ mapa que casi escinde a izquierda. Entonces $l(Y'') \leq l(\bar{Y}') \leq n_X$. Ahora usando (C5) sabemos que los valores $\mu(Y'')$ posibles son finitos y como consecuencia de esto existe un sucesor inmediato de $\mu(X)$. ■

Ahora estamos listos para dar una prueba de los dos teoremas principales, la existencia de la parte de despegue y la existencia de la parte de aterrizaje. Como corolario al primer teorema se obtendrá como consecuencia una prueba de la conjetura de Brauer-Thrall I.

LEMA 2.3.11. ***Harada-Sai***
Sea $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos una composición de morfismos que no son isomorfismos

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^n-2}} X_{2^n-1} \xrightarrow{f_{2^n-1}} X_{2^n}$$

entre objetos indescomponibles X_i con $l(X_i) \leq n$, entonces dicha composición es nula.

Demostración:

Probemos que $l(Im(f_{2^k-1} \ldots f_1)) \leq n - k \ \forall k$ por inducción en k.

- $k = 1$

    - Si $Im(f_1) \neq X_2$ entonces $l(Imf_1) \leq n - 1$.
    - Si $Im(f_1) = X_2$ entonces $Kerf_1 \neq 0$ (en caso contrario f_1 es un isomorfismo). En este caso $l(Imf_1) = l(X_2) = l(X_1/Kerf_1) < l(X_1) \leq n$.

- Supongamos que se cumple para $1 \leq j \leq k$.

Llamemos $\mu = f_{2^{k+1}-1} \dots f_2 f_1$, $f = f_{2^k-1} \dots f_2 f_1$ y $g = f_{2^{k+1}-1} \dots f_{2^k+2} f_{2^k+1}$. Entonces $\mu = g f_{2^k} f$.

Sabemos que $l(Imf) \leq n - k$ y $l(Img) \leq n - k$ por hipótesis inductiva, entonces sabemos que $l(Im(\mu)) \leq l(Im(f_{2^k} f)) \leq l(Imf) \leq n - k$.

Estas desigualdades se deben a que si tenemos una composición $X \to Y \to Z$ de morfismos en $\mathcal{A}$ con $I \hookrightarrow Y = Im(X \to Y)$ y con $I' \hookrightarrow Z = Im(X \to Z)$. tenemos que existe un epimorfismo $h : I \twoheadrightarrow I'$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddr, two heads] & Y \arrow[r] & Z \\ & I \arrow[u, hook] \arrow[d, dashed, two heads, "h"] & \\ & I' \arrow[uur, hook] & \end{tikzcd}$$

De ahí que $l(I) \geq l(I')$.

Si $l(Im\mu) = l(Imf) = n - k$ **(I)** probemos que f_{2^k} es un isomorfismo. Podemos suponer que $f \neq 0$ si no ya estaría probado el lema.

- Veamos que f_{2^k} es un monomorfismo.

  Usando lo anterior tenemos que el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddr, two heads] & X_{2^k} \arrow[r, "f_{2^k}"] & X_{2^k+1} \arrow[r, "g"] & X_{2^{k+1}} \\
& Imf \arrow[u, hook] \arrow[d, dashed, two heads, "h"] & & \\
& Im\mu \arrow[uurr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Como $Imf \twoheadrightarrow Im\mu$ es un isomorfismo (ya que $l(Imf) = l(Im\mu)$) entonces $gf_{2^k}|_{Imf}$ es un monomorfismo. Por lo tanto $Ker(gf_{f_{2^k}}) \cap Imf = 0$. **(II)**

Por otro lado tenemos $n-k = l(Im\mu) \leq l(Im(gf_{2^k})) \leq l(Img) = n-k$ **(III)** y $l(X_{2^k}) = l(Kergf_{2^k}) + l(Im(gf_{2^k}))$ **(IV)**.

Entonces por **(II)** tenemos que $Imf \oplus Kergf_{2^k} \hookrightarrow X_{2^k}$. y por **(I)**, **(III)** y **(IV)** se obtiene $Imf \oplus Kergf_{2^k} \cong X_{2^k}$. Como X_{2^k} es indescomponible e $Im(f) \neq 0$ entonces $Kergf_{2^k} = 0$. Por lo tanto gf_{2^k} es un monomorfismo y esto implica que f_{2^k} también es un monomorfismo.

- Veamos ahora que f_{2^k} es un epimorfismo.

Tenemos ahora el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddrr, bend right, two heads] & X_{2^k} \arrow[r, "f_{2^k}"] & X_{2^k+1} \arrow[r, "g"] & X_{2^{k+1}} \\
& Imf_{2^k}f \arrow[ur, hook] \arrow[dr, dashed, two heads, "h"] & & \\
& & Im\mu \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Como $l(Im(f_{2^k}f)) = l(Im\mu)$ y tenemos $Im(f_{2^k}f) \twoheadrightarrow Im\mu$ entonces $Im(f_{2^k}f) \cong Im\mu$. Similarmente a lo anterior se prueba que $g|_{Im(f_{2^k}f)}$ es un monomorfismo. Por lo tanto $Kerg \cap Im(f_{2^k}f) = 0$. También se tiene $l(X_{2^k+1}) = l(Kerg) + l(Img)$.

Como $l(Im(g)) = l(Imf_{2^k}f)$, entonces $Im(f_{2^k}f) \oplus Kerg \cong X_{2^k+1}$. Como $f_{2^k}f \neq 0$ y X_{2^k} es indescomponible entonces $Kerg = 0$. Por lo tanto $Imf_{2^k}f \cong X_{2^k+1}$ lo que significa que f_{2^k} es un epimorfismo. Luego f_{2^k} es un isomorfismo y esto es una contradicción. Entonces $l(Im(\mu)) < n-k$. ■

PROPOSICIÓN 2.3.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoria de longitud finita con mapas que casi escinden a izquierda y solamente una cantidad finita de simples (salvo isomorfismos). Además supongamos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ tal que*

- *$\mathcal{C}$ es covariantemente finita.*
- *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $l(X) \leq n$ para cada indescomponible de $\mathcal{C}$.*

Entonces hay solamente una cantidad finita (salvo isomorfismos) de indescomponibles en $\mathcal{C}$.

Demostración:

Afirmación : podemos construir todos los objetos indescomponibles X en $\mathcal{C}$, en a lo sumo, 2^n pasos a partir de los objetos simples de $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:

Sea $S \to X$ no nulo con S simple, entonces factoriza por la aproximación a izquierda $S \to S'$ de esta forma $S \to S' \to X$.

Consideremos X_0 un sumando directo de S' tal que

$$S \to X_0 \to X = S \to S' \twoheadrightarrow X_0 \hookrightarrow S' \to X$$

es no nula. Paramos el proceso si $X_0 \to X$ es un isomorfismo.

En caso contrario tomamos $X_0 \to Y_0$ un mapa que casi escinde a izquierda y una aproximación a izquierda $Y_0 \to Z_0$. El mapa $X_0 \to X$ se factoriza a través de la composicón $X_0 \to Y_0 \to Z_0$.

Esto se debe a que: como $X_0 \to X$ no es un isomorfismo entonces no escinde. Luego existe $Y_0 \to X$ que factoriza como muestra el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ Y_0 \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Y como $Y_0 \to Z_0$ es una $\mathcal{C}$-aproximación a izquierda de Y_0, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \\ Y_0 \arrow[d] & \\ Z_0 \arrow[uur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe X_1 sumando directo de Z_0 tal que $X_0 \to Y_0 \to Z_0 \twoheadrightarrow X_1 \hookrightarrow Z_0 \to X$ no es nulo. Nuevamente se para el proceso si $X_1 \to X$ es un isomorfismo, si no repetimos el proceso y nos queda

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_r$$

donde los mapas no son isomorfismos. Esto implica por 2.3.11 que $r < 2^n$ y que $X \cong X_i$ para $i < 2^n$. Además como en cada paso hay una cantidad finita de sumandos directos que pueden ser elegidos entonces hay finitos indescomponibles en $\mathcal{C}$. ■

TEOREMA 2.3.13. ***Parte de Despegue***

Sea $\mathcal{A}$ una categoría de longitud finita tal que ind$\mathcal{A}$ es infinita. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad finita de simples (salvo isomorfismos) y que cada indescomponible admite un mapa que casi escinde a izquierda. Entonces existen infinitos valores

$$\mu(X_1) < \mu(X_2) < \ldots \mu(X_n) < \ldots$$

de la medida de Gabriel-Roiter de $\mathcal{A}$ que tienen las siguientes propiedades:

1. *Si $\mu(X) \neq \mu(X_i)\ \forall i \in \mathbb{N}$ entonces $\mu(X_i) < \mu(X)\ \forall i \in \mathbb{N}$*
2. *El conjunto $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X_i)\}$ es finito $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Construiremos los valores de $\mu(X_i)\ \forall i \in \mathbb{N}$ por inducción como sigue.

- Si $i = 1$ Tomamos un objeto simple de $\mathcal{A}$, entonces se satisfacen las condiciones 1) (por (C6)) y 2).
- Supongamos que tenemos $\mu(X_1) < \mu(X_2) < \ldots < \mu(X_n)$ satisfaciendo 1) y 2), $\forall 1 \leq i \leq n$ con $n \geq 1$.

Podemos aplicar 2.3.10 y construir $\mu(X_{n+1})$ un sucesor inmediato de $\mu(X_n)$. Esto se debe a que $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X_i)$ con $1 \leq i \leq n\}$ es finito.

Falta probar que el conjunto $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X_{n+1})\}$ es finito. Para esto consideramos $M = \{\mu(X_1), \ldots, \mu(X_{n+1})\}$, por 2.3.5 sabemos que $\mathcal{A}(M)$ es covariantemente finita.

En $\mathcal{A}(M)$ es claro que $l(X)$ está acotada por $\text{máx}\{l(X_1), l(X_2), \ldots, l(X_{n+1})\}$ para cada indescomponible de $\mathcal{A}(M)$ por (C2). Por 2.3.12 se concluye que el número de indescomponibles de $\mathcal{A}(M)$ es finito, entonces $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X_i)\}$ es finito. ■

A partir del teorema 2.3.13 es fácil dar una demostración a la Conjetura de Brauer-Thrall I, como se muestra a continuación.

COROLARIO 2.3.14. ***Conjetura de Brauer-Thrall I***
Sea $\mathcal{A}$ una categoría de longitud finita tal que $ind\mathcal{A}$ es infinita. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad finita de simples (salvo isomorfismos) y que cada indescomponible admite un mapa que casi escinde a izquierda. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un objeto indescomponible X de $\mathcal{A}$ con $l(X) > n$.

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay solamente una cantidad finita de valores $\mu(X)$ con $l(X) \leq n$ por (C5). ■

A partir de este primer teorema podemos dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.3.15. *Si tenemos que $\mu(X_1) < \mu(X_2) < \ldots \mu(X_n) < \ldots$ es un conjunto de medidas de una categoría $\mathcal{A}$ que cumple las condiciones 1) y 2) del teorema 2.3.13 decimos que $\mathcal{A}$ tiene parte de despegue.*

PROPOSICIÓN 2.3.16. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría que está bajo las hipótesis del teorema 2.3.13. Si X está en la parte de despegue entonces existen una cantidad finita de objetos Y en la parte de despegue con $X \subset Y$ una inclusión de Gabriel-Roiter.*

Demostración:

Supongamos que $\mu(X) = \mu(X_k)$.

Si hubiese una cantidad infinita $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de objetos se debería cumplir $\mu(Y_n) = \mu(X) + \ell(Y_n)$ donde $\ell(Y_n)$ se hace tan grande como se quiera. Esto sería absurdo porque no existiría $\mu(X_{k+1})$. ■

El siguiente ejemplo nos muestra una categoría que tiene parte de despegue.

EJEMPLO 2.3.17. *Tomemos $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Luego consideremos en la categoría $\mathcal{G}$ de los grupos conmutativos finitos que es una categoría de longitud finita, la subcategoría aditiva que contiene a los grupos que sean isomorfos a $\mathbb{Z}_{p^k}$ con $k \in \mathbb{N}$. Esta subcategoría es también abeliana, y la llamaremos $\mathcal{G}_p$.*

Claramente los indescomponibles de $\mathcal{G}_p$ son todos los grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_{p^k}$. Además sabemos que tenemos monomorfismos $\mathbb{Z}_{p^k} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^{k+1}}$ y que $Coker(\mathbb{Z}_{p^k} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{p^{k+1}}) \cong \mathbb{Z}_p$ que es simple. Por lo tanto se ve que $l(\mathbb{Z}_{p^k}) = k$.

De acá se deduce que las medidas de $\mathcal{G}_p$ son de la forma

$$\{1\} < \{1,2\} < \{1,2,3\} < \{1,2,3,4\} < \ldots < \{1,2,3,\ldots,n\} < \ldots$$

Ahora veremos un resultado dual al teorema 2.3.13, en el que bajo ciertas condiciones tenemos que también las medidas mayores tienen finitos indescomponibles y predecesores inmediatos. Comenzaremos con el lema siguiente:

LEMA 2.3.18. *Sea X en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A}_X$ la subcategoría de $\mathcal{A}$ formada por todos los objetos que no tienen sumandos directos isomorfos a los sumandos directos de X. Si cada sumando directo indescomponible de X admite un mapa que casi escinde a derecha, entonces $\mathcal{A}_X$ es contravariantemente finita.*

Demostración:

Sea $X = \oplus_{i=1}^{k} X_i$ la descomposición en indescomponibles. Es suficiente construir una aproximación a derecha en $\mathcal{A}_X$ para cada objeto indescomponible Z de $\mathcal{A}$.

- Si Z está en $\mathcal{A}_X$ tomemos 1_Z.
- Si Z es un X_{i_0} hacemos lo siguiente: Sea $\phi_{i_0} : \bar{X}_{i_0} \to X_{i_0}$ un mapa que casi escinde a derecha. $\bar{X}_{i_0} = Y_{i_0} \oplus (\oplus_{i_1} X_{i_0 i_1})$ con Y_{i_0} en $\mathcal{A}_X$ y $i_0 i_1 \in \{1,\ldots,k\}$.

  Notar que cada morfismo $\psi : V \to X_{i_0}$ con V en $\mathcal{A}_X$ se factoriza a través de ϕ_{i_0} (se debe a que ψ no puede escindir). Tampoco las componentes $X_{i_0 i_1} \to X_{i_0}$ de ϕ_{i_0} son invertibles (si no el morfismo ϕ_{i_0} escinde).

  Ahora hagamos la composición de ϕ_{i_0} con $1_{Y_0} \oplus (\oplus_{i_1} \phi_{X_{i_0 i_1}})$ y obtenemos:

$$Y_0 \oplus (\oplus_{i_1} Y_{i_0 i_1} \oplus_{i_2} X_{i_0 i_1 i_2}) \to Y_{i_0} \oplus (\oplus_{i_1} X_{i_0 i_1}) \to X_{i_0}$$

Nuevamente cada $V \to X_{i_0}$ con V en $\mathcal{A}_X$ se factoriza a través de este mapa (cada coordenada es un mapa que casi escinde) y cada componente $X_{i_0 i_1 i_2} \to X_{i_0 i_1}$ es no invertible (en caso contrario $\bar{X}_{i_0 i_1} \to X_{i_0 i_1}$ escinde).

Continuamos el proceso componiendo el morfismo anterior con $1_{Y_{i_0}} \oplus (\oplus_{i_1} 1_{Y_{i_0 i_1}} \oplus (\oplus_{i_2} \phi_{i_0 i_1 i_2}))$ y así continuamos inductivamente. Sea $n = 2^m$ con $m = \text{máx}\{l(X_1), \ldots, l(X_k)\}$, entonces aplicamos 2.3.11 tenemos que los siguientes morfismos:

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_m} \to X_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} \to \ldots \to X_{i_0 i_1} \to X_{i_0}$$

son nulos. Entonces el mapa $\oplus_{j=0}^{n}(\oplus_{i_0 i_2 \ldots i_j} Y_{i_0 i_2 \ldots i_j}) \to X_{i_0}$ es una $\mathcal{A}_X$-aproximación a derecha para X_{i_0} ya que $\forall V \to X_{i_0}$ con V en $\mathcal{A}_X$ debido a que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\
\oplus_{j=0}^{n}(\oplus_{i_0 i_2 \ldots i_j} Y_{i_0 i_2 \ldots i_j}) \arrow[r] & X_{i_0}
\end{tikzcd}$$

■

TEOREMA 2.3.19. ***Parte de Aterrizaje***

Sea $\mathcal{A}$ una categoría de longitud finita tal que $Ind\mathcal{A}$ es infinito. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene un cogenerador Q y que cada indescomponible tiene un morfismo que casi escinde a derecha. Entonces existe una cantidad infinita de valores

$$\ldots < \mu(X^n) < \ldots < \mu(X^2) < \mu(X^1)$$

de la medida de Gabriel-Roiter de $\mathcal{A}$ que tienen las siguientes propiedades.

1. *Si $\mu(X) \neq \mu(X^i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$ entonces $\mu(X) < \mu(X^i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$.*
2. *El conjunto $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X^i)\}$ es finito $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Construiremos los valores de $\mu(X^i)$ por inducción como sigue.

- Si $i = 1$ y como Q es un cogenerador usamos 2.2.19 y tenemos que existe Q_{i_0} indescomponible tal que $\mu(Q_{i_0}) \geq \mu(X)$ para $X \in Ind\mathcal{A}$. Además para cada X tal que $\mu(X) = \mu(Q_{i_0})$ tenemos que $X \subset Q^n$ entonces X es sumando directo de Q, por lo tanto dichos X deben ser finitos.

- Supongamos que $\mu(X^1) > \mu(X^2) > \ldots > \mu(X^n)$ fueron construidas satisfaciendo 1) y 2) $\forall 1 \leq i \leq n$ con $n \geq 1$.

  Sea P la suma de todos los $X \in \operatorname{ind} \mathcal{A}$ con $\mu(X) \geq \mu(X^n)$. Usando 2.3.18 construimos una $\mathcal{A}_P$-aproximación a derecha $P' \to Q$ para Q y tomamos como X^{n+1} un sumando directo P'_{i_0} de P' tal que $\mu(P'_{i_0})$ sea maximal.

  Si X es indescomponible y está en $\mathcal{A}_P$ es cogenerado por Q y por lo tanto por P'. Esto se debe a que es una $\mathcal{A}_P$-aproximación de Q y existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr, dashed] & & Q^n \\ & P'^n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  por lo tanto implica que $X \to P'^n$ es un monomorfismo.

  Por 2.2.17 sabemos que $\mu(X)$ está acotado por $\mu(X^{n+1})$. Además si $\mu(X) = \mu(X^{n+1})$ entonces X es isomorfo a un sumando directo de P', por lo tanto $\{X \in Ind\mathcal{A} : \mu(X) = \mu(X^{n+1})\}$ es finito. ■

Como consecuencia de este segundo teorema podemos definir

DEFINICIÓN 2.3.20. *Si tenemos que $\mu(X^1) > \mu(X^2) > \ldots \mu(X^n) > \ldots$ es un conjunto de medidas de una categoría $\mathcal{A}$ que cumple las condiciones 1) y 2) del teorema 2.3.19 decimos que $\mathcal{A}$ tiene parte de aterrizaje.*

OBSERVACIÓN 2.3.21. *En 2.3.17 tenemos un ejemplo de una categoría de longitud finita que no tiene parte de aterrizaje. Es fácil observar que no tiene una medida máxima.*

A continuación veremos que las medidas de Gabriel-Roiter de una categoría se preservan por equivalencias.

OBSERVACIÓN 2.3.22. *Si $\mathfrak{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una equivalencia entre categorías de longitud finita, entonces el conjunto de las medidas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son iguales y también la cantidad de* *indescomponibles que aparecen por medida.*

Demostración:

Primero que nada hay que notar que $l(\mathfrak{F}(X)) = l(X)$ ya que $\mathfrak{F}$ lleva sucesiones exactas en sucesiones exactas y lleva objetos simples en objetos simples.

Este funtor $\mathfrak{F}$ también lleva objetos indescomponibles en objetos indescomponibles y preserva clases de isomorfismos. Como su casi-inverso cumple lo mismo se deduce que $\mu(\mathfrak{F}(\mathfrak{X})) = \mu(X)$. ■

Ejemplos de categorías con parte de despegue y aterrizaje son los siguientes:

OBSERVACIÓN 2.3.23. *Si A es un álgebra de caminos de dimensión finita cuyo carcaj no es Dynkin entonces cumple las hipótesis de los teoremas 2.3.13 y 2.3.19 (ver 2.3.7).*

COROLARIO 2.3.24. *Si C es un coálgebra de caminos de dimensión finita cuyo carcaj no es Dynkin entonces cumple las hipótesis de los teoremas 2.3.13 y 2.3.19.*

Demostración:

Basta recordar que la categoría de $\Bbbk Q$-módulos finitamente generados y $\Bbbk Q$-comódulos son equivalentes como se observó en el capítulo anterior y usar 2.3.23 y 2.3.22. ■

Más en general se tiene:

COROLARIO 2.3.25. *Si C es una coálgebra de dimensión finita con infinitos indescomponibles no isomorfos entre sí entonces verifica las hipótesis de los teoremas 2.3.13 y 2.3.19.*

Demostración:

Para 2.3.13 basta notar que C^* tiene una cantidad finita de simples y usar 2.3.7 para probar la existencia de morfismos que casi escinden a derecha (estos luego al aplicar la dualidad (ver 1.1.27)se convertirán en morfismos que casi escinden a izquierda en ${}_C\mathcal{M}$).

Para 2.3.19 hay que notar que C es un cogenerador y usar nuevamente aplicado a C^* 2.3.7 para probar la existencia de morfismos que casi escinden a izquierda (estos luego al aplicar la dualidad (ver 1.1.27) se convertirán en morfismos que casi escinden a derecha en ${}_C\mathcal{M}$). ■

Capítulo 3

Medida de Gabriel-Roiter y comódulos

En este capítulo aplicaremos lo hecho en el capítulo anterior, ya que la categoría de comódulos finitamente generados sobre una coálgebra es una categoría de longitud finita. En la primer sección como aplicación de la medida de Gabriel-Roier probaremos que las coálgebras con parte de despegue tienen comódulos indescomponibles de dimensión infinita. En la sección final describiremos las coálgebras de caminos que tienen comódulos indescomponibles de dimensión finita.

3.1. Medida de Gabriel-Roiter para Categorías de Comódulos

En esta sección trabajaremos con la medida de Gabriel-Roiter específicamente en la categoría de comódulos sobre una coálgebra.

OBSERVACIÓN 3.1.1. *Si I es un comódulo inyectivo indescomponible finitamente generado (de dimensión finita), entonces $\mu(I) = \{1, 2, \ldots, l(I)\}$.*

Demostración:

Como vimos en el capítulo 1, si I es un comódulo inyectivo indescomponible entonces $Soc(I)$ es simple.

Sea $Soc(I) = M_1 \subset M_2 \subset \ldots M_n = I$ es una serie de composición de I. Como el zócalo de I es simple, esto implica que los zócalos de los M_i también lo sean. Por lo tanto la serie de composición es una cadena en $Ch(Ind({}^C\mathcal{M}), I)$ y por lo tanto $\mu(I) = \{1, 2, \ldots l(I)\}$ porque $l(M_i) = i$. ■

PROPOSICIÓN 3.1.2. *Sean $N, M_1, \ldots M_k$ comódulos indescomponibles finitamente generados y $N \hookrightarrow \oplus_{i=1}^{k} M_i$. Si $\mu(N) \ll \text{máx}\, \mu(M_i)$ entonces existe j_0 tal que*

$$N \hookrightarrow \oplus_{i=1}^{k} M_i \twoheadrightarrow M_{j_0}$$

es un monomorfsmo.

Demostración:

La prueba la realizaremos por inducción en $n = l(N) + l(\oplus_{i=1}^{k} M_i)$.

- Si $n = 2$ es un isomorfismo.
- Supongamos $n \geq 3$ y que $\Pi_{i_0} : \oplus_{i=1}^{k} M_i \twoheadrightarrow M_{i_0}$ es la proyección canónica sobre M_{i_0}. Separemos la prueba en dos casos.
    1. Existe algún $\Pi_{i_0} f$ que no es un epimorfismo.
    2. Todos los $\Pi_i f$ son epimorfismos.

1. Podemos suponer que $\Pi_1 f$ no es un epimorfismo.

   Sea $M_1' = Im(\Pi_1 f) \subset M_1$ y $M_j' = Im(\Pi_j f) \subseteq M_j$. Si $M_j' = \oplus_l M_{jl}'$ con M_{jl}' indescomponibles $\forall j$ entonces tenemos

$$N \hookrightarrow \oplus_{j,l} M_{jl}'$$

   Como se cumple $\mu(N) \ll \text{máx}\, \mu(M_i)$ y $\mu(N) \leq \text{máx}\, \mu(M_{jl}') \leq \text{máx}\, \mu(M_i)$ aplicamos 2.1.6 y tenemos $\mu(N) \ll \text{máx}\, \mu(M_{jl}')$.

   Entonces por la hipótesis inductiva obtenemos que existe $j_0 l_0$ tal que

$$N \hookrightarrow \oplus_{j,l} M_{jl}' \twoheadrightarrow M_{j_0 l_0}'$$

   es un monomorfismo. Y de esto se obtiene que el mapa

$$N \hookrightarrow \oplus_{j,l} M_{jl}' \twoheadrightarrow \oplus_l M_{i_0 l} = M_{i_0}'$$

   es un monomorfismo.

2. Supongamos ahora que $\Pi_j f$ es un epimorfismo que no es un isomorfismo (si no ya estaría probado) $\forall j \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Por esto tenemos $l(N) > l(M_j)$ $\forall j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, pero de lo último se deduce que $\max \mu(M_j)$ no comienza en $\mu(N)$ que es absurdo. ■

Nos va a interesar extender el concepto de medida de Gabriel-Roiter a la categoría de comódulos en general. Por eso definimos la filtración de Gabriel-Roiter para un comódulo de dimensión infinita.

DEFINICIÓN 3.1.3. *Sea M un comódulo que no sea finitamente generado. Una cadena de subcomódulos finitamente generados indescomponibles $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que cumpla*

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M$$

*es una **filtración de Gabriel-Roiter** para M si además*

- $\cup_{i\in\mathbb{N}} M_i = M$ *y*
- $M_i \subset M_{i+1}$ *es una inclusión de Gabriel-Roiter.*

El teorema que sigue es una herramienta útil para determinar cúando un comódulo es indescomponible.

TEOREMA 3.1.4. *Si M es comódulo que no sea finitamente generado, entonces si admite una filtración de Gabriel-Roiter es indescomponible.*

Demostración:

Supongamos que M es descomponible. Entonces existen dos comódulos $U \neq \{0\}$ y $V \neq \{0\}$ tales que $M = U \oplus V$.

$M = \cup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \cap V \neq \{0\}$ y $M_n \cap V \neq \{0\}$.

Al ser M_n un comódulo finitamente generado podemos encontrar U' y V' dos subcomódulos de U y de V que sean finitamente generados y que $M_n \subset U' \oplus V' \subset U \oplus V$ (tomar una base de M_n y descomponerla en $U \oplus V$). Además como $U' \oplus V'$ es finitamente generado (dimensión finita) podemos encontrar $n' \in \mathbb{N}$ tal que $U' \oplus V' \subset M_{n'}$.

Existen $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ subcomódulos indescomponibles finitamente generados tales que $U' = \oplus_i U_i$ y $V' = \oplus_j V_j$.

Ahora tenemos que $M_n \subset (\oplus_i U_i) \oplus (\oplus_j V_j) \subset M_{n'}$ y esto implica por la propiedad principal que:

$$\mu(M_n) \leq \text{máx}\{\mu(U_i), \mu(V_j)\} \leq \mu(M_{n'}).$$

Como $M_i \subset M_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ es una inclusión de Gabriel-Roiter obtenemos que $\mu(M_n) \ll \mu(M_n')$. Usando las dos últimas afirmaciones y aplicando 2.1.6 tenemos lo siguiente:

$$\mu(M_n) \ll \text{máx}\{\mu(U_i), \mu(V_j)\}$$

Si usamos 3.1.2 tenemos que

$$\phi : M_n \hookrightarrow (\oplus_i U_i) \oplus (\oplus_j V_j) \twoheadrightarrow X$$

para $X \cong U_{i_0}$ o $X \cong V_{j_0}$ es un monomorfismo.

Supongamos que $X \cong U_{i_0}$. Ya sabemos que existe $x \in M_n \cap V$ no nulo y como $M_n = U' \oplus V'$ podemos escribir $x = u + v$ con $u \in U'$ y $v \in V'$. Luego $x - v = u \in U' \cap V = \{0\}$, por lo que $x = v \in V'$. Esto último es absurdo porque implica que $\phi(x) = 0$ y ϕ es un monomorfismo. ■

La siguiente proposisición nos asegura la existencia de ciertas medidas si tenemos un inyectivo indescomponible de dimensión infinita.

PROPOSICIÓN 3.1.5. *Si la coálgebra C tiene un comódulo inyectivo indescomponible de dimensión infinita, entonces C tiene todas las medidas de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Sea I el comódulo de dimensión infinita. Sea $S \hookrightarrow I$ un subcomódulo simple ($S = Soc(I)$). Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to S \to I \to N_1 \to 0$$

con $N_1 \neq \{0\}$. Sea ahora $S_1 \hookrightarrow N_1$ simple. Entonces podemos tomar el pull-back y tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, "1_S"] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r] & I \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto M_1 tiene longitud 2 y como $M_1 \hookrightarrow I$ (por el lema de los cinco), entonces M_1 es indescomponible ($Soc(M_1) = S$) y $\mu(M_1) = \{1, 2\}$.

Supongamos ahora que tenemos $M_n \hookrightarrow I$ un subcómodulo indescomponible con $\mu(M_n) = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ y $n \geq 1$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \to M_n \to I \to N_{n+1} \to 0$$

con $N_{n+1} \neq \{0\}$. Sea ahora $S_{n+1} \hookrightarrow N_{n+1}$ simple. Entonces podemos tomar el pull-back y tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_n \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_n}"] & M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & S_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n \arrow[r] & I \arrow[r] & N_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto M_{n+1} tiene longitud $n+2$ y como $M_{n+1} \hookrightarrow I$ (por el lema de los cinco), entonces M_{n+1} es indescomponible ($Soc(M_{n+1}) = S$) y $\mu(M_{n+1}) = \{1, 2, \ldots, n, n+1, n+2\}$. ■

COROLARIO 3.1.6. *En las hipótesis de la proposición 3.1.5 podemos afirmar que la coálgebra no tiene parte de aterrizaje.*

EJEMPLO 3.1.7. *Tomemos $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $\Bbbk Q$ la coálgebra de caminos con:*

$$Q = \begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Entonces las representaciones indescomponibles son de la forma:

$$V_n = \begin{tikzcd} \cdot \Bbbk^n \arrow[loop left, "\phi_\alpha"] \end{tikzcd}$$

donde ϕ_α tiene por matriz asociada en alguna base a la siguiente matriz cuadrada de n filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además las medidas de V_n, $\mu(M_n) = \{1, 2, \dots, n\}$. La existencia de estas medidas ya podían ser previstas desde 3.1.5 ya que $\Bbbk Q$ como comódulo es inyectivo e indescomponible. Finalmente las medidas de Gabriel-Roiter son:

$$\{1\} < \{1,2\} < \{1,2,3\} < \{1,2,3,4\} < \dots < \{1,2,3,\dots,n\} < \dots$$

3.1.1. Existencia de comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

Como aplicación de la medida de Gabriel-Roiter a la categoría de comódulos tenemos el teorema final de esta sección. Éste afirma que si la coálgebra tiene parte de despegue entonces existen comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

DEFINICIÓN 3.1.8. *Dada una coálgebra C definimos al* ***Grafo de las inclusiones de Gabriel-Roiter*** Γ_C *de la siguiente forma.*

- *Un vértice por cada clase de isomorfismo de los comódulos*
- *Una flecha por cada inclusión de Gabriel-Roiter entre los respectivos vértices.*

LEMA 3.1.9. *Si Γ_C es un grafo de inclusiones de Gabriel-Roiter para C una coálgebra de dimensión finita de tipo de representación infinito, entonces la parte del grafo Γ_C correspondiente a la parte de despegue tiene un camino infinito.*

Demostración:

Llamemos V_0 al conjunto de los vértices correspondientes a los comódulos simples, V_1 al conjunto de los vértices correspondientes a los comódulos de la parte de despegue que tienen a un simple como inclusión de Gabriel-Roiter y así sucesivamente V_n son los vértices correspondientes a comódulos de la parte de despegue que tienen la inclusión de Gabtiel-Roiter en V_{n-1}.

Como ya vimos en el capítulo 2, dado un comódulo M en la parte de despegue hay una cantidad finita de comódulos N en la parte de despegue tales que $M \subset N$ es una inclusión de Gabriel-Roiter. Como hay finitos simples entonces V_n es finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si hubiese $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n = \emptyset$, tendríamos que habría un número finito de comódulos indescomponibles salvo isomorfismo en la parte de despegue, lo que sería absurdo. Entonces existe V_n $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto hay un camino infinito. ■

TEOREMA 3.1.10. *Si C es una coálgebra de dimensión finita de tipo de representación infinito, entonces existen comódulos que no son finitamente generados con filtración de Gabriel-Roiter $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} M_i = M$ tales que M_i están en la parte de despegue.*

Demostración:

Sea M_n el comódulo correspondiente al vértice de V_n del camino infinito que tenemos por el lema 3.1.9. Tomemos $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, luego aplicamos el teorema 3.1.4 y deducimos que M es indescomponible. ■

3.2. Aplicación a las Coálgebras de Caminos

El objetivo final de esta sección es describir cuáles coálgebras de caminos tienen comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

3.2.1. Funtores de Reflexión

DEFINICIÓN 3.2.1. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Para cada $a \in Q_0$ definimos $\sigma_a(Q) = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ de la siguiente forma:*

- $Q'_0 = Q_0$
- $\sigma_a : Q_1 \to Q'_1$ *es una biyección tal que $\sigma_a(\alpha) = \alpha'$ cumple*
    - *Si $s(\alpha) \neq a$ y $t(\alpha) \neq a$ entonces $s'(\alpha') = s(\alpha)$ y $t'(\alpha') = t(\alpha)$.*
    - *Si $s(\alpha) = a$ o $t(\alpha) = a$ entonces $s'(\alpha) = t(\alpha)$ y $t'(\alpha) = s(\alpha)$.*

OBSERVACIÓN 3.2.2. *Si $a \in Q$ es un pozo entonces $\sigma_a(a)$ es una fuente. y recíprocamente si $a \in Q$ es una fuente entonces $\sigma_a(a)$ es un pozo.*

DEFINICIÓN 3.2.3. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj con $a \in Q_0$ un pozo. Definimos el **funtor de reflexión** $S_a^+ : Rep_{\Bbbk}(Q) \to Rep_{\Bbbk}(\sigma_a(Q))$ de la siguiente manera:*

- *Si* $M = (M_i, \phi_\alpha)$ *está en* $Rep_{\Bbbk}(Q)$ *entonces definimos* $S_a^+(M) = (M', \phi_\alpha)$ *como sigue:*

  - $M'_i = \begin{cases} M_i, & si\ i \neq a; \\ Ker\lambda \ con\ \lambda = \sum \phi_\alpha : \oplus_{\alpha:s(\alpha)\to a} M_{s(\alpha)} \to M_a, & si\ i = a. \end{cases}$

  - $\phi'_{\sigma_a(\alpha)} = \begin{cases} \phi_\alpha, & si\ t(\alpha) \neq a\ ; \\ M'_a \hookrightarrow \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \to M_{s(\alpha)}, & si\ t(\alpha) = a. \end{cases}$

- *Si* $f = (f_i)_i : M \to N$ *es un morfismo en* $Rep_{\Bbbk}(Q)$, *definimos*

  $(S_a^+(f))_i = \begin{cases} f_i, & si\ i \neq a; \\ f'_a, & si\ i = a. \end{cases}$

  donde f'_a *es la única transformación lineal que hace conmutar el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (S_a^+(M))_a \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'_a"] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \arrow[r] \arrow[d, "\oplus f_{s(\beta)}"] & M_a \arrow[d, "f_a"] \\
0 \arrow[r] & (S_a^+(N))_a \arrow[r] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} N_{s(\beta)} \arrow[r] & N_a
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 3.2.4. *Sea ahora* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *un carcaj con* $a \in Q_0$ *una fuente. Definimos el* ***funtor de reflexión*** $S_a^- : Rep_{\Bbbk}(Q) \to Rep_{\Bbbk}(\sigma_a(Q))$ *de la siguiente manera:*

- *Si* $M = (M_i, \phi_\alpha)$ *está en* $Rep_{\Bbbk}(Q)$ *entonces definimos* $S_a^-(M) = (M', \phi'_\alpha)$ *como sigue:*

  - $M'_i = \begin{cases} M_i, & si\ i \neq a; \\ Coker\mu \ con\ \mu = \sum \phi_\alpha : M_a \to \oplus_{\alpha:a\to t(\alpha)} M_{t(\alpha)}, & si\ i = a. \end{cases}$

  - $\phi'_{\sigma_a(\alpha)} = \begin{cases} \phi_\alpha, & si\ s(\alpha) \neq a\ ; \\ M_{t(\alpha)} \hookrightarrow \oplus_{\beta:a\to t(\beta)} M_{t(\beta)} \to M'_a, & si\ s(\alpha) = a. \end{cases}$

- *Si* $f = (f_i)_i : M \to N$ *es un morfismo en* $Rep_{\Bbbk}(Q)$, *definimos*

  $(S_a^-(f))_i = \begin{cases} f_i, & si\ i \neq a; \\ f'_i, & si\ i = a. \end{cases}$

  donde f'_a *es la única transformación lineal que hace conmutar el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M_a \arrow[r] \arrow[d, "f_a"] & \oplus_{\alpha:a\to t(\alpha)} M_{t(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "f_{t(\alpha)}"] & (S_a^-(M))_a \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'_a"] & 0 \\
N_a \arrow[r] & \oplus_{\alpha:a\to t(\alpha)} N_{t(\alpha)} \arrow[r] & (S_a^-(N))_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A continuación veremos una forma de determinar si una representación tiene a $S(a)$ como sumando directo.

PROPOSICIÓN 3.2.5. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj*

1. *Si $a \in Q_0$ es un pozo entonces $M = (M_i, \phi_\alpha)$ tiene a $S(a)$ como sumando directo si y solamente si $\sum_{\alpha:s(\alpha)\to a} \phi_\alpha$ no es sobreyectiva.*
2. *Si $a \in Q_0$ es una fuente entonces $M = (M_i, \phi_\alpha)$ tiene a $S(a)$ como sumando directo si y solamente si $\sum_{\alpha:a\to s(\alpha)} \phi_\alpha$ no es inyectiva.*

Demostración:

1. ($\Rightarrow$) Es consecuencia directa de la suma directa de representaciones.

   ($\Leftarrow$) Si $\sum_{\alpha:s(\alpha)\to a} \phi_\alpha$ no es sobreyectiva entonces $M_a = Im(\sum_{\alpha:s(\alpha)\to a} \phi_\alpha) \oplus W$.

   - Sean $V = (M'_k, T'_\alpha)$ con $M'_k = \begin{cases} M_i, & \text{si } i \neq a; \\ Im(\sum_{\alpha:s(\alpha)\to a} \phi_\alpha), & \text{si } i = a. \end{cases}$ y $T'_\alpha = T_\alpha|_{M'_{s(\alpha)}}$,
   - y $U = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq a; \\ W, & \text{si } i = a. \end{cases}$

   Entonces $V \oplus U \cong M$ y $U \cong \oplus S(a)$

2. ($\Rightarrow$) Es consecuencia directa de la suma directa de representaciones.

   ($\Leftarrow$) Si $\sum_{\alpha:a\to s(\alpha)} \phi_\alpha$ no es inyectiva ($\cap Ker\phi_\alpha = K \neq \{0\}$) entonces $M_a = K \oplus W$.

   - Sean $V = (M'_k, T'_\alpha)$ con $M'_k = \begin{cases} M_i, & \text{si } i \neq a; \\ W, & \text{si } i = a. \end{cases}$ y $T'_\alpha = T_\alpha|_{M_{s(\alpha)}}$,
   - y $U = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq a; \\ K, & \text{si } i = a. \end{cases}$

Entonces $M \cong V \oplus U$ y $U \cong \oplus S(a)$. ■

PROPOSICIÓN 3.2.6. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj, entonces:*

1. *Si $\mathfrak{F} = S_a^- S_a^+ : Rep_{\mathbb{k}}(Q) \to Rep_{\mathbb{k}}(Q)$ entonces si M no tiene sumando a $S(a)$ como sumando directo $\mathfrak{F}(M) \cong M$ siendo $a \in Q_0$ un pozo del que entran un número finito de flechas.*
2. *Si $\mathfrak{G} = S_a^+ S_a^- : Rep_{\mathbb{k}}(Q) \to Rep_{\mathbb{k}}(Q)$ entonces si M no tiene sumando a $S(a)$ como sumando directo $\mathfrak{G}(M) \cong M$ siendo $a \in Q_0$ una fuente de la que salen un número finito de flechas.*

Demostración:

1. Sea $M \in Rep_{\mathbb{k}}(Q)$ tal que $M = (M_i, \phi_\alpha)$, $\mathfrak{F}(M) = (\bar{M}_i, \bar{\phi}_\alpha)$. Sean λ y μ como en las definiciones 3.2.3 y 3.2.4

$$\lambda = \textstyle\sum_{\beta:s(\beta)\to a} \phi_\beta : \qquad \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \longrightarrow M_{s(a)}$$

$$\mu = Ker\lambda \hookrightarrow \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)}$$

- $\bar{M}_i = \begin{cases} M_i, & \text{si } i \neq a; \\ Coker\mu, & \text{si } i = a. \end{cases}$
- $\bar{\phi}_\alpha = \begin{cases} \phi_\alpha, & \text{si } t(\alpha) \neq a; \\ M_{s(\alpha)} \to \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \twoheadrightarrow Coker\mu, & \text{si } t(\alpha) = a. \end{cases}$

Sea $f = (f_i)_{i\in Q_0} : M \to \bar{M}$ definida como

$$f_i = \begin{cases} 1_{Mi} : M_i \to M_i = \bar{M}_i, & \text{si } i \neq t(\alpha); \\ f_a, & \text{si } i = t(\alpha). \end{cases}$$

donde f_a es la única que hace que el siguiente diagrama conmute, que existe por ser λ sobreyectiva. Además por el lema de los cinco, f_a es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker\lambda \arrow[r] \arrow[d, "Ker\lambda"', "1"] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1"] & M_a \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\lambda \arrow[r] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \arrow[r] & Coker\mu \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora si α es tal que $t(\alpha) \neq a$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M_{s(\alpha)} \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "M_{s(\alpha)}"', "1"] & M_{t(\alpha)} \arrow[d, "M_{t(\alpha)}"', "1"] \\ M_{s(\alpha)} \arrow[r, "\phi_\alpha"] & M_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

Y si α cumple $t(\alpha) = a$ tenemos que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \phi_\alpha = & M_{s(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_{s(\alpha)}}"] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "1"] & M_a \arrow[d, dashed, "f_a"] \\ \bar{\phi}_\alpha = & M_{s(\alpha)} \arrow[r] & \oplus_{\beta:s(\beta)\to a} M_{s(\beta)} \arrow[r] & Coker\mu \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathfrak{F}(M) \cong M$.

2. La demostración es análoga. ■

Ahora probaremos que los funtores de reflexión preservan ciertos indescomponibles de $\mathcal{M}^{\Bbbk Q}$.

PROPOSICIÓN 3.2.7. *Si M está en $Rep_{\Bbbk}(Q)$ y es indescomponible con $M \ncong S(a)$, a un pozo (fuente) en Q, entonces $S_a^+(M)$ $(S_a^-(M))$ es indescomponible.*

Demostración:

Supongamos $S_a^+(M) = N_1 \oplus N_2$ no nulos y $S(a)$ no es sumando directo de ninguno de los dos, en caso contrario sería absurdo pues $S(a)$ no puede ser sumando directo de $N_1 \oplus N_2$ que es imagen de M por S_a^+ (ver la proposición 3.2.5 y observar que $\sum_{\alpha:a\to b} \phi_\alpha$ es inyectiva).

En la proposición 3.2.6 vimos $S_a^-(S_a^+(M)) \cong M$, entonces $S_a^-(N_1 \oplus N_2) \cong S_a^-(N_1) \oplus S_a^-(N_2) \cong M$. Pero como $S_a^+(S_a^-(N_i)) \cong N_i$ para $i = 1, 2$, por la proposición 3.2.6 esto implica que $S_a^-(N_i) \neq \{0\}$ para $i = 1, 2$. Esto es absurdo porque M era indescomponible. ■

El siguiente ejemplo nos muestra una coálebra que no posee comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

EJEMPLO 3.2.8. *Sea $\Bbbk Q$ la coálgebra de caminos con Q de la siguiente forma:*

$$\cdots \qquad \cdot_{-n-1} \xleftarrow{\beta_n} \cdot_n \xleftarrow{\beta_1} \cdots \xleftarrow{\beta_1} \cdot_{-1} \xleftarrow{\beta_0} \cdot_0 \xrightarrow{\alpha_0} \cdot_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdot_n \xrightarrow{\alpha_n} \cdot_{n+1} \cdots$$

Entonces $\Bbbk Q$ no tiene representaciones racionales indescomponibles de dimensión infinita.

Demostración:

Sea $M = (M_i, \phi_{\alpha_k})$ una representación racional indescomponible de dimensión infinita. Si $M_0 = \{0\}$ podemos ver que M es una representación racional de $\Bbbk Q'$ con Q' asi:

$$\cdot_0 \xrightarrow{\alpha_0} \cdot_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdot_n \xrightarrow{\alpha_n} \cdot_{n+1} \cdots$$

Ya vimos en el capítulo 1 que esta representación se descompone. Entonces podemos suponer que $M_0 \neq \{0\}$ y que $n = \text{mín}_{k\in\mathbb{N}}\{Ker\phi_{\alpha_k} \neq 0\}$.

Sea $v \in Ker\phi_{\alpha_n}$. Consideremos las preimágenes de v por las $\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_i}$, $\forall i \leq n$. Tenemos dos casos:

- Si no existe la preimagen de v por $\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_0}$ entonces descomponemos a M como $M \cong V \oplus W$, siendo :

  $V = (V_i, \phi'_k)$ y $W = (W_i, \psi_k)$ con

  $$V_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i > n \text{ o } i < 0; \\ \Bbbk v, & \text{si } i = n; \\ \Bbbk(\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_i})^{-1}(v), & \text{si } 0 < i < n \text{ y existe la preimagen;} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  Y las ϕ'_k son las transformaciones ϕ_{α_k} de M restringidas a V_i.

  $$W_i = \begin{cases} M_i, & \text{si } i \leq 0; \\ W'_i \oplus \phi_{\alpha_{i-1}}(W_{i-1}) \text{ con } W'_i \oplus \phi_{\alpha_{i-1}}(W_{i-1}) \oplus V_i = M_i, & \text{si } i \geq 0. \end{cases}$$

  Y las ψ_k son las transformaciones ϕ_{α_k} de M restringidas a W_i.

- Si existe la preimagen de v por $\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_0}$ entonces tomemos las imágenes por $\phi_{\beta_k} \dots \phi_{\beta_0}$ de $v_0 = (\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_0})^{-1}(v)$ hasta $n' = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \phi_{\beta_k} \dots \phi_{\beta_0}(v_0) = 0\}$, y como M es racional dicho mínimo existe.

Ahora descomponemos M como $M \cong V \oplus W$, con:

$V = (V_i, \phi'_k)$ y $W = (W_i, \psi_k)$ de la siguiente forma.

$$V_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i > n \text{ o si } i < -n'; \\ \Bbbk v, & \text{si } i = n; \\ \Bbbk(\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_i})^{-1}(v), & \text{si } 0 \leq i < n; \\ \Bbbk(\phi_{\beta_{i-1}} \dots \phi_{\beta_0})(v_0), & \text{si } -n' < i < 0. \end{cases}$$

Y las ϕ'_k son las transformaciones ϕ_{α_k} de M restringidas a V_i.

Sean $S_i = \phi_{\beta_{n'}} \dots \phi_{\beta_i}$ y $u_i = \phi_{\beta_i} \dots \phi_{\beta_0}(v_0)$. Y sean $U_0 = kv_0 \oplus KerS_0$, $U_i = ku_i \oplus KerS_i$.

$$W_i = \begin{cases} KerS_0 \oplus W'_0 \text{ con } KerS_0 \oplus W'_0 \oplus V_0 = M_0, & \text{si } i = 0; \\ W'_i \oplus \phi_{\beta_{i-1}}(W_{i-1}) \text{ con } W'_i \oplus \phi_{\beta_{i-1}}(W_{i-1}) \oplus V_i \cong M_i, & \text{si } i \leq -1; \\ \phi_{\alpha_{i-1}}(W_{i-1}) \oplus W'_i \text{ con } \phi_{\alpha_{i-1}}(W_{i-1}) \oplus W'_i \oplus V_i \cong M_i, & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Y las ψ_k son las tranformaciones ϕ_{α_k} de M restringidas a W_i. ■

La siguiente proposición nos servirá para calcular las representaciones indescomponibles de algunos carcajes.

PROPOSICIÓN 3.2.9. *Si tenemos un carcaj de la siguiente forma:*

1.

$$\cdot \text{ ——— } \cdot \text{ ——— } \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

2.

$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \text{ ——— } \cdots \cdot \text{ ——— } \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

3.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, dash] & & & & & & \\
& \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\
\cdot \arrow[ur, dash] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Podemos llevarlo mediante un número finito de reflexiones a los respectivos carcajes:

1.

$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

2.

$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots.$$

3.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr] & & & & & & \\
 & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\
\cdot \arrow[ur] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración:

1. Sea n el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro. Y m el primer momento donde se desalinean contando desde n para atrás como muestra la figura siguiente.

$$\cdot 0 \,\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, \cdots \,\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, \cdot \longrightarrow \cdot m \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdots \longleftarrow \cdot n \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

   La prueba la haremos por inducción en n.

   - Si $n = 0$ ya están alineados.
   - Si $n = 1$ entonces si aplicamos σ_0 quedan alineados.
   - Si $n > 1$ entonces aplicamos sucesivamente σ_m σ_{m+1} hasta σ_{n-1} y finalmente el carcaj que obtenemos cumple que $n - 1$ es el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro.

     Ahora aplicamos la hipótesis inductiva y sabemos que lo podemos alinear al futuro.

2. Sea n el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro y m el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el pasado como muestra la figura siguiente.

$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot m \longrightarrow \cdot \,\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, \cdots \,\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, \cdot \longleftarrow \cdot n \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots.$$

La prueba la haremos por inducción en $k = n - m$.

- Si $k = 2$ tenemos que el carcaj es de la forma

$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot m \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot n \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots .$$

  Aplicamos σ_{n-1} y logramos que se alineen.

- Si $k > 2$ llamemos l con $m < l < n$ al primer vértice donde se desalinean contando desde n para atrás como muestra la figura que sigue.

$$\cdots \rule[0.5ex]{2.5em}{0.4pt} \cdot \rule[0.5ex]{2.5em}{0.4pt} \cdot \longrightarrow \cdot l \longleftarrow \cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot n \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots .$$

  Ahora aplicamos sucesivamente σ_l σ_{l+1} hasta llegar a σ_{n-1}. Después de este proceso nos queda un carcaj donde la distancia entre los nuevos vértices n y m es menor que k.

  Aplicamos la hipótesis inductiva y lo logramos alinear como queremos.

3. Como en 1) sea n el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro. Y m el primer vértice donde se desalinean las aristas contando desde n para atrás como muestra la figura siguiente.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdot a \arrow[dr, dash] & & & & & & & & & & & & & \\
& \cdot 0 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r] & \cdot m & \cdot \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \cdot n \arrow[l] \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\
\cdot b \arrow[ur, dash] & & & & & & & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

La prueba también la haremos por inducción en n

- Si $n = 0$ solamente de ser necesario aplicamos σ_a o σ_b y logramos que queden alineados.

- Si $n = 1$ entonces $m = 0$, ahora aplicando σ_a o σ_b de ser necesario logramos que 0 sea un pozo luego aplicamos σ_0 se transforma en fuente, aplicamos σ_a y σ_b y el carcaj queda alineado como queremos.
- Si $n > 1$ y $m = 0$ primero aplicamos σ_a o σ_b para lograr que 0 sea un pozo y luego aplicamos σ_0 σ_1 hasta σ_{n-1}, finalmente el carcaj que obtenemos cumple que $n-1$ es el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro.

  Ahora aplicamos la hipótesis inductiva y sabemos que lo podemos alinear hacia el futuro.

- Si $n > 1$ y $m > 0$ entonces aplicamos sucesivamente σ_m σ_{m+1} hasta σ_{n-1}, finalmente el carcaj que obtenemos cumple que $n-1$ es el primer vértice en que las aristas se alinean hacia el futuro.

  Ahora aplicamos la hipótesis inductiva y sabemos que lo podemos alinear hacia el futuro. ■

DEFINICIÓN 3.2.10. *Los llamados* ***grafos de Dynkin*** *son:*

- $A_n =$
$$\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[r, dash] & \cdot 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \cdot n{-}1 \arrow[r, dash] & \cdot n \end{tikzcd}$$

- $D_n =$
$$\begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[dr, dash] & & & & & \\ & \cdot 3 \arrow[r, dash] & \cdot 4 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & \cdot n{-}2 \arrow[r, dash] & \cdot n{-}1 \\ \cdot 2 \arrow[ur, dash] & & & & & \end{tikzcd}$$

- $E_6 =$
$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$$

- $E_7 =$
$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$$

- $E_8 =$
$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[d, dash] & & & & \\ \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \end{tikzcd}$$

3.2.2. Teorema final

TEOREMA 3.2.11. *Si C es una $\Bbbk$-coálgebra, entonces son equivalentes*

1. *Todos los comódulos son suma directa de comódulos de dimensión infinita.*

2. *Para toda sucesión infinita $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$ de monomorfismos que no son isomorfismos $f_1, f_2, \ldots$ entre C-comódulos $X_1, X_2, \ldots$ finitamente generadados indescomponibles, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos los f_j con $j \geq n_0$ son isomorfismos.*

Demostración:

Ver [Sim, Sección 7]. ∎

A partir del teorema anterior, se puede ver que la siguiente coálgebra de caminos no tiene comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

EJEMPLO 3.2.12. *Sea $\Bbbk Q$ la coálgebra de caminos con Q de la siguiente forma:*

$$
\begin{tikzcd}
\cdot a \arrow[dr, "\beta_a"] & & & & & & \\
& \cdot 1 \arrow[r, "\alpha_1"] & \cdot 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \cdot 3 \arrow[r, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \cdot n \arrow[r, "\alpha_n"] & \cdots \\
\cdot b \arrow[ur, "\beta_b"'] & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\Bbbk Q$ no tiene representaciones racionales indescomponibles de dimensión infinita.

Demostración:

Es conocido que las representaciones indescomponibles de dimensión finita de D_n son de las siguientes formas (ver [ASS]):

1.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & & & & & & & \\
& 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Bbbk \arrow[r, "1_\Bbbk"] & \Bbbk \arrow[r, "1_\Bbbk"] & \cdots \arrow[r, "1_\Bbbk"] & \Bbbk \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[ur] & & & & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

2.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[dr, "1_{\Bbbk}"] \\
& \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] \\
& \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
\Bbbk \arrow[ur, "1_{\Bbbk}"]
\end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[dr, "1_{\Bbbk}"] \\
& \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
\Bbbk \arrow[ur, "1_{\Bbbk}"]
\end{tikzcd}$$

5.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[dr, "i_1"] \\
& \Bbbk^2 \arrow[r, "1_{\Bbbk^2}"] & \cdots \arrow[r, "1_{\Bbbk^2}"] & \Bbbk^2 \arrow[r, "\alpha"] & \Bbbk \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \cdots \arrow[r, "1_{\Bbbk}"] & \Bbbk \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
\Bbbk \arrow[ur, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

Donde i_j es la inclusión en la j-ésima coordenada de $\Bbbk^2$ y $\alpha(x, y) = x - y$.

Por lo tanto las representaciones indescomponibles de dimensión finita de Q son las anteriores para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos una representación del tipo 5). Es claro que no es un subcomódulo de ninguna de las representaciones anteriores salvo de si misma.

Si tomamos una representación del tipo 4), también se ve claramente que es subcomódulo de ella misma y no lo es de ninguna otra representación. Esto se debe a que son representaciones inyectivas.

Si tomamos ahora alguna representación del tipo 2) o 3) que esté en D_n esta puede ser subcomódulo de representaciones del tipo 4), 5) o de ellas mismas.

Finalmente si ahora la representación es de tipo 1) se ve que es subrepresentación de una cantidad finita de representaciones del tipo 1), 2), 3), y 4).

Sea la sucección infinita $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$, donde los X_i son representaciones de dimensión finita indescomponibles y los f_i son morfismos inyectivos. Si X_1 es del tipo 1) entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X_n es de tipo 4) o 5). Por lo tanto los f_i con $i \geq n$ son isomorfismos.

Usando el teorema 3.2.11 se obtiene lo que queremos. ∎

LEMA 3.2.13. *Sean C una coálgebra y $D \subset C$ una subcoálgebra de D. Sea $\mathfrak{I} : {}^D\mathcal{M} \to {}^C\mathcal{M}$ un funtor, tal que si (M, Δ_M) es un D-comódulo, $\mathfrak{I}(M, \Delta_M) = (M, \Delta_M)$ viéndolo como C-comódulo y si $f : M \to N$ es un morfismo de D-comódulos vemos a $\mathfrak{I}(f)$ como morfismo de C-comódulos.*

Este funtor además cumple que preserva objetos indescomponibles.

Demostración:

Supongamos que M lo podemos descomponer como C-comódulo, esto es existen $N_1, N_2 \subset M$ dos C-comódulos con $\Delta_{N_i} = \Delta_M|_{N_i}$ tales que $N_1 \oplus N_2 \cong M$ como C-comódulos. Esto implica que N_1 y N_2 también sean D-comódulos y por lo tanto que su descomposición sea además como D-comódulos. ∎

OBSERVACIÓN 3.2.14. *Si Q' es un subgrafo de Q entonces la coálgebra $\Bbbk Q'$ es una subcoálgebra de $\Bbbk Q$.*

TEOREMA 3.2.15. *Si Q es un carcaj conexo entonces $\Bbbk Q$ tiene un comódulo indescomponible de dimensión infinita si y solamente si Q tiene las siguientes formas:*

- *Para grafos finitos no es un grafo de Dinkyn.*
- *Para grafos infinitos es de la forma*

1.

$$\cdot \;\text{———}\; \cdot \;\text{———}\; \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

2.

$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \;\text{———}\; \cdots \;\text{———}\; \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

3.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, dash] & & & & & & \\
& \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\
\cdot \arrow[ur, dash] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración:

- Para el caso finito tenemos dos opciones. Que tenga un ciclo orientado o que no lo tenga.

  Si Q tiene un ciclo μ con $l(\mu) = 1$ entonces $\Bbbk Q$ tiene una subcoálgebra de la forma:

  $$Q = \begin{tikzcd} \cdot 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

  Tomemos la representación $M = (V_1, \phi_\alpha)$ donde

  - $V_1 = \Bbbk\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
  - $\phi_\alpha(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } n = 1; \\ x_{n-1}, & \text{si } n > 1. \end{array} \right\}$

  Si Q tiene un ciclo μ con $l(\mu) \geq 2$ entonces $\Bbbk Q$ tiene una subcoálgebra de la forma:

  $$\begin{tikzcd}
  & \cdot n \arrow[dl, "\alpha_n"'] & \cdots \arrow[l] & \cdot i{+}2 \arrow[l, "\alpha_{i+1}"'] & \\
  \cdot 1 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & & & \cdot i{+}1 \arrow[ul, "\alpha_{i+1}"'] \\
  & \cdot 2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & \cdots \arrow[r] & \cdot i \arrow[ur, "\alpha_i"'] &
  \end{tikzcd}$$

  Tomemos la representación $M = (V_i, \phi_{\alpha_i})$ donde

  - $V_i = \Bbbk\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\ \forall i = 1, \ldots, n$.
  - $\phi_{\alpha_1}(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } n = 1; \\ x_{n-1}, & \text{si } n > 1. \end{array} \right.$

- $\phi_{\alpha_i} = 1_{V_i}$ si $1 < i \leq n$.

Supongamos que podemos descomponer M como $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 y M_2 son no nulos. Si tomamos $x_1 \in V_1$, este elemento está en $M_1 \cap M_2$. Esto se debe a que si $a = \sum b_k x_k \in V_i$ un elemento de M_i que es no nulo, entonces aplicando suficientes ϕ_{α_j} se llega a que $x_1 \in V_1$ está en M_i.

Si Q no tiene ciclos orientados entonces, por 1.2.22 sabemos que la categoría de comódulos sobre $\Bbbk Q$ y la categoría de módulos sobre el álgebra $\Bbbk Q$ son equivalentes. Usando el teorema de Gabriel(ver [ASS]) sabemos que $\Bbbk Q$ tiene infinitos comódulos indescomponibles no isomorfos si y solamente si Q no es Dynkin.

Si $\Bbbk Q$ tiene infinitos comódulos indescomponibles de dimensión finita, aplicamos el teorema 3.1.10 y encontramos un comódulo indescomponible de dimensión infinita. Si solamente tiene una cantidad finita de comódulos indescomponibles de dimensión finita, aplicamos el teorema 3.2.11 y concluimos que $\Bbbk Q$ no tiene comódulos indescomponibles de dimensión infinita.

- Supongamos que Q es infinito. Si dentro de Q encontramos algún subgrafo sin ciclos orientados que no sea Dynkin entonces, como hicimos para el caso finito, aplicamos el teorema 3.1.10 y encontramos un subcómodulo indescomponible de dimensión infinita.

  Si el subgrafo tiene un ciclo entonces se resuelve como en el caso finito.

  Si suponemos que dentro de Q no hay ningún subgrafo que no sea Dynkin, entonces Q debe tener un camino infinito.

  - Si ese camino viene del infinito como muestra la figura

    $$\cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$$

    Podemos tomar la representación que sea

    $$\cdots \xrightarrow{1_\Bbbk} \cdot\Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \cdot\Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \cdot\Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \cdot\Bbbk$$

    En el camino y 0 en el resto del carcaj. Esta representación racional es indescomponible y de dimensión infinita. Por lo tanto tenemos un comódulo indescomponible de dimensión infinita.

- Si aparacen cambios de orientación que no permiten que el camino se oriente hacia el infinito en ningún momento, como muestra la figura

$$\cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

  Podemos tomar la representación que sea

$$\cdots \xrightarrow{1_{\Bbbk}} \cdot_{\Bbbk} \xrightarrow{1_{\Bbbk}} \cdot_{\Bbbk} \xleftarrow{1_{\Bbbk}} \cdot_{\Bbbk} \xrightarrow{1_{\Bbbk}} \cdot_{\Bbbk} \xrightarrow{1_{\Bbbk}} \cdots$$

  En el camino y 0 en el resto del carcaj. Esta representación racional es indescomponible y de dimensión infinita. Por lo tanto tenemos un comódulo indescomponible de dimensión infinita.

- Si ahora los caminos desde algún momento en adelante se alinean hacia el infinito, las coálgebras que nos quedan por clasificar son:

  1.
$$\cdot \relbar\!\!\relbar\!\!\relbar \cdot \relbar\!\!\relbar\!\!\relbar \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

  2.
$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \relbar\!\!\relbar\!\!\relbar \cdots \cdot \relbar\!\!\relbar\!\!\relbar \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

  3.
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \cdot \arrow[dr, dash] & & & & & & \\ & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\ \cdot \arrow[ur, dash] & & & & & & \end{tikzcd}$$

  Por la proposición 3.2.7 si M es una representación indescomponible de dimensión infinita en una de estas coálgebras entonces aplicando sucesivos funtores de reflexión nos quedaría una representación indescomponible de dimensión infinita en una de las siguientes coálgebras:

  1.
$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots$$

  2.
$$\cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdots \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots.$$

  3.
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \cdot \arrow[dr] & & & & & & \\ & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \\ \cdot \arrow[ur] & & & & & & \end{tikzcd}$$

Las cuales se vio previamente que no tienen comódulos indescomponibles de dimensión infinita. ■

Bibliografía

[Ass] I. Assem, *Algèbres et modules*, Masson, Ottawa (1997).

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation Theory of Associative Algebras volume 1*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[Aus] M. Auslander, *Large modules over Artin Algebras*, Algebra, Topology and Category Theory, Academic Press, New York (1976).

[BW] T. Brzezinski, R. Wisbauer, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[ChKQ] W. Chin, M Kleiner, D. Quinn, *Almost Splits Sequences for Comodules*, J. of Algebra 249 (2002).

[DS] G. Drozdowski, D. Simson, *Quivers of Pure Semi-simple Type*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 27 (1979).

[Kr] H. Krause, *Notes on the Gabriel-Roiter measure*, notas del ICTP, Trieste (2006)

[Mit] B. Mitchel, *Theory of Categories*, Academic Press, New York (1965).

[Mon] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Reg. Conf. Series 82, Providence (1993).

[Rin] C. M. Ringel, *The Gabriel-Roiter measure*, Bull. Sci. Math. 129 (2005).

[Rin2] C. M. Ringel, *Foundation of the representation theory of artin algebras, using the Gabriel- Roiter Measure*, Proceedings of the Workshop on Representation of Algebras and Related Topics, Querétaro 2004, Contemp. Math. 406 (2006).

[RR] J. Ruiz Ruiz, *Teoría de Extructura de Coálgebras*, Tesis de doctorado, Universidad de Granada, Espaa, (2003)

[Sim] D. Simson, *Coalgebras, comodules, pseudocompact algebras and tame comodule type*, Colloq. Math. 90 (2001).

[Swe] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York (1969).