UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Cohomología de los Espacios Proyectivos Complejos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Marco Antonio Pérez Bullones** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Fermín Dalmagro.

Caracas, Venezuela
Julio 2007

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Cohomología de los Espacios Proyectivos Complejos**", presentado por el **Br. Marco Antonio Pérez Bullones**, titular de la Cédula de Identidad **17.531.153**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Fermín Dalmagro
Tutor

M. Sc. Tomás Guardia
Jurado

Dr. Francisco Tovar
Jurado

Dedicatoria

A Delia Bullones y Antonio Pérez, mis padres.

A María Pérez, mi hermana.

A María Bullones, mi abuela.

A Elizabeth Raffensperger, mi mejor amiga.

Y a todo aquel que le sirva este trabajo en sus estudios de topología algebraica y geometría diferencial.

Agradecimiento

Al Dr. Fermín Dalmagro, cuya ayuda y paciencia fueron de gran importancia en la realización de este trabajo.

A los profesores Gabriel Padilla y Francisco Tovar, quienes participaron en la revisión de este trabajo.

A todos aquellos profesores y compañeros que me ayudaron de forma directa o indirecta en la realización de este trabajo.

CONTENIDO

Introducción

El objetivo de este Trabajo Especial de Grado es calcular la cohomología de De Rham del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}_p^n$. La motivación surge del hecho de que la homología singular, la cohomología singular y la cohomología de De Rham son isomorfas para esta variedad diferenciable.

La cohomología singular consiste en una colección de módulos que se obtienen mediante el cálculo de la exactitud del complejo de cocadenas de símplices singulares asociado a un espacio topológico dado. Mientras que la cohomología de De Rham consiste en ese mismo cálculo, pero realizado al complejo de cocadenas de formas diferenciables asociado a una variedad diferenciable dada.

El capítulo 1 consiste en una exposición de tópicos básicos de álgebra homológica, los cuales conforman la base para la construcción de la teoría de homología y cohomología singular.

En el capítulo 2 presentamos un desarrollo de la teoría de homología y cohomología singular. Se introduce un nuevo tipo de espacios topológicos, los CW-complejos. Se le da a los espacios $\mathbb{C}_p^n$ una estructura de CW-complejo, la cual proporciona mayor facilidad para calcular su homología. Al final se presenta el teorema de dualidad de Poincaré, el cual relaciona la homología y la cohomología singular.

En el capítulo 3 presentamos el segundo tipo de cohomología a tratar en este trabajo: la cohomología de De Rham. Primero se expone una serie de tópicos en geometría diferencial, como lo son el de variedad diferenciable, el de fibrado tangente, y el de forma diferenciable. Dichos tópicos permiten la construcción del complejo de De Rham. Luego se presenta el teorema de De Rham, el cual establece un isomorfismo entre la cohomología singular y la cohomología de De Rham. Por último se expone el cálculo de la cohomología de De Rham y la cohomología singular de los $\mathbb{C}_p^n$.

CAPITULO 1

Elementos de Álgebra Homológica

En este capítulo se presentan algunos tópicos relacionados con la teoría de categorías y funtores y en particular con la categoría de módulos, los cuales nos serán útiles para entender y demostrar resultados posteriores. También se estudian estructuras llamadas complejos de cadena y complejos de cocadena, las cuales servirán para definir los funtores de homología y cohomología, respectivamente.

El **álgebra homológica** es la rama de las matemáticas que estudia los métodos de homología y cohomología en un marco general. Estos conceptos se originaron en la **topología algebraica**. Lo central para el álgebra homológica es la noción de sucesión exacta, la cual puede ser usada para realizar diversos cálculos. Hubo varios intentos antes de que esta rama se estableciera como tal. Una historia aproximada puede enunciarse como sigue:

- **Cartan-Eilenberg:** En su libro publicado en 1956, "Álgebra Homológica", usaron resoluciones de módulos inyectivos y proyectivos.
- **Tohoku:** El intento en un célebre artículo por Alexander Grothendieck, el cual apareció en el "Tohoku Mathematical Journal" en 1957. Usó el concepto de categoría abeliana.
- **La categoría derivada de Grothendieck y Verdier:** Estas categorías datan de la tesis de Verdier en 1967. Ellas son ejemplos de categorías triangularizadas usadas en varias teorías modernas.

1. Categorías y Funtores

La **teoría de categorías** trata en una manera abstracta con estructuras matemáticas y relaciones entre ellas. Las categorías aparecen en la mayoría de las ramas de las matemáticas y en algunas áreas de la ciencia computacional y de la física matemática. Las categorías fueron indroducidas primero por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane entre 1942 y 1945, en conexión con la topología algebraica. Esta teoría amplía el campo de acción de las matemáticas, pues abarca no sólo a los conjuntos sino también a otros objetos. Las categorías extienden la noción de conjuntos a otro tipo de objetos, y como tal presenta una visión aristotélica del mundo, ya que se hace la siguiente pregunta: "¿para qué son las cosas?", más la teoría de conjuntos tiene una visión platónica del mundo, pues se hace la siguiente pregunta: "¿qué son las cosas?".

Las categorías, los funtores y las tranformaciones naturales fueron introducidas por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942 en topología, especialmente en topología algebraica. Las ideas de Stanislaw Ulam dominaron a finales de la década de los 30 en la escuela polaca. Estas ideas fueron en cierta manera la continuación de las contribuciones de Emmy Noether para formalizar procesos abstractos durante la primera mitad del siglo XX. Noether se dio cuenta que para entender un tipo de estructura matemática lo que realmente se necesita es entender los procesos que preservan tal estructura. Eilenberg y Mac Lane dieron una formalización axiomática de esta relación entre estructuras y procesos que las preservan.

Eilenberg y Mac Lane habían dicho que su objetivo era entender las transformaciones naturales; para poder hacer eso, los funtores debieron ser definidos; y para definir los funtores se necesitaron las categorías.

El desarrollo subsecuente de la teoría fue potenciado primero por necesidades computacionales en el álgebra homológica; y luego por necesidades axiomáticas en la geometría algebraica.

A continuación vamos a definir el concepto de categoría, que intuitivamente es una colección de objetos y flechas que relacionan a dichos objetos.

Definición 1.1. Una ***Categoría*** $\mathfrak{C}$ es una colección de objetos que denotaremos por $Ob(\mathfrak{C})$, tal que para cada par de objetos X, Y en $Ob(\mathfrak{C})$, existe un conjunto de flechas o morfismos $\{f : X \longrightarrow Y\}$ que denotaremos por $Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

(1) Para todo X, Y, Z y morfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, existe un morfismo $h : X \longrightarrow Z$ que denotaremos por $g \circ f$.

(2) Para todo X en $Ob(\mathfrak{C})$ existe el morfismo *identidad* $1_X \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, X)$ tal que para todo conjunto Y en $Ob(\mathfrak{C})$ y para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ se tiene que $f \circ 1_X = f$ y $1_X \circ g = g$.

La condición **(1)** podemos representarla mediante el siguiente ***diagrama conmutativo***:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

y escribimos: $h = g \circ f$.

Definición 1.2. Dadas $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Diremos que $\mathfrak{C}$ es una ***subcategoría*** de $\mathfrak{D}$ si cada objeto de $\mathfrak{C}$ es un objeto de $\mathfrak{D}$, y para todo X, Y objetos de $\mathfrak{C}$ se tiene que $Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathfrak{D}}(X, Y)$.

Ejemplo 1.3. Ejemplos de categorías.

(1) **Conj:** Es la categoría cuyos objetos son los *conjuntos* y los morfismos son las *funciones.*
(2) **Top:** Es la categoría cuyos objetos son los *espacios topológicos* y los morfismos son las *funciones continuas.*
(3) **Top1:** Es la categoría formada por objetos de la forma (X, x_0) donde X es un espacio topológico y x_0 es un punto de X, y los morfismos son funciones continuas de X en Y tales que $f(x_0) = y_0$, esto lo representamos con la flecha $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.
(4) **Top2:** Es la categoría formada por objetos de la forma (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio topológico de X, y los morfismos son funciones continuas de X en Y tales que $f(A) \subseteq B$, esto lo representamos con la flecha $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$.

Definición 1.4. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, un ***funtor*** de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es una asignación $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tal que:

(1) A cada objeto X en $Ob(\mathfrak{C})$ le asigna un objeto $F(X)$ en $Ob(\mathfrak{D})$.
(2) Dados X, Y en $Ob(\mathfrak{C})$, a cada morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ le asigna un morfismo $F(f) \in Hom_{\mathfrak{D}}(F(X), F(Y))$ tal que:
  (a) Para todo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ se tiene $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
  (b) Para todo X en $Ob(\mathfrak{C})$ se tiene $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

La condición **(a)** es equivalente a decir que un funtor preserva la conmutatividad de los diagramas. Es decir, al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

le asigna el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

también conmutativo.

Definición 1.5. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, un ***cofuntor*** de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es una asignación $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tal que:

- **(1)** A cada objeto X en $Ob(\mathfrak{C})$ le asigna un objeto $F(X)$ en $Ob(\mathfrak{D})$.
- **(2)** Dados X, Y en $Ob(\mathfrak{C})$, a cada morfismo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ le asigna un morfismo $F(f) \in Hom_{\mathfrak{D}}(F(Y), F(X))$ tal que:
  - **(a)** Para todo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ se tiene $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.
  - **(b)** Para todo X en $Ob(\mathfrak{C})$ se tiene $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Un cofuntor también preserva la conmutatividad de los diagramas. Es decir, a cada diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

le asigna el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \\ & F(Z) \arrow[ul, "F(g\circ f)"] \arrow[u, "F(g)"'] \end{tikzcd}$$

también conmutativo.

Ejemplo 1.6. Sea $H_0 : Top \longrightarrow Conj$ definido por:

(a) Dado X en $Ob(Top)$, $H_0(X) = \{componentes\ conexas\ de\ X\}$.

(b) Sean X, Y en $Ob(Top)$ y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Se define $H_0(f) : H_0(X) \longrightarrow H_0(Y)$ como $H_0(f)(C) = f(C)$, para todo $C \in H_0(X)$.

Definición 1.7. Dada $\mathfrak{C}$ una categoría. Sean X, Y en $Ob(\mathfrak{C})$ y $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$.

(1) Diremos que f es un ***epimorfismo*** si y sólo si para todo Z en $Ob(\mathfrak{C})$ y para todo $g_1, g_2 \in Hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ se tiene que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica que $g_1 = g_2$.

(2) Diremos que f es un ***monomorfismo*** si y sólo si para todo Z en $Ob(\mathfrak{C})$ y para todo $h_1, h_2 \in Hom_{\mathfrak{C}}(Z, X)$ se tiene que $f \circ h_1 = f \circ h_2$ implica que $h_1 = h_2$.

(3) Diremos que f es un ***isomorfismo*** si y sólo si existe $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(Y, X)$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

Observación 1.8. Es conocido que los isomorfismos son invariantes por funtores y cofuntores. Cabe resaltar que en teoría de conjuntos, **(1)**, **(2)** y **(3)** son equivalentes a *sobreyectiva*, *inyectiva* y *biyectiva*, respectivamente.

2. Categoría de R-módulos

En esta sección trataremos una de las categorías más importantes en el álgebra homológica, que es la categoría de los R-módulos. En álgebra abstracta, el concepto de módulo sobre un anillo es una generalización de la noción de espacio vectorial, donde en vez de requerir escalares en un cuerpo, los "escalares" pueden estar en un anillo arbitrario. Por ejemplo, si $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros entonces un $\mathbb{Z}$-módulo es un grupo abeliano, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces un $\mathbb{K}$-módulo es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Así, un módulo, como un espacio vectorial, es un grupo abeliano; un producto está definido entre elementos del anillo y elementos del módulo, y su multiplicación es asociativa (cuando es usada con la multiplicación en el anillo) y distributiva.

Los módulos estan muy ligados a la teoría de representación de grupos. Ellos son además una de las nociones centrales en el álgebra conmutativa y en el álgebra homológica, y son usados extensamente en geometría algebraica y topología algebraica.

La importancia de los R-módulos yace en el hecho de que son los componentes principales de estructuras más complejas, como por ejemplo los complejos de cadena, los complejos de cocadena, etc. También son importantes para definir el funtor de homología y el funtor de cohomología.

Definición 1.9. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Un ***R-Módulo*** o un ***Módulo sobre R*** es un conjunto M junto con:

(1) una operación binaria $+ : M \times M \longrightarrow M$ bajo la cual M es un grupo abeliano, y

(2) una *acción* de R sobre M (esto es, una aplicación $R \times M \longrightarrow M$) denotada por rm, para todo $r \in R$ y para todo $m \in M$ la cual satisface:

- **(a)** $(r+s)m = rm + sm$, para todo $r, s \in R$, $m \in M$,
- **(b)** $(rs)m = r(sm)$, para todo $r, s \in R$, $m \in M$, y
- **(c)** $r(m+n) = rm + rn$, para todo $r \in R$, $m, n \in M$.
- **(d)** $1m = m$, para todo $m \in M$, donde 1 el elemento identidad de R.

Definición 1.10. Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ una función de M en N. Diremos que f es un ***homomorfismo de R-módulos*** si:

(1) $f(m+n) = f(m) + f(n)$, para todo $m, n \in M$,

(2) $f(rm) = rf(m)$, para todo $r \in R$ y para todo $m \in M$.

Ejemplo 1.11. $\mathcal{M}_R$ es la categoría cuyos objetos son los R-*módulos* y los morfismos son los *homomorfismos de* R-*módulos*.

Definición 1.12. Dado un R-módulo M. Un ***submódulo*** N de M es un subconjunto $N \subseteq M$ que es un R-módulo con las operaciones definidas en M.

Definición 1.13. Sea M un R-módulo y N un submódulo de M. El conjunto cociente M/N tiene una estructura de R-módulo con las operaciones:

(1) Sean $[x], [y] \in M/N$. $[x] + [y] \in M/N$ y viene dado por $[x] + [y] = [x+y]$.

(2) Sean $r \in R$ y $[x] \in M/N$. $r[x] \in M/N$ y viene dado por $r[x] = [rx]$.

Definición 1.14. Dada una familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Consideremos el cojunto $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = \{f : \Lambda \longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha / f(\alpha) \in M_\alpha\}$. $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un R-módulo y se denomida ***producto de R-módulos***.

Definición 1.15. Dada una familia de R-módulos $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Consideremos el cojunto $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = \{f \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha / f(\alpha) = 0 \textit{ para todo } \alpha \in \Lambda \textit{ salvo en un número finito de índices}\}$. Esta suma es un R-módulo y se denomida ***suma directa de R-módulos***.

En particular, si Λ es finito entonces $\prod_{j=1}^n M_j = \bigoplus_{j=1}^n M_j = M_1 \times ... \times M_n$.

Los conjuntos que se definen a continuación tienen mucha relevancia debido a su uso frecuente en este capítulo.

Definición 1.16. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de R-módulos. Se define el ***núcleo*** o ***kernel*** de f como el conjunto $Kerf = \{m \in M : f(m) = 0\}$, y la *imagen* de f como el conjunto $Imf = \{f(m) : m \in M\}$.

Es conocido que $Kerf$ es un submódulo de M y que Imf es un submódulo de N, por lo que tiene sentido definir los siguientes módulos cocientes:

$$CoKerf = \tfrac{N}{Imf} = \{n + Imf : n \in N\}$$
$$CoImf = \tfrac{M}{Kerf} = \{m + Kerf : m \in M\}$$

los cuales se llaman ***conúcleo*** de f y ***coimagen*** de f, respectivamente.

Observación 1.17. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de R-módulos. Notamos que:

(1) f es *monomorfismo* $\Leftrightarrow$ f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $Kerf = \{0\}$.

(2) f es *epimorfismo* $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $CoKerf = \{0\}$.

Observación 1.18. En $\mathcal{M}_R$ denotamos a los epimorfismos por

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

y a los monomorfismos por

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

Definición 1.19. Un R-módulo L es ***libre*** si existe un conjunto B tal que todo elemento de L es combinación lineal finita de elementos en B. En tal caso decimos que L es el ***R-módulo libre generado por B***.

3. Categoría de Complejos de Cadena y Complejos de Cocadena

En esta sección se presentan dos categorías muy importantes en la topología algebraica. La primera de ellas se llama categoría de los complejos de cadena, su estudio es fundamental para la comprensión de la teoría de homología. La segunda se llama categoría de los complejos de cocadena, su estudio es trascendental para entender la teoría de cohomología.

Un complejo de cadenas es una construcción originalmente usada en el campo de la topología algebraica. Es una manera de representar relaciones entre “ciclos” y “bordes” en varias dimensiones de un “espacio”. Aquí el “espacio” podría ser un espacio topológico o una construcción algebraica tal como un “complejo simplicial”. El álgebra homológica incluye el estudio de complejos de cadenas en abstracto, sin ninguna referencia al espacio subyacente. En este caso, los complejos de cadenas son estudiados axiomáticamente como estructuras algebraicas.

Las aplicaciones de los complejos de cadenas usualmente definen y aplican sus grupos de homología (grupos de cohomología en los complejos de cocadenas); varias relaciones de equivalencia son aplicadas a estos complejos (por ejemplo, la idea de homología de cadenas).

Es necesario entender el concepto de exactitud para definir los objetos de las categorías antes mencionadas.

Definición 1.20. Dado R un anillo. Sea

$$\mathscr{C} = \{M_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \qquad \dots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

una sucesión de R-módulos y homomorfismos de R-módulos. Decimos que $\mathscr{C}$ es una ***sucesión semiexacta en*** $\boldsymbol{M_n}$ si $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ (es decir, $Im\partial_{n+1} \subseteq Ker\partial_n$). Diremos que $\mathscr{C}$ es una ***sucesión exacta en*** M_n si $Im\partial_{n+1} = Ker\partial_n$.

Definición 1.21. Sea $\mathscr{C} = \{M_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión como en la definición anterior. Diremos que $\mathscr{C}$ es un ***complejo de cadenas*** si es semiexacta en cada módulo M_n. Diremos que $\mathscr{C}$ es un ***complejo exacto*** si es exacta en cada M_n.

Definición 1.22. Dados dos complejos de cadenas $\mathscr{C} = \{M_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\mathscr{C}' = \{M'_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, una ***transformación de cadenas*** de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ es una sucesión de homomorfismos de R-módulos $\{g_n : M_n \longrightarrow M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & M_n \arrow[d, "g_n"] \\
M'_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & M'_n
\end{tikzcd}$$

Notación: $\mathfrak{C}_{adR}$ es la categoría cuyos objetos son los *complejos de cadenas sobre R-módulos* y los morfismos son las *transformaciones de cadenas*.

Definición 1.23. Sea R un anillo. Una sucesión de R-módulos y homomorfismos de R-módulos

$$\mathscr{C} = \{M_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \qquad \dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} M_n \xrightarrow{\delta_n} M_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

es un ***complejo de cocadenas*** si $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ para cada n (es decir, $Im\delta_{n-1} \subseteq Ker\delta_n$).

Definición 1.24. Dados dos complejos de cocadenas $\mathscr{D} = \{M_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\mathscr{D}' = \{M'_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, una ***transformación de cocadenas*** de $\mathscr{D}$ en $\mathscr{D}'$ es una sucesión de homomorfismos de R-módulos $\{g_n : M_n \longrightarrow M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_n"'] & M_{n+1} \arrow[d, "g_{n+1}"] \\ M'_n \arrow[r, "\delta_n"'] & M'_{n+1} \end{tikzcd}$$

Notación: $\mathfrak{C}_{coR}$ es la categoría cuyos objetos son los *complejos de cocadenas sobre R-módulos* y los morfismos son las *transformaciones de cocadenas.*

Definición 1.25. Una ***sucesión exacta corta*** es un objeto

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

en la categoría $\mathfrak{C}_{adR}$, que es exacta en cada R-módulo.

Ejemplo 1.26. Si M y N son R-módulos entonces

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} M \bigoplus N \xrightarrow{\pi_N} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, donde $i_M(x) = (x, 0)$ para todo $x \in M$, y $\pi_N(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in M \bigoplus N$.

A continuación se presenta un teorema muy importante en el álgebra homológica conocido como *teorema de la dimensión.* Su importancia radica en que puede establecer isomorfismos entre los R-módulos que componen una sucesión exacta corta si se cumplen ciertas hipótesis. Mirando la sucesión de la definición 1.25, este teorema puede "convertir" a M' en $M'' \bigoplus M$ vía isomorfismo.

Definición 1.27. Diremos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

se parte si existe $g' \in Hom_{\mathcal{M}}(M, M')$ tal que $g \circ g' = 1_M$.

La prueba del siguiente lema puede verse en [5].

Lema 1.28. *Toda sucesión exacta corta que termine en un R-módulo libre se parte.*

Teorema 1.29 (**Teorema de la dimensión**). *Sea*

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) *Esta sucesión se parte.*
(2) *Existe* $f' \in Hom_{\mathcal{M}_R}(M', M'')$ *tal que* $f' \circ f = 1_{M''}$ *(*f *tiene una* inversa izquierda*).*
(3) M' *y* $M'' \bigoplus M$ *son isomorfos.*

Demostración

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Sea $m' \in M'$. Tenemos que $g(m' - g' \circ g(m')) = 0$ porque la sucesión se parte. Por exactitud, existe $m'' \in M''$ tal que $f(m'') = m' - g' \circ g(m')$. Tal m'' es único porque f es monomorfismo. Definamos $f' : M' \longrightarrow M''$ por $f'(m') = m''$, para cada $m' \in M'$. Es claro que f' está bien definida y que $f' \circ f = 1_{M''}$.

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Sea $m \in M$. Como g es epimorfismo existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = m$. Consideremos $m' - f \circ f'(m)$.

$$g(m' - f \circ f'(m)) = g(m') = m$$

Definamos $g' : M \longrightarrow M'$ por $g'(m) = m' - f \circ f'(m')$, para cada $m \in M$. Es claro que g' está bien definida y que $g \circ g' = 1_M$.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M''}"'] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "i_{M''}"'] & M'' \bigoplus M \arrow[r, "\pi_M"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde $h(m') = (f'(m'), g(m'))$, para todo $m' \in M'$. Es claro que el diagrama conmuta.

Veamos que h es monomorfismo.

Sea $m' \in Kerh$. Luego $(0,0) = h(m') = (f'(m'), g(m'))$, es decir, $f'(m') = 0$ y $g(m') = 0$. Como la fila superior es exacta y $g(m') = 0$ existe $m'' \in M''$ tal que $f(m'') = m'$. Pero $0 = f'(m') = f'(f(m'')) = 1_{M''}(m'') = m''$. Como f es un homomorfismo de R-módulos se tiene que $f(m'') = f(0) = 0$, es decir, $m' = 0$ $(Kerh = 0)$.

Veamos que h es epimorfismo. $f' \circ f = 1_{M''}$ implica que f' es epimorfismo, y $g \circ g' = 1_M$ implica que g' es monomorfismo. Así la sucesión:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{g'} M' \xrightarrow{f'} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, $f' \circ g' = 0$.

Ahora, sea $(m'', m) \in M'' \bigoplus M$ y sea $m' = f(m'') + g'(m)$.

$$\begin{aligned} h(m') &= h(f(m'') + g'(m)) \\ &= h(f(m'')) + h(g'(m)) \\ &= (f'(f(m'')), g(f(m''))) + (f'(g'(m)), g(g'(m))) \\ &= (m'', 0) + (0, m) \\ &= (m'', m) \end{aligned}$$

Esto prueba que h es epimorfismo. Por ser también monomorfismo se tiene que h es isomorfismo.

(3) $\Rightarrow$ **(1)** Supongamos que M' y $M'' \bigoplus M$ son isomorfos. Luego existe un isomorfismo de R-módulos $\varphi : M' \longrightarrow M'' \bigoplus M$.

Por tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, shift left, "i_{M''}"] \arrow[d, "="'] & M'' \bigoplus M \arrow[l, shift left, "\pi_{M''}"] \arrow[r, shift left, "\pi_M"] & M \arrow[l, shift left, "i_M"] \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "f"'] & M' \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definamos $g' = (\varphi^{-1} \circ i_{M'}) : M \longrightarrow M'$.

Por la conmutatividad del segundo cuadro $g = \pi_M \circ \varphi$.

Luego,

$$g \circ g' = (\pi_M \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ i_M) = \pi_M \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ i_M = \pi_M \circ i_M = 1_M$$

Por lo tanto, g' satisface **(1)**.

$\square$

Dado N un R-módulo. $Hom(., N)$ es el cofuntor de $\mathcal{M}_R$ en si mismo definido por: para cada M en $\mathcal{M}_R$, $Hom(M, N)$ es el R-módulo contituído por todos los homomorfismos de M en N, y a cada homomorfismo $f : M'' \longrightarrow M'$ le asigna el homomorfismo $\hat{f} : Hom(M', N) \longrightarrow Hom(M'', N)$ definido por $\hat{f}(h) = h \circ f$.

Proposición 1.30. *$Hom(\ ,N)$ es un cofuntor que preserva la exactitud en el siguiente sentido: si*

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos y M es libre, entonces

$$0 \longrightarrow Hom(M,N) \xrightarrow{\hat{g}} Hom(M',N) \xrightarrow{\hat{f}} Hom(M'',N) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Demostración Veamos que $\hat{g}$ es monomorfismo. Sea $s \in Ker\hat{g}$ y $m \in M$. Como g es epimorfismo, existe $m' \in M'$ tal que $m = g(m')$. Luego, $s(m) = s(g(m')) = 0$ porque $s \in Ker\hat{g}$. Entonces $Ker\hat{g} = \{0\}$.

Ahora veamos que $\hat{f}$ es epimorfismo. Sea $r \in Hom(M'',N)$. Como la sucesión

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

se parte por ser M libre, se tiene por el teorema de la dimensión que existe $f' : M' \longrightarrow M''$ tal que $f' \circ f = 1_{M''}$. Sea $h : M' \longrightarrow N$ el homomorfismo dado por $h(m') = r(f'(m'))$. Así, $r = \hat{f}(h)$.

Por último, veamos que $Ker\hat{f} = Im\hat{g}$. Probaremos sólo la contención $Ker\hat{f} \subseteq Im\hat{g}$, la otra contención se la dejamos al lector. Sea $h \in Ker\hat{f}$ y $m \in M$. Como g es epimorfismo, existe $m' \in M'$ tal que $g(m') = m$. Definimos $s : M \longrightarrow N$ por $s(m) = h(m')$. s está bien definido: en efecto, sean $m'_1, m'_2 \in M'$ tales que $g(m'_1) = g(m'_2) = m$. Luego, $g(m'_1 - m'_2) = 0$. Como la sucesión anterior es exacta, existe $m'' \in M''$ tal que $m'_1 - m'_2 = f(m'')$. Entonces $h(m'_1) - h(m'_2) = h(f(m'')) = 0$ porque $h \in Ker\hat{f}$. Es claro que $h = s \circ g = \hat{g}(s)$.

□

Definición 1.31. Dado el complejo de cadenas

$$\mathscr{C} = \{M_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \qquad \ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

El complejo dual

$$\hat{\mathscr{C}} : \cdots \longrightarrow Hom(M_{n-1},R) \xrightarrow{\hat{\partial_n}} Hom(M_n,R) \xrightarrow{\hat{\partial_{n+1}}} Hom(M_{n+1},R) \xrightarrow{\hat{\partial_{n+2}}} \ldots$$

es un complejo de cocadenas que llamaremos el ***complejo dual de*** $\mathscr{C}$.

A continuación presentamos un lema importante, conocido como el *lema de los cinco*. Lo usaremos en capítulos posteriores.

Lema 1.32 (**Lema de los cinco**). *Sea el siguiente un diagrama conmutativo de R-módulos y homomorfismos de R-módulos con filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\partial_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
M_1' \arrow[r, "\delta_1"'] & M_2' \arrow[r, "\delta_2"'] & M_3' \arrow[r, "\delta_3"'] & M_4' \arrow[r, "\delta_4"'] & M_5'
\end{tikzcd}$$

(1) *Si f_1 es epimorfismo y f_2, f_4 son monomorfismos entonces f_3 es monomorfismo.*

(2) *Si f_5 es monomorfismo y f_2, f_4 son epimorfismos entonces f_3 es epimorfismo.*

(3) *Si f_1, f_2, f_3 y f_4 son isomorfismos entonces f_3 es isomorfismo.*

Demostración

(1) La demostración de esta parte es análoga a **(2)**.

(2) Esta afirmación es un poco más difícil de demostrar que **(1)**, por lo que presentamos su prueba.

Supongamos que f_5 es monomorfismo y que f_2, f_4 son epimorfismos. Debemos probar que $Imf_3 = M_3'$, esto es que para todo $m_3' \in M_3'$ existe $m_3 \in M_3$ tal que $f_3(m_3) = m_3'$.

Sea $m_3' \in M_3'$. Sea $m_4' = \delta_3(m_3')$. Como f_4 es epimorfismo existe $m_4 \in M_4$ tal que $f_4(m_4) = m_4'$. Por la exactitud de la fila inferior $Im\delta_3 = Ker\delta_4$, y como $m_4' \in Im\delta_3$ se tiene que $0 = \delta_4(m_4') = \delta_4(\delta_3(m_3'))$. Por la conmutatividad del cuarto cuadro se tiene $0 = \delta_4(m_4') = \delta_4(f_4(m_4)) = f_5(\partial_4(m_4))$. Por ser f_5 monomorfismo $Kerf_5 = \{0\}$, luego $f_5(\partial_4(m_4)) = 0 \Rightarrow \partial_4(m_4) = 0$. Así $m_4 \in Ker\partial_4$. Por la exactitud de la fila superior $Ker\partial_4 = Im\partial_3$, por lo que $m_4 \in Im\partial_3$ (es decir, existe $\bar{m}_3 \in M_3$ tal que $m_4 = \partial_3(\bar{m}_3)$).

Ahora, $m_3' - f_3(\bar{m}_3) \in M_3'$.

$$\delta_3(m_3' - f_3(\bar{m}_3)) = \delta_3(m_3') - \delta_3 \circ f_3(\bar{m}_3).$$

Como el tercer cuadro es conmutativo ($\delta_3 \circ f_3 = f_4 \circ \partial_3$), $\partial_3(\bar{m}_3) = m_4$ y $\delta_3(m'_3) = m'_4$, tenemos:

$$\begin{aligned} \delta_3(m'_3 - f_3(\bar{m}_3)) &= m'_4 - f_4 \circ \partial_3(\bar{m}_3) \\ &= m'_4 - f_4(m_4) \\ &= m'_4 - m'_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $m'_3 - f_3(\bar{m}_3) \in Ker\delta_3$. Por la exactitud de la fila inferior $ker\delta_3 = Im\delta_2$, luego existe $m'_2 \in M'_2$ tal que $\delta_2(m'_2) = m'_3 - f_3(\bar{m}_3)$. Como f_2 es epimorfismo existe $m_2 \in M_2$ tal que $f_2(m_2) = m'_2$.

Sea $m_3 = \partial_2(m_2) + \bar{m}_3$. Como el segundo cuadro es conmutativo ($f_3 \circ \partial_2 = \delta_2 \circ f_2$), $m'_2 = f_2(m_2)$ y $m'_3 = \delta_2(m'_2) + f_3(\bar{m}_3)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_3(m_3) &= f_3(\partial_2(m_2) + \bar{m}_3) \\ &= f_3 \circ \partial_2(m_2) + f_3(\bar{m}_3) \\ &= \delta_2 \circ f_2(m_2) + f_3(\bar{m}_3) \\ &= \delta_2(m'_2) + f_3(\bar{m}_3) \\ &= m'_3 \end{aligned}$$

Es decir, $m'_3 \in Imf_3$.

(3) Las hipótesis implican **(1)** y **(2)**, por lo que f_3 es isomorfismo.

$\square$

Otro lema importante es el llamado *lema de la serpiente*, el cual nos servirá en el siguiente capítulo.

Lema 1.33 (**Lema de la serpiente**). *Dado el siguiente diagrama conmutativo de R-módulos con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta : Kerh \longrightarrow CoKerf$ tal que la siguiete sucesión es exacta:

$$Kerf \xrightarrow{\alpha_*} Kerg \xrightarrow{\beta_*} Kerh \xrightarrow{\delta} CoKerf \xrightarrow{\overline{\alpha'}} CoKerg \xrightarrow{\overline{\beta'}} CoKerh$$

donde $\alpha_* = \alpha|_{Kerf}$, $\beta_* = \beta|_{Kerg}$, $\overline{\alpha'}(a'+Imf) = \alpha'(a')+Img$ y $\overline{\beta'}(b'+Img) = \beta'(b')+Imh$.

Demostración Sea $c \in Kerh$. Como β es epimorfismo existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$. Como el diagrama conmuta tenemos que $0 = h(c) = h \circ \beta(b) = \beta' \circ g(b)$. Entonces $g(b) \in Ker\beta'$. Por la exactitud de la segunda fila, existe $a' \in A'$ tal que $\alpha'(a') = g(b)$.

Definimos $\delta : Kerh \longrightarrow CoKerf$ como $\delta(c) = a' + Imf$, para cada $c \in Kerh$. Como α' es monomorfismo se tiene que δ está bien definida.

Ahora probemos la exactitud de la sucesión

$$Kerf \xrightarrow{\alpha_*} Kerg \xrightarrow{\beta_*} Kerh \xrightarrow{\delta} CoKerf \xrightarrow{\overline{\alpha'}} CoKerg \xrightarrow{\overline{\beta'}} CoKerh$$

(1) $Im\alpha_* = Ker\beta_*$.

Sea $\alpha_*(a)$ con $a \in Kerf$. Luego, $\beta_* \circ \alpha_*(a) = \beta \circ \alpha(a) = 0$ porque la primera fila es exacta. Así, $\alpha_*(a) \in Ker\beta_*$

Sea $b \in Ker\beta_*$. Luego, $\beta_*(b) = \beta(b) = 0$. Por la exactutud de la primera fila, se tiene que existe $a \in A$ tal que $b = \alpha(a)$. Como el diagrama es conmutativo, se tiene que $\alpha' \circ f(a) = g \circ \alpha(a) = g(b) = 0$, porque $b \in Kerg$. Pero α' es monomorfismo, así $f(a) = 0$, de donde $a \in Kerf$. Entonces $b \in Im\alpha_*$.

(2) $Im\beta_* = Ker\delta$.

Sea $\beta_*(b)$ con $b \in Kerg$. Por construcción de δ existe $a' \in A'$ tal que $\delta \circ \beta_*(b) = a' + Imf$ y $\alpha'(a') = g(b)$. Pero $b \in Kerg$, entonces $\alpha'(a') = 0$. De donde $a' = 0$ porque α' es monomorfismo. Así, $\delta \circ \beta_*(b) = Imf$ y $\beta_*(b) \in Ker\delta$.

Sea $c \in Ker\delta$. Por construcción existe $a' \in A'$ y $b \in B$ tal que
$\delta(c) = a' + Imf = Imf$, $\beta(b) = c$, $g(b) = \alpha'(a')$ y $g(b) \in Ker\beta'$. Luego, $a' \in Imf$.

Existe $a \in A$ tal que $a' = f(a)$. Luego, $g(b) = \alpha'(a') = \alpha' \circ f(a)$. Como el diagrama es conmutativo, $g(b) = g \circ \alpha(a)$. Consideremos $b - \alpha(a)$, luego $\beta(b - \alpha(a)) = c$ por la exactitud de la primera fila. Además, $b - \alpha(a) \in Kerg$. Así, $c \in Im\beta_*$.

(3) $Im\delta = Ker\overline{\alpha'}$.

Sea $a' + Imf \in Im\delta$. Existe $c \in Kerh$ tal que $\delta(c) = a' + Imf$. Luego, $\overline{\alpha'}(a'+Imf) = \alpha'(a')+Img$. Por construcción de δ existe $b \in B$ tal que $g(b) = \alpha'(a')$. Así $\alpha'(a') \in Img$ y $\overline{\alpha'}(a' + Imf) = Img$, es decir $a' + Imf \in Ker\overline{\alpha'}$.

Sea $a' + Imf \in Ker\overline{\alpha'}$. Luego $\overline{\alpha'}(a' + Imf) = \alpha'(a') + Img = Img$. Entonces $\alpha'(a') \in Img$ y por ende existe $b \in B$ tal que $\alpha'(a') = g(b)$. Como el diagrama es conmutativo $h \circ \beta(b) = \beta' \circ g(b) = \beta' \circ \alpha'(a')$, y por la exactitud de la segunda fila $\beta' \circ \alpha'(a') = 0$ ($\beta(b) \in Kerh$). Así $\delta(\beta(b)) = a' + Imf$, es decir $a' + Imf \in Im\delta$.

(4) $Im\overline{\alpha'} = Ker\overline{\beta'}$.

Sea $\alpha'(a') + Img \in Im\overline{\alpha'}$. Luego, $\overline{\beta'}(\alpha'(a') + Img) = \beta' \circ \alpha'(a') + Imh = Imh$ por la exactitud de la segunda fila. Entonces $\alpha'(a') + Img \in Ker\overline{\beta'}$.

Sea $b' + Img \in Ker\overline{\beta'}$. Luego $\beta'(b') + Imh = Imh$, de donde $\beta'(b') \in Imh$. Entonces existe $c \in C$ tal que $\beta'(b') = h(c)$. Como β es epimorfismo existe $b \in B$ tal que $c = \beta(b)$. Luego $\beta'(b') = h \circ \beta(b) = \beta' \circ g(b)$ porque el diagrama conmuta. De esto tenemos que $b' - g(b) \in Ker\beta'$. Por la exactitud de la segunda fila existe $a' \in A'$ tal que $\alpha'(a') = b' - g(b)$. Por último, $b' + Img = b - g(b) + Img = \alpha'(a') + Img = \overline{\alpha'}(a' + Imf)$, es decir $b' + Img \in Im\overline{\alpha'}$.

□

Para culminar esta sección probaremos un lema conocido como *lema de Barrat-Whitehead*, el cual usaremos en el capítulo 2 para demostrar el teorema de Mayer-Vietoris. La importancia de este lema radica en que a partir de un diagrama conmutativo se puede construir una sucesión exacta.

Lema 1.34 (**Lema de Barrat-Whitehead**). *Dado el siguiente diagrama conmutativo de R-módulos*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "h_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "h'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "f'_n"'] & B'_n \arrow[r, "g'_n"'] & C'_n \arrow[r, "h'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones horizontales son exactas y γ_n es isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión

$$\longrightarrow A_n \xrightarrow{\mu_n} B_n \bigoplus A'_n \xrightarrow{\nu_n} B'_n \xrightarrow{\Delta_n} A_{n-1} \longrightarrow$$

es exacta, donde

$$\mu_n(a) = (f_n(a), \alpha_n(a)) \text{ para todo } a \in a_n,$$
$$\nu_n(b, a') = \beta_n(b) - f'_n(a') \text{ para todo } (b, a') \in B_n \bigoplus A'_n \text{ y}$$
$$\Delta_n(b') = h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g'_n(b') \text{ para todo } b' \in B'_n.$$

Demostración Las siguientes contenciones son sencillas de demostrar,

$$Im\mu_n \subseteq Ker\nu_n$$
$$Im\nu_n \subseteq Ker\Delta_n$$
$$Ker\Delta_n \subseteq Im\nu_n$$

Sólo probaremos que $Ker\nu_n \subseteq Im\mu_n$.

Sea $(b, a') \in Ker\nu_n$. Luego, $0 = \nu_n(b, a') = \beta_n(b) - f'_n(a')$, es decir, $\beta_n(b) = f'_n(a')$.

Como la segunda fila es exacta tenemos que $g'_n(\beta_n(b)) = g'_n(f'_n(a')) = 0$. Y como el tercer cuadro conmuta, $g_n(b) = 0$. Por la exactitud de la primera fila, existe $a_1 \in A_n$ tal que $f_n(a_1) = b$. Consideremos $a' - \alpha_n(a_1)$.

$$\begin{aligned} f'_n(a' - \alpha_n(a_1)) &= f'_n(a') - f'_n \circ \alpha_n(a_1) \\ &= \beta_n(b) - \beta_n \circ f_n(a_1) \\ &= \beta_n(b) - \beta_n(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, $a' - \alpha_n(a_1) \in Kerf'_n$. Por la exactitud de la segunda fila, existe $c' \in C'_{n+1}$ tal que $h'_{n+1}(c') = a' - \alpha_n(a_1)$. Como γ_{n+1} es isomorfismo existe $c \in C_{n+1}$ tal que $\gamma_{n+1}(c) = c'$. Sea $a_2 = h_{n+1}(c)$ y $a = a_1 + a_2$.

Luego, como la primera fila es exacta tenemos:

$$\begin{aligned} f_n(a) &= f_n(a_1 + a_2) \\ &= f_n(a_1) + f_n(a_2) \\ &= b + f_n \circ h_{n+1}(c) \\ &= b + 0 \\ &= b \end{aligned}$$

Como el primer cuadro conmuta tenemos $h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} = \alpha_n \circ h_{n+1}$. Así:

$$\begin{aligned} \alpha_n(a) &= \alpha_n(a_1 + a_2) \\ &= \alpha_n(a_1) + \alpha_n(a_2) \\ &= a' - h'_{n+1}(c') + \alpha_n \circ h_{n+1}(c) \\ &= a' - h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1}(c) + \alpha_n \circ h_{n+1}(c) \\ &= a' - \alpha_n \circ h_{n+1}(c) + \alpha_n \circ h_{n+1}(c) \\ &= a' \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $(b, a') = (f_n(a), \alpha_n(a)) = \mu_n(a)$, es decir, $(b', a) \in Im\mu_n$. Por lo que queda probada la exactitud de la sucesión.

$\square$

4. Funtores de Homología y Cohomología

En esta sección presentaremos dos funtores claves que sirven como herramientas principales para el cálculo de homología y cohomología de espacios topológicos, ellos son los funtores de homología y cohomología. En el capítulo 2 presentaremos más detalladamente de lo que se trata la homología y la cohomología.

Consideremos las categorías $\mathfrak{C}_{adR}$, $\mathfrak{C}_{coR}$ y $\mathcal{M}_R$.

Sea $H_n : \mathfrak{C}_{adR} \longrightarrow \mathcal{M}_R$ dado por

$H_n(\mathscr{C}) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}}$ para todo $\mathscr{C} \in \mathfrak{C}_{adR}$.

$H_n(\{g_k : M_k \longrightarrow M'_k\}) = \overline{g_n} : \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}} \longrightarrow \frac{Ker\delta_n}{Im\delta_{n+1}}$ donde $\overline{g_n}[x] = [g_n(x)]$, para toda transformación de cadenas $\{g_k : M_k \longrightarrow M'_k\}$

Tenemos que H_n es un fuctor y se denomina ***funtor de homología***.

Por otro lado, sea $H^n : \mathfrak{C}_{coR} \longrightarrow \mathcal{M}_R$ dado por

$H^n(\mathscr{D}) = \frac{Ker\partial_{n+1}}{Im\partial_n}$ para todo $\mathscr{D} \in \mathfrak{C}_{coR}$.

$H^n(\{g_k : M_k \longrightarrow M'_k\}) = \overline{g_n} : \frac{Ker\partial_{n+1}}{Im\partial_n} \longrightarrow \frac{Ker\delta_{n+1}}{Im\delta_n}$ donde $\overline{g_n}[x] = [g_n(x)]$, para toda tranformación de codadenas $\{g_k : M_k \longrightarrow M'_k\}$

Tenemos que H^n es un funtor y se denomina ***funtor de cohomología***.

Recordemos que H_n y H^n preservan la conmutatividad de los diagramas, por ser funtores.

Con esto damos fin al primer capítulo.

CAPITULO 2

Homología y Cohomología Singular

La **homología singular** estudia la organización de celdas o símplices en espacios topológicos. Básicamente se trata de un funtor que asocia a cada espacio topológico la homología de un complejo de cadenas sobre un cuerpo prefijado. Del complejo dual obtenemos la cohomología singular.

Esta teoría se inicia en el siglo XIX con el estudio de las superficies de Riemann, sin embargo no es hasta finales de dicho siglo cuando H. Poincaré introduce algunos de sus fundamentos. Desarrollos posteriores son propiciados en los trabajos de S. Fefschetz, M. Morse y Brouwer en topología combinatoria, destacando que Brouwer demuestra el teorema de curvas de Jordan y de la invariancia de dominio usando técnicas simpliciales.

En la década de los 30 se desarrolla la cohomología de De Rham (implícita en los trabajos de Poincaré) que dio un gran impulso a la topología algebraica.

1. Homotopía

Antes de comenzar con nuestro estudio sobre homología, vamos a presentar una breve sección sobre homotopía. En esta seccíon se presentan algunas definiciones que serán útiles en el transcurso de este capítulo.

Dos funciones continuas de un espacio topológico a otro se dicen homotópicas (del Griego *homos* = idéntico y *topos* = lugar) si una puede ser "deformada continuamente" en la otra, a tal deformación se le llama **homotopía** entre las dos funciones. Un uso sobresaliente de la homotopía es la definición de los grupos de homotopía y los grupos de cohomotopía, que son invariantes importantes en la topología algebraica.

Vamos a considerar la categoría $Top1$.

Definición 2.1. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) objetos en $Top1$ y $f, g \in Hom_{Top1}((X, x_0), (Y, y_0))$. Diremos que f es ***homotópica*** a g si existe una función continua $H : I \times X \longrightarrow Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ y $H(1, x) = g(x)$, donde $I = [0, 1]$. Este hecho lo denotaremos por $f \simeq g$. Es claro que $\simeq$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se denominan ***clases de homotopía de funciones***, las cuales denotaremos por $[f]$ donde $f \in Hom_{Top1}((X,x_0),(Y,y_0))$.

Para darle sentido geométrico al contenido de la definición, escribamos $H_t(x) = H(t,x)$ para cualquier $(t,x) \in I \times X$. Entonces, para cada $t \in I$, $H_t : X \longrightarrow Y$ es una función continua. Asumamos que el parámetro t representa el tiempo. Entonces, en $t = 0$ tenemos la función f. Cuando t varía la función H_t varía continuamente hasta que en $t = 1$ tenemos la función g.

Definición 2.2. Sean (X,x_0) y (Y,y_0) en $Top1$ y sea $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$. f es una ***equivalencia de homotopía*** si existe $g : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ tal que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. En este caso decimos que (X,x_0) es ***homotópico*** a (Y,y_0) y lo denotamos por $(X,x_0) \simeq (Y,y_0)$.

Si dos espacios topológicos X, Y son homeomorfos entonces son homotópicos. De esta manera, podemos probar que dos espacios no son homeomorfos probando que no son homotópicos.

Existe un tipo especial de espacios topológicos, los llamados espacios contráctiles. Intuitivamente, un espacio contráctil es aquél que puede ser "encogido continuamente" a un punto.

Definición 2.3. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se dice que X es ***contráctil*** a x_0 si la identidad de X, 1_X, es homotópica a la constante x_0.

La siguiente proposición demuestra que la definición anterior no depende del punto escogido.

Proposición 2.4. *Todo espacio contráctil es conexo por arcos.*

Demostración Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ tal que X es contráctil a x_0. Sea $c : X \longrightarrow X$ dada por $c(x) = x_0$ para todo $x \in X$. Sea $x_1 \in X$ y $d : X \longrightarrow X$ dada por $d(x) = x_1$ para todo $x \in X$.

Como $1_X \simeq c$ se tiene que $1_X \circ d \simeq c \circ d$, es decir, $d \simeq c$. Luego tenemos que las constantes x_0 y x_1 son homotópicas. Esto último implica que X es conexo por arcos.

□

Para finalizar esta sección, presentamos los conceptos de retracto y retracto por deformación, que serán de gran utilidad en el cálculo de la homología de ciertos espacios:

Definición 2.5. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. A es ***retracto*** de X si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

en la categoría Top, donde i_A es la inclusión de A y 1_A es la identidad de A. Es decir, si existe $r : X \longrightarrow A$ continua tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. A tal r se le llama ***retracción***.

Definición 2.6. $A \subseteq X$ se dice ***retracto por deformación*** de X si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i_A \circ r \simeq 1_X$.

Ejemplo 2.7. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ es retracto por deformación de $D^{n+1} \backslash \{(0,0)\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < \|x\| \leq 1\}$ a través de $r : D^{n+1} \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow S^n$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

2. Homología y cohomología singular

Sea R un cuerpo. La **homología singular** de un espacio topológico X, con coeficientes en R, es una sucesión de invariantes algebraicos que básicamente miden la estructura celular de X.

En resumen, la homología singular de un espacio topológico X se construye mediante las aplicaciones de q-simplex estándar en X. Estas construcciones determinan un complejo de cadena, y la homología singular de X es la homología de este complejo. Esta construcción es natural.

Ahora comencemos nuestro estudio de la homología singular. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^q$ junto con los siguientes vectores en él:

$$\begin{aligned} e_0 &= (0, 0, ..., 0), \\ e_1 &= (1, 0, ..., 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0), \\ &\vdots \\ e_q &= (0, 0, ..., 1). \end{aligned}$$

El siguiente objeto matemático es la base para la construcción de la homología singular. Tal objeto se conoce como q-simplex.

El ***q-simplex estándar*** Δ_q es la cápsula convexa del conjunto $E_q = \{e_0, ..., e_q\}$. Por ejemplo, un 0-simplex es un punto; un 1-simplex un segmento de una recta; un 2-simplex un triángulo; un 3-simplex es un tetraedro; y un 4-simplex es un pentácoron (en cada caso, con su interior). Una ***m-cara*** (con $m \in \{0, ..., q\}$) del q-simplex estándar Δ_q es una cápsula convexa de m puntos de E_q. Las 0-caras se llaman vértices; las 1-caras, lados; las $(q-1)$-caras se llaman facetas; y la única q-cara es el q-simplex en sí.

Definición 2.8. Dado X un espacio topológico. Un ***q-simplex singular*** en X es una función continua $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$.

$S_q(X)$ es el espacio vectorial sobre el cuerpo R, gerenardo por los q-simplex singulares.

Definamos la siguiente aplicación $\nabla_q^i : \Delta_q \longrightarrow \Delta_{q+1}$, $i = 0, 1, ..., q$ como

$$\nabla_q^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

y extendemos por linealidad.

Ahora definamos $\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ como $\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \circ \nabla_{q-1}^i$, y extendemos por linealidad. Así obtenemos la sucesión de R-espacios vectoriales y transformaciones lineales:

$$S_*(X) : \ldots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \longrightarrow 0$$

Proposición 2.9. *$S_*(X)$ es un complejo de cadenas.*

Demostración Si $0 < j < i$ tenemos la siguiente igualdad: $\nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j = \nabla_q^j \circ \nabla_{q-1}^{i-1}$ (1).
Ahora vamos a probar que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$.
Sea $\sigma \in S_{q+1}(X)$.

$$\begin{aligned} \partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) &= \partial_q(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \sigma \circ \nabla_q^i) \\ &= \sum_{j=0}^{q}(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) \\ &= (\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) + (\sum_{j\geq i}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) \end{aligned}$$

Por la igualdad (1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) &= (\sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^j \circ \nabla_{q-1}^{i-1}) + (\sum_{j\geq i}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) \\
&= (\sum_{i\leq j}(-1)^{i+j+1}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) + (\sum_{j\geq i}(-1)^{i+j}\sigma \circ \nabla_q^i \circ \nabla_{q-1}^j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Definición 2.10. Al complejo de cadenas $S_*(X)$ lo llamaremos ***complejo singular*** de X.

Sean X y Y dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Definimos $f_q : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y)$ como $f_q(\sigma) = f \circ \sigma$.

Proposición 2.11. $f_* = \{f_q\}$ *es una transformación de cadenas.*

Demostración Hay que probar que $\delta_q \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q$.
Sea $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$.

$$\begin{aligned}
f_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= f_{q-1}(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \circ \nabla_{q-1}^i) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i f \circ \sigma \circ \nabla_{q-1}^i \\
&= \delta_q(f \circ \sigma) \\
&= \delta_q \circ f_q(\sigma)
\end{aligned}$$

□

Notación: Denotamos por $\mathfrak{C}_{aR}$ a la subcategoría de $\mathfrak{C}_{adR}$, formada por los complejos singulares.

La ***homología singular*** de X, que denotaremos por $H_*(X) = \{H_q(X)\}$, es la homología del complejo singular $S_*(X)$.

Dado el complejo singular $S_*(X)$, denotamos por $S^*(X)$ al complejo de cocadenas dual, esto es:

$$S^*(X) : 0 \longrightarrow Hom(S_0(X), R) \xrightarrow{\hat{\partial}_1} Hom(S_1(X), R) \xrightarrow{\hat{\partial}_2} \ldots$$

$$\dots \xrightarrow{\hat{\partial_q}} Hom(S_q(X), R) \xrightarrow{\hat{\partial_{q+1}}} \dots$$

La ***cohomología singular*** de X, que denotaremos por $H^*(X) = \{H^q(X)\}$, es la cohomología de este complejo. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, la transformación de cocadenas inducida la denotaremos por $f^* : S^*(Y) \longrightarrow S^*(X)$.

Sean X y Y espacios topológicos. Para no recargar al lector usaremos las mismas notaciones para $f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ y para $f^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$. Notamos que para las funciones identidad $1 : X \longrightarrow X$ y las constantes $c : X \longrightarrow X$ se satisface que $1_* = 1 : H_*(X) \longrightarrow H_*(X)$ y $c_* = 0$.

Notación: Usaremos el símbolo "=" para denotar isomorfismos.

3. Ejemplos de grupos de homología

En esta sección presentamos algunos cálculos para los grupos de homología de ciertos espacios topológicos. Centraremos nuestra atención en aquellos subconjuntos que son retractos por deformación.

Comenzamos los ejemplos con espacios que son conexos por arcos.

Calculemos el 0-grupo de homología para X.

Proposición 2.12. *Si X es un espacio conexo por arcos entonces $H_0(X)$ es isomorfo a R.*

Demostración $S_0(X)$ es el R-módulo libre generado por los puntos de X.

Sea $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in S_0(X)$.

Sea $h : H_0(X) \longrightarrow R$ la aplicación dada por $h([\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n]) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, para cada $[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n] \in H_0(X)$.

Veamos que h está bien definida. Esto es, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j + \partial_1(\sum_{l=1}^k \gamma_k \sigma_k)$ entonces $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \beta_j$.

Vemos que:

$$
\begin{aligned}
\partial_1(\sum_{l=1}^{k}\gamma_l\sigma_l) &= \sum_{l=1}^{k}\gamma_l\partial_1(\sigma_l)\\
&= \sum_{l=1}^{k}\gamma_l(\sigma_l(e_1)-\sigma_l(e_0))
\end{aligned}
$$

Luego, $h(\sum_{l=1}^{k}\gamma_l(\sigma_l(e_1)-\sigma_l(e_0)))=0$, lo cual implica que h está bien definida.

h es un homomorfismo de R-módulos.

Para $\lambda \in R$ escogemos $[\lambda x_0] \in H_0(X)$, donde x_0 es un generador de $S_0(X)$. Así, $h([\lambda x_0])=\lambda$. Entonces h es epimorfismo.

Veamos que h es monomorfismo. Sea $[\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n] \in H_0(X)$ tal que $h([\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n])=\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$. Debemos probar que $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n \in Im\partial_1$.

Fijamos $x_0 \in X$. Como X es conexo por arcos, para cada x_j consideramos un camino σ_j que comienza en x_0 y termina en x_j.

Sea $\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_n\sigma_n \in S_1(X)$.

$$
\begin{aligned}
\partial_1(\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_n\sigma_n) &= \lambda_1\partial_1(\sigma_1)+\cdots+\lambda_n\partial_1(\sigma_n)\\
&= \lambda_1(x_1-x_0)+\cdots+\lambda_n(x_n-x_0)\\
&= \lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n-(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j)x_0\\
&= \lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n
\end{aligned}
$$

Así, $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n \in Im\partial_1$. Es decir, $[\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n]=0$. Entonces h es monomorfismo.

□

La siguiente proposición posee gran importancia ya que calcula los grupos de homología para los espacios más sencillos que existen.

Proposición 2.13. *Si X es un punto entonces*

$$
H_q(X)=\begin{cases} 0 & si\ q\neq 0\\ R & si\ q=0\end{cases}
$$

Demostración Como X es un punto se tiene que $S_q(X)$ y R son isomorfos.

El resultado es inmediato pues:

$$S_*(X) : \ldots \xrightarrow{\partial_{q+1}} R \xrightarrow{\partial_q} R \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} R \longrightarrow 0$$

y

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ \nabla^i_{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ es par} \\ (-1)^q & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}$$

□

Respecto a la homotopía tenemos el siguiente resultado, su prueba puede verse en [6]:

Lema 2.14. *Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son homotópicas entonces $f_* = g_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$.*

Son consecuencia de este lema los siguientes resultados:

Corolario 2.15. *Si X es contráctil entonces*

$$H_q(X) = \begin{cases} 0 & si\ q \neq 0 \\ R & si\ q = 0 \end{cases}$$

Corolario 2.16. *Sea $A \subseteq X$. Si A es retracto por deformación de X entonces $H_q(X) = H_q(A)$, para cada q.*

Demostración Como A es retracto por deformación de X, existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ tal que $i_A \circ r \simeq 1_X$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "r"] & X \\ & A \arrow[ur, "i_A"'] & \end{tikzcd}$$

El triángulo de las izquierda es conmutativo, y el triángulo de la derecha es homotópicamente conmutativo.

Aplicamos homología, por funtorialidad y el lema 2.14 obtenemos que ambos triángulos del siguiente diagrama son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} H_q(A) \arrow[r, "i_{H_q(A)}"] \arrow[dr, "1_{H_q(A)}"'] & H_q(X) \arrow[r, "1_{H_q(X)}"] \arrow[d, "r_*"] & H_q(X) \\ & H_q(A) \arrow[ur, "i_{H_q(A)}"'] & \end{tikzcd}$$

Y en consecuencia r_* es un isomorfismo. $\square$

4. Sucesión exacta del par

Consideremos el par (X, A) en Top2.

Para este par definimos el complejo singular $S_*(X, A)$ como el complejo cuyas componentes son $S_q(X, A) = \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$, y definimos la aplicación $\overline{\partial_q} : S_q(X, A) \longrightarrow S_{q-1}(X, A)$ mediante la fórmula $\overline{\partial_q}([\sigma]) = [\partial_q(\sigma)]$. Así obtenemos el complejo de cadenas:

$$S_*(X, A) : \longrightarrow S_q(X, A) \xrightarrow{\overline{\partial_q}} S_{q-1}(X, A) \xrightarrow{\overline{\partial_{q-1}}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial_1}} S_0(X, A) \longrightarrow 0$$

La homología de este complejo la denotamos por $H_*(X, A) = \{H_q(X, A)\}$.

Consideramos la inclusión $i_A : A \longrightarrow X$, junto con la transformación de cadenas inducida $i_{A*} = i_{S_*(A)} : S_*(A) \longrightarrow S_*(X)$. Sea $p_* : S_*(X) \longrightarrow S_*(X, A)$ la proyección canónica de $S_*(X)$ sobre $\frac{S_*(X)}{S_*(A)}$.

Consideremos la sucesión:

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i_{A*}} S_*(X) \xrightarrow{p_*} S_*(X, A) \longrightarrow 0$$

que resulta ser exacta corta en cada nivel.

Del lema 1.33 (lema de la serpiente) obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.17 (**Sucesión exacta del par**). *Existe un homomorfismo de conexión $\Gamma_q : H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1}(A)$ tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_{A*}} H_q(X) \xrightarrow{p_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Gamma_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_{A*}} H_{q-1}(X) \longrightarrow$$

Proposición 2.18. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un retracto por deformación de X. Entonces $H_q(X, A) = 0$.*

Demostración Como A es retracto por deformación de X se tiene que $H_q(A) = H_q(X)$.

Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\longrightarrow H_q(A) \xrightarrow[\sim]{i_{A*}} H_q(X) \xrightarrow{p_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Gamma_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow[\sim]{i_{A*}} H_{q-1}(X) \longrightarrow$$

Por la exactitud de esta sucesión se tiene que $p_* = 0$ y $\Gamma_q = 0$. Entonces $H_q(X, A) = 0$. $\square$

Ya que el funtor Hom preserva exactitud en módulos libres, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.19 (**Sucesión exacta del par en cohomología**). *Existe un homomorfismo de conexión* $\Gamma^q : H^q(A) \longrightarrow H^{q+1}(X, A)$ *tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\longrightarrow H^q(X) \xrightarrow{i_A^*} H^q(A) \xrightarrow{\Gamma^q} H^{q+1}(X, A) \xrightarrow{p^*} H^{q+1}(X) \xrightarrow{i_A^*} H^{q+1}(A) \longrightarrow$$

5. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris

La **sucesión de Mayer-Vietoris** (llamada así por Walther Mayer y Leopold Vietoris) es una sucesión exacta que a menudo nos ayuda a calcular grupos de homología y cohomología.

Primero vamos a presentar un concepto muy útil que nos ayudará a demostrar el teorema de Mayer-Vietoris, se trata de la excisión.

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico. Dado el triple $U \subseteq A \subseteq X$, diremos que U se puede ***excindir*** si para cada q se tiene que la inclusión induce un isomorfismo entre $H_q(X - U, A - U)$ y $H_q(X, A)$.

En cohomología también vale esta definición; es decir, U se puede excindir si la inclusión induce un isomorfismo entre $H^q(X - U, A - U)$ y $H^q(X, A)$ para cada q.

El siguiente lema no lo vamos a demostrar, pues requiere de ciertos tópicos que no trabajamos en este trabajo especial de grado. El lector interesado puede ver la demostración en [2].

Lema 2.21. *Si* $\overline{U} \subseteq int(A)$ *entonces* U *se puede excindir.*

Ahora estamos listos para demostrar el teorema de Mayer-Vietoris.

Teorema 2.22 (**Mayer-Vietoris**). *Sea* X *un espacio topológico y sea* $\{U, V\}$ *un cubrimiento abierto de* X*. Entonces existe un homomorfismo de conexión* $\Lambda_q : H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(U \bigcap V)$ *tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\longrightarrow H_q(U \bigcap V) \xrightarrow{\mu_q} H_q(U) \bigoplus H_q(V) \xrightarrow{\nu_q} H_q(X) \xrightarrow{\Lambda_q} H_{q-1}(U \bigcap V) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H_0(U \bigcap V) \xrightarrow{\mu_0} H_0(U) \bigoplus H_0(V) \xrightarrow{\nu_0} H_0(X) \longrightarrow 0$$

donde

$$\mu_q(w) = (i_{U\bigcap V*}(w), i_{U\bigcap V*}(w)), \textit{ para todo } w \in H_q(U\bigcap V).$$
$$\nu_q(u,v) = i_{U*}(u) - i_{V*}(v), \textit{ para todo } (u,v) \in H_q(U)\bigoplus H_q(V).$$

Demostración Consideremos el par $(V, U\bigcap V)$ y su sucesión exacta asociada:

$$\longrightarrow H_q(U\bigcap V) \xrightarrow{i_{U\bigcap V*}} H_q(V) \xrightarrow{p_{V*}} H_q(V, U\bigcap V) \xrightarrow{\Gamma_q} H_{q-1}(U\bigcap V) \longrightarrow$$

Ahora consideremos el par (X, U) y su sucesión exacta asociada:

$$\longrightarrow H_q(U) \xrightarrow{i_{U*}} H_q(X) \xrightarrow{p_{X*}} H_q(X,U) \xrightarrow{\Gamma'_q} H_{q-1}(U) \longrightarrow$$

$V^c = U - V$ es cerrado. Vemos que $\overline{V^c} = V^c \subseteq U = int(U)$. Por el lema anterior V^c se puede excindir. Entonces existe un isomorfismo entre $H_q(V, U\bigcap V)$ y $H_q(X, U)$.

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_q(U\bigcap V) \arrow[r, "i_{U\bigcap V*}"] \arrow[d, "i_{U\bigcap V*}"] & H_q(V) \arrow[r, "p_{V*}"] \arrow[d, "i_{V*}"] & H_q(V, U\bigcap V) \arrow[r, "\Gamma_q"] \arrow[d, "="] & H_{q-1}(U\bigcap V) \arrow[r] \arrow[d, "i_{U\bigcap V*}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_q(U) \arrow[r, "i_{U*}"] & H_q(X) \arrow[r, "p_{X*}"] & H_q(X,U) \arrow[r, "\Gamma'_q"] & H_{q-1}(U) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Del lema de Barrat-Whitehead se sigue el resultado.

□

La sucesión presentada en el teorema anterior se conoce como ***sucesión de Mayer-Vietoris*** (en homología).

También existe el teorema de Mayer Vietoris para cohomología singular. La prueba del siguiente teorema es análoga.

Teorema 2.23 (**Mayer-Vietoris para cohomología**). *Sea X un espacio topológico y sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe un homomorfismo de conexión $\Lambda^q : H^{q-1}(U\bigcap V) \longrightarrow H^q(X)$ tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$\longrightarrow H^{q-1}(U\bigcap V) \xrightarrow{\Lambda^q} H^q(X) \xrightarrow{\mu^q} H^q(U)\bigoplus H^q(V) \xrightarrow{\nu^q} H^q(U\bigcap V) \longrightarrow$$

donde

$$\mu^q(w) = (i^*_{U\bigcap V}(w), i^*_{U\bigcap V}(w)),\ \textit{para todo } w \in H^q(X).$$
$$\nu^q(u,v) = i^*_U(u) - i^*_V(v),\ \textit{para todo } (u,v) \in H^q(U)\bigoplus H^q(V).$$

Corolario 2.24. *Si X es un espacio topológico y $\{A, B\}$ es una partición disjunta de X, entonces $H_q(X) = H_q(A) \bigoplus H_q(B)$ para cada q.*

6. Homología singular de las esferas

Esta sección está dedicada al cálculo de la homología de uno de los objetos matemáticos más conocidos, la n-esfera. Para aprovechar la sección anterior, vamos a presentar tal cálculo mediante el uso de la sucesión de Mayer-Vietoris.

Teorema 2.25.

$$H_q(S^n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } q \neq n \\ R & \textit{si } (q = n \textit{ y } n \neq 0) \textit{ ó } q = 0 \\ R\bigoplus R & \textit{si } n = 0 \textit{ y } q = 0 \end{cases}$$

Demostración Vamos a usar inducción sobre n.

(1) Para el caso $n = 0$ es evidente del corolario 2.24, pues S^0 son dos puntos.

Para los siguientes casos consideramos en S^{n+1} la partición formada por los conjuntos $U = S^{n+1} - \{N\}$ y $V = S^{n+1} - \{S\}$, donde N y S representan los polos norte y sur en la esfera S^{n+1}, respectivamente. Notamos que $U \bigcap U$ es homoemorfo al cilindro $S^n \times \mathbb{R}$, el cual se retrae por deformación a S^n. Aplicando Mayer-Vietoris obtenemos la sucesión exacta:

$$\longrightarrow H_{q+1}(U)\bigoplus H_{q+1}(V) \longrightarrow H_{q+1}(S^{n+1}) \longrightarrow H_q(S^n \times \mathbb{R}) = H_q(S^n) \longrightarrow$$

(2) Probaremos el teorema para $n = 1$. La sucesión anterior es la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow R^2 \longrightarrow R^2 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Y el resultado es consecuencia del teorema de la dimensión.

(3) Supongamos cierto para n y probaremos el resultado para $n+1$. Pero esto es inmediato pues por Mayer-Vietoris $H_{n+1}(S^{n+1}) = H_n(S^n)$.

□

7. Homología de los CW-complejos

Un **CW-complejo** es un tipo de espacio topológico introducido por J. H. C. Whitehead cuando estudiaba la teoría de homotopía. La idea era tener una clase de espacios que fueran más amplios que los complejos simpliciales, pero que guardaran una naturaleza combinatoria.

Para estos propósitos una celda cerrada es un espacio topológico homeomorfo a un simplex, o igualmente a una bola o a un cubo en n dimensiones. En general, un CW-complejo sería un espacio topológico X que está cubierto por celdas.

Sea X un espacio topológico. Para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es una familia de índices y $\Gamma_n = \{e^n_\alpha\}_{\alpha \in J_n}$ es una familia de subconjuntos de X, que llamaremos ***n-celdas*** . Por convención, $\Gamma_{-1} = \emptyset$.

Al conjunto $K_n = \bigcup_{m \leq n} e^m_\alpha$ lo llamaremos el ***n-esqueleto*** . Dada $e^n_\alpha \in \Gamma_n$, el conjunto $\acute{e}^n_\alpha = e^n_\alpha \bigcap K_{n-1}$ se denomina ***borde*** de e^n_α , y el conjunto $\dot{e}^n_\alpha = e^n_\alpha - \acute{e}^n_\alpha$ se denomina ***interior*** de e^n_α .

Ahora definimos lo que es una estructura celular.

Definición 2.26. $\Gamma = \{\Gamma_n\}$ es una ***estructura celular*** de X y X es un ***complejo celular*** si:

(1) $\bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$ es un cubrimiento de X.
(2) $\dot{e}^n_\alpha \bigcap \dot{e}^m_\beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha = \beta$ y $n = m$.
(3) Para todo e^n_α existe una aplicación continua $f^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (e^n_\alpha, \acute{e}^n_\alpha)$ tal que $f^n_\alpha : int(D^n) \longrightarrow \dot{e}^n_\alpha$ es un homeomorfismo.

Definición 2.27. Dadas e^n_α y e^m_β celdas de Γ, diremos que e^m_β es una ***cara inmediata*** a e^n_α, si $\dot{e}^m_\beta \bigcap e^n_\alpha \neq \emptyset$.

Definición 2.28. e^m_β es ***cara*** de e^n_α, si existen n-celdas $e^{m_1}_{\beta_1}, ..., e^{m_k}_{\beta_k}$ tal que e^m_β es cara inmediata de $e^{m_1}_{\beta_1}$, $e^{m_j}_{\beta_j}$ es cara inmediata de $e^{m_{j+1}}_{\beta_{j+1}}$ y $e^{m_k}_{\beta_k}$ es cara inmediata de e^n_α.

A continuación presentamos un teorema que resume las propiedades de los complejos celulares. No vamos a dar la prueba de este teorema ya que no es trascendente en el desarrollo de este trabajo especial de grado.

Teorema 2.29. *Sea X un complejo celular. Entonces:*

(1) $\Gamma_0 \neq \emptyset$.
(2) *Si e^m_β es cara inmediata de e^n_α entonces $m < n$.*

(3) *Toda celda posee un número finito de caras inmediatas si y sólo si posee un número finito de caras.*

(4) *Todo n-esqueleto es un complejo celular.*

Ahora vamos a presentar algunas estructuras celulares para espacios topológicos conocidos.

Ejemplo 2.30. **[Estructura celular de la esfera $\mathbf{S^n}$]**

Definamos a S^n como el espacio cociente $D^n/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ o $x, y \in S^{n-1}$.

Sólo damos dos celdas: una 0-celda que es el polo norte N de la esfera, ésta a su vez es la n-celda. De donde, $\Gamma_0 = \{\{N\}\}$, $\Gamma_m = \{\emptyset\}$ si $m \neq n$ y $\Gamma_n = \{S^n\}$.

- $\{\acute{N}\} = \{N\} \bigcap K_{-1} = \emptyset$.
- $\acute{S^n} = S^n \bigcap K_{n-1} = S^n \bigcap \{N\} = \{N\}$.
- $\dot{S^n} = S^n - \acute{S^n} = S^n - \{N\} \simeq \mathbb{R}^n$.

Así vemos que $\{\dot{N}\} \bigcap \{\dot{\emptyset}\} = \emptyset$, $\{\dot{N}\} \bigcap \dot{S^n} = \emptyset$ y $\dot{S^n} \bigcap \{\dot{\emptyset}\} = \emptyset$.

De esta forma tenemos que $\alpha \neq \beta$ o $n \neq m \Rightarrow \dot{e^n_\alpha} \bigcap \dot{e^m_\alpha} = \emptyset$.

Para S^n: $f^n : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, \{N\})$ la definimos como la aplicación cociente. $f^n(x) = [x]$, para todo $x \in D^n$. Así, $f^n|_{int(D^n)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Por lo tanto, S^n es un complejo celular.

Ejemplo 2.31. **[Estructura celular del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{p}}$]**

Intuitivamente, $\mathbb{C}^n_p$ es el conjunto de rectas complejas que pasan por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$.

Definamos a $\mathbb{C}^n_p$ de una manera más precisa.

Damos en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y \Leftrightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{o\}$ tal que $x = \lambda y$.

Luego, definimos a $\mathbb{C}^n_p$ como el espacio cociente $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$.

Notamos que $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2} \supseteq S^{2n+1}$. Así, $\mathbb{C}^n_p = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim = S^{2n+1}/\sim$.

A la clase de $(z_0, ..., z_n)$ en S^{2n+1} la denotamos por $[z_0, ..., z_n]$.

Vamos a darle a $\mathbb{C}^n_p$ una estructura celular.

Vemos que

$$\mathbb{C}^1 \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^{n+1}.$$

$$S^1 \subseteq S^3 \subseteq \cdots \subseteq S^{2n+1}.$$

$$\mathbb{C}^0_p \subseteq \mathbb{C}^1_p \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^n_p.$$

$$\mathbb{C}^m_p = \mathbb{C}^{m-1}_p \bigcup \mathbb{C}^m, \text{ esta unión es disjunta.}$$

Definamos las familias de celdas:

$$\Gamma_m = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \text{ es impar} \\ \mathbb{C}_p^{m/2} & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

Analicemos el caso no trivial donde m es par:

- $e^m = \mathbb{C}_p^{m/2}$.
- $\acute{e}^m = e^m \bigcap K_{m-1} = \mathbb{C}^{(m/2)-1}$.
- $\dot{e}^m = e^m - \acute{e}^m = \mathbb{C}_p^{m/2} - \mathbb{C}_p^{(m/2)-1}$.

Así, $\dot{e}^m \bigcap \dot{e}^n \neq \emptyset \Rightarrow m = n$.

Definimos $f^{2n} : (D^{2n}, S^{2n-1}) \longrightarrow (\mathbb{C}_p^n, \mathbb{C}_p^{n-1})$ como $f^{2n}(z_0, ..., z_n) = [z_0, ..., z_n, \sqrt{1 - |z_0|^2 - \cdots - |z_n|^2}]$. Así, $f^{2n}|_{int(D^{2n})}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Definición 2.32. Sea $(X, \Gamma_n : n \geq 0)$ un espacio topológico junto con una estructura celular. $(X, \Gamma_n : n \geq 0)$ es un ***CW-complejo*** si se verifica:

(1) C (compact): Cada celda posee una cantidad finita de caras (inmediatas).

(2) W (weak): La topología de X es la topología débil dada por la siguiente condición: A es cerrado en X si y sólo si $A \bigcap e_\alpha^n$ es cerrado en e_α^n, para todo n y para todo α.

Diremos que X es un ***CW-complejo finito*** si posee un número finito de celdas.

Ahora presentamos un teorema que resume las propiedades de los CW-complejos. Este teorema es sólo de carácter informativo y no influye en el desarrollo de este trabajo especial de grado.

Teorema 2.33. *Sea X un CW-complejo. Entonces:*

(1) *Todo subconjunto compacto de X intersecta sólo a un número finito de interiores de celdas.*

(2) *Todo n-esqueleto de X es un CW-complejo.*

(3) *Si X es compacto entonces tiene un número finito de celdas y por lo tanto coincide con alguno de sus esqueletos.*

Ahora vamos a presentar resultados que tienen que ver con el cálculo de la homología en un CW-complejo.

Sea X un CW-complejo. Sabemos que $K_{n-1} \subseteq K_n$. Consideramos la sucesión exacta de la homología del par (K_n, K_{n-1}),

$$\longrightarrow H_q(K_{n-1}) \xrightarrow{i_{K_{n-1}*}} H_q(K_n) \xrightarrow{p_{K_n*}} H_q(K_n, K_{n-1}) \xrightarrow{\Gamma_q} H_{q-1}(K_{n-1}) \longrightarrow$$

Teorema 2.34. *Sea X un CW-complejo finito,*

$$H_q(K_n, K_{n-1}) = \begin{cases} 0 & si\ q \neq n \\ \bigoplus_{\alpha \in J_n} R & si\ q = n \end{cases}$$

Demostración Para el caso $q = 0$ consideramos el par (K_n, K_{n-1}) y la sucesión exacta asociada:

$$0 \longrightarrow H_0(K_{n-1}) \xrightarrow{i_{K_{n-1}*}} H_0(K_n) \xrightarrow{p_{K_n*}} H_0(K_n, K_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Como $H_0(K_{n-1}) = H_0(K_n) = R$, la sucesión anterior se convierte en:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i_{K_{n-1}*}} R \xrightarrow{p_{K_n*}} H_0(K_n, K_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Por el teorema de la dimensión se tiene que $H_0(K_n, K_{n-1}) = 0$.

Ahora consideremos el caso $q \neq 0$. Sea E el conjunto que resulta de elegir un punto en el interior de cada una de las n-celdas. Así, $K_{n-1} \subseteq K_n - E \subseteq K_n$. Tenemos que K_{n-1} es retracto por deformación de $K_n - E$, luego $H_q(K_{n-1}) = H_q(K_n - E)$, para cada q.

Consideramos la sucesión exacta del par (K_n, K_{n-1}) y la sucesión exacta del par $(K_n, K_n - E)$ para conbinarlas en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H_q(K_{n-1}) \arrow[r, "i_{K_{n-1}*}"] \arrow[d, "="] & H_q(K_n) \arrow[r, "p_{K_n*}"] \arrow[d, "="] & H_q(K_n, K_{n-1}) \arrow[r, "\Gamma_q"] \arrow[d] & H_{q-1}(K_{n-1}) \arrow[r, "i_{K_{n-1}*}"] \arrow[d, "="] & H_{q-1}(K_n) \arrow[d, "="] \\
H_q(K_n - E) \arrow[r, "i_{K_n - E*}"] & H_q(K_n) \arrow[r, "p'_{K_n*}"] & H_q(K_n, K_n - E) \arrow[r, "\Gamma'_q"] & H_{q-1}(K_n - E) \arrow[r, "i_{K_n - E*}"] & H_{q-1}(K_n)
\end{tikzcd}$$

Por el lema de los cinco, se tiene que $H_q(K_n, K_{n-1}) = H_q(K_n, K_n - E)$.

K_{n-1} es cerrado en K_n y $K_n - E$ es abierto en K_n, luego K_{n-1} se puede excindir en el triple $K_{n-1} \subseteq K_n - E \subseteq K_n$.

Así,

$$\begin{aligned} H_q(K_n, K_{n-1}) &= H_q(K_n, K_n - E) \\ &= H_q(K_n - K_{n-1}, K_n - E - K_{n-1}) \\ &= H_q(\bigcup_{\alpha\in J_n} \dot{e}^n_\alpha, \bigcup_{\alpha\in J_n} \dot{e}^n_\alpha - E) \\ &= \bigoplus_{\alpha\in J_n} H_q(\dot{e}^n_\alpha, \dot{e}^n_\alpha - p) \end{aligned}$$

donde p es un punto interior. La última igualdad es consecuencia del corolario 2.24 y de la propiedad (2) de la definición 2.26.

Sea $f^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (e^n_\alpha, \acute{e}^n_\alpha)$ como en 2.26. Dado que $int(D^n)$ es homeomorfo a $\dot{e}^n_\alpha$ a través de f^n_α, entonces S^{n-1} es retracto por deformación de $\dot{e}^n_\alpha - p$, con $p \in E$.

Entonces $H_q(\dot{e}^n_\alpha, \dot{e}^n_\alpha - p) = H_q(int(D^n), S^{n-1}) = H_q(\mathbb{R}^n, S^{n-1})$

Ahora consideremos la sucesión exacta del par $(\mathbb{R}^n, S^{n-1})$,

$$\longrightarrow H_q(S^{n-1}) \xrightarrow{i_{S^{n-1}*}} H_q(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p_{\mathbb{R}^n*}} H_q(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\Gamma_q} H_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_{S^{n-1}*}} H_{q-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow$$

$$\ldots \longrightarrow H_1(S^{n-1}) \xrightarrow{i_{S^{n-1}*}} H_1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p_{\mathbb{R}^n*}} H_1(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\Gamma_1}$$

$$\longrightarrow H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{i_{S^{n-1}*}} H_0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p_{\mathbb{R}^n*}} H_0(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Como H_0 mide el número de componentes conexas y como $H_0(S^{n-1}) = H_0(\mathbb{R}^n) = R$, se tiene que $i_{S^{n-1}*} = 1$. En estas condiciones podemos aplicar el teorema de la dimensión, del cual se tiene que $H_0(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) = 0$. Esto último, sumado a que $H_1(\mathbb{R}^n) = 0$, nos permite usar de nuevo el teorema de la dimensión, del cual tenemos que $H_1(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) = 0$. Y para $q > 1$, como $H_q(\mathbb{R}^n) = 0$, tenemos que $H_q(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) = H_{q-1}(S^{n-1})$. Entonces, por el teorema 2.25,

$$H_q(\dot{e}^n_\alpha, \dot{e}^n_\alpha - p) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n \\ R & \text{si } q = n \end{cases}$$

De esto último se sigue el resultado.

□

También tenemos un corolario de este teorema, que será de gran utilidad en el cálculo de la homología de $\mathbb{C}^n_p$.

Corolario 2.35. *Sea X un CW-complejo finito.*

$$H_q(K_n) = \begin{cases} 0 & si\ q > n \\ H_q(X) & si\ q < n \end{cases}$$

Demostración Probemos el resultado usando inducción sobre n.

- Veamos que se verifica para $n = 0$. $H_q(K_0) = 0$ porque $q \neq 0$ y K_0 son puntos aislados de X.
- Supongamos que se cumple el resultado para $n - 1$.
- Veamos que se verifica para n. Supongamos que $q > n$. Consideramos la sucesión exacta del par (k_n, K_{n-1}),

$$\longrightarrow H_{q+1}(K_n, K_{n-1}) \xrightarrow{\Gamma_{q+1}} H_q(K_{n-1}) \xrightarrow{i_{K_{n-1}*}} H_q(K_n) \xrightarrow{p_{K_n*}} H_q(K_n, K_{n-1}) \longrightarrow$$

Por el teorema anterior se tiene $H_{q+1}(K_n, K_{n-1}) = 0$ y $H_q(K_n, K_{n-1}) = 0$, y por hipótesis inductiva se tiene $H_q(K_{n-1}) = 0$. Entonces $H_q(K_n) = 0$.

Ahora supongamos que $q < n$. Sabemos que $K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq K_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq X$. Consideremos la sucesión exacta de (K_{n+1}, K_n),

$$\longrightarrow H_{q+1}(K_{n+1}, K_n) \xrightarrow{\Gamma_{q+1}} H_q(K_n) \xrightarrow{i_{K_{n-1}*}} H_q(K_{n+1}) \xrightarrow{p_{K_n*}} H_q(K_{n+1}, K_n) \longrightarrow$$

Por el teorema anterior $H_{q+1}(K_{n+1}, K_n) = 0$ y $H_q(K_{n+1}, K_n) = 0$. Entonces $H_q(K_n) = H_q(K_{n+1})$. Por el mismo razonamiento, $H_q(K_{n+1}) = H_q(K_{n+2}) = H_q(K_{n+3}) = \ldots$, y por argumento de finitud obtenemos el resultado.

□

Ahora estamos listos para calcular la homología singular del espacio $\mathbb{C}_p^n$.

Corolario 2.36 (**Homología singular de los $\mathbb{C}_\mathbf{p}^\mathbf{n}$**).

$$H_q(\mathbb{C}_p^n) = \begin{cases} R & si\ 0 \leq q \leq 2n\ y\ q\ es\ par \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración Usamos inducción sobre n.
Verificamos para $n = 0$. Es inmediato porque $\mathbb{C}_p^0$ es un punto.
Partimos de la relación de los esqueletos,

$$K_0 = K_1 \subseteq K_2 = K_3 \subseteq \cdots \subseteq K_{2(n-1)} = K_{2n-1} \subseteq K_{2n}$$

donde $K_{2m} = \mathbb{C}_p^m$.

Suponemos que el resultado es cierto para m y lo probaremos para $m+1$. Consideramos la sucesión exacta del par (K_{2m+2}, K_{2m+1}),

$$\longrightarrow H_{q+1}(K_{2m+2}, K_{2m+1}) \xrightarrow{\Gamma_{q+1}} H_q(K_{2m+1}) \xrightarrow{i_{K_{2m+1}*}} H_q(K_{2m+2}) \xrightarrow{p_{K_{2m+2}*}} H_q(K_{2m+2}, K_{2m+1}) \longrightarrow$$

- Si q es impar entonces $q \neq 2m+2$. Luego, por el teorema 2.34, $H_q(K_{2m+2}, K_{2m+1}) = 0$, y por hipótesis inductiva $H_q(K_{2m+1}) = H_q(\mathbb{C}_p^m) = 0$. Entonces, $H_q(K_{2m+2}) = H_q(\mathbb{C}_p^{m+1}) = 0$.
- Si q es par entonces $q+1 \neq 2m+2$. Luego, por el teorema 2.34, $H_{q+1}(K_{2m+2}, K_{2m+1}) = 0$. Tenemos dos casos:
  (1) Si $q \neq 2m+2$ entonces, por el teorema 2.34, tenemos $H_q(K_{2m+2}, K_{2m+1}) = 0$. Luego, $H_q(\mathbb{C}_p^{m+1}) = H_q(K_{2m+2}) = H_q(K_{2m+1}) = H_q(\mathbb{C}_p^m)$ y el resultado se sigue por inducción.
  (2) Si $q = 2m+2$ entonces, por el corolario 2.35, $H_q(K_{2m+1}) = 0$ y $H_{q-1}(K_{2m+1}) = H_{q-1}(K_{2m}) = 0$. Luego, $H_q(\mathbb{C}_p^{m+1}) = H_q(K_{2m+2}) = H_q(K_{2m+2}, K_{2m+1}) = R$ por el teorema 2.34.

$\square$

8. Dualidad de Poincaré

Dado n un número natural mayor que cero, una n-variedad topológica es un espacio topológico Hausdorff, 2°-numerable, localmente compacto que localmente es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. El siguiente resultado establece la relación de dualidad entre la homología y la cohomología singular en una variedad compacta. La prueba de este resultado puede verse en [6].

Teorema 2.37 (**Dualidad de Poincaré**). *Si M una n-variedad diferenciable compacta entonces los espacios vectoriales $H^q(M)$ y $H_{n-q}(M)$ son isomorfos.*

Del corolario 2.36 y del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.38 (**Cohomología singular de los $\mathbb{C}_p^n$**).

$$H^q(\mathbb{C}_p^n) = \begin{cases} R & \text{si } 0 \leq q \leq 2n \text{ y } q \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esto damos fin al segundo capítulo.

CAPITULO 3

Cohomología de De Rham

La **cohomología de De Rham** o cohomología de formas diferenciales en variedades fue introducida por Georges De Rham como una alternativa al cálculo de la cohomología de símplices en espacios topológicos. En este capítulo introduciremos la cohomología de De Rham y mediante el teorema de De Rham estableceremos su relación con la cohomología singular desarrollada en el capítulo 2, usaremos esta relación para calcular la cohomología de los $\mathbb{C}_p^n$ que es nuestro objetivo final.

La prueba de los resultados mostrados en las tres primeras secciones puede verlas en [7].

1. Variedades diferenciables

Intuitivamente, una **variedad diferenciable** es un espacio topológico donde cada punto posee un entorno sobre el cual se puede establecer un sistema de coordenadas, de manera que el paso de un sistema a otro sea “suave”. Esto nos da una gran ventaja a la hora de trabajar con este tipo de espacios, ya que localmente podemos usar propiedades vectoriales.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff, 2°-numerable, localmente conexo y localmente compacto, n un número natural. Una ***n* *carta*** en X es un par (U, φ_U) donde U es un abierto conexo de X y $\varphi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen abierta.

Dos cartas (U, φ_U) y (V, φ_V) se dicen ***compatibles*** si $U \bigcap V = \emptyset$ ó si $U \bigcap V \neq \emptyset$, entonces el homeomorfismo local

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} U \bigcap V \xrightarrow{\varphi_V} \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo local.

Una ***n-estructura diferenciable*** en X es una familia de n-cartas compatibles dos a dos y cuyos abiertos cubren a X.

Observación 3.2.

(1) Si X posee una n-estructura diferenciable entonces n es único. Tal n se denomina ***dimensión*** de X.

(2) Γ_1 y Γ_2 son compatibles si y sólo si $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ es una estructura diferenciable.

(3) Si Γ es una n-estructura diferenciable y $\{V\}$ es un refinamiento abierto de $\{U\}$, entonces $\Gamma' = \{(V, \varphi_U|_V)\}$ es una n-estructura diferenciable compatible con Γ.

Definición 3.3. Una ***variedad diferenciable*** es un espacio topológico M Hausdorff, 2°-numerable, localmente compacto y conexo, con una n-estructura diferenciable maximal Γ.

Observamos que Γ es maximal en el siguiente sentido: si (U, φ_U) es una carta de M compatible con cada elemento de Γ entonces $(U, \varphi_U) \in \Gamma$.

Observación 3.4. Dada una n-estructura diferenciable en M, siempre podemos asignar a M una estructura de variedad diferenciable.

Proposición 3.5. *Todo abierto conexo de una variedad diferenciable es una variedad diferenciable.*

Ejemplo 3.6.

(1) $\mathbb{R}^n$, junto con la familia de todos los difeomorfismos locales, es una n-variedad diferenciable.

(2) $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales es una n^2-variedad diferenciable con la identificación $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

(3) En S^n las proyecciones estereográficas determinan una estructura de variedad diferenciable.

(4) $GLn(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$ es una n^2-variedad diferenciable, por 3.5.

(5) $\mathbb{C}_p^n$ como espacio de órbitas de la acción de S^1 en $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, dada por

$$z \cdot (z_0, ..., z_n) = (z \cdot z_0, ..., z \cdot z_n)$$

es una variedad diferenciable (ver [4]).

Ahora vamos a definir los morfismos entre variedades diferenciables.

Definición 3.7. Sean M y N variedades diferenciables con estructuras diferenciables maximales Γ y Γ', respectivamente. Una aplicación continua $f : M \longrightarrow N$ es **diferenciable** en $p \in M$, si para cada carta $(U, \varphi_U) \in \Gamma$ con $p \in U$ y cada carta $(V, \varphi_V) \in \Gamma'$ con $f(p) \in V$, la aplicación

$$\varphi_U(U \bigcap f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} U \bigcap f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\varphi_V} \mathbb{R}^n$$

es diferenciable.

Diremos que f es diferenciable en M si es diferenciable en todo punto de M.

Observación 3.8. Sea $W \subseteq M$ un abierto y $f : W \longrightarrow N$ una aplicación. Diremos que f es diferenciable si lo es al considerar sobre W la estructura de variedad diferenciable que resulta de M.

2. Fibrado tangente a una variedad

Definición 3.9. Dados E, B y F espacios topológicos. Un ***fibrado*** de E en B con fibra típica F es una aplicación continua sobreyectiva $p : E \longrightarrow B$ tal que para todo $b \in B$, $p^{-1}(b)$ es homeomorfo a F. A tal fibrado lo denotaremos con la terna (E, p, B).

Ejemplo 3.10. La proyección $p : B \times F \longrightarrow B$ se conoce como ***fibrado trivial***.

Definición 3.11. Diremos que el fibrado $p : E \longrightarrow B$ es ***localmente trivial*** si para cada punto $b \in B$ existe un entorno U de b y un homeomorfismo $\phi_U : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[r, "\phi_U", "\simeq"'] \arrow[dr, "\pi_U"'] & p^{-1}(U) \arrow[d, "p"] \\ & U \end{tikzcd}$$

El par (U, ϕ_U) se denomina ***trivialización local*** de p en b.

Definición 3.12. Un fibrado (E, p, B) de fibra $\mathbb{R}^n$ es un ***fibrado vectorial***, si es localmente trivial, tal que para cada par de trivializaciones locales (U, ϕ) y (V, ψ) con $U \bigcap V \neq \emptyset$, existe una aplicación continua $g_{\phi\psi} : U \bigcap V \longrightarrow GLn(\mathbb{R})$ tal que $(\phi^{-1} \circ \psi)(b, x) = (b, g_{\phi\psi}(b)(x))$.

Se dice que E es el ***espacio fibrado*** , B es el ***espacio base*** , p es la ***proyección*** y $GLn(\mathbb{R})$ es el ***grupo estructural*** . A las aplicaciones $g_{\phi\psi}$ se les denominan ***cociclos*** de (E, p, B).

Observación 3.13. Los cociclos tienen las siguientes propiedades:

(1) $g_{\phi\phi} = I$, donde I es la matriz identidad.
(2) $g_{\phi\psi}(b) = (g_{\psi\phi}(b))^{-1}$.
(3) $g_{\phi\psi} \circ g_{\psi\varphi} = g_{\phi\varphi}$.

Definición 3.14. Un fibrado vectorial (E, p, B) es ***diferenciable*** si B es una variedad diferenciable y los cociclos son diferenciables.

Proposición 3.15. *Si $p : E \longrightarrow B$ es un fibrado diferenciable entonces E es una variedad diferenciable y p es una aplicación diferenciable.*

Definición 3.16. Sea (E, p, B) un fibrado vectorial y $A \subseteq B$. Una ***sección*** sobre A es una aplicación continua $s : A \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_A$.

Definición 3.17. Sean (E, p, B) y (D, q, C) dos fibrados vectoriales. Un ***homomorfismo*** entre (E, p, B) y (D, q, C) es un par de aplicaciones continuas (H, h) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p"'] & D \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Observación 3.18. Los fibrados vectoriales junto con los homomorfismos entre fibrados conforman una categoría.

Sea M una variedad diferenciable con un sistema de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Sea $q \in M$ y $\mathcal{F}(M, q)$ el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables de algún entorno de q en $\mathbb{R}$. Es claro que $\mathcal{F}(M, q) \neq \emptyset$ y además tiene estructura de álgebra.

Definición 3.19. Sea $q \in M$. Un ***vector tangente*** a M en q es una aplicación lineal $\nu : \mathcal{F}(M, q) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nu(f \cdot g) = f(q) \cdot \nu(g) + g(q) \cdot \nu(f)$. Diremos que ν satisface la ***identidad de Jacobi***.

Denotamos por T_qM al espacio vectorial de todos los vectores tangentes a M en q.

Ejemplo 3.20. Consideremos la esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, entonces para cada $q \in S^n$, T_qS^n es el espacio de todos los vectores ortogonales a $\vec{q}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $q \in M$ y (U, φ_U) una carta de M tal que $q \in U$. Denotamos por $x_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$ a la composición $x_j = \pi_j \circ \varphi_U$.

Proposición 3.21. *Para cada $q \in M$ y cada carta (U, φ_U) con $q \in U$, la aplicación $\frac{\partial}{\partial_{x_j}}|_q : \mathcal{F}(M, q) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $j = 1, ..., n$, dada por la fórmula $\frac{\partial}{\partial_{x_j}}|_q(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi_U^{-1})}{\partial_{r_j}}|_{\varphi(q)}$, es un vector tangente a M en q, siendo r_j es la proyección sobre la j-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 3.22. *Para cada $q \in M$, el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial_{x_1}}|_q, ..., \frac{\partial}{\partial_{x_n}}|_q\}$ es una base de T_qM.*

Así como existen morfismos entre variedades diferenciables, también existen aplicaciones que nos permiten "viajar" de un plano tangente en otro.

Definición 3.23. Dadas M y N variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Para cada $q \in M$, el ***diferencial*** de f en q es la aplicación lineal
$df_q : T_qM \longrightarrow T_{f(q)}N$ dada por la fórmula $(df_q(v))(g) = v(g \circ f)$.

Observación 3.24. De 3.22 obtenemos que si $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable y $q \in M$ entonces para cada par de cartas $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ y $(V, \psi = (y_1, ..., y_m))$, si $q \in U$ y $f(q) \in V$, entonces $df_q(\frac{\partial}{\partial_{x_j}}|_q) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial_{x_j}} \frac{\partial}{\partial_{y_i}}|_{f(q)}$.

Proposición 3.25 (**Propiedades de $\mathbf{df_q}$**). *Sean M, N y P variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables .*

(1) *Para todo $q \in M$ se tiene que $d(g \circ f)_q = dg_{f(q)} \circ df_q$.*
(2) *Supongamos que M es conexa. Si para cada $q \in M$ se tiene que $df_q \equiv 0$, entonces f es una función constante.*

Denotamos por TM a la unión de todos los espacios tangentes sobre puntos de M y $p : TM \longrightarrow M$ la aplicación dada por $p(v) = q$ si $v \in T_qM$.

TM resulta ser un espacio topológico con la siguiente topología: para cada carta (U, φ_U) de M, se define la biyección $\hat{\varphi_U} : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ mediante la fórmula:

$$\hat{\varphi_U}(q, a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial_{x_j}}|_q$$

El conjunto $p^{-1}(U)$ adquiere la topología inducida por $\hat{\varphi_U}$, y TM la topología final dada por la inclusión $i_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow TM$.

Definición 3.26. La terna (TM, p, M) se denomina ***fibrado tangente*** a M.

Proposición 3.27.

(1) *La terna (TM, p, M) es un fibrado diferenciable.*
(2) *Dadas M y N variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "df"] \arrow[d, "p_M"'] & TN \arrow[d, "p_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

es un homomorfismo de fibrados y df es una aplicación diferenciable.

Definición 3.28. Un ***campo vectorial*** sobre M es una sección diferenciable del fibrado tangente (TM, p, M).

Proposición 3.29. *χ es un campo vectorial sobre M si y sólo si para cada función continua y diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación $\chi_f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\chi_f(b) = \chi(b)(f)$, es diferenciable.*

3. Formas diferenciales

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sea $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $B^k(V)$ al espacio vectorial de las aplicaciones k-lineales de V^k en $\mathbb{R}$.

Definición 3.30. Una aplicación $\alpha \in B^k(V)$ es ***alternada*** o ***alternante*** si $\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|}\alpha(v_1, ..., v_n)$, para toda permutación σ de orden n. Las aplicaciones k-lineales y alternadas en $B^k(V)$ son las ***k-formas*** en V y las denotaremos por $\Lambda^k(V)$.

Convenimos que $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.

Definición 3.31. Sean $\alpha \in \Lambda^l(V)$ y $\beta \in \Lambda^k(V)$, el ***producto exterior*** de α por β es la $l + k$-forma definida por

$$\alpha \wedge \beta(a_1, ..., a_{l+k}) = \tfrac{1}{(l+k)!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{l+k}} (-1)^{|\sigma|}\alpha(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(l)})\beta(a_{\sigma(l+1)}, ..., a_{\sigma(l+k)})$$

Este producto es anticonmutativo y asociativo.

Proposición 3.32. *Si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base para V y $\{f_1, ..., f_n\}$ es la base dual de V^* relativa a $\{e_1, ..., e_n\}$, entonces el conjunto $\{f_{j_1} \wedge ... \wedge f_{j_k} : 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n\}$ es una base para $\Lambda^k(V)$, y así $dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}$.*

Sea M una variedad diferenciable. Definimos $\Lambda^k(M) = \bigcup_{q \in M} \Lambda^k(T_qM)$. Sea $p : \Lambda^k(M) \longrightarrow M$ la aplicación dada por $p(\alpha) = q$ si $\alpha \in \Lambda^k(T_qM)$.

Damos una topología a $\Lambda^k(M)$. Tomemos $q \in M$ y sea $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ una carta local de M, con $q \in U$, entonces tenemos que $p^{-1}(U) = \bigcup_{q \in U} \Lambda^k(T_qM)$, y la aplicación $\overline{\varphi}_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_qM$ dada por: $\overline{\varphi}_q(a_1, ..., a_n) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial_{x_j}}|_q$ es un isomorfismo. De este modo:

$$p^{-1}(U) = \textstyle\bigcup_{q \in U} \Lambda^k(T_qM) = U \times \Lambda^k(T_qM) \simeq \bigcup_{q \in U} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

por lo que se tiene un homeomorfismo $\Phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Damos a $p^{-1}(U)$ la topología inducida por Φ, y a $\Lambda^k(M)$ la topología final dada por las inclusiones $i_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow \Lambda^k(M)$.

Proposición 3.33. *$(\Lambda^k(M), p, M)$ es un fibrado diferenciable de fibra $\Lambda^k(T_qM)$.*

Definición 3.34. Al fibrado $(\Lambda^k(M), p, M)$ lo llamaremos ***fibrado de k-formas***.

Definición 3.35. Una ***k-forma diferenciable*** ω es una sección del fibrado de $(\Lambda^k(M), p, M)$. Notamos que ω es diferenciable si para toda k-upla de campos vectoriales $X_1, ..., X_k$, la aplicación: $\omega(X_1, ..., X_k) : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por la fórmula $\omega(X_1, ..., X_k)(q) = \omega(q)(X_1(q), ..., X_k(q))$, es diferenciable.

Denotaremos por $\Omega^k(M)$ al espacio de las k-formas diferenciables sobre M. Nótese que si $\omega_1 \in \Omega^l(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^k(M)$ entonces $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{l+k}(M)$.

Es claro que $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$.

Dadas dos variedades diferenciables M y N, y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, f induce una aplicación $f^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ definida por

$$f^*(\omega)(X_1, ..., X_k)(q) = \omega(f(q))(df(X_1)_q, ..., df(X_k)_q)$$

para toda $\omega \in \Omega^k(N)$ y $q \in N$.

Proposición 3.36. *Sean M. N y P variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables. Entonces:*

(1) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
(2) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$

Proposición 3.37. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces existe una única aplicación lineal $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ que satisface:*

(1) *Si $\omega \in \Omega^0(M)$ entonces $d(\omega) = d\omega$ (diferencial de ω).*
(2) *Si $\omega_1 \in \Omega^l(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^k(M)$ entonces $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{lk}\omega_1 \wedge d\omega_2$.*
(3) $d^2 = d(d) = 0$.

Definición 3.38. A tal aplicación d la llamaremos ***derivada exterior***.

4. Cohomología de De Rham

Sea M una variedad diferenciable. El ***complejo de De Rham*** de M es el complejo de cocadenas

$$\Omega^*(M) : \qquad \ldots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \ldots$$

La ***cohomología de De Rham***, la cual denotaremos por $H^*_{DR}(M)$, es la cohomología de este complejo.

Dada una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$. Usaremos la misma notación de 3.35 para la aplicación inducida en cohomología $f^* : H^*_{DR}(N) \longrightarrow H^*_{DR}(M)$.

Las siguientes proposiciones exponen propiedades importantes de la cohomología de De Rham.

La prueba del siguiente lema puede verla en [7].

Lema 3.39 (**de Poincaré**). *Consideremos la proyección $\pi_M : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$. Entonces $\pi^*_M : H^*_{DR}(M) \longrightarrow H^*_{DR}(M \times \mathbb{R})$ es un isomorfismo.*

Observación 3.40. El lema de Poincaré también se satisface en cohomología singular, porque M es retracto por deformación de $M \times \mathbb{R}$.

Definición 3.41. Dos aplicaciones diferenciables $f, g : M \longrightarrow N$ son ***diferenciablemente homotópicas***, si existe una aplicación diferenciable $H : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tal que

$$H(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t \geq 1 \\ g(x) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

La prueba del siguiente teorema puede verse en [8].

Teorema 3.42 (**Axioma de Homotopía**). *Sean $f, g : M \longrightarrow N$ aplicaciones diferenciablemente homotópicas. Entonces $f^* = g^*$.*

La prueba del siguiente teorema puede verse en [1] y en [7].

Teorema 3.43 (**Mayer-Vietoris para variedades diferenciables**). *Si $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de M entonces para todo q, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Omega^q(M) \xrightarrow{\iota} \Omega^q(U) \bigoplus \Omega^q(V) \xrightarrow{\epsilon} \Omega^q(U \bigcap V) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\epsilon(\sigma,\tau) = \tau|_{U \bigcap V} - \sigma|_{U \bigcap V}$ y $\iota(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$.

5. Teorema de De Rham

En esta sección probaremos que la cohomología singular y la cohomología de De Rham tienen grupos de cohomología isomorfos. Antes enunciaremos el siguiente resultado, su prueba puede verse en [1] y en [8].

Lema 3.44 (**Truco de Bredon**). *Sea M una variedad diferenciable y sea $\mathscr{B}$ una base de abiertos estable bajo intersecciones finitas. Sea P una afirmación formulada sobre abiertos de M, satisfaciendo:*

(1) *$P(U)$ es cierta para todo $U \in \mathscr{B}$.*
(2) *Si $P(U)$, $P(V)$ y $P(U \bigcap V)$ son ciertas, entonces también lo es $P(U \bigcup V)$, donde U y V son abiertos de M.*
(3) *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de abiertos de M disjuntos y se cumple $P(U_\alpha)$ para todo α, entonces $P(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha)$ también se verifica.*

Entonces $P(M)$ es cierta.

Para relacionar la cohomología de De Rham con la cohomología singular, tenemos que hacer una modificación a esta última (que proporcionará los mismos grupos de cohomología). Tal modificación consiste en los símplices con los que vamos a trabajar, que son los símplices diferenciables.

Definición 3.45. Un q-simplex singular $\sigma : \Delta_q \longrightarrow M$ se dice ***diferenciable*** si se puede extender a una aplicación diferenciable en un entorno de $\Delta_q \subseteq \mathbb{R}^q$. Un elemento de $S_q(M)$ es ***diferenciable*** si sus sumandos son diferenciables. Al conjunto de tales elementos lo denotamos por $\widetilde{S}_q(M)$.

Sea $\sigma : \Delta_q \longrightarrow M$ un q-simplex singular diferenciable. Si tenemos una q-forma ω de M, tenemos que $\sigma^*\omega$ es una q-forma de Δ_q. Consideramos un entorno U de Δ_q donde la extensión de σ, que también denotaremos por σ, es diferenciable. Podemos definir la integral de ω sobre σ como la integral múltiple

$$\int_\sigma \omega = \int_U \sigma^*\omega$$

Dado $\varsigma = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$. Extendemos la integral de ω sobre ς por linealidad, es decir

$$\int_\varsigma \omega = \sum_\sigma n_\sigma \int_\sigma \omega$$

Entonces hemos definido un homomorfismo $\Psi(\omega) : \widetilde{S}_q(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por la fórmula $\Psi(\omega)(\varsigma) = \int_\varsigma \omega$, que es lineal en ω. Luego, tenemos un homomorfismo

$$\Psi : \Omega^q(M) \longrightarrow Hom(\widetilde{S}_q(M), \mathbb{R})$$

El operador diferencial $\hat{\partial}_q$ del complejo de cocadenas $S^*(M)$ (ver página 24) satisface $\hat{\partial}_q(Hom(\widetilde{S}_{q-1}(M), \mathbb{R})) \subseteq Hom(\widetilde{S}_q(M), \mathbb{R})$, y en consecuencia

$$\widetilde{S}^*(M) : 0 \longrightarrow Hom(\widetilde{S}_0(M), \mathbb{R}) \xrightarrow{\hat{\partial}_1} \dots \xrightarrow{\hat{\partial}_q} Hom(\widetilde{S}_q(M), \mathbb{R}) \xrightarrow{\hat{\partial_{q+1}}} \dots$$

es un complejo de cocadenas. $\Psi : \Omega^*(M) \longrightarrow \widetilde{S}^*(M)$ es una transformación de cocadenas (ver [8]). Denotamos por $H_d^q(M)$ el ***q-ésimo grupo de cohomología singular diferenciable*** de M, que es el q-ésimo grupo de cohomología de $\{Hom(\widetilde{S}_q(M), \mathbb{R}), \hat{\partial}_q\}_{q\geq 0}$. La cohomología singular diferenciable y la cohomología singular satisfacen el lema de Poincaré, el axioma de homotopía y la sucesión de Mayer-Vietoris.

Las pruebas de los dos resultados que siguen son tomadas de [8].

Proposición 3.46. *La inclusión* $\widetilde{S}_*(M) \xrightarrow{i} S_*(M)$ *induce un isomorfismo en cohomología.*

Demostración Consideramos la inclusión de los símplices diferenciables $\widetilde{S}_*(M)$ en los símplices singulares $S_*(M)$, $i : \widetilde{S}_*(M) \longrightarrow S_*(M)$

Ahora aplicamos el cofuntor $Hom(., \mathbb{R})$ para obtener la aplicación de cadenas $i^* : Hom(S_*(M), \mathbb{R}) \longrightarrow Hom(\widetilde{S}_*(M), \mathbb{R})$. Tal aplicación induce un homomorfismo en cohomología $i^* : H^*(M) \longrightarrow H^*_d(M)$. Como ambas cohomologías satisfacen el lema de Poincaré, la aplicación i^* es un isomorfismo para convexos geodésicos (cojuntos tales que dos puntos cualesquiera pueden unirse por una geodésica contenida en dicho conjunto). Como cumplen Mayer-Vietoris, aplicando el truco de Bredon obtenemos que i^* es un isomorfismo para toda variedad M.

□

Teorema 3.47 (**de De Rham**). Ψ *induce un isomorfismo en cohomología.*

Demostración Al ser Ψ una transformación de cocadenas, induce un homomorfismo en cohomología $\Psi^* : H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^q_d(M)$. Basta probar las tres condiciones del truco de Bredon:

Condición (1): Tomamos $\mathscr{B}$ como la base de convexos geodésicos contenidos en las cartas de M. Esta base es estable bajo intersecciones finitas. El teorema de De Rham es cierto para todo $U \in \mathscr{B}$ porque el lema de Poincaré se cumple para la cohomología singular diferenciable y para la cohomología de De Rham.

Condición (2): Si el teorema de De Rham es cierto para abiertos U, V y $U \bigcap V$, entonces es cierto para $U \bigcup V$.

Como la cohomología de De Rham y la cohomología singular diferenciable satisfacen la sucesión Mayer-Vietoris, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{q-1}_{DR}(U)\bigoplus H^{q-1}_{DR}(V) & \rightarrow & H^{q-1}_{DR}(U\bigcap V) & \longrightarrow & H^{q}_{DR}(U\bigcup V) & \rightarrow & H^{q}_{DR}(U)\bigoplus H^{q}_{DR}(V) & \rightarrow & H^{q}_{DR}(U\bigcap V)\\
\downarrow{\scriptstyle \Psi_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_2^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_3^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_4^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_5^*}\\
H^{q-1}_{d}(U)\bigoplus H^{q-1}_{d}(V) & \rightarrow & H^{q-1}_{d}(U\bigcap V) & \longrightarrow & H^{q}_{d}(U\bigcup V) & \longrightarrow & H^{q}_{d}(U)\bigoplus H^{q}_{d}(V) & \longrightarrow & H^{q}_{d}(U\bigcap V)
\end{array}$$

Por hipótesis Ψ_1^*, Ψ_2^*, Ψ_4^* y Ψ_5^* son isomorfismos. Por el lema de los cinco, tenemos que Ψ_3^* también lo es.

Condición (3): Si el teorema de De Rham es cierto para una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ disjuntos, entonces es cierto para $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Como

$$\begin{aligned}
Hom(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{S}_q(U_\alpha),\mathbb{R}) &\cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Hom(\widetilde{S}_q(U_\alpha),\mathbb{R})\\
\Omega^q(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) &\cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\Omega^q(U_\alpha)
\end{aligned}$$

y como la aplicación de De Rham es funtorial, se cumple la condición.

□

Ahora estamos en condiciones de presentar el resultado final de esta tesis. Del corolario 2.38 y del teorema 3.47 obtenemos:

Corolario 3.48 (**Cohomología de De Rham de los $\mathbb{C}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}}$**).

$$H^q_{DR}(\mathbb{C}^n_p) = H^q(\mathbb{C}^n_p) = \begin{cases} R & si\ 0\le q\le 2n\ y\ q\ es\ par\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

En conclusión, la homología singular, la cohomología singular y la cohomología de De Rham del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}^n_p$ son isomorfas y valen R en los índices pares y 0 en los índices impares.

FIN

Bibliografía

[1] Angel, Mauricio. *Una Aplicación del Truco de Bredon a la Cohomología de De Rham*. Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias.

[2] Dold, Albrecht. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag. 1972.

[3] Dummit, David S. - Foote, Richard M. *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons, Inc. 1999.

[4] Guardia, Tomás E. *Acciones de Grupos de Lie en Variedades*. Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias.

[5] Hilton, P. J. - Stammbach, U. *A Course in Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. 1996.

[6] Massey, William S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. 1991.

[7] Ollarves, Alejandro. *Sobre la Cohomología de De Rham del n-Toro*. Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 2006.

[8] Royo, José I. *La Sucesión de Gysin*. Universidad del País Vasco.

[9] Torrealba, Edward A. *Teorema de Coeficientes Universales para Homología y Cohomología*. Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 1999.

[10] *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Internet.

Índice