ÁLGEBRAS SHOD

Marcelo Américo Lanzilotta Mernies

TRABAJO DE TESIS PRESENTADO
AL
CENTRO DE MATEMÁTICA
DE LA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
Y AL
ÁREA MATEMÁTICA DEL PEDECIBA
PARA LA
OBTENCIÓN DEL GRADO
DE
DOCTOR EN MATEMÁTICA

Área de Concentración: **Álgebra**
Orientadores: **Prof. Dr. Flavio U. Coelho,**
Prof. Dr. Alfredo Jones.

Durante los dos primeros año de este trabajo,
el autor recibió apoyo financiero del PEDECIBA.

-Montevideo, noviembre de 2000-

Nuevamente, porque se lo merecen: a mis padres Marta y Victor.

Idas y venidas, amores y desamores, pilar de este trabajo: Ana.

Agradecimentos

Los famosos agradecimientos: postre para quien los escribe, picadita de entrada para quien los lee (aunque la mayoría se va a excusar del plato principal).

Agradezco, es claro, por infinidad de razones, a toda mi familia... mi hermana Bibiana y mis viejos... realmente unos tipos increíbles.

A Ana, una y mil veces, paciencia, soporte, armonía, compañera y cómplice de este trabajo durante casi toda su realización.

Hay quienes enseñan a compartir sin reclamos: Jorge Brisset y Cecilia Tosar. Gracias por tantos y tan gratos momentos durante este tiempo.

A Cecilia Calvo, de esas personas a las cuales uno recurre en primera instancia, con quien se comparten dudas, broncas, miedos y las alegrías cuando éstas aparecen.

Amigos del día a día, de esos que te ayudan a trazar la ruta. Al Niko y al Gus y también a Tere, Alexei y Stela: un gracias enorme !!

Magia, historias y terrible química cada vez que nos juntamos: Alejandra.

A aquellos de mi familia que realmente sepan entender y sentir lo que esto significa para mí.

A la "familia" ocasional de San Pablo: Aldo, Cecilia, Irene M. y el negro Pablo.

A Ernesto Cacha Mordecki, Jorge "Graneolotti", Nando Abadie y Laura Martí: almuerzos, consejos, sustituciones, boliches y el siempre... ¿va marchando la tesis, che?

Hubo que salir a las apuradas... y en esos momentos sentirte respaldado te tranquiliza. Agradecer a Oruam Barboza, Mario Wschebor y a las secretarias del CMAT: Jime, Maryori y Lydia, impresionante las tres!

Este trabajo se hizo en tres ciudades: Bahía Blanca, Montevideo y São Paulo; en tres universidades: Universidad Nacional del Sur, Universidad de la República y Universidade de São Paulo; pero siempre rodeado por el grupo de "representeiros" del sur del mundo. Dentro de ellos especial agradecimiento a la familia bahiense: María Julia, Octavio, Andrea y Ariel, María Inés, Sandra, Elsa y particularmente a Susana "Principessa" Gastanminza quien con sus .....enta y pico me ha colmado de energía en cada viaje.

A Oscar y Quela, quienes me alojaron y confiaron su casa cada marzo bahiense. A Ramiro, quien aún sigue con su búsqueda.

A la gurisada del IPA, esos locos no tan bajitos, quienes hacen del trabajo en ese lugar una más que válida opción. Hay si un loco bajito... pero es profesor: don Artigas Barreiro ... voy por mi cuarto escalón... y aún sigo aprendiendo de tus charlas...

No tuve un orientador de tesis, tuve al Dr. Coelho: un fenómeno, guía, compañero, paciente y hasta sicólogo (todas las que me soportó!). ¡Y que olfato! No erró una en todo el camino... "el gordo" Flavio. Y un gracias también a su compañera: Mary Lilian.

Y aquí el coorientador fue don Alfredo (Dr. Jones!). Rumbo firme de un mar poco calmo como es la investigación en este país. ¿Alfredo, el martes, como siempre el seminario, no?

En estos tiempos en que escasea la esperanza y donde arriesgarse a sentir por sentir genera espanto, aún se pueden encontrar razones, compañías que te devuelvan esa alegría. A Sylvia.

Resumen

En este trabajo se consideran álgebras Λ que satisfacen la siguiente propiedad: cada módulo indescomponible X tiene o bien su dimensión proyectiva ($\mathrm{dp}_\Lambda X$) a lo sumo uno o su dimensión inyectiva ($\mathrm{di}_\Lambda X$) a lo sumo uno. Estas son, claramente, generalizaciones de las llamadas álgebras casi inclinadas introducidas por Happel, Reiten y Smalø. Probamos que algunos de los hechos más interesantes que se verifican en las álgebras casi inclinadas pueden ser generalizadas para nuestro caso, esto es las álgebras shod. En particular se muestra la existencia de una trisección en la categoría de módulos. También se describe con particular atención las componentes no semiregulares del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra shod. Esto toma singular importancia en el caso del álgebra ser shod estricta (shod mas no casi inclinada). Es en este caso que ubicamos el resultado central del trabajo en el que se describe a las álgebras shod estrictas como iteración de extensiones por un punto de un álgebra inclinada. Como una aplicación surge la descripción de la cohomología de Hochschild de un álgebra shod estricta. Mostramos que es nula a partir del segundo grado.

Abstract

On this thesis we consider the algebras Λ which satisfy the property that for each indecomposable module X, either its projective dimension ($\mathrm{pd}_\Lambda X$) is at most one or its injective dimension ($\mathrm{id}_\Lambda X$) is at most one. This clearly generalizes the so-called quasitilted algebras introduced by Happel-Reiten-Smalø. We show that some of the nicest features for this latter class of algebras can be generalized to the case we are considering, that is shod algebras. In particular the existence of a trisection in this module category. Also we get a good description of the non semiregular components of the Auslander-Reiten quiver. These components are particulary relevant in the case where Λ is a strictly shod algebra (that is shod but not quasitilited). One of the main results of this work, is the description of a strictly shod algebra as an iterated one point extension of a tilted algebra. Finally as an aplication of this result we compute the Hochschild cohomology of a strictly shod algebra. We show that it is zero for degree greater than or equal to two.

Índice General

Notación.

Λ Álgebra de Artin, salvo mención explícita.

Λ^{op} Álgebra opuesta.

$\mathrm{mod}\,\Lambda$ Categoría de Λ-módulos finitamente generados a izquierda.

$\mathrm{ind}\Lambda$ Categoría de Λ-módulos indescomponibles finitamente generados a izquierda.

Γ_Λ Carcaj de Auslander-Reiten del álgebra Λ.

$\mathcal{P}_\Lambda$ Familia de proyectivos indescomponibles de $\mathrm{mod}\Lambda$.

$\mathcal{P}_\Lambda^g$ Familia de proyectivos indescomponibles finales de un gancho.

$M \to N$ Morfismo del módulo M para el módulo N.

$M \longrightarrow N$ Morfismo irreducible de M para N o de N para M.

$M \rightsquigarrow N$ Camino de morfismos desde el módulo M hasta el módulo N.

$M \sim\!\sim N$ Paseo entre el módulo M y el módulo N de morfismos irreducibles.

$\mathcal{R}_\Lambda$ Familia de módulos indescomponibles cuyos sucesores tienen dimensión inyectiva menor o igual a uno.

$\mathcal{L}_\Lambda$ Familia de módulos indescomponibles cuyos predecesores tienen dimensión proyectiva menor o igual a uno.

$\tau_\Lambda M \surd M$ Camino de irreducibles, parte de la sucesión de Auslander-Reiten con pozo M.

$K_0(\Lambda)$ Grupo de Grothendieck del álgebra Λ.

$\mathrm{add}\,\mathcal{F}$ Familia de módulos que se obtienen como suma directa de módulos de F.

Q Carcaj ordinario.

$DTr = \tau$ Traslación de Auslander-Reiten en el carcaj Γ_Λ.

$TrD = \tau^{-1}$ Traslación inversa de Auslander-Reiten en el carcaj Γ_Λ.

$\mathcal{O}(M)$ τ-órbita del módulo M en el carcaj Γ_Λ.

${}_r\Gamma$ Parte $\tau-$estable a derecha del carcaj Γ_Λ.

${}_l\Gamma$ Parte $\tau-$estable a izquierda del carcaj Γ_Λ.

${}_s\Gamma$ Parte $\tau-$estable del carcaj Γ_Λ.

$\mathcal{C}(M)$ Componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten que contiene a M.

$dgl\,\Lambda$ Dimensión global del álgebra Λ.

$dp_\Lambda M$ Dimensión proyectiva del módulo M.

$di_\Lambda M$ Dimensión inyectiva del módulo M.

$\ell(M)$ Longitud del módulo M.

$\mathrm{rad}_\Lambda M$ Radical del módulo M.

$\mathrm{zoc}_\Lambda M$ Zócalo del módulo M.

$Ann(M)$ Anulador del módulo M.

$S(P)$ Simple asociado al proyectivo indescomponible P.

S_i Simple asociado al vértice i del carcaj ordinario.

$M \mid N$ El módulo M es sumando directo del módulo N.

$\alpha(X)$	Número de módulos indescomponibles no isomorfos, sumandos del término central de la sucesión de Auslander-Reiten que finaliza en X.
$\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$	Espacio de Λ-morfismos desde el módulo M para el módulo N.
$\underline{\mathrm{Hom}_\Lambda}(M,N)$	Cociente del espacio $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ por el espacio de los morfismos que se factorizan a través de un proyectivo.
$\overline{\mathrm{Hom}_\Lambda}(M,N)$	Cociente del espacio $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ por el espacio de los morfismos que se factorizan a través de un inyectivo.
$\mathrm{rad}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$	Radical de Jacobson de mod Λ.
$\mathrm{rad}^\infty(\mathrm{mod}\,\Lambda)$	Intersección de las potencias $\mathrm{rad}^i(\mathrm{mod}\,\Lambda)$, $i \geq 1$.
$(\mathcal{F},\mathcal{T})$ ou $(\mathcal{Y},\mathcal{X})$	Pares de torsión.
$\circlearrowleft$	Diagrama conmutativo.

En el borde del camino hay una silla,
la rapiña merodea aquél lugar.
La casaca del amigo está tendida,
el amigo no se sienta a descansar:
sus zapatos, de gastados, son espejos
que le queman la garganta con el sol,
y a través de su cansancio pasa un viejo
que le seca con la sombra el sudor.

En la punta del amor viaja el amigo,
en la punta más aguda que hay que ver:
esa punta que lo mismo cava en tierra
que en las ruinas, que en un rastro de mujer.
Es por eso que es soldado y es amante,
es por eso que es madera y es metal,
es por eso que lo mismo siembra rosas
que razones de bandera y arsenal.

El que tenga una canción tendrá tormenta,
el que tenga compañía, soledad.
El que siga buen camino tendrá sillas
peligrosas que lo inviten a parar.
Pero vale la canción buena tormenta
y la compañía vale soledad.
Siempre vale la agonía de la prisa
aunque se llene de silas la verdad.

Silvio Rodriguez

INTRODUCCIÓN

La teoría de representaciones de álgebras estudia éstas a través de su categoría de módulos. En su contexto más general esta teoría estudia la categoría de módulos finitamente generados a derecha (o a izquierda) sobre un álgebra de Artin, esto es un anillo finitamente generado sobre su centro que ha de ser un anillo artiniano. Un contexto más restringido es considerar las álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Este trabajo se encuadra en el contexto más general en el segundo, tercer y cuarto capítulo y restringe la familia de álgebras en el desarrollo de los últimos tres.

Uno de los problemas clásicos en la teoría de representaciones es descubrir el tipo de representación de un álgebra dada. O sea saber cuál es el número de clases de isomorfismo de módulos indescomponibles sobre el álgebra. Descubrir si ese número es finito, o en el caso de ser infinito si los módulos indescomponibles pueden ser de alguna manera parametrizados (tipo manso).

Las álgebras hereditarias (aquellas en que todo submódulo de un proyectivo es proyectivo) han sido largamente estudiadas y totalmente clasificadas (sobre un cuerpo alg. cerrado). Gabriel en el teorema que lleva su nombre caracterizó las álgebras hereditarias de tipo finito como aquellas asociadas a los diagramas de Dynkin. Posteriormente Nazarova y otros demostraron que las álgebras hereditarias mansas están caracterizadas por los diagramas de Dynkin extendidos, también llamados euclideanos.

Otra de las líneas que ha tenido mayor crecimiento en los últimos 20 años ha sido la teoría de inclinación, que tuvo su origen y motivación en la teoría de equivalencia de Morita. En muchas circunstancias la categoría de módulos de una determinada álgebra es difícil de estudiar directamente. Es en ese caso que surge la idea de transferir el problema al estudio de la categoría de módulos sobre otra álgebra que en algún sentido sea más simple. La idea principal en la teoría de inclinación es construir un módulo sobre un álgebra dada tal que la categoría de módulos de su álgebra de endomorfismos sea próxima de la categoría de módulos del álgebra original, mas que no sea equivalente, de tal manera de simplificar el problema. Ya que las categorías de módulos de las álgebras herediarias están bien descriptas surge entonces la idea de aprovechar este conocimiento y transferirlo a través de la teoría de inclinación. El germen de esta teoría aparece en el artículo de Bernstein, Gelfand y Ponomarev [BGS] donde dan una prueba alternativa del Teorema de Gabriel sobre la clasificación de las álgebras hereditarias de tipo finito. En ese trabajo introducen los conocidos como funtores de Coxeter. Posteriormente Auslander, Platzeck y Reiten dieron una reformulación homológica de estos funtores e introdujeron el concepto de lo que hoy se conoce como módulo APR-inclinante. Finalmente en 1980 Brenner y Butler presentan la primer definición formal de módulo inclinante y demuestran el hoy conocido Teorema de Brenner-Butler (ver [BB]). Allí se prueba la existencia de dos equivalencias parciales entre subcategorías de la categoría de módulos de un álgebra y del álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante. Así surge el concepto de álgebra inclinada, que es el álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria. Posteriormente Happel y Ringel simplificaron la definición de módulo inclinante y mostraron las principales propiedades de las álgebras inclinadas (ver [HR]).

La clase de álgebras casi inclinadas fueron introducidas en [HRS1] con el objetivo de dar una teoría inclinante general para categorías abelianas y desde entonces han sido el objeto de muchos trabajos de investigación. Concretamente, un álgebra casi inclinada es un álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathcal{H}}(T)$, donde T es un objeto inclinante en una categoría abeliana hereditaria $\mathcal{H}$. Este concepto admite una caracterización, también dada por

Happel, Reiten y Smalø, que ha sido muy utilizada cuando se trabaja con esta clase de álgebras. Esto es, un álgebra Λ es casi inclinada si y sólo si se verifican las dos propiedades siguientes: (CI_1) la dimensión global (dglΛ) es a lo sumo dos; y (CI_2) para cada módulo indescomponible X, o bien su dimensión proyectiva ($\mathrm{dp}_\Lambda X$) es a lo sumo uno o su dimensión inyectiva ($\mathrm{di}_\Lambda X$) es a lo sumo uno.

Uno de los resultados más interesante para esta clase de álgebras es la existencia de una trisección en su categoría de módulos. Para un álgebra Λ, denotaremos por $\mathcal{L}_\Lambda$ (respectivamente, $\mathcal{R}_\Lambda$) la subcategoría de todos los Λ-módulos indescomponibles cuyos predecesores (respectivamente, sucesores) tienen dimensión proyectiva (respectivamente, dimensión inyectiva) a lo sumo uno. Si Λ es casi inclinada, está demostrado en [HRS1](1.6, 1.7) que $(\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda) \cup (\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda) \cup (\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda)$ contiene completamente a la categoría de Λ-módulos indescomponibles (indΛ) y además no existen morfismos no nulos de derecha a izquierda en esta trisección. De este hecho se pueden obtener consecuencias interesantes en la propia categoría de módulos y también en el carcaj de Auslander-Reiten (ver [CH, CS, HRS1]).

Observar que si $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda$ contiene completamente la categoría indΛ, entonces Λ satisface la condición (CI_2). Uno de los objetivos de este trabajo es extender el resultado de la existencia de la anteriormente mencionada trisección a la familia de álgebras que satisfacen la condición (CI_2) pero no necesariamente (CI_1). Como fue observado en [HRS1], si Λ satisface (CI_2), entonces dgl$\Lambda \leq 3$ y no es difícil encontrar ejemplos de álgebras de dimensión global 3 que satisfagan (CI_2). Antes de establecer el resultado principal del segundo capítulo necesitamos presentar un nuevo concepto. Consideramos:

$$(\nu): \quad X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_t$$

un camino de morfismos irreducibles en indΛ. Si $\tau_\Lambda X_{j+1} = X_{j-1}$, para algún $1 \leq j \leq t-1$, donde τ_Λ denota la traslación de Auslander-Reiten en Λ (ver [ARS]), entonces decimos que j es un *gancho* en (ν). El resultado central es el siguiente:

Teorema.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un álgebra Λ:

(a) Para cada módulo indescomponible X, se tiene que $\mathrm{dp}_\Lambda X \leq 1$ o $\mathrm{di}_\Lambda X \leq 1$.

(b) $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda = \mathrm{ind}\Lambda$.

(c) $(\mathrm{add}\ (\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda), \mathrm{add}\ \mathcal{R}_\Lambda\ )$ es un par de torsión que escinde en $\mathrm{mod}\Lambda$.

(d) $(\mathrm{add}\mathcal{L}_\Lambda, \mathrm{add}\ (\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda))$ es un par de torsión que escinde en $\mathrm{mod}\Lambda$.

(e) Existe un par de torsión que escinde $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ en $\mathrm{mod}\Lambda$ tal que $\mathrm{dp}_\Lambda Y \leq 1$ para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y $\mathrm{di}_\Lambda X \leq 1$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

(f) Todo camino que se inicie en un módulo inyectivo indescomponible y finalice en un módulo proyectivo indescomponible admite un refinamiento a un camino de morfismos irreducibles y cada refinamiento tiene a lo sumo dos ganchos, y si este es el caso, estos son consecutivos.

La demostración de este teorema se encuentra en la segunda sección del segundo capítulo. En la primera sección probaremos algunos resultados preliminares que usaremos en el resto del trabajo. Finalmente, en la tercera sección presentaremos algunos ejemplos y observaciones.

En el tercer capítulo se extiende el trabajo de Coelho y Skowroński (ver [CS]), a la familia de álgebras shod. Aquí los resultados tienen como objetivo describir las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de las álgebras de esta familia.

El cuarto capítulo está dedicado a las componentes no semiregulares. Se demuestra que estas componentes tienen radical infinito nulo y son dirigidas. También surge en este capítulo que toda componente con inyectivo(s) es perpendicular a cualquier otra (distinta) con proyectivo(s) (observar que la perpendicularidad no es en este caso un concepto simétrico).

Uno de los teoremas centrales de este trabajo se encuentra en el quinto capítulo. Luego de varios resultados preliminares se logra describir las álgebras shod estrictas como iteración de extensiones por un punto de un álgebra inclinada.

Finalmente en el sexto capítulo de la tesis y como aplicación del teorema anteriormente citado, se calcula la cohomología de Hochschild de un álgebra shod desde grado dos en adelante. Al igual que en las álgebras inclinadas se demuestra que esta cohomología es nula a partir del segundo grado.

Historia del arte.

El escultor trabajaba en un taller inmenso, rodeado de niños.

Todos los nños del barrio son sus amigos. Un buen día

la alcaldía le encargó un gran caballo para una plaza de la ciudad.

Un camión trajo al taller el bloque gigante de granito y el escultor

empezó a trabajarlo subido a una escalera a golpes de martillo y cincel.

Los niños le miraban hacer.

Los niños partieron entonces de vacaciones rumbo a la montaña o al mar.

Y cuando regresaron, el escultor les mostró el caballo terminado.

Y entonces uno de los niños con ojos muy abiertos le preguntó:

¿pero y tu cómo sabías sabías que adentro de aquella piedra había un caballo ?

E. G.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Introducción.

Asumiremos durante todo este trabajo, salvo mención explícita, que Λ es un álgebra de Artin indescomponible. Sin embargo, como ya fue anunciado en la Introducción, en los últimos tres capítulos nos restringiremos a la familia de álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Indicaremos por modΛ a la categoría cuyos objetos son los Λ-módulos a izquierda finitamente generados y cuyos morfismos son los habituales. Por indΛ anotaremos a la subcategoría plena de modΛ cuyos objetos son los módulos indescomponibles. A lo largo de este capítulo introduciremos brevemente conceptos básicos de la teoría de Representaciones de Álgebras, así como diferentes resultados que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Teorema 1.1.1 *(Krull-Schmidt)*
Todo Λ-módulo finitamente generado es la suma directa finita de Λ-módulos finitamente generados e indescomponibles y una tal descomposición es esencialmente única.

Consideramos la descomposición de Λ en módulos (proyectivos) indescomponibles: $\Lambda = P_1^{m_1} \oplus \ldots \oplus P_t^{m_t}$, donde $P_i \ncong P_j$, si $i \neq j$. En el caso que $m_i = 1$ $\forall i = 1, \ldots, t$, diremos que Λ es un álgebra básica. El objetivo de nuestra teoría es describir las álgebras a través de su categoría de módulos. Desde ese punto de vista el siguiente Teorema (de Morita), permite restringirnos al estudio de álgebras básicas.

Teorema 1.1.2 *(Morita)*

Dadas dos álgebras de Artin A y B se verifica que las categorías A-mod y B-mod son equivalentes si y sólo si existe un A-módulo progenerador (o sea proyectivo y generador de A-mod) tal que $B \cong End_A(P)$.

1.2 Carcajes.

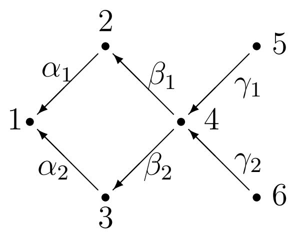
Definición 1.2.1

Un carcaj Q está determinado por un conjunto de vértices Q_0, un conjunto de flechas Q_1 y un par de funciones $c, f : Q_1 \to Q_0$.

Dada una flecha $\alpha \in Q_1$, $c(\alpha)$ indicará el vértice de comienzo de α y $f(\alpha)$ el final de la misma.

Ejemplo 1.2.1

Presentamos el siguiente ejemplo de carcaj que tomaremos como guía en adelante para ir presentando los diferentes conceptos:



En este caso $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\}$, mientras que las funciones c y f están explícitas en el diseño.

Definición 1.2.2

1. *Un camino en* $Q = (Q_0, Q_1, c, f)$ *es una sucesión finita de flechas:* $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ *donde* $c(\alpha_{i+1}) = f(\alpha_i)$.

2. *Diremos que el comienzo de un camino* $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ *es* $c(\gamma) = c(\alpha_1)$ *y que el fin de un tal camino es* $f(\gamma) = f(\alpha_n)$.

3. *Un camino es trivial si es un camino sin flechas, determinado sólo por un vértice* $v \in Q_0$ *y que anotaremos* ϵ_v.

4. *Si* γ *no es un camino trivial y* $c(\gamma) = f(\gamma)$ *diremos que* γ *es un ciclo orientado.*

Ejemplo 1.2.2

En el Ejemplo 1.2.1 los caminos triviales son: $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$; y los no triviales son:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1.\gamma_1,\ \beta_2.\gamma_2,\ \alpha_1.\beta_1,\ \alpha_2.\beta_2,\ \beta_2.\gamma_1,\ \beta_1.\gamma_2,$$

$$\alpha_1.\beta_1.\gamma_1,\ \alpha_2.\beta_2.\gamma_2,\ \alpha_1.\beta_1.\gamma_2,\ \alpha_2.\beta_2.\gamma_1.$$

En este ejemplo no hay ciclos orientados.

1.3 Álgebras de Caminos.

Dado un cuerpo k y un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, c, f)$ finito (o sea Q_0 y Q_1 son finitos), podemos definir el álgebra de caminos: kQ.

Consideramos B el conjunto que contiene todos los caminos de Q, incluyendo los caminos triviales. Definiremos en B una multiplicación. Dados dos caminos de Q, $\gamma_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ y $\gamma_2 = \beta_m \dots \beta_1$ decimos que:

$$\gamma_2.\gamma_1 = \begin{cases} \beta_m \dots \beta_1.\alpha_n \dots \alpha_1 & \text{si} \quad f(\alpha_n) = c(\beta_1) \\ 0 & \text{si} \quad f(\alpha_n) \neq c(\beta_1) \end{cases}$$

Luego de definido el producto en la base B extendemos linealmente la multiplicación a todos los elementos de kQ, colocándole estructura de k-álgebra. A kQ con esta estructura se le llama álgebra de caminos de Q. Una relación en Q es una combinación lineal de caminos de longitud mayor o igual que dos, todos con el mismo vértice inicial y final. Sea J el ideal de kQ generado por las flechas de Q. Un ideal I de kQ es admisible si $J^n \subset I \subset J^2$, para algún $n > 0$. Todo ideal admisible es generado por un sistema de relaciones R.

Definición 1.3.1

Un carcaj con relaciones (Q, R) está definido por un carcaj Q y un sistema de relaciones R de un ideal admisible I de kQ. El álgebra de caminos determinado por un carcaj con relaciones (Q, R) es por definición: kQ/I.

Podemos mencionar en este punto el siguiente resultado conocido como Teorema de Gabriel:

Teorema 1.3.1

Toda álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, básica e indescomponible, es isomorfa a un álgebra de caminos determinada por un carcaj con relaciones.

1.4 Módulos y Representaciones.

Hemos visto como las álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado pueden ser descritas en términos de carcajes con relaciones. El problema que se plantea ahora es visualizar los módulos a través de representaciones sobre el carcaj con relaciones.

Dado (Q, R) un carcaj con relaciones, vamos a definir $\mathrm{mod}(Q, R)$ la categoría de las representaciones de (Q, R). Una representación de Q es dada por $V = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$, donde para cada $i \in Q_0$, V_i es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k y para cada $\alpha \in Q_1$, f_α es una transformación lineal. Dado un camino no trivial $\gamma = \alpha_n \ldots \alpha_1$ definimos f_γ como la composición $f_{\alpha_n} \circ \ldots \circ f_{\alpha_1}$. Luego extendemos linealmente esta definición a cualquier combinación (lineal) de caminos.

Definición 1.4.1

1. *Decimos que una representación $V = ((V_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ satisface una relación r si $f_r = 0$ y diremos que V satisface el sistema de relaciones R si $f_r = 0$ para cada $r \in R$.*

2. *Una representación de (Q, R) es una representación de Q que satisface R.*

Dadas dos representaciones $V = ((V_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ y $W = ((W_i)_{i\in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$, un morfismo $\phi : V \to W$ está determinado por una familia de transformaciones lineales $\Phi = (\phi_i)_{i\in Q_0}$ tal que para cada flecha $i \overset{\alpha}{\to} j$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\ \phi_i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j \end{array}$$

Con esta definición mod(Q, R) es una k-categoría que llamaremos categoría de representaciones de (Q, R).

Dada un álgebra Λ de dimensión finita sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, básica e indescomponible, consideramos el carcaj con relaciones (Q, R) asociado según el Teorema 1.3.1 a Λ. En ese marco surge el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1

Las categorías mod(Q, R) y Λ-mod son equivalentes.

1.5 Sucesiones y carcajes de Auslander-Reiten.

En la década de los '70, M. Auslander e I. Reiten introdujeron el concepto de sucesión casi escindida (o sucesión casi nula, hoy conocidas como sucesiones de Auslander-Reiten). Los morfismos que componen tales sucesiones son irreducibles, o sea no son composición de morfismos no escindentes. Estos morfismos irreducibles y los módulos indescomponibles son los ingredientes básicos para conformar el carcaj de Auslander-Reiten. Estos carcajes nos ayudan a visualizar la categoría de los módulos indescomponibles. Actualmente muchos resultados en la teoría de representaciones de álgebras dependen del estudio y conocimiento de estos carcajes. Veamos algunos de los conceptos básicos e indicamos [ARS] para una lectura informativa más profunda.

Definición 1.5.1

Una sucesión exacta corta de Λ-módulos que no escinde:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten (o sucesión casi nula) si:

1. *los módulos N y M son indescomponibles;*
2. *dado $h \in Hom_\Lambda(X, M)$ que no sea epimorfismo escindente entonces existe $h' \in Hom_\Lambda(X, E)$ tal que $g \circ h' = h$.*

Observación 1.5.1

La segunda condición es equivalente a:

2'. dado $h \in Hom_\Lambda(N, Y)$ que no sea monomorfismo escindente entonces existe $h' \in Hom_\Lambda(E, Y)$ tal que $h' \circ f = h$.

Sobre la existencia y unicidad de las sucesiones de Auslander-Reiten tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5.1

Dados Λ álgebra de Artin y $M \in ind\,\Lambda$:

1. *si M no es proyectivo entonces existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten terminando en M:*
$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0;$$
2. *si N no es inyectivo entonces existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten comenzando en N:*
$$0 \to N \to E \to \tau^{-1} N \to 0.$$

Notaremos por τ_Λ la traslación de Auslander-Reiten (DTr) y para su inversa utilizaremos τ_Λ^{-1}.

Los morfismos que forman parte de una sucesión de Auslander-Reiten tienen propiedades a destacar. Necesitamos para eso definir los siguientes conceptos:

Definición 1.5.2

Sea M un módulo indescomponible.

1. *Un morfismo $g : E \to M$ es un pozo en M si:*
   (a) *g no es un epimorfismo que escinda,*
   (b) *todo morfismo $h : E \to E$ tal que $g \circ h = g$ ha de ser un automorfismo,*
   (c) *dado $h \in Hom_\Lambda(X, M)$ que no sea epimorfismo escindente entonces existe $h' \in Hom_\Lambda(X, E)$ tal que $g \circ h' = h$.*
2. *Un morfismo $f : M \to E$ es una fuente en M si:*
   (a) *f no es un monomorfismo que escinda;*
   (b) *todo morfismo $h : E \to E$ tal que $h \circ f = f$ ha de ser un automorfismo;*
   (c) *dado $h \in Hom_\Lambda(M, X)$ que no sea monomorfismo escindente entonces existe $h' \in Hom_\Lambda(E, X)$ tal que $h' \circ f = h$.*

La relación entre los conceptos de pozo y fuente con el de sucesión de Auslander-Reiten es la siguiente:

Proposición 1.5.2

Consideramos una sucesión de Auslander-Reiten:

$$0 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0.$$

Entonces:

1. *f es una fuente y cualquier otra fuente en N es isomorfa a f;*

2. *g es un pozo y cualquier otro pozo en M es isomorfo a g.*

La siguiente proposición muestra lo que sucede con los morfismos pozo y fuente en el caso del módulo ser proyectivo o inyectivo.

Proposición 1.5.3

1. *Si P es un proyectivo indescomponible no simple entonces la inclusión $i : radP \to P$ es un pozo y todo otro pozo en P es isomorfo a i.*

2. *Si I es un inyectivo indescomponible no simple entonces la proyección $\pi : I \to \frac{I}{zocI}$ es una fuente y toda otra fuente en I es isomorfa a π.*

Definición 1.5.3

Un morfismo que no escinde $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$ con $X, Y \in mod\,\Lambda$ es irreducible si para cada descomposición $f = g \circ h$ o g es un epimorfismo que escinde o h es un monomorfismo que escinde.

La proposición siguiente relaciona los morfismos irreducibles con las fuentes y los pozos.

Proposición 1.5.4

Sea M un módulo indescomponible.

1. *Un morfismo $h : M \to X$ es irreducible si y sólo si existe $h' : M \to X'$ tal que (h, h') es una fuente en M.*

2. Un morfismo $h : X \to M$ es irreducible si y sólo si existe $h' : X' \to M$ tal que (h, h') es un pozo en M.

Vamos a definir en forma inductiva los subgrupos $\mathrm{rad}^n_\Lambda(X, Y)$ de $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ para $X, Y \in \mathrm{ind}\,\Lambda$ y $n \geq 1$.

1. Para $n = 1$, $\mathrm{rad}^1_\Lambda(X, Y)$ es el subgrupo de los morfismos que no escinden (o sea los no invertibles pues X e Y son indescomponibles).

2. Supongamos definido $\mathrm{rad}^i_\Lambda(X, Y)$ para $1 \leq i < n$, $\forall X, Y \in \mathrm{ind}\,\Lambda$. Decimos que $f \in \mathrm{rad}^n_\Lambda(X, Y)$ si se puede descomponer $f = g \circ h$ con $h \in \mathrm{rad}^{n_1}_\Lambda(X, Z)$ y $g \in \mathrm{rad}^{n_2}_\Lambda(Z, Y)$, para algún $Z \in \mathrm{ind}\,\Lambda$, donde $n_1 < n$, $n_2 < n$ mas $n_1 + n_2 \geq n$.

3. Finalmente definimos $\mathrm{rad}^\infty(X, Y)$ como la intersección de todos los subgrupos $\mathrm{rad}^n_\Lambda(X, Y)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.5.5

Sea $f : X \to Y$ un morfismo no biyectivo con $X, Y \in \mathrm{ind}\,\Lambda$. Entonces $f = \sum \alpha_i + \beta$, donde cada $\alpha_i : X \to Y$ es una composición finita de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y $\beta \in \mathrm{rad}^\infty(X, Y)$.

Con el objetivo de organizar la categoría $\mathrm{ind}\,\Lambda$ se asocia a cada álgebra un carcaj Γ_Λ donde los vértices representan los módulos indescomponibles y las flechas los morfismos irreducibles. Más precisamente:

Definición 1.5.4

Dada un álgebra Λ su carcaj de Auslander-Reiten se define del siguiente modo:

1. *Los vértices están en biyección con las clases de isomorfismo de los Λ-módulos indescomponibles. O sea a cada $M \in \mathrm{ind}\Lambda$ le asociamos un vértice $[M]$, y dos vértices $[M]$ y $[M']$ son los mismos si y sólo si $M \cong M'$.*

2. *El número de flechas de $[M]$ a $[M']$ está determinado por $dim_k(Irr_\Lambda(M,M')$ donde $Irr_\Lambda(M,M') = \frac{rad_\Lambda(M,M')}{rad^2_\Lambda(M,M')}$, es el conjunto de los morfismos irreducibles de M en M'.*

Observación 1.5.2

1. *El carcaj Γ_Λ no posee lazos. Un lazo es una flecha que tiene inicio y final en el mismo vértice.*

2. *Γ_Λ es un carcaj localmente finito, esto es existen sólo un número finito de flechas llegando y saliendo en cada vértice $[M]$ de Γ_Λ.*

3. *Dado $M \in ind\,\Lambda$ no proyectivo, el número de flechas que salen de $[\tau_\Lambda M]$ es igual al número de flechas que llegan a $[M]$.*

Finalmente recordamos las siguientes definiciones.

Definición 1.5.5

1. *Dados $X, Y \in ind\,\Lambda$ diremos que X está en la τ-órbita de Y si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n X$ es isomorfo a Y.*

2. *Dado $X \in ind\,\Lambda$ diremos que es τ-periódico si existe $n > 0$ tal que $\tau^n X \cong X$.*

3. *Decimos que una componente conexa $\mathcal{C}$ de Γ_Λ es estándar generalizada si $rad^\infty(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.*

Definición 1.5.6

1. *Un camino desde un módulo indescomponible M hasta un módulo indescomponible N es una sucesión de morfismos:*

$$M \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} M_{t-1} \xrightarrow{f_t} N$$

entre módulos indescomponibles donde $t \geq 1$ y cada f_i no es nulo ni un isomorfismo.

2. *Un camino de M hasta M es un ciclo en $mod\,\Lambda$.*

3. *Un módulo indescomponible M es dirigido si M no pertenece a ningún ciclo.*

Resumimos algunos de los resultados referidos a esta sección que serán utilizados reiteradas veces en el trabajo.

Teorema 1.5.6 *Fórmula de Auslander.*
Dados $N, M \in mod\,\Lambda$ existen isomorfismos:

$$Ext^1_\Lambda(M,N) \cong D\underline{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{Hom}_\Lambda(N, \tau M).$$

Corolario 1.5.7

1. *Si $dp_\Lambda M \leq 1$ entonces $Ext^1_\Lambda(M,N) \cong DHom_\Lambda(N, \tau M)$;*

2. *Si $di_\Lambda N \leq 1$ entonces $Ext^1_\Lambda(M,N) \cong DHom_\Lambda(\tau^{-1}N, M)$.*

Corolario 1.5.8
Dado $X \in mod\,\Lambda$, entonces:

1. *$dp_\Lambda X \leq 1$ si y sólo si $Hom_\Lambda(D\Lambda, \tau X) = 0$;*

2. *$di_\Lambda X \leq 1$ si y sólo si $Hom_\Lambda(\tau^{-1}X, \Lambda) = 0$.*

1.6 Álgebras Hereditarias e Inclinadas.

Definición 1.6.1
Diremos que un álgebra Λ es hereditaria si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. *todo submódulo de un módulo proyectivo es proyectivo;*

2. *$rad_\Lambda P$ es proyectivo para todo proyectivo P;*

3. *dgl* $\Lambda \leq 1$.

Según el Teorema de Gabriel (1.3.1) toda álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, básica e indescomponible, es isomorfa a un álgebra de caminos determinada por un carcaj con relaciones. El siguiente resultado caracteriza un álgebra hereditaria en las condiciones anteriores:

Teorema 1.6.1
Un álgebra $\Lambda = kQ/I$ *es hereditaria si y sólo si* Q *no tiene ciclos orientados e* $I = (0)$.

Esta familia de álgebras hereditarias están totalmente caracterizadas en su tipo de representación según su carcaj ordinario. Estos resultados se deben a Gabriel y Nazarova-Donovan-Freislich.

Teorema 1.6.2
Sea Λ *un álgebra de dimensión finita sore un cuerpo* k *algebraicamente cerrado, básica e indescomponible y hereditaria.*

1. $\Lambda \cong kQ$ *es de tipo finito si y sólo si el grafo subyacente a* Q *es Dynkin.*

2. $\Lambda \cong kQ$ *es de tipo infinito manso si y sólo si el grafo subyacente a* Q *es Dynkin extendido (o euclideano).*

Ya hemos anunciado en la introducción cuales son las ideas de la teoría de inclinación. Vamos a recordar alguno de los resultados principales de la teoría de inclinación que nos serán útiles posteriormente.

Definición 1.6.2
Una teoría de torsión en $mod\,\Lambda$ *es una pareja* $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ *de clases de módulos tales que:*

1. $Hom_\Lambda(M, N) = 0$ *para todo* $M \in \mathcal{T}$ *y* $N \in \mathcal{F}$;

2. $Hom_\Lambda(M, \mathcal{F}) = 0$ *implica que* $M \in \mathcal{T}$;

3. $Hom_\Lambda(\mathcal{T}, N) = 0$ *implica que* $N \in \mathcal{F}$.

La clase $\mathcal{T}$ *es llamada clase de torsión y la clase* $\mathcal{F}$ *es llamada clase libre de torsión.*

Definición 1.6.3

Diremos que un módulo T *es inclinante si:*

1. $dp_\Lambda T \leq 1$;

2. $Ext^1_\Lambda(T, T) = 0$;

3. *existe una sucesión exacta corta* $0 \to \Lambda \to T_1 \to T_2 \to 0$, *donde* $T_1, T_2 \in add(T)$.

Planteamos el siguiente ejemplo de módulo inclinante que será utilizado nuevamente en el último capítulo.

Ejemplo 1.6.1

Sea $\Lambda = kQ/I$ donde Q es el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ 3 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \text{con } \gamma.\beta = \gamma.\delta = 0.$$

Su carcaj de Auslander-Reiten asociado es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & P_4 \arrow[dr] & & P_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & I_5 \\ P_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & S_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & I_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & P_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & I_3 \end{tikzcd}$$

Observamos que el Λ-módulo $T = P_3 \oplus P_4 \oplus P_5 \oplus S_4$ es un módulo inclinante.

Definición 1.6.4

Sea H un álgebra hereditaria y T un H-módulo inclinante. El álgebra $\Lambda = End_H(T)$ será llamada álgebra inclinada.

El siguiente resultado es central en la teoría de inclinación:

Teorema 1.6.3 *Brenner y Butler.*

Dado T un módulo inclinante sobre un álgebra de Artin Λ, consideramos $B = End_\Lambda T$. Entonces:

1. *T como B-módulo es inclinante y además $\Lambda \cong End_B T$;*

2. *los funtores $Hom_\Lambda(T, -)$ y $- \otimes T$ inducen equivalencias mutuamente inversas entre las subcategorías plenas:*

$$\mathcal{T} = \{\ M \in mod\,\Lambda\ /\ Ext^1_\Lambda(T, M) = 0\ \}$$

$$\mathcal{Y} = \{\ N \in mod\,B\ /\ Tor^B_1(N, T) = 0\ \},$$

mientras que los funtores: $Ext^1_\Lambda(T, -)$ y $Tor^B_1(-, T)$ inducen equivalencias mutuamente inversas entre las subcategorías plenas:

$$\mathcal{F} = \{\ M \in mod\,\Lambda\ /\ Hom_\Lambda(T, M) = 0\ \}$$

$$\mathcal{X} = \{\ N \in mod\,B\ /\ N \otimes T = 0\ \};$$

3. *se verifica que:*

$$Tor^B_1(-, T).Hom_\Lambda(T, -) = 0,\ \ Hom_\Lambda(T, -).Tor^B_1(-, T) = 0,$$

$$(- \otimes T).Ext^1_\Lambda(T, -) = 0,\ \ Ext^1_\Lambda(T, -).(- \otimes T) = 0.$$

1.7 Álgebras Casi-inclinadas.

Las álgebras casi-inclinadas fueron introducidas en [HRS1] como una generalización natural de las álgebras inclinadas. Diremos que Λ es un álgebra casi-inclinada si $\Lambda \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(T)$ donde T es un objeto inclinante en $\mathcal{H}$ una categoría abeliana hereditaria. Obviamente si $\mathcal{H} = \mathrm{mod}\, H$ siendo H un álgebra hereditaria, entonces Λ es un álgebra inclinada. Una de las caracterizaciones más utilizada de álgebra casi-inclinada es la siguiente: Λ es casi-inclinada si y sólo si es casi hereditaria, esto es: (CI_1) $dgl\ \Lambda \leq 1$ y $(CI_2) \forall\ X \in \mathrm{ind}\ \Lambda,\ dp_\Lambda X \leq 1$ o $di_\Lambda X \leq 1$. Resumiremos en adelante algunas de las propiedades más destacables de esta familia de álgebras.

Se observa que las condiciones (CI_1) y (CI_2) son independientes entre si. Ejemplos donde se puede apreciar esto aparecen en [HRS1] o [ML]. Antes de seguir avanzando necesitamos de los siguientes conceptos.

Dados $X, Y \in \mathrm{ind}\Lambda$, notaremos por $X \rightsquigarrow Y$ en caso de que exista una cadena de morfismos no nulos

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y$$

entre módulos indescomponibles. En este caso, decimos que X es un *predecesor* de Y y que Y es un *sucesor* de X. Para un álgebra Λ, definimos las subcategorías siguientes de $\mathrm{ind}\Lambda$:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \{X \in \text{ ind } \Lambda / \text{ si } Y \rightsquigarrow X, \text{ entonces } \mathrm{dp}_\Lambda Y \leq 1\}$$

$$\mathcal{R}_\Lambda = \{X \in \text{ ind } \Lambda / \text{ si } X \rightsquigarrow Y, \text{ entonces } \mathrm{di}_\Lambda Y \leq 1\}$$

Definidos estos conceptos tenemos el siguiente resultado (ver [HRS1]):

Teorema 1.7.1
Sea Λ un álgebra casi-inclinada. Entonces:

1. $\Lambda \in add\, \mathcal{L}_\Lambda$;
2. $D\Lambda \in add\, \mathcal{R}_\Lambda$.

Hacemos notar que estas propiedades caracterizan a las álgebras casi-inclinadas.

Otros resultados más resaltables de la familia de álgebras casi-inclinadas son (ver [HRS1]):

Lema 1.7.2

Dados un álgebra casi-inclinada Λ *y* $X, Y \in ind\,\Lambda$ *donde* $dp_\Lambda X = 2$ *y* $di_\Lambda Y = 2$, *entonces se verifica que:* $Hom_\Lambda(X, Y) = 0$.

Lema 1.7.3

Consideramos Λ *un álgebra casi-inclinada.*

1. *Si* $X \in ind\,\Lambda$ *con* $dp_\Lambda X = 2$, *entonces* $X \in \mathcal{R}_\Lambda$.
2. *Si existen* $Y \in ind\,\Lambda$ *y* $X \in mod\,\Lambda$ *donde* $dp_\Lambda X = 2$ *y* $X \rightsquigarrow Y$, *entonces* $Z \in ind\,\Lambda$ *con* $dp_\Lambda Z = 2$ *y* $Hom_\Lambda(Z, Y) \neq 0$.

Proposición 1.7.4

Consideramos Λ *un álgebra casi-inclinada. Entonces:*

1. $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda = ind\,\Lambda$;
2. $Hom_\Lambda(\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda, \mathcal{L}_\Lambda) = 0$;
3. $Hom_\Lambda(\mathcal{R}_\Lambda, \mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda) = 0$.

El resultado anterior nos muestra que en indΛ tenemos una trisección cuando Λ es casi inclinada. Esto es:

$$\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda,\ \mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda, \mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda$$

satisfacen las propiedades de trisección.

Definición 1.7.1

Consideramos un camino

$$(*) :\ X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n = Y,$$

en $ind\,\Lambda$*. Un camino:*

$$(**):\ \ X = X_0 \to X_{0,1} \to \cdots \to X_{0,n_0} \to X_1 \to X_{1,1} \to \cdots \to X_{n-1} \to \cdots \to X_n = Y,$$

en $ind\,\Lambda$ *es un refinamiento de* $(*)$*, y es llamado refinamiento de morfismos irreducibles si todos los morfismos en (**) son irreducibles.*

Definición 1.7.2

Decimos que un camino de morfismos irreducibles:

$$Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_n \to Z_{n+1}$$

es seccional si $\tau Z_i \ncong Z_{i-2}$*, para todo* $i = 2, \ldots, n+1$*.*

Proposición 1.7.5

Sea Λ *un álgebra casi-inclinada y:*

$$(*) : I \to X_o \to \cdots \to X_n \to P,$$

un camino en $ind\,\Lambda$ *donde* I *es inyectivo y* P *es proyectivo. Entonces* $(*)$ *admite un refinamiento de morfismos irreducibles y todo refinamiento de* $(*)$ *es seccional.*

El siguiente resultado completa las caracterizaciones de un álgebra casi-inclinada:

Teorema 1.7.6

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un álgebra de Artin Λ*:*

1. Λ *es casi-inclinada;*

2. $\mathcal{R}_\Lambda$ *contiene todos los módulos inyectivos indescomponibles;*

3. $\mathcal{L}_\Lambda$ *contiene todos los módulos proyectivos indescomponibles;*

4. *todo camino en* $ind\,\Lambda$ *comenzando en un inyectivo y terminando en un proyectivo admite un refinamiento de morfismos irreducibles y todo refinamiento ha de ser seccional.*

Pájaros prohibidos.

Mil novecientos setenta y seis, penal de libertad.

Los presos políticos uruguayos no pueden hablar sin permiso,

silbar, sonreír, cantar, caminar rápido, ni saludar a otro preso.

Tampoco pueden dibujar, ni recibir dibujos de mujeres embarazadas,

parejas, mariposas, estrellas, ni pájaros.

Didascó Perez, maestro de escuela, torturado y preso por tener

ideas ideológicas, recibe un domingo la visita de su hija Milay de cinco años.

La hija le trae un dibujo de pájaros y los censores se lo rompen a la entrada de la carcel.

Al domingo siguiente Milay le trae un dibujo de árbol.

Los árboles no están prohibidos y el dibujo pasa.

Didascó le elogia la obra y le pregunta por esos circulitos de colores,

esos circulitos de colores que aparecen en las copas de los árobles.

Muchos pequeños círculos entre las ramas: ¿son naranjas?, ¿qué fruta son ?

Y la niña lo hace callar...ssshhh. Y en secreto le explica:

Bobo, bobo, no ves que son ojos! Los ojos de los pájaros que te traje a escondidas.

E. G.

Capítulo 2

RESULTADOS INICIALES.

2.1 Preliminares

Definición 2.1.1

Un álgebra Λ *es llamada* **shod** *(por* **s***mall* **ho***mological* **d***imension) si cada* Λ*-módulo indescomponible* X *verifica o bien* $dp_\Lambda X \leq 1$ *o* $di_\Lambda X \leq 1$. *También decimos que un álgebra* Λ *es* **estrictamente shod** *si es shod pero no casi inclinada.*

Como fue observado en [HRS1](II.1.1), un álgebra shod tiene dimensión global a lo sumo 3. Así, un álgebra estrictamente shod tiene dimensión global 3.

Dados $X, Y \in \text{ind}\Lambda$, notaremos por $X \rightsquigarrow Y$ en caso de que exista una cadena de morfismos no nulos

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y$$

entre módulos indescomponibles. En este caso, decimos que X es un *predecesor* de Y y que Y es un *sucesor* de X. Para un álgebra Λ, definimos las subcategorías siguientes de $\text{ind}\Lambda$:

$$\mathcal{L}_\Lambda = \{X \in \text{ ind } \Lambda / \text{ si } Y \rightsquigarrow X, \text{ entonces } \text{dp}_\Lambda Y \leq 1\}$$

$$\mathcal{R}_\Lambda = \{X \in \text{ ind } \Lambda / \text{ si } X \rightsquigarrow Y, \text{ entonces } \text{di}_\Lambda Y \leq 1\}$$

Para la prueba del teorema central necesitaremos de los próximos tres lemas claves, los cuales fueron probados para álgebras casi inclinadas en [HRS1]. Las pruebas en el contexto más general (o sea para las álgebras shod), siguen las mismas lineas de las originales, aunque se han desarrollado demostraciones alternativas para algunas partes donde es usada explícitamente la condición $\mathrm{dgl}\Lambda \leq 2$. Para la conveniencia del lector colocaremos la demostración completa remarcando los detalles cuando la prueba para las álgebras shod difiera de las originales para las álgebras casi inclinadas. Como primer paso presentaremos un resultado válido para un anillo cualquiera Λ. Como fue aclarado arriba, este resultado aparece en [HRS1], mas lo colocamos en versión completa por entender que es piedra básica en el desarrollo del trabajo.

Lema 2.1.1

Sea Λ un anillo y $\tilde{f} \in Hom_\Lambda(M,N)$, no epimorfismo ni monomorfismo.
Escribimos $\tilde{f} = g \circ f$, donde $f : M \to Im(\tilde{f})$ está dado por $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall\ x \in M$; y $g : Im(\tilde{f}) \to N$ es la inclusión natural.
Entonces son equivalentes:

1. *existe $X \in mod\,\Lambda$ y $f' : M \to X$; $g' : X \to N$, tales que:*
$$0 \to M \overset{(f,f')^t}{\longrightarrow} Im(\tilde{f}) \oplus X \overset{(g,g')}{\to} N \to 0 \text{ es exacta.}$$
2. *la sucesión exacta $0 \to \ker(\tilde{f}) \to M \overset{\tilde{f}}{\to} N \to Coker(\tilde{f}) \to 0$ es nula en $Ext^2_\Lambda(Coker(\tilde{f}), \ker(\tilde{f}))$.*

Demostración:
Consideramos $\delta : 0 \to \ker(\tilde{f}) \to M \overset{f}{\to} \mathrm{Im}(\tilde{f}) \to 0$ y "aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), -)$" para obtener:

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), M) \overset{{}^{1}(\mathrm{Coker}(\tilde{f}),f)}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), \mathrm{Im}(\tilde{f})) \overset{\delta_*}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}^2_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), \ker(\tilde{f})),$$

donde δ_* es el morfismo de conexión.
Consideramos $\varepsilon : 0 \to \mathrm{Im}(\tilde{f}) \overset{g}{\to} N \to \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \to 0$ en $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), \mathrm{Im}(\tilde{f}))$.
Entonces $\delta_*(\varepsilon) = \delta \circ \varepsilon \in \mathrm{Ext}^2_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), \ker(\tilde{f}))$ está representado por:

$$0 \to \ker(\tilde{f}) \to M \overset{g\circ f}{\to} N \to \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \to 0.$$

Entonces se verifica (2) $\Leftrightarrow$ $\delta_*(\varepsilon) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\varepsilon \in \mathrm{Im}({}^1(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), f))$ $\Leftrightarrow$ $\varepsilon = f \circ \zeta$ con $\zeta \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), M)$.

Afirmación:

$\varepsilon = f \circ \zeta$ con $\zeta \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Coker}(\tilde{f}), M) \Longleftrightarrow$ ($\clubsuit$) existem $X \in \mathrm{mod}\ \Lambda$, $f' : M \to X$, y $g'' : X \to N$, tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& ker(\tilde{f}) \arrow[r, equal, "1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \ker(\tilde{f}) \arrow[d, "f'_{/\ker(\tilde{f})}"] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[r] \arrow[d, "g''"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\tilde{f}) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

($\Longrightarrow$)

En el comienzo tenemos:

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & & \\
& & ker(\tilde{f}) \arrow[r, equal, "1"] \arrow[d] & \ker(\tilde{f}) & & \\
\zeta : & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[r] \arrow[d, "g''"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] \arrow[d, equal, "1"] & 0 \\
\varepsilon : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\tilde{f}) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] & 0 \\
& & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Esto es válido pues $\varepsilon = f \circ \zeta$ (o sea ε es el pushout de ζ con respecto a f). Mas, por las propiedades del push-out, se comprueba la exactitud de la sucesión de la segunda columna.

$(\Longleftarrow)$

Por la existencia del diagrama, podemos concluir que la sucesión ε es equivalente al push-out de ζ respecto de f.

Afirmación: La situación ($\clubsuit$) es equivalente a:
existe un módulo X y morfismos $M \stackrel{f'}{\to} X \stackrel{g''}{\to} N$, tales que

$$0 \to M \stackrel{(f,f')^t}{\to} \mathrm{Im}(\tilde{f}) \oplus X \stackrel{(g,-g'')}{\to} N \to 0$$

es exacta.

$(\Longrightarrow)$

Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $g \circ f - g'' \circ f' = 0$ y por lo tanto $\ker(g, g'') \supset \mathrm{Im}(f, f')^t$. Ahora $(y, x) \in \ker(g, -g'') \Rightarrow g(y) = g''(x)$.

Sea $m \in M$ tal que $f(m) = y$. Entonces $(g, -g'') \circ (f, f')^t(m) = 0$ y por lo tanto $g''(f'(m)) = g(f(m)) = g(y) = g''(x)$. Así $\xi = f'(m) - x \in \ker(g'')$.

Por lo tanto $(y, x) \in \ker(g, -g'')$, $(0, \xi) \in \ker(g, -g'')$ y $(y, x + \xi) = (f, f')(m)$. Mas $g''(\xi) = 0$ implica $\xi = f'(p)$, con $p \in \ker(\tilde{f})$ y por eso $f(p) = 0$. Así $(0, \xi) = (f, f')(p)$.

Entonces $(y, x) = (f, f')(m - p)$ y por lo tanto $(y, x) \in \mathrm{Im}((f, f')^t)$. Luego la exactitud de la sucesión está probada.

$(\Longleftarrow)$

Por la hipótesis, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M & \stackrel{f'}{\longrightarrow} & X & & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) & & \\
 & & f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g'' & & \| \, 1 & & \\
0 & \to & \mathrm{Im}(\tilde{f}) & \stackrel{g}{\longrightarrow} & N & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Si $f'(m) = 0$ y $(f, f')^t(m) \neq 0$, entonces $f(m) \neq 0$. Luego $g(f(m)) = f(m) \neq 0$, y por otro lado $g''(f'(m)) = 0$, lo que es una contradicción por la conmutatividad del diagrama. Concluimos que $f'(m) = 0$ implica $(f, f')^t(m) = 0$ y por lo tanto $m = 0$. Entonces f' es inyectiva.

Así nuestro diagrama quedaría:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "g''"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[d, equal, "1"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\tilde{f}) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r, "pr"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] & 0 \\
& 0
\end{tikzcd}$$

Considero $h : X \to \mathrm{Coker}(\tilde{f})$ dado por $h(x) = pr(g''(x))$. Así $h \circ f'(m) = pr \circ g'' \circ f'(m) = pr \circ g \circ f(m) = 0$.

Por otro lado si $pr \circ g''(x) = h(x) = 0$ entonces $g''(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Luego $g''(x) = g(f(m))$ y por lo tanto $(g, -g'')(f(m), x) = 0$ por lo que existe $t \in M$ tal que $(f(m), x) = (f, f')(t)$. Entonces $f'(t) = x$. Resumiendo, si $x \in \ker(h) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(f')$. Luego, ya tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g''"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[d, equal, "1"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\tilde{f}) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r, "pr"] & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) \arrow[r] & 0 \\
& 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado $n \in N$, existen $m \in M$, y $x \in X$ tal que $(g, -g'')(f(m), x) = n$ o sea $n = g(f(m)) - g''(x) = g''(f'(m)) - g''(x) = g''(f'(m) - x)$. Concluimos que $n \in \mathrm{Im}(g'')$ y por lo tanto g'' es sobreyectiva. El diagrama de arriba queda entonces:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & ker(\tilde{f}) & \stackrel{1}{=\!=} & \ker(\tilde{f}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \to & M & \stackrel{f'}{\longrightarrow} & X & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) & \to & 0 \\
 & & f\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g'' & \circlearrowleft & \| \, 1 & & \\
0 & \to & \mathrm{Im}(\tilde{f}) & \stackrel{g}{\longrightarrow} & N & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\tilde{f}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Luego si consideramos $f'_{/\ker \tilde{f}} : ker(\tilde{f}) \to X$, tenemos que $0 \to \ker(\tilde{f}) \stackrel{f'_{/\ker(\tilde{f})}}{\to} X \stackrel{g''}{\to} N \to 0$ es una sucesión exacta con lo que el resultado queda probado. ∎

Lema 2.1.2

Sea Λ un álgebra shod, $X, Y \in ind\Lambda$ tal que $dp_\Lambda X \geq 2$ y $di_\Lambda Y \geq 2$. Entonces $Hom_\Lambda(X, Y) = 0$.

Demostración:

Comparando con [HRS1](II.1.4), se puede percibir que las diferencias son las pruebas de las afirmaciones 2, 3 y 4 siguientes. Asumamos que existe un morfismo no nulo $f\colon X \longrightarrow Y$, donde $\mathrm{dp}_\Lambda X \geq 2$ y $\mathrm{di}_\Lambda Y \geq 2$ con $X, Y \in \mathrm{ind}\Lambda$. Asumamos también que $l(X) + l(Y)$ es minimal respecto de la propiedad anterior. Como Λ es shod, concluimos que $\mathrm{di}_\Lambda X \leq 1$ y $\mathrm{dp}_\Lambda Y \leq 1$.

Afirmación 1: Si $K = \mathrm{Ker} f \neq 0$ y $\mathrm{dp}_\Lambda \mathrm{Im} f \leq 1$, entonces K es indescomponible y $\mathrm{dp}_\Lambda K \geq 2$.

Consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Im} f \longrightarrow 0$$

Observar que $\mathrm{dp}_\Lambda X \geq 2$ y $\mathrm{dp}_\Lambda \, \mathrm{Im} f \leq 1$, por lo que $\mathrm{dp}_\Lambda K \geq 2$. Sea K' un sumando indescomponible de K con dimensión proyectiva mayor o igual que 2, y sea $\pi\colon K \longrightarrow K'$ la proyección canónica. Consideramos el diagrama "pushout":

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) & \to & 0 \\
 & & \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \| \, 1 & & \\
0 & \to & K' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{g} & \mathrm{Im}(f) & \to & 0
\end{array}
$$

Como $\mathrm{dp}_\Lambda K' \geq 2$ y $\mathrm{dp}_\Lambda \mathrm{Im} f \leq 1$, entonces $\mathrm{dp}_\Lambda X' \geq 2$ y por lo tanto tiene un sumando X'' con $\mathrm{dp}_\Lambda X'' \geq 2$. Como X es indescomponible y π escinde, deducimos que la sucesión inferior no escinde. Mas K' es indescomponible por lo que $g|_W \neq 0$, para todo W sumando indescomponible de X'. Así $g|_{X''} \neq 0$ y esto implica, por la minimalidad impuesta, que $l(X'') + l(Y) \geq l(X) + l(Y)$. Entonces $l(X'') \geq l(X) \geq l(X') \geq l(X'')$. Por lo tanto $X \cong X'$, con lo que analizando el diagrama podemos concluir que π es un isomorfismo. Así la afirmación está probada.

Afirmación 2: f no es un epimorfismo.

Supongamos que f es un epimorfismo y consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Por la afirmación 1 sabemos que $K = \mathrm{Ker} f$ es indescomponible y que $\mathrm{dp}_\Lambda \mathrm{Ker} f \geq 2$. Luego $\mathrm{di}_\Lambda K \leq 1$ ya que Λ es shod. Usando esto junto con el hecho de que $\mathrm{di}_\Lambda X \leq 1$ deducimos que $\mathrm{di}_\Lambda Y \leq 1$, lo cual es una contradicción.

Afirmación 3: f no es un monomorfismo.

Considerando argumentos duales a los utilizados en la afirmaciones anteriores obtenemos el resultado.

Llamaremos $Z = \mathrm{Im} f$ que, por la afirmación 2, está contenido estrictamente en Y.

Afirmación 4: $\mathrm{dp}_\Lambda Z \leq 1$ y $\mathrm{di}_\Lambda Z \leq 1$.

Supongamos que $\mathrm{di}_\Lambda Z \geq 2$ y sea Z' un sumando indescomponible de Z con $\mathrm{di}_\Lambda Z' \geq 2$. Claramente $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, Z') \neq 0$ y $l(Z') < l(Y)$, contradiciendo lo asumido sobre la minimalidad de $l(X) + l(Y)$. Por otro lado, si $\mathrm{dp}_\Lambda Z \geq 2$, entonces existe un sumando indescomponible Z' de Z con $\mathrm{dp}_\Lambda Z' \geq 2$. Dada la doble inclusión $Z' \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y$ podemos observar que existe un morfismo no nulo $Z' \longrightarrow Y$, una contradicción con la minimalidad de $l(X) + l(Y)$, pues $l(Z') \leq l(Z) < l(X)$, ya que f no es monomorfismo. Así esta afirmación queda probada.

Por las afirmaciones 1 y 4 deducimos que K es indescomponible y se verifica que $\mathrm{dp}_\Lambda K \geq 2$. Luego $\mathrm{di}_\Lambda K \leq 1$ y así la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathrm{Coker}f \longrightarrow 0$$

es el elemento nulo en $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(\mathrm{Coker}f,\mathrm{Ker}f)$. Por [HRS1](II.13), existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{(f,f)^t} \mathrm{Im}f \oplus N \xrightarrow{(\iota,g)} Y \longrightarrow 0$$

con $g|_{N'} \neq 0$ para todo $N'|N$. No es difícil de observar que $\mathrm{dp}_\Lambda N \geq 2$ y $\mathrm{di}_\Lambda N \geq 2$. Sea N_1, N_2 sumandos indescomponibles de N con $\mathrm{dp}_\Lambda N_1 \geq 2$ y $\mathrm{di}_\Lambda N_2 \geq 2$. Como $f \neq 0$ obtenemos que $l(N_1) + l(N_2) < l(X) + l(Y)$, por lo que o bien $l(N_1) + l(Y) < l(X) + l(Y)$ o bien $l(N_2) + l(Y) < l(X) + l(Y)$, generando una contradicción en ambos casos. ∎

Observación 2.1.1

1. Según un argumento analizado en el desarrollo de la demostración anterior si $0 \to L_1 \to L_2 \to L_3 \to 0$ es una sucesión exacta que no escinde con L_1 indescomponible, podemos concluir que $\mathrm{Hom}_\Lambda(L_2', L_3) \neq 0, \ \forall\, L_2' \mid L_2$.

2. Análogamente si $0 \to L_1 \to L_2 \to L_3 \to 0$ es una suceción exacta que no escinde con L_3 indescomponible, podemos concluir que $\mathrm{Hom}_\Lambda(L_1, L_2') \neq 0, \ \forall\, L_2' \mid L_2$.

Lema 2.1.3

Sea Λ un álgebra shod y sea $X \in ind\Lambda$ con $dp_\Lambda X \geq 2$.

(a) Si existe un camino $X \rightsquigarrow Y$, entonces existe $Z \in ind\Lambda$, $dp_\Lambda Z \geq 2$ y $Hom_\Lambda(Z, Y) \neq 0$.

(b) $X \in \mathcal{R}_\Lambda$.

Demostración:

(a) Supongamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,Y)=0$ para todo $M \in \mathrm{ind}\Lambda$ con $\mathrm{dp}_\Lambda M \geq 2$ y consideramos un camino $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ con $\mathrm{dp}_\Lambda X_0 \geq 2$ y $l(X_1)$ minimal. Claramente $\mathrm{dp}_\Lambda X_1 \leq 1$ y f_0 no es un epimorfismo.

Afirmación : $C=$ $\mathrm{Coker} f_0$ es indescomponible.

Sea C' un sumando indescomponible de C tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(C',Y)\neq 0$. Observar que por lo asumido, $f_1 \circ f_0 = 0$, con lo cual $\mathrm{Im} f_0 \subset \ker(f_1)$. Como $f_1 \neq 0$ se concluye que existe un tal sumando. Consideramos el "pullback"de:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im} f_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

respecto de la inclusión $\iota\colon C' \longrightarrow C$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Im}(f_0) & \longrightarrow & X_1' & \longrightarrow & C' & \to & 0 \\ & & 1\,\| & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \iota & & \\ 0 & \to & \mathrm{Im}(f_0) & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & C & \to & 0 \end{array}$$

Como X_1 es indescomponible y ι escinde, la sucesión superior no escinde. También existe un sumando indescomponible X_1'' de X_1' tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(X_1'',Y)\neq 0$, y se ha de observar que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Im} f_0, W) \neq 0$, $\forall\, W$ sumando de X_1'. Luego por la minimalidad tenemos que $l(X_1) \leq l(X_1'') \leq l(X_1') \leq l(X_1)$, y esto implica que ι es un isomorfismo, lo que prueba la afirmación. Observar ahora que $\mathrm{dp}_\Lambda C \leq 1$ ya que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Coker}\ f_0, Y) \neq 0$. Consecuentemente, $\mathrm{dp}_\Lambda(\mathrm{Im} f_0) \leq 1$. Por otro lado $\mathrm{Im} f_0 \neq X_0$, pues $\mathrm{dp}_\Lambda X_0 \geq 2$ y luego $\mathrm{Ker} f_0 \neq 0$.

La demostración sigue ahora los pasos de la original para álgebras casi inclinadas. Observar que $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(C,\ \mathrm{Ker} f_0) = 0$ y por lo tanto, por [HRS1](II.1.3), existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{(f_0,f_0')^t} \mathrm{Im} f_0 \oplus N \xrightarrow{(\iota,g_0')} X_1 \longrightarrow 0$$

para la cual se verifica la siguiente afirmación:

Afirmación : Para todo módulo N' sumando directo de N, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(N', C) \neq 0$.

Según la Observación 2.1.1, (2), basta mostrar que $\mu : \ 0 \to X \overset{f_0'}{\to} N \overset{w}{\to} C \to 0$ es una sucesión exacta que no escinde (donde $w = \pi \circ g_0'$), pues X es indescomponible. Probemos entonces que la sucesión referida es exacta. De la sucesión ν concluimos que $i \circ f_0 = g_0' \circ f_0'$. Entonces $w \circ f_0' = \pi \circ g_0' \circ f_0' = \pi \circ i \circ f_0 = 0$. Así $w \circ f_0' = 0$. Por otro lado $w(n) = 0$ implica que $\pi \circ g_0'(n) = 0$. Luego tenemos las siguientes equivalencias $\pi \circ g_0'(n) = 0 \ \Leftrightarrow \ g_0'(n) \in \mathrm{Im}(f_0) \ \Leftrightarrow \ g_0'(n) = f_0(z) = g_0' \circ f_0'(z) \ \Leftrightarrow$ $n - f_0'(z) \in \ker(g_0')$. Entonces $(i, g_0')(0, n - f_0'(z)) = 0$, y por lo tanto $(0, n - f_0'(z)) \in \ker(i, -g_0') = \mathrm{Im}(f_0, f_0')$. Así concluimos que existe $x \in X$ tal que $(f_0, f_0')(x) = (0, n - f_0'(z))$ y por lo tanto $n = f_0'(x) + f_0'(z)$. Surge entonces que $n \in \mathrm{Im}(f_0')$. Tenemos demostrado que $X \overset{f_0'}{\to} N \overset{w}{\to} C$ es exacta, y por lo tanto resta probar la sobreyectividad de w y la inyectividad de f_0'. Supongamos que $f_0'(x) = 0$. Esto implica que $0 = g_0'(f_0'(x)) = i \circ f_0(x)$. Entones $(f_0, f_0')(x) = 0$, mas (f_0, f_0') es inyectiva y por lo tanto $x = 0$. Probemos la sobreyectividad de w: $w = \pi \circ g_0' = \pi \circ g_0' + \pi \circ i$, pues el último termino es cero. Luego $w = \pi \circ (i, -g_0')$ es una composición de epimorfismos. Entones w es un epimorfismo. Concluimos la prueba de que $\mu : \ 0 \to X \overset{f_0'}{\to} N \overset{w}{\to} C \to 0$ es exacta. Probemos ahora que la referida sucesión μ no escinde. Del Lema 2.1.1 tenemos que μ es tal que:

$$f_0 \circ \mu : \ 0 \to \mathrm{Im}(f_0) \to X_1 \overset{\pi}{\to} C \to 0.$$

Luego si $\mu = 0$ deducimos que $f \circ \mu = 0$ y por lo tanto $X_1 = \mathrm{Im}(f_0) \oplus C$. Mas X_1 es indescomponible y f_0 no es nula ni sobreyectiva, lo cual es una contradicción. Así $\mu \neq 0$, o sea μ no escinde.

Queda de esta manera probada la afirmación: $\mathrm{Hom}_\Lambda(N', C) \neq 0$, $\forall \ N' \mid N$.

Como tenemos que $\mathrm{dp}_\Lambda(\mathrm{Im} f_0) \leq 1$ y $\mathrm{dp}_\Lambda X_1 \leq 1$, podemos concluir que N tiene un sumando indescomponible N' con $\text{dp}_\Lambda N' \geq 2$. Luego hay un camino:

$$N' \longrightarrow \text{Coker} f_0 \longrightarrow Y$$

con $\text{dp}_\Lambda N' \geq 2$ y $l(\text{Coker } f_0) < l(X_1)$, lo cual es una contradicción. El resultado es ahora inmediato.

(b) Es consecuencia directa de la parte (a) y del Lema 2.1.2. ■

Necesitaremos ahora del siguiente resultado:

Proposición 2.1.4

Sea Λ un álgebra shod y supongamos que existe un camino:

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P \qquad (*)$$

en $\text{ind}\Lambda$, donde I y P son módulos inyectivo y proyectivo respectivamente. Entonces $f_i \notin \text{rad}^\infty(\text{mod}\Lambda)$ para todo i y por lo tanto $(*)$ admite un refinamiento de morfismos irreducibles.

Demostración:

La demostración en el caso de ser Λ un álgebra casi inclinada está dada en [HRS1](II.1.10) y exactamente la misma sirve para álgebras shod con los cambios obvios. ■

2.2 Resultados centrales.

Esta sección está destinada a demostrar el resultado principal del capítulo. También se verán algunas consecuencias y una descripción de la situación de los ganchos dobles.

Teorema 2.2.1

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un álgebra Λ:

(a) Λ es shod.

(b) $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda = \mathrm{ind}\Lambda$.

(c) (add $(\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda)$,add $\mathcal{R}_\Lambda$) es un par de torsión que escinde en modΛ.

(d) (add$\mathcal{L}_\Lambda$, add $(\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda)$) es un par de torsión que escinde en modΛ.

(e) existe un par de torsión $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ que escinde en modΛ tal que $\mathrm{dp}_\Lambda Y \leq 1$ para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y $\mathrm{di}_\Lambda X \leq 1$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

(f) Todo camino desde un módulo inyectivo indescomponible hasta un módulo proyectivo indescomponible admite un refinamiento a un camino de morfismos irreducibles y todo refinamiento tiene a lo sumo dos ganchos, y en caso que sean dos, han de ser consecutivos.

Demostración:

Probaremos las implicaciones $(a) \Rightarrow (b), (b) \Rightarrow (c)$ y $(a) \Leftrightarrow (f)$. Las implicaciones $(c) \Rightarrow (e)$, $(d) \Rightarrow (e)$ y $(e) \Rightarrow (a)$ son triviales, y $(b) \Rightarrow (d)$ es similar a $(b) \Rightarrow (c)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $X \in \mathrm{ind}\Lambda$ y supongamos $X \notin \mathcal{L}_\Lambda$. Entonces existe un camino $Z \rightsquigarrow X$ con $\mathrm{dp}_\Lambda Z \geq 2$. Por el Lema 1.2, obtenemos que $Z \in \mathcal{R}_\Lambda$ y por lo tanto $X \in \mathcal{R}_\Lambda$ pues $\mathcal{R}_\Lambda$ es cerrado para sucesores.

$(b) \Rightarrow (c)$ Claramente $\mathrm{Hom}_\Lambda(\text{add } (\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda), \text{ add } \mathcal{L}_\Lambda) = 0$ ya que $\mathcal{L}_\Lambda$ es cerrado para predecesores. Ahora, si $\mathrm{Hom}_\Lambda(\text{add } (\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda), M) = 0$, con $M \in \mathrm{ind}\Lambda$, entonces $M \notin \mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda$ y por lo tanto $M \in \mathcal{L}_\Lambda$. Luego, si $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, \text{ add } \mathcal{L}_\Lambda) = 0$, con $N \in \mathrm{ind}\Lambda$, entonces $N \notin \mathcal{L}_\Lambda$ y por lo tanto $N \in \mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda$. Esto prueba que (add $\mathcal{L}_\Lambda$, add $(\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda)$) es un par de torsión en modΛ que escinde pues $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda = \mathrm{ind}\Lambda$.

$(a) \Rightarrow (f)$ Asumamos que Λ es shod y supongamos que existe un camino $I \rightsquigarrow P$ en indΛ

donde I y P son módulos inyectivo y proyectivo respectivamente. Por la Proposición 1.3, existe un camino de morfismos irreducibles

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P \qquad (*)$$

Asumamos que $(*)$ tiene al menos dos ganchos, y consideramos el primer y último gancho del camino. Así existen $j < l$ tal que $\tau^{-1}X_j = X_{j+2}$, $\tau X_l = X_{l-2}$ y los caminos:

$$I \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{j+1} \text{ y } X_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P$$

son seccionales. Como existen al menos dos ganchos, se deduce que $j+1 < l-1$. Es conocido que la composición de los morfismos en un camino seccional es no nula (ver [IT](13.4)) y por lo tanto $\mathrm{Hom}_\Lambda(I, \tau X_{j+2}) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}X_{l-2}, P) \neq 0$. Luego $\mathrm{dp}_\Lambda X_{j+2} \geq 2$ y $\mathrm{di}_\Lambda X_{l-2} \geq 2$. Si ahora $j+2 < l-1$, obtenemos un camino $X_{j+2} \rightsquigarrow X_{l-2}$, lo que contradice los Lemas 1.1 y 1.2. Por lo tanto $j+2 = l-1$ y en ese caso el camino $(*)$ tiene exactamente dos ganchos y son consecutivos.

$(f) \Rightarrow (a)$ Supongamos que Λ no es shod. Entonces existe un módulo indescomponible M con $\mathrm{dp}_\Lambda M \geq 2$ y $\mathrm{di}_\Lambda M \geq 2$. Así $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}\Lambda, \tau M) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau^{-1}M, \Lambda) \neq 0$, y por lo tanto existe un camino en $\mathrm{ind}\Lambda$

$$I \xrightarrow{f_1} \tau M \xrightarrow{f_2} E \xrightarrow{f_3} M \xrightarrow{f_4} F \xrightarrow{f_5} \tau^{-1}M \xrightarrow{f_6} P \qquad (*)$$

donde I es un módulo inyectivo indescomponible, P es un módulo proyectivo indescomponible, y f_i es irreducible para $i = 2, 3, 4, 5$. Por la Proposición 1.3, $(*)$ admite un refinamiento a un camino de morfismos irreducibles el cual claramente contiene dos ganchos no consecutivos, contradiciendo la condición (f). De esta manera el resultado queda demostrado. ■

Se deduce entonces de este resultado que si Λ es un álgebra shod, entonces $(\mathcal{L}_\Lambda \setminus \mathcal{R}_\Lambda) \cup (\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda) \cup (\mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda)$ contiene toda la categoría $\mathrm{ind}\Lambda$ y no existen morfismos no nulos de derecha a izquierda en la trisección. El siguiente resultado proporciona más información sobre la estructura de las álgebras shod.

Proposición 2.2.2

Los siguientes resultados son válidos para un álgebra shod Λ:

(a) Existen álgebras hereditarias R y S, y un $R-S$ bimódulo ${}_SM_R$ tal que Λ es isomorfa al álgebra de matrices triangulares $\begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_SM_R & S \end{pmatrix}$.

(b) El carcaj ordinario de Λ no contiene ciclos orientados.

Demostración:

La demostración del resultado similar para álgebras casi inclinadas se puede leer en [HRS1](III.1.1) y es válido para álgebras shod. ■

En próximos capítulos estudiaremos detenidamente la estructura del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra shod. Sin embargo, finalizaremos este capítulo con dos resultados que refieren a caminos no seccionales desde un módulo inyectivo hasta un módulo proyectivo. Recordemos que dado un módulo no proyectivo $X \in \text{ind}\Lambda$, $\alpha(X)$ expresa el número de módulos indescomponibles no isomorfos en el término central de la sucesión de Auslander-Reiten que finaliza en X.

Proposición 2.2.3

Sea Λ un álgebra estrictamente shod. Si existe un camino de morfismos irreducibles en indΛ desde un módulo inyectivo indescomponible I hasta un módulo proyectivo indescomponible P con dos ganchos, entonces existe un camino desde I hasta P con sólo un gancho.

Demostración: Consideramos:

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P \qquad (*)$$

un camino de morfismos irreducibles en indΛ desde I hasta P con dos ganchos (consecutivos). Entonces existe un índice i para el cual $\tau^{-1}X_{i-1} = X_{i+1}$ y $\tau^{-1}X_i = X_{i+2}$. Si $\alpha(X_{i+1}) = 1$ y $\alpha(X_{i+2}) = 1$, entonces

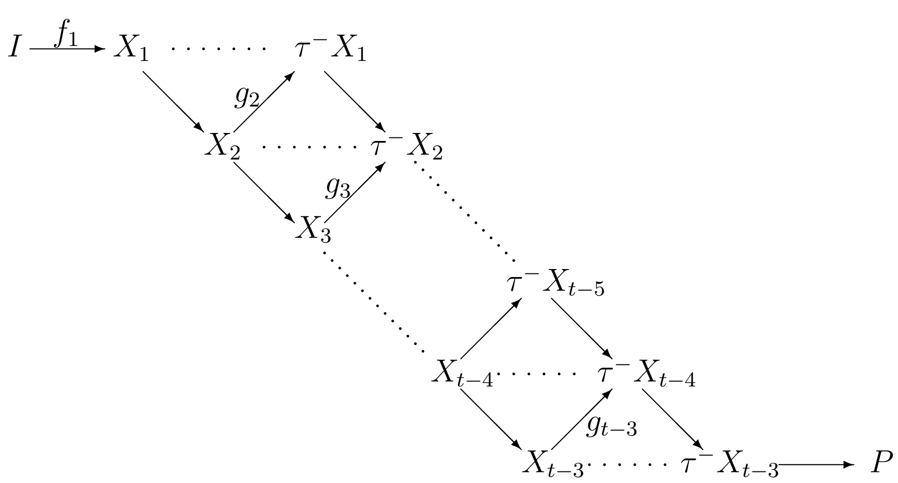
$$0 \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow 0 \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow X_{i+2} \longrightarrow 0$$

son sucesiones de Auslander-Reiten y por lo tanto f_{i+1} es un isomorfismo, lo que es una contradicción. Entonces, o bien $\alpha(X_{i+1}) > 1$ o $\alpha(X_{i+2}) > 1$. Por otro lado, si X_{i+3} no es proyectivo, entonces $\alpha(X_{i+2}) \geq 2$ pues X_{i+1} y τX_{i+3} son sumandos no isomorfos del término central de la sucesión de Auslander-Reiten que finaliza en X_{i+2} (observar que $X_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_t = P$ es seccional, pues de otra manera $(*)$ tendría tres ganchos). En este caso:

$$I \xrightarrow{f_1} X_1 \to \cdots \to X_i \to \tau X_{i+3} \to \tau^{-1} X_i \to X_{i+3} \to X_{i+4} \to \cdots \to P$$

es también un camino desde I hasta P con dos ganchos. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $i = t-3$ y que X_j no es inyectivo para todo $j > 0$. Claramente:



es un subcarcaj del carcaj de Auslander-Reiten Γ_Λ de Λ. Supongamos que $\alpha(\tau^{-1}(X_i)) \geq 3$ para algún $2 \leq i \leq t-4$. Entonces, el término central de la sucesión de Auslander-Reiten que finaliza en $\tau^{-1} X_i$ tiene un sumando indescomponible Y no isomorfo a $\tau^{-1} X_{i-1}$ o a X_{i+1}. Por lo tanto el camino de morfismos irreducibles

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_i \longrightarrow Y \longrightarrow \tau^{-1} X_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_t = P$$

contiene exactamente un gancho.

Un argumento similar puede ser hecho si $\alpha(\tau^{-1} X_1) \geq 2$ o si $\alpha(\tau^{-1} X_{t-3}) \geq 2$. Aún falta considerar el caso donde $\alpha(\tau^{-1}X_1) = 1 = \alpha(\tau^{-1}X_{t-3})$ y $\alpha(\tau^{-1}(X_i)) = 2$ para $i = 2, \cdots, t-2$. En este caso, g_2 ha de ser un epimorfismo pues

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{g_2} \tau^{-1}X_1 \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten. Por lo tanto g_i es un epimorfismo para todo $i = 2, \cdots, t-3$. Sin embargo g_{t-3} no puede ser un epimorfismo pues

$$0 \longrightarrow X_{t-3} \xrightarrow{g_{t-3}} \tau^{-1}X_{t-4} \longrightarrow \tau^{-1}X_{t-3} \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten. Esto demuestra el resultado. ■

Proposición 2.2.4

Sea Λ un álgebra shod. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{L}_\Lambda$ no contiene todos los módulos proyectivos indescomponibles;

(b) existe un camino de morfismos irreducibles en indΛ desde un módulo inyectivo I hasta un módulo proyectivo P con un gancho;

(c) dgl$\Lambda = 3$.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea P un módulo proyectivo indescomponible que no pertenece a $\mathcal{L}_\Lambda$. Entonces existe un camino $Z \rightsquigarrow P$ con $\mathrm{dp}_\Lambda Z \geq 2$. Así $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{D}\Lambda, \tau Z) \neq 0$ y por lo tanto se obtiene un cammino

$$I \longrightarrow \tau Z \xrightarrow{f_1} E \xrightarrow{f_2} Z \rightsquigarrow P \qquad (*)$$

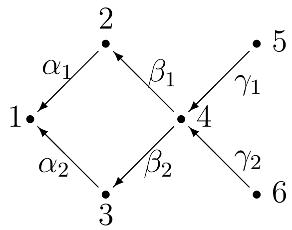
en indΛ donde f_1 y f_2 son morfismos irreducibles, I es un módulo indescomponible inyectivo. Por la Proposición 1.3, $(*)$ admite un refinamiento a un camino de morfismos irreducibles con a lo sumo dos ganchos. Luego utilizando la Proposición 2.3 se obtiene el resultado.

$(b) \Rightarrow (c)$ Si dgl$\Lambda \leq 2$, entonces Λ es en realidad casi inclinada y por lo tanto todo camino de morfismos irreducibles desde un módulo inyectivo indescomponible hasta un módulo proyectivo indescomponible es seccional por [HRS1](II.1.11), lo cual es una contradicción. $(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos $\mathrm{dgl}\Lambda = 3$. Entonces existe un módulo simple S con $\mathrm{dp}_\Lambda S = 3$. Sea P_S la cobertura proyectiva de S. Claramente $\mathrm{dp}_\Lambda(\mathrm{rad}\ P_S) = 2$ y todo sumando indescomponible de $\mathrm{rad}P_S$ es predecesor de P_S. Surge entonces que $P_S \notin \mathcal{L}_\Lambda$. ∎

2.3 Ejemplos

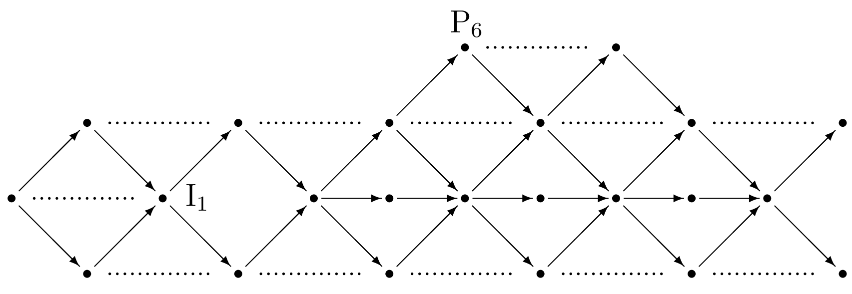
En esta sección exhibimos algunos ejemplos para mostrar diferentes situaciones que pueden ocurrir en las álgebras shod. En toda la sección k es un cuerpo. También indicaremos por P_i, I_i y S_i los módulos proyectivo, inyectivo y simple asociados al vértice i, respectivamente.

(I) Sea Λ la k-álgebra dada por el carcaj



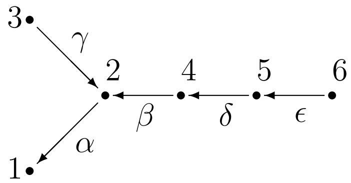
con $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \beta_2\gamma_2 = 0$

Esta es un álgebra inclinada iterada de tipo de representación finito $\tilde{\mathbf{A}}_n$. Su carcaj de Auslander-Reiten tiene el siguiente aspecto:



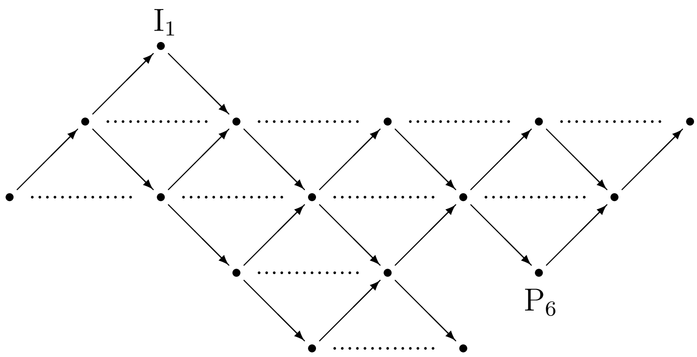
Las lineas punteadas indican la traslación de Auslander-Reiten. Un cálculo rápido muestra que Λ es shod. Como $\mathrm{dgl}\Lambda = 3$, Λ es en realidad estrictamente shod. Observar que desde I_1 hasta P_6 existen un camino con un gancho y otro camino seccional.

(II) Sea Λ la k-álgebra dada por:



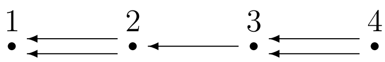
con $\beta\delta\epsilon = \alpha\beta = 0$.

Su carcaj de Auslander-Reiten es:



Observar que desde I_1 hasta P_6 hay un camino con un gancho y otro con dos ganchos consecutivos. Claramente Λ es shod.

(III) La k-álgebra con radical al cuadrado cero, dada por el carcaj:



es estrictamente shod y claramente con tipo de representación infinita.

En [HRS1] se ha dejado abierta la pregunta de saber si la intersección $\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda$ puede ser vacía para álgebras casi inclinadas. Esta cuestión fue respondida negativamente recientemente por D. Happel. El siguiente ejemplo muestra que esta intersección puede ser vacía para nuestras álgebras shod.

(IV) Sea Λ la k-álgebra dada por el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 & & \\
2 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] & 6 \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

con $\beta\alpha = \delta\epsilon = \gamma\beta = \gamma\delta = 0$.

El carcaj de Auslander-Reiten asociado a Λ tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & \mathrm{P}_6 \arrow[dr] & \\
 & \mathrm{P}_4 \arrow[dr] & & \mathrm{P}_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_6 \\
\mathrm{P}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & & \mathrm{P}_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_2 \\
 & & & & & & \mathrm{P}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Observar que $\mathcal{L}_\Lambda = \{P_1, P_4, S_4, P_3, P_5\}$, $\mathcal{R}_\Lambda = \{I_4, S_5, P_6, I_6, S_3, P_2, I_2\}$. Claramente $\mathcal{L}_\Lambda \cap \mathcal{R}_\Lambda$ es vacío y $\mathcal{L}_\Lambda \cup \mathcal{R}_\Lambda =ind\Lambda$. También dgl$\Lambda = 3$.

Los nadies.

Sueñan las pulgas con comprarse un perro y sueñan los nadies con salir de pobres, que algún mágico día llueva de pronto la buena suerte, que llueva a cántaros la buena suerte; pero la buena suerte no llueve ayer, ni hoy, ni mañana, ni nunca, ni en lloviznita cae del cielo la buena suerte, por mucho que los nadies la llamen y aunque les pique la mano izquierda, o se levanten con el pie derecho, o empiecen el año cambiando de escoba.

Los nadies: los hijos de nadie, los dueños de nada.

Los nadies: los ningunos, los ninguneados, corriendo la liebre, muriendo la vida, jodidos, rejodidos:

Que no son, aunque sean.

Que no hablan idiomas, sino dialectos.

Que no profesan religiones, sino supersticiones.

Que no hacen arte, sino artesanía.

Que no practican cultura, sino folklore.

Que no son seres humanos, sino recursos humanos.

Que no tienen cara, sino brazos.

Que no tienen nombre, sino número.

Que no figuran en la historia universal, sino en la crónica roja de la prensa local.

Los nadies, que cuestan menos que la bala que los mata.

E. G.

Capítulo 3

COMPONENTES DEL CARCAJ DE AUSLANDER-REITEN.

3.1 Resultados preliminares.

Mencionamos los siguientes resultados para referencias posteriores. La demostración de estos resultados pueden hallarse en [CS], o también pueden ser leídos en [ML].

Lema 3.1.1

Sean A un álgebra de artin, $X = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_t = X$ un ciclo orientado a través de módulos indescomponibles, y $r \geq 1$. Si $\tau^i X_j \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq r$ y todo $j = 0, \ldots, t$, entonces existe un camino de morfismos irreducibles desde X hasta $\tau^r X$.

Lema 3.1.2

Sea A un álgebra de artin y sea n el rango del grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A. Sean Γ una componente conexa de Γ_A y Γ' una componente conexa de ${}_s\Gamma$. Asumamos que Γ' tiene un cardinal infinito de τ-órbitas pero no contiene ciclos orientados. Sea M un módulo en Γ' tal que la longitud de cada paseo en Γ desde un módulo no estable hasta M es al menos $2n$. Entonces, para cada $r \geq 1$, existe un camino $M = X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_l = \tau^r M$ en mod$A$, con todos los módulos X_i en Γ.

Corolario 3.1.3

Sean A un álgebra de artin y Γ una componente regular de Γ_A con un cardinal infinito de τ-órbitas. Entonces, para cada $M \in \Gamma$, y cada $r \geq 1$, existe un camino en mod$A$ desde M hasta $\tau^r M$.

Lema 3.1.4

Sea A una álgebra shod con tipo de representación finito. Entonces Γ_A no contiene ciclos orientados.

Demostración:

Asumamos que existe un ciclo en Γ_A:

$$(\vartheta): \ X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m \to X_0,$$

y supongamos que existe al menos un módulo indescomponible no estable a derecha X_i en el ciclo. Como Γ_A es finito concluimos que X_i es también no estable a izquierda. Sea $n = \min\{n(i) \in I\!N / \tau^{-n(i)} X_i$ es inyectivo para algún $i = 0, \dots, m\}$. Asumamos que $\tau^{-n} X_{i_0} = I$ es inyectivo. Luego se obtiene el siguiente ciclo:

$$(\epsilon): \ \tau^{-n} X_{i_0} = I \to \tau^{-n} X_{i_0+1} \to \cdots \to \tau^{-n} X_m \to$$

$$\tau^{-n} X_0 \to \ldots \to \tau^{-n} X_{i_0-1} \to \tau^{-n} X_{i_0} = I.$$

Sabemos también que I es no estable a izquierda. Sea $n' = \min\{n(i) \in I\!N / \ \tau^{n(i)} X_i$ es proyectivo para algún $i = 0, \dots, m\}$. Asumamos que $\tau^{n'} X_{i_1} = P$ es proyectivo. Por lo tanto, por el Lema 3.1.1, existe un camino de morfismos irreducibles:

$$(\delta): \ I \to \cdots \to \tau^{-n} X_{i_1} \to \ldots \to \tau^{n'} X_{i_1} = P.$$

Concatenando $\epsilon \circ \epsilon \circ \delta$ obtenemos un camino de morfismos irreducibles desde un módulo inyectivo indescomponible hasta un módulo proyectivo indescomponible con al menos dos ganchos no consecutivos, pues por [BS] no existen ciclos seccionales. Esto contradice al Teorema 2.2.1. Asumamos ahora que no existe ningún módulo no estable a derecha (o equivalentemente no estable a izquierda) en ϑ. Sea $X_{i_0} \in \vartheta$ y sea $h = d(\Gamma_A \backslash_s \Gamma, X_{i_0})$ (o sea $h = \min\{n \in \mathbb{N} \ / \ n =$longitud de algún paseo entre X_{i_0} y algún módulo no estable$\}$). Consideramos un paseo de longitud mínima h entre un módulo no estable Y_0 y X_{i_0}:

$$Y_0 \text{ — } Y_1 \text{ — } \cdots \text{ — } Y_{h-1} \text{ — } X_{i_0} = Y_h.$$

Por la minimalidad sabemos que para cada $j = 1, \ldots, h$, $Y_j \in {}_s\Gamma$. Se observa que todo módulo estable es τ-periódico, ya que Γ_A es finito. De esta manera obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$Y_0 \to \cdots \to X_{i_0}.$$

Mas, como Y_0 es un módulo no estable, podemos concluir que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^{-s} Y_0 = I_0$ es un módulo inyectivo. Dado que cada módulo estable es periódico obtenemos:

$$(\eta): \ X_{i_0} \rightsquigarrow X_{i_0},$$

y también obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$(\varepsilon): \ \tau^{-s} Y_0 = I_0 \to \cdots \to \tau^{-s} X_{i_0} \rightsquigarrow X_{i_0}.$$

Por otro lado, mediante una discusión análoga obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$(\varrho): \ X_{i_0} \rightsquigarrow \tau^{s'} X_{i_0} \to \cdots \to P_0,$$

con P_0 un módulo proyectivo indescomponible. Finalmente concatenando $\varepsilon \circ \eta \circ \eta \circ \varrho$, obtenemos un camino de morfismos irreducibles desde un módulo inyectivo hasta un módulo proyectivo que contiene al menos dos ganchos no consecutivos. Esto contradice al Teorema 2.2.1. ■

3.2 Componentes con ciclos orientados.

Teorema 3.2.1

Sea Λ un álgebra shod y Γ una componente de Γ_Λ conteniendo un ciclo orientado. Entonces Γ es un tubo semiregular.

Demostración:

Utilizando el Lema 3.1.4 inferimos que Γ es infinito y por hipótesis Γ contiene un ciclo orientado. Si Γ es regular sabemos por los resultados conseguidos en [HPR] y [Zha] que Γ es un tubo estable y si Γ es semiregular pero no regular, concluimos de [Liu] que Γ es un tubo semiregular. Supongamos que Γ no es semiregular.

Afirmación: Γ no contiene módulos τ-periódicos.

Supongamos que existe $X \in \Gamma$ tal que X es τ-periódico. Sea $s \in I\!N$ tal que $\tau^s X \cong X$ y sea $X \to Y$ un morfismo irreducible. Si Y es estable a izquierda obtenemos un morfismo irreducible $X \cong \tau^s X \to \tau^s Y$. Mas X tiene sólo un número finito de sucesores no isomorfos. Luego existe $m \in I\!N$ tal que $\tau^{ms} Y \cong Y$, o sea que Y es τ-peródico y por lo tanto estable a izquierda y derecha. En caso que comencemos con un módulo Y' estable a derecha también podemos probar que Y' es estable a izquierda. Lo mismo podemos hacer para los predecesores de X. Mas si Γ no es regular, existen módulos no estables. Consideramos $Y_0 \in \Gamma$ un módulo no estable de tal manera que un paseo de longitud mínima entre X y un módulo no estable es:

$$X = X_0 \,—\, X_1 \,—\, \cdots \,—\, X_n \,—\, Y_0.$$

Entonces por la minimalidad de tal paseo podemos inferir que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son estables y más aún periódicos. Pero sabemos que el módulo no estable Y_0 es un predecesor o un sucesor de X_n. Luego Y_0 no es estable a izquierda ni a derecha y entonces existen $m_1, m_2 \in I\!N$ tal que $\tau^{m_1} Y_0 = P$ es un módulo proyectivo y $\tau^{-m_2} Y_0 = I$ es módulo inyectivo. Mas existe un morfismo irreducible $X_n \to Y_0$ o un morfismo irreducible $Y_0 \to X_n$. En el primer caso obtenemos:

$$I = \tau^{-m_2} Y_0 \to \tau^{-m_2-1} X_n \rightsquigarrow X_n \rightsquigarrow X_n \rightsquigarrow X_n \rightsquigarrow \tau^{m_1} X_n \to \tau^{m_1} Y_0 = P,$$

ya que X_n es τ-periódico. Esto es un camino desde un módulo inyectivo indescomponible hasta un módulo proyectivo indescomponible con al menos dos ganchos no consecutivos. Esto es un contradicción con el Teorema 2.2.1. Mediante una discusión análoga obtenemos una contradicción en caso que se tenga $Y_0 \to X_n$. Entonces la afirmación queda probada y luego Γ no contiene módulos τ-periódicos.

Consideramos ahora ${}_l\Gamma$ y ${}_r\Gamma$, las componentes estables a izquierda y derecha de Γ respectivamente. Como Γ es infinto se concluye que ${}_l\Gamma \neq \emptyset$ o ${}_r\Gamma \neq \emptyset$. Asumamos que ${}_l\Gamma \neq \emptyset$. Sea Γ' una componente conexa de ${}_l\Gamma$. Del hecho que Γ no contiene módulos τ-periódicos deducimos que Γ' es infinto.

Afirmación: Γ' no contiene ciclos orientados.

Supongamos que Γ' contiene un ciclo orientado. Si el ciclo está contenido en ${}_r\Gamma'$, entonces, por [HPR] y [Zha] la componente infinita incluida en ${}_r\Gamma'$ que contiene un ciclo es un tubo estable. Esto implica que Γ contiene módulos τ-periódicos, una contradicción. Por lo tanto el ciclo contiene al menos un módulo no estable a derecha, por lo que se deduce que Γ' contiene un módulo inyectivo. También, utilizando [Liu], concluimos que existe un camino seccional infinito:

$$\cdots \to \tau^{2t}X_1 \to \tau^t X_s \to \cdots \to \tau^t X_1 \to X_s \to \cdots \to X_1,$$

con $s < t$ y $\{ X_1, \ldots, X_s\}$ un conjunto completo de representantes de τ-órbitas en Γ'. Como Γ no es semiregular, entonces no es estable a izquierda. Mas Γ' es una componente de ${}_l\Gamma$ con lo que podemos inferir que existe un morfismo irreducible $X' — X''$ con $X' \in \Gamma'$ y $X'' = \tau^{-m}P$, siendo P un módulo proyectivo indescomponible. Ahora aplicando τ tanto como sea necesario obtenemos un morfismo irreducible $X \to P$ con $X \in \Gamma'$. Luego existen $1 \leq j \leq s$ y $0 \leq m, m'$ tal que $\tau^{mt-m'}X_j \cong X$ (podría ser $m' > mt$). Por otro lado tenemos un ciclo orientado incluido en Γ' con al menos un módulo no estable a derecha. Luego aplicando τ^{-1} tanto como sea necesario obtenemos un ciclo orientado con al menos un módulo inyectivo I. Entonces, por el Lema 3.1.1, para todo $r \geq 1$ existe un camino de morfismos irreducibles en $\mathrm{mod}\Lambda$ desde I hasta $\tau^r I$. También sabemos que $I \in \mathcal{O}(X_i)$ para algún $i = 1, \ldots, s$. Luego existe $r_0 \in I\!N$ tal que $\tau^{(m+1)t}X_i = \tau^{r_0}I$ y entonces obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$I \rightsquigarrow I \rightsquigarrow I \rightsquigarrow \tau^{r_0}I = \tau^{(m+1)t}X_i \rightsquigarrow \tau^{mt}X_j \rightsquigarrow \tau^{mt-m'}X_j \cong X \to P,$$

el cual contiene por [BS] al menos dos ganchos no consecutivos. Esto es nuevamente una contradicción con el Teorema 2.2.1. Así queda probada la afirmación y luego ninguna componente estable a izquierda de Γ contiene un ciclo orientado. Similarmente se puede probar que ${}_r\Gamma$ no contiene ciclos orientados. Sin embargo, por hipótesis, Γ contiene un ciclo orientado:

$$(\delta) : Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_l = Y_0$$

por lo que se deduce que (δ) contiene un módulo no estable a izquierda y un módulo no estable a derecha. Luego aplicando τ^{-1} a (δ) tanto como sea necesario obtenemos un ciclo orientado con un módulo inyectivo y un módulo no estable a izquierda. Asumamos que este ciclo es el propio (δ) y que Y_0 es inyectivo. Sea $k \in I\!N$ el menor natural tal que existe $0 \leq v \leq l$ con $\tau^k Y_v$ proyectivo. Luego $\tau^k Y_j \neq 0$, $\forall\ 0 \leq j \leq l$. Ahora, por el Lema 3.1.1, existe un camino en modΛ: $Y_0 \rightsquigarrow \tau^k Y_0$. Finalmente obtenemos:

$$Y_0 \rightsquigarrow Y_0 \rightsquigarrow Y_0 \rightsquigarrow \tau^k Y_0 \rightsquigarrow \tau^k Y_v,$$

que es un camino de morfismos irreducibles desde un módulo inyectivo indescomponible hasta un módulo proyectivo indescomponible con al menos dos ganchos no consecutivos, una contradicción. Así Γ es una componente semiregular. ■

3.3 Componentes regulares.

Lema 3.3.1

Sea Λ un álgebra shod y Γ una componente de Γ_Λ.

1. *Si $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ entonces cada τ-órbita estable a derecha en Γ contiene un módulo indescomponible de $\mathcal{R}$.*

2. *Si $\Gamma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ entonces cada τ-órbita estable a izquierda en Γ contiene un módulo indescomponible de $\mathcal{L}$.*

Demostración:

1. Sea $X \in \Gamma \cap \mathcal{R}$ y sea $Y \in \Gamma$ tal que Y es estable a derecha. Consideremos primero el caso en que ${}_r\Gamma = \Gamma$. Sabemos que existe un paseo contenido en Γ:

$$X \text{---} X_1 \text{---} \cdots \text{---} X_n = Y.$$

Por lo tanto, aplicando τ^{-1} tanto como sea necesario obtenemos un camino $X \to \cdots \to \tau^{-s}Y \subset \Gamma$, para algún $s \geq 0$.

Mas sabemos que $X \in \mathcal{R}$, con lo que podemos concluir que $\tau^{-s}Y \in \mathcal{R}$. Consideremos ahora el caso en que existe un módulo inyectivo en Γ. Consideramos $I_0 \in \Gamma$ un módulo inyectivo tal que la distancia entre $\mathcal{O}(I_0)$ y $\mathcal{O}(Y)$ es la menor posible desde algún módulo inyectivo $I \in \Gamma$. Sean $n = d(\mathcal{O}(I_0), \mathcal{O}(Y))$ y Γ_0 componente estable a derecha de Γ que contiene a Y.
Afirmación: existe un morfismo irreducible $I_0 \to \Gamma_0$.
Sea:

$$(\delta): \ \tau^s I_0 = Y_n \text{---} Y_{n-1} \text{---} \cdots \text{---} Y_1 \text{---} Y_0 = \tau^{s'}Y,$$

con $s \geq 0$ y $s' \in \mathbb{Z}$ un paseo de longitud mínima entre $\mathcal{O}(I_0)$ y $\mathcal{O}(Y)$. Entonces por la minimalidad del paseo elegido concluimos que cada módulo Y_j $\forall j = 0, \ldots, n-1$, es estable a derecha y por lo tanto están en Γ_0. Luego aplicando τ^{-s} en (δ) obtenemos un paseo:

$$I_0 \text{---} \tau^{-s}Y_{n-1} \text{---} \cdots \text{---} \tau^{s'-s}Y.$$

Si se tiene $I_0 \to \tau^{-s}Y_{n-1}$, no hay nada más que agregar. En caso que el morfismo sea $\tau^{-s}Y_{n-1} \to I_0$, como $\tau^{-s}Y_{n-1}$ es estable a derecha, obtenemos $I_0 \to \tau^{-s-1}Y_{n-1}$. Así la afirmación queda probada. Observar que podemos obtener: $I \to M \surd \tau^{-1}M$, con M y $\tau^{-1}M$ en Γ_0. Esto implica que $dp_\Lambda(\tau^{-1}M) \geq 2$ y entonces $\tau^{-1}M \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.

Mas $\tau^{-1}M, Y \in \Gamma_0$, que es una componente estable a derecha, por lo que obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$\tau^{-1}M \to \cdots \to \tau^{-r}Y$$

para algún $r \geq 0$ y esto implica que $\tau^{-r}Y \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.

2. Demostración dual. ■

Observación 3.3.1

Sea Λ un álgebra shod y Γ una componente de Γ_Λ.

1. *Si $\Gamma \cap (\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}) \neq \emptyset$ entonces cada τ-órbita estable a derecha en Γ contiene un módulo indescomponible de $\mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.*

2. *Si $\Gamma \cap (\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}) \neq \emptyset$ entonces cada τ-órbita estable a izquierda en Γ contiene un módulo indescomponible de $\mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.*

Teorema 3.3.2

Sea Λ un álgebra shod y Γ una componente regular de Γ_Λ.

1. *Si $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ entonces $\Gamma \subset \mathcal{R}$.*

2. *Si $\Gamma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ entonces $\Gamma \subset \mathcal{L}$.*

Demostración:

1. Sea $M \in \Gamma \cap \mathcal{R}$. En caso que Γ tenga un ciclo, por [HPR] y [Zha], deducimos que Γ es un tubo estable y por lo tanto todos los módulos en Γ son sucesores de M. Luego $\Gamma \subset \mathcal{R}$. Asumamos que Γ no tiene ciclos orientados y sea $N \in \Gamma$. Sabemos que Γ es estable a derecha, por lo que, por el Lema 3.3.1, concluimos que $o(N) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$. Entonces existe $\tau^m N \in \mathcal{R}$. Si $m \geq 0$ deducimos que $N \in \mathcal{R}$. Asumamos que $m < 0$. Si Γ contiene un número infinito de τ-órbitas entonces, por el Corolario 3.1.3, obtenemos un camino en modΛ $\tau^m N \rightsquigarrow N$. Luego concluimos que $N \in \mathcal{R}$.

Asumamos que Γ tiene un número finito de τ-órbitas y supongamos que $N \notin \mathcal{R}$. Luego existe un camino:

$$N = X_0 \overset{f_0}{\to} X_1 \to \cdots \to X_{t-1} \overset{f_{t-1}}{\to} X_t = X$$

con $di_\Lambda(X) \geq 2$. Así obtenemos:

$$X_t = X \overset{f_t}{\longrightarrow} X_{t+1} \overset{f_{t+1}}{\longrightarrow} \tau^{-1}X = X_{t+2} \overset{f_{t+2}}{\longrightarrow} P = X_{t+3}$$

con P un módulo proyectivo indescomponible y f_t, f_{t+1} morfismos irreducibles. Mas Γ es regular, con lo cual $P \notin \Gamma$. Esto implica que existe $0 \leq i \leq t-1$ o $i = t+2$ tal que $f_i \in \mathrm{rad}^\infty(\mathrm{mod}\Lambda)$. Supongamos que $f_i : X_i \to X_{i+1}$ pertenece al $\mathrm{rad}^\infty_\Lambda(X_i, X_{i+1})$ para algún $0 \leq i \leq t-1$. En ese caso, por el Lema 4.1.1 conseguiríamos mostrar que X_{i+1} es sucesor de M, pues Γ no tiene inyectivos. Esto implica que $X_{i+1} \in \mathcal{R}$ y por lo tanto $X \in \mathcal{R}$. Entonces $di_\Lambda(X) \leq 1$, una contradicción. Luego $f_i \notin \mathrm{rad}^\infty(\mathrm{mod}\Lambda)$ y en particular $X \in \Gamma$. Supongamos que $f_{t+2} \in \mathrm{rad}^\infty_\Lambda(\tau^{-1}X, P)$. Por el Lema 4.1.2 existe $Z \in \Gamma$ y un camino de morfismos irreducibles:

$$\tau^{m-1}N = Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_n = Z$$

con $\mathrm{Hom}_\Lambda(Z, P) \neq 0$. En caso que exista τZ_i, $\forall i = 0, \ldots, n$, obtenemos un camino:

$$\tau^m N = \tau Z_0 \to \tau Z_1 \to \cdots \to \tau Z_n = \tau Z$$

con $di_\Lambda(Z) \geq 2$. Esto implica que $\tau^m N \notin \mathcal{R}$, una contradicción. En el otro caso, consideramos $s \in 1, \ldots, n$ el menor natural tal que Z_s es proyectivo. Luego obtenemos un camino:

$$\tau^m N = \tau Z_0 \to \tau Z_1 \to \cdots \to \tau Z_{s-1} \surd Z_{s-1} \to Z_s.$$

De esta manera podemos concluir que $di_\Lambda(\tau Z_{s-1}) \geq 2$, con lo que $\tau^m N \notin \mathcal{R}$, lo cual es una contradicción.

2. La demostración es dual. ■

3.4 Componentes no regulares.

Teorema 3.4.1

Sea Λ un álgebra shod y Γ una componente de Γ_Λ con un ciclo orientado o con un número infinito de τ-órbitas.

1. *Si Γ contiene un módulo proyectivo entonces $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.*

2. *Si Γ contiene un módulo inyectivo entonces $\Gamma \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}$.*

Demostración:

1. Sea Γ una componente de Γ_Λ que contiene un módulo proyectivo y un ciclo orientado. Sabemos, por el Teorema 3.2.1, que Γ es un tubo semiregular. Supongamos que existe un módulo $M \in \Gamma \cap \mathcal{R}$. Como Γ es un tubo semiregular concluimos que existe un módulo indescomponible no proyectivo Y que es un sumando del radical de algún módulo proyectivo y que pertenece a un ciclo incluido en Γ. Entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y, P) \neq 0$, para algún módulo proyectivo, por lo que $di_\Lambda(\tau Y) \geq 2$. También sabemos que Y pertenece a un ciclo incluido en el tubo semiregular Γ y esto implica que M es un predecesor de Y y de τY. Mas $M \in \mathcal{R}$ y tenemos que $di_\Lambda(\tau Y) \geq 2$ lo cual es una contradicción. Entonces $\Gamma \cap \mathcal{R} = \emptyset$ y por lo tanto $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$. Asumamos que Γ contiene un módulo proyectivo y un número infinito de τ-órbitas. Si Γ contiene un ciclo orientado, no hay nada más que argumentar. Asumamos entonces que Γ no contiene un ciclo orientado y supongamos que $\Gamma \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$. Mas Γ contiene un número infinito de τ-órbitas, por lo que se deduce que existe Γ' una componente conexa de ${}_r\Gamma$ con un número infinito de τ-órbitas. Por lo tanto, por el Lema 3.3.1, cada órbita estable a derecha contiene un módulo de $\mathcal{R}$. También podemos concluir que existe $\Gamma'' \subset \Gamma'$ una componente conexa de ${}_s\Gamma$ con un número infinito de τ-órbitas. Las consideraciones anteriores implican que existe $T \in \Gamma'' \cap \mathcal{R}$ tal que la menor longitud de un paseo desde $\mathcal{O}(T)$ hasta un módulo no estable, es

al menos $2n$, con $n = rk(K_0(\Lambda))$. Sea:

$$(\nu) : M' = X_0 \text{ --- } \cdots \text{ --- } X_t = P$$

un paseo de longitud mínima entre un módulo $M' \in \mathcal{O}(T)$ y un módulo proyectivo P. Por la minimalidad se obtienen $m \in I\!N$ y los caminos:

$$\tau^m M' = Y_0 \to \cdots \to Y_{t-1} \to P \ , \ \tau^{m+1} M' = \tau Y_0 \to \cdots \to \tau Y_{t-1}.$$

Por otro lado $T \in \Gamma'' \subset_s \Gamma$ componente con un número infinito de órbitas y sin ciclos (pues Γ no posee). Entonces por el Lema 3.1.2, concluimos que existe $T \rightsquigarrow \tau^l T$, con $l \in I\!N$ tan grande como sea necesario para que $\tau^l T$ sea predecesor de $\tau^{m+1} M'$ (recordar que $M' \in \mathcal{O}(T)$). Luego τY_{t-1} es sucesor de T, mas $T \in \mathcal{R}$, con lo que se deduce que $\tau Y_{t-1} \in \mathcal{R}$. Esto es una contradicción pues: $\mathrm{Hom}_\Lambda(Y_{t-1}, P) \neq 0$. Entonces $\Gamma \cap \mathcal{R} = \phi$ y por lo tanto $\Gamma \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{R}$.

2. La demostración es dual. ■

Corolario 3.4.2

Sean Λ un álgebra shod y Γ una componente no semiregular de Γ_A. Entonces Γ tiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos.

Yo no sé lo que es el destino,

caminando fui lo que fui.

Allá Dios, que será divino.

Yo me muero como viví.

Yo quiero seguir jugando a lo perdido,

yo quiero ser a la zurda más que diestro,

yo quiero hacer un congreso de lo unido,

yo quiero rezar a fondo un hijonuestro.

Dirán que pasó de moda la locura,

dirán que la gente es mala y no merece,

más yo partiré soñando travesuras

(acaso multiplicar panes y peces).

Yo no sé lo que es el destino,

caminando fui lo que fui.

Allá Dios, que será divino.

Yo me muero como viví.

S. R.

Capítulo 4

COMPONENTES NO SEMIREGULARES.

4.1 Lemas previos.

Lema 4.1.1

Dada un álgebra de artin Λ, consideramos $\mathcal{C}_1$ una componente de Γ_Λ con un número finito de τ-órbitas y sin ciclos. Dados $X, M \in \mathcal{C}_1$, $Y \in ind\Lambda$ y un morfismo no nulo $X \xrightarrow{f} Y$ del $rad_\Lambda^\infty(X, Y)$, se verifica la siguiente afirmación:
existe $n_0 \in \mathbb{N}$, un camino de morfismos irreducibles:

$$X = Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \cdots \xrightarrow{j_{n_0}} Z_{n_0}$$

con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n_0$, y $f_{n_0} \in rad_\Lambda^\infty(Z_{n_0}, Y)$ no nulo, tal que Z_{n_0} es sucesor de M o sucesor de un módulo inyectivo a través de morfismos irreducibles.

Demostración:
Tomamos un paseo minimal entre M y X: M — $\cdots$ —X con longitud m. Haremos inducción en m.
Caso $m = 1$:

En caso que tengamos $M \to X$, queda probado. En el caso que tengamos $X \to M$ consideramos la función $f : X \to Y$ dada en la hipótesis, que está en el $\mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X,Y)$, para el siguiente proceso. (En particular X no es simple inyectivo). Consideramos $X \to M(X)$ la fuente con comienzo en X. Como f no es un monomorfismo que escinda, obtenemos $X = X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ con $X_1|M(X)$ indescomponible, j_1 irreducible y $f_1 \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_1,Y)$, $f_1 \neq 0$. Por otro lado X_1 no es simple inyectivo por lo que se obtiene $X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{f_2} Y$ con $X_2|M(X_1)$ indescomponible, j_2 irreducible y $f_2 \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_2,Y)$. Luego para todo $n \in I\!N$ tenemos:

$$X = X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} \cdots \xrightarrow{j_n} X_n \xrightarrow{f_n} Y$$

con j_i irreducible y X_i indescomponible $\forall i = 1,\ldots,n$, y $f_n \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_n,Y)$, $f_n \neq 0$. Como $\mathcal{C}_1$ tiene un número finito de τ-órbitas obtenemos, por este proceso (que de ahora en más lo llamaremos de levantamiento), X_{n_0} tal que $\mathcal{O}(X_{n_0}) = \mathcal{O}(X_{i_0})$ con $0 \leq i_0 < n_0$, y $f_{n_0} \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_{n_0},Y)$ no nulo. Entonces $X_{n_0} = \tau^{-s}X_{i_0}$, para algún $s \in Z\!\!\!Z$. Si $s \leq 0$ existe:

$$X_{i_0} \to X_{i_0+1} \to \cdots \to X_{n_0} = \tau^{-s}X_{i_0} \rightsquigarrow X_{i_0}$$

un ciclo en $\mathcal{C}_1$, lo cual contradice la hipótesis. Entonces $X_{n_0} = \tau^{-s}X_{i_0}$, con $s \geq 1$. Ahora consideramos el morfismo irreducible $X_{i_0-1} \xrightarrow{j_{i_0}} X_{i_0}$. Si no existe $\tau^{-s}X_{i_0-1}$, encontramos $0 \leq t \leq s-1$ tal que $\tau^{-t}X_{i_0-1}$ es inyectivo. En este caso obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$\tau^{-t}X_{i_0-1} = I \to \tau^{-t}X_{i_0} \rightsquigarrow \tau^{-s}X_{i_0} = X_{n_0},$$

que es lo que necesitamos. En el otro caso obtenemos un morfismo irreducible $\tau^{-s}X_{i_0-1} \to \tau^{-s}X_{i_0}$. Haciendo la misma discusión para $X_{i_0-2} \xrightarrow{j_{i_0-1}} X_{i_0-1}$ obtenemos un camino de morfismos irreducibles en $\mathcal{C}_1$: $I \to \tau^{-t}X_{i_0-1} \rightsquigarrow \tau^{-s}X_{i_0-1} \to \tau^{-s}X_{i_0} = X_{n_0}$, o un morfismo irreducible: $\tau^{-s}X_{i_0-2} \to \tau^{-s}X_{i_0-1}$. Con este procedimiento obtenemos un camino de morfismos irreducibles:

$$I \to \tau^{-t}X_l \rightsquigarrow \tau^{-s}X_l \to \tau^{-s}X_{i_0} = X_{n_0},$$

para algún módulo inyectivo I, algún $0 \leq l \leq i_0$ y algún $0 \leq t \leq s-1$, o un camino de morfismos irreducibles:

$$\tau^{-s}X_0 \to \cdots \to \tau^{-s}X_{i_0}.$$

En este caso, como tenemos un morfismo irreducible $X = X_0 \to M$, dado que $s \geq 1$ obtenemos $M \rightsquigarrow \tau^{-s}X_0$. Esto implica que existe:

$$M \rightsquigarrow \tau^{-s}X_0 \to \cdots \to \tau^{-s}X_{i_0} = X_{n_0}.$$

(Observar que esta demostración también es válida en el caso que $M = \tau^{-1}X_0$).

Caso $m \leq h$:

Si $m \leq h$ existen $n \in I\!N$, un camino de morfismos irreducibles:

$$X = Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \cdots \xrightarrow{j_n} Z_n$$

con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n$, y $f_n \in \text{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Z_n, Y)$ no nulo, tal que Z_n es sucesor de M o sucesor de un módulo inyectivo.

Caso $m = h+1$:

Consideramos:

$$X — R_1 — \cdots — R_h — M$$

un paseo minimal entre X y M. Entonces existe un paseo minimal entre R_h y X de longitud h. Esto implica que existen $n \in I\!N$ y un camino de morfismos irreducibles:

$$X = Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \cdots \xrightarrow{j_n} Z_n$$

con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n$ y $f_n \in \text{rad}^{\infty}_{\Lambda}(Z_n, Y)$ no nulo, tal que Z_n es sucesor de R_h o sucesor de un módulo inyectivo. En el segundo caso no hay nada que agregar. Supongamos que Z_n es sucesor de R_h y no es sucesor de ningún módulo inyectivo. Consideramos:

$$(\delta):\ R_h \to \cdots \to Z_n$$

camino que no contiene módulos inyectivos. Entonces existe:

$$(\tau^{-1}\delta):\ \tau^{-1}R_h \to \cdots \to \tau^{-1}Z_n.$$

Por otro lado teníamos un morfismo irreducible: $M \to R_h$ o $R_h \to M$, con lo que se infiere que $\tau^{-1}Z_n$ es sucesor de M. Aplicando lo observado en el fin de la demostración del caso básico (considerando a Z_n en el rol de X, con $f_n \in \text{rad}_\Lambda^\infty(Z_n, Y)$ y $M = \tau^{-1}Z_n = \tau^{-1}X$), podemos concluir que existe $Z'_m \in \mathcal{C}_1$ con $\text{rad}_\Lambda^\infty(Z'_m, Y) \neq 0$, tal que Z'_m es sucesor de un inyectivo o Z'_m es sucesor de $\tau^{-1}Z_n$ y por lo tanto de M. Así en todos los casos se obtiene la tesis. ∎

Lema 4.1.2

Dada un álgebra de artin Λ, consideramos $\mathcal{C}_2$ una componente de Γ_Λ con un número finito de τ-órbitas y sin ciclos. Dados $Y, N \in \mathcal{C}_2$, $X \in ind\Lambda$ y un morfismo no nulo $X \xrightarrow{f} Y$ del $rad_\Lambda^\infty(X, Y)$, se verifica la siguiente afirmación:
existe $n_0 \in I\!N$, un camino de morfismos irreducibles:

$$Z_{n_0} \xrightarrow{j_{n_0}} Z_{n_0-1} \xrightarrow{j_{n_0-2}} \dots \xrightarrow{j_2} Z_1 \xrightarrow{j_1} Z_0 = Y$$

con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n_0$, y $f_{n_0} \in rad_\Lambda^\infty(X, Z_{n_0})$ no nulo, tal que Z_{n_0} es predecesor de N o predecesor de un módulo proyectivo a través de morfismos irreducibles.

Demostración:
Análoga a la anterior. ∎

Observación 4.1.1

El resultado anterior también es válido en el caso que la componente contenga un ciclo, si el álgebra Λ es shod. Más precisamente, dada un álgebra shod Λ, se verifican los siguientes resultados:

1. *Consideramos $\mathcal{C}_1$ una componente de Γ_Λ con ciclos. Dados $X, M \in \mathcal{C}_1$ y un morfismo no nulo $X \xrightarrow{f} Y \in rad_\Lambda^\infty(X, Y)$, se verifica la siguiente afirmación:*
   existe $n_0 \in I\!N$, un camino de morfismos irreducibles:

$$X = Z_0 \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{j_2} \dots \xrightarrow{j_{n_0}} Z_{n_0}$$

con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n_0$, y $f_{n_0} \in rad^{\infty}_{\Lambda}(Z_{n_0}, Y)$ no nulo, tal que Z_{n_0} es sucesor de M o sucesor de un módulo inyectivo a través de morfismos irreducibles.

2. *Consideramos $\mathcal{C}_2$ una componente de Γ_Λ con ciclos. Dados $Y, N \in \mathcal{C}_2$ y un morfismo no nulo $X \xrightarrow{f} Y \in rad^{\infty}_{\Lambda}(X, Y)$, se verifica la siguiente afirmación:*
   existe $n_0 \in I\!N$, un camino de morfismos irreducibles:

$$Z_{n_0} \xrightarrow{j_{n_0}} Z_{n_0-1} \xrightarrow{j_{n_0-2}} \dots \xrightarrow{j_2} Z_1 \xrightarrow{j_1} Z_0 = Y$$

   con Z_i indescomponible $\forall\ 0 \leq i \leq n_0$, y $f_{n_0} \in rad^{\infty}_{\Lambda}(X, Z_{n_0})$ no nulo, tal que Z_{n_0} es predecesor de N o predecesor de un módulo proyectivo a través de morfismos irreducibles.

Demostración:
Utilizar en ambos casos que toda componente que contenga un ciclo en un álgebra shod es, según el Teorema 3.2.1, un tubo semiregular, y en estos tubos todo módulo indescomponible es sucesor y predecesor por irreducibles de cualquier otro de la componente.
■

4.2 Resultados centrales.

Lema 4.2.1
Dada un álgebra shod Λ, consideramos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ componentes de Γ_Λ con un número finito de órbitas, tal que $\mathcal{C}_1$ contiene un módulo inyectivo y $\mathcal{C}_2$ contiene un módulo proyectivo. Entonces $rad^{\infty}_{\Lambda}(X, Y) = 0$, $\forall X \in \mathcal{C}_1$, $\forall Y \in \mathcal{C}_2$.

Demostración:
Supongamos que existe $f \in \mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(X, Y)$, no nulo, con $X \in \mathcal{C}_1$ e $Y \in \mathcal{C}_2$. Aplicando los lemas anteriores concluimos que existen $n, m \in I\!N$ y un camino:

$$X \xrightarrow{l_1} X_1 \xrightarrow{l_2} \cdots \xrightarrow{l_n} X_n \xrightarrow{f_{n,m}} Y_m \xrightarrow{t_m} \cdots \xrightarrow{t_2} Y_1 \xrightarrow{t_1} Y,$$

una cadena de morfismos no nulos, con todos los módulos X_i e Y_j indescomponibles, todos los morfismos l_i y t_j irreducibles $\forall 1 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq m$, y $f_{n,m} \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_n, Y_m)$, tal que X_n es un sucesor de un módulo inyectivo e Y_m un predecesor de un módulo proyectivo. Esto contradice la Proposición 2.1.4. $\blacksquare$

Como consecuencia directa del Lema (4.2.1) surge:

Corolario 4.2.2

Dada un álgebra shod Λ y $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ componentes diferentes de Γ_Λ con un número finito de órbitas, tales que $\mathcal{C}_1$ contiene un módulo inyectivo y $\mathcal{C}_2$ contiene un módulo proyectivo. Entonces $Hom_\Lambda(X, Y) = 0$.

Corolario 4.2.3

Dada un álgebra shod Λ, consideramos $\mathcal{C}$ una componente no semiregular de Γ_Λ. Entonces $rad_\Lambda^\infty(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$.

Demostración:

Sabemos, por el Corolario 3.4.2, que al ser $\mathcal{C}$ no semiregular, entonces contiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos. Luego usando el Lema 4.2.1, obtenemos que $\text{rad}_\Lambda^\infty(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$. ∎

Observación 4.2.1

Se deduce del último corolario que si Λ es un álgebra estrictamene shod, toda componente $\mathcal{C}$ de Γ_Λ con por lo menos un gancho es standard generalizada (o sea $rad_\Lambda^\infty(X, Y) = 0$ $\forall X, Y \in C$).

Corolario 4.2.4

Dada un álgebra shod Λ, consideramos $\mathcal{C}$ una componente no semiregular de Γ_Λ. Entonces $\mathcal{C}$ es una componente dirigida (o sea X es un módulo dirigido, $\forall\ X \in \mathcal{C}$).

Demostración:

Supongamos que existe $Z \in \mathcal{C}$ y un camino:

$$(\delta): \ Z \to \cdots \to Z$$

en $\text{ind}\Lambda$. Como $\mathcal{C}$ no contiene ciclos orientados, por lo menos un morfismo de (δ) tiene que pertenecer al radical infinito. Por el Corolario 4.2.3, $\text{rad}_\Lambda^\infty(\mathcal{C}) = 0$, por lo que han de existir $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$, $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{C}$ indescomponibles, $f_1 \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(X_1, Y_1)$, $f_2 \in \mathrm{rad}_\Lambda^\infty(Y_2, X_2)$, tal que $f_1, f_2, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in (\delta)$. En consecuencia, aplicando los Lemas 4.1.1 y 4.1.2, en la componente $\mathcal{C}$ obtenemos un camino desde un inyectivo indescomponible hasta un proyectivo indescomponible, conteniendo morfismos en el radical infinito. Esto contradice la Proposición 2.1.4. Luego toda la componente $\mathcal{C}$ ha de ser dirigida. $\blacksquare$

Indulto.

Y es por eso que no voy a olvidar.

Por los que han sufrido

y por los que no están.

Por los que se han ido a ningún lugar

siento que me abraza la soledad,

siento que me atrapa la soledad.

Porque aún me duele el hambre de un nuevo cielo

y porque tengo ganas de seguir creciendo.

Porque no habrá perdón,

porque no habrá consuelo.

Porque no hay abrigo

que calme mi miedo.

Porque después de tanto llorar

los veo salir de nuevo.

J. S.

Capítulo 5

ÁLGEBRAS SHOD VISTAS COMO ITERACIÓN DE EXTENSIONES POR UN PUNTO DE UN ÁLGEBRA INCLINADA.

5.1 Lemas previos.

Definición 5.1.1

1. *Consideraremos de ahora en más la familia de módulos proyectivos indescomponibles P para los cuales hay un camino no seccional comenzando en un inyectivo (esto es un camino $I \rightsquigarrow P$ que contiene por lo menos un gancho). A esta familia la anotaremos: $\mathcal{P}^g_\Lambda$.*

2. *Consideraremos también la siguiente relación definida en la familia de los módulos proyectivos indescomponibles:*

$$P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow Hom_\Lambda(P_1, P_2) \neq 0.$$

Lema 5.1.1

Dada un álgebra shod Λ, se verifica que:

1. *existen en $\mathcal{P}_\Lambda^g$ elementos maximales respecto de la relación definida arriba;*

2. *todo elemento maximal de $\mathcal{P}_\Lambda^g$ es un elemento maximal en la familia de todos los módulos proyectivos indescomponibles.*

Demostración:

1. Si no existe un elemento maximal, como $\mathcal{P}_\Lambda^g$ es finita, obtenemos un ciclo:

$$(\delta):\ P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_0,$$

con todos los $P_i \in \mathcal{P}_\Lambda^g$. Como $P_0 \in \mathcal{P}_\Lambda^g$ entonces existe un camino comenzando en un inyectivo: $I_0 \rightsquigarrow P_0$. Luego obtenemos el camino:

$$I_0 \rightsquigarrow P_0 \overset{\delta}{\rightsquigarrow} P_0 \overset{\delta}{\rightsquigarrow} P_0,$$

que según la Proposición 2.1.4, es refinable a un camino de morfismos irreducibles:

$$I_0 \rightsquigarrow P_0 \rightsquigarrow P_0 \rightsquigarrow P_0.$$

Mas los ciclos no son seccionales, por [BS], por lo que obtenemos un camino desde un inyectivo hasta un proyectivo con dos o más ganchos no consecutivos, lo cual es una contradicción.

2. Supongamos que existe un proyectivo indescomponible $P_1 \ncong P_0$, donde P_0 es un elemento maximal de $\mathcal{P}_\Lambda^g$, con $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, P_1) \neq 0$. Como $P_0 \in \mathcal{P}_\Lambda^g$, entonces existe un camino: $I_0 \rightsquigarrow P_0$ desde un módulo inyectivo. Así obtenemos $I_0 \rightsquigarrow P_0 \to P_1$, por lo que $P_1 \in \mathcal{P}_\Lambda^g$. Mas P_0 es maximal en esta familia, lo cual implica una contradicción. ∎

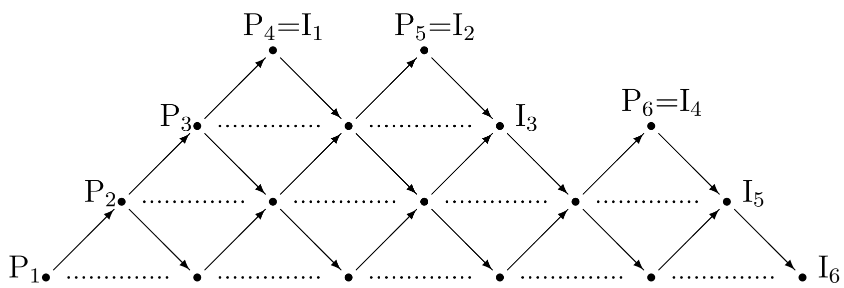
Observemos en los siguientes ejemplos los conceptos definidos previamente:

Ejemplo 5.1.1

(I) Sea B la k-álgebra dada por el carcaj

$$\underset{6}{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \underset{5}{\bullet} \xrightarrow{\delta} \underset{4}{\bullet} \xrightarrow{\gamma} \underset{3}{\bullet} \xrightarrow{\beta} \underset{2}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \underset{1}{\bullet} \qquad \text{con } \alpha\beta\gamma\delta = \gamma\delta\epsilon = 0.$$

El carcaj de Auslander-Reiten del álgebra B tiene el siguiente aspecto:

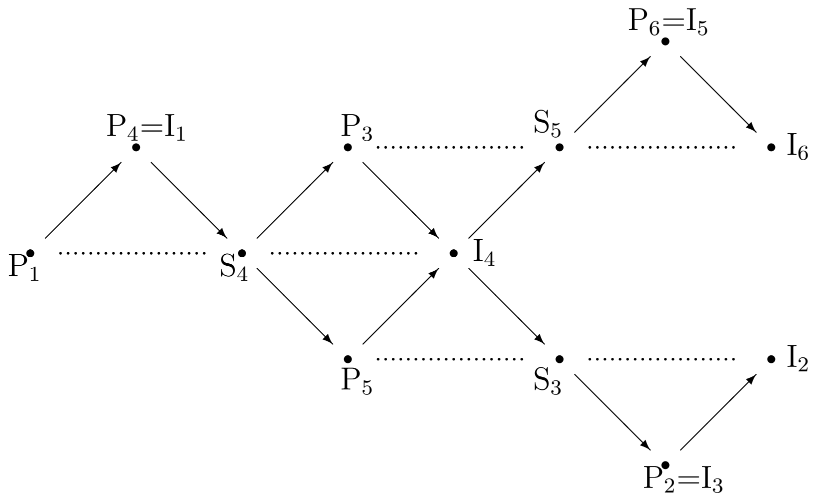


En este ejemplo se observa que: $\mathcal{P}_B^g = \{ P_6 \}$; P_6 es el único elemento maximal en $\mathcal{P}_B^g$, y también el único maximal en $\mathcal{P}_B$.

(II) Nuevamente consideraremos el ejemplo determinado por Λ la k-álgebra dada por el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & & \underset{}{\overset{1}{\bullet}} & & \\
\underset{2}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{3}{\bullet} \arrow[r, "\beta"] & \underset{4}{\bullet} \arrow[u, "\gamma"'] & \underset{5}{\bullet} \arrow[l, "\delta"'] & \underset{6}{\bullet} \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd} \qquad \text{con } \beta\alpha = \delta\epsilon = \gamma\beta = \gamma\delta = 0.$$

El carcaj de Auslander-Reiten asociado a Λ tiene el siguiente aspecto:



En este caso $\mathcal{P}_\Lambda^g = \{ P_2, P_6 \}$ y los elementos maximales de $\mathcal{P}_\Lambda^g$ (y de $\mathcal{P}_\Lambda$) son P_2 y P_6.

Lema 5.1.2

Sea $\Lambda = B[N]$ un álgebra shod siendo $N = rad_\Lambda(P)$, donde P es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda^g$. Consideramos $\mathcal{C}$ una componente de Γ_Λ que contiene un módulo proyectivo indescomponible Q. Entonces:

1. *si $T \in ind\Lambda$ no es isomorfo a P y es predecesor de Q, o bien T es predecesor estricto de Q se cumple que $Hom_\Lambda(P, T) = 0$.*

   Si además $Q \ncong P$ entonces:

2. *las familias de Λ-submódulos y B-submódulos propios de Q coinciden;*

3. *se verifica que $rad_\Lambda(Q) = rad_B(Q)$;*

4. *la descomposición de $M = rad_\Lambda(Q)$ en Λ-indescomponibles y en B-indescomponibles coincide;*

5. *si Q es maximal en $\mathcal{P}_B$ entonces Q es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$ o existe $0 \neq f \in Hom_\Lambda(Q, P)$; si Q es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$ entonces es maximal en $\mathcal{P}_B$.*

6. *si $P \notin \mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ la componente de Γ_B que contiene a Q tiene un número finito de órbitas, se verifica que $\overline{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{C}$ coinciden.*

Demostración:

1. Si existe $T \ncong P$ predecesor de Q con $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,T) \neq 0$, obtenemos un camino $\alpha : P \xrightarrow{f} T \rightsquigarrow Q$, donde $0 \neq f$ no es un isomorfismo. Mas $P \in \mathcal{P}^g_\Lambda$ por lo que existe $(\delta) :\ I \rightsquigarrow P \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} Q$ un camino que podemos asumir es de morfismos irreducibles, pues todo camino desde un inyectivo a un proyectivo admite, según la Proposición 2.1.4, un refinamiento a otro camino de morfismos irreducibles. Luego como P es maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$, se obtiene que $P \cong Q$. De esta manera conseguimos $I \rightsquigarrow P \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} P \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} P$, un camino desde un inyectivo hasta un proyectivo que contiene por [BS], dos o más ganchos no consecutivos, lo cual es una contradicción. La prueba es análoga en el caso que T sea predecesor estricto de Q.

2. Como Λ es una extensión por un punto de B, todo $\Lambda-$módulo es también un B-módulo. Por el punto anterior $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q) = 0$, con lo cual la acción de Λ y B sobre Q es la misma.

3. Sigue inmediatamente del punto anterior.

4. Se deduce también del mismo punto.

5. Si Q no es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$ entonces existe un morfismo no nulo $Q \xrightarrow{f} Q'$ desde Q para otro proyectivo no isomorfo $Q' \in \mathrm{ind}\Lambda$. Si f factoriza a través de P obtenemos que $Q' \cong P$ pues P es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$ y por lo tanto $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q,P)$. Si el morfismo no factoriza entonces f es también un B-morfismo y como Q es maximal en $\mathcal{P}_B$ obtenemos que $Q' \overset{B}{\cong} Q$. Luego $Q' \overset{\Lambda}{\cong} Q$, lo cual genera una contradicción con lo asumido.

6. Basta demostrar que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,T) = 0$, $\forall T \in \overline{\mathcal{C}}$. Y esto surge del Corolario 4.2.2 ya que $\mathcal{C}(P)$ contiene un módulo inyectivo pues $P \in \mathcal{P}^g_\Lambda$. ■

Lema 5.1.3

Consideramos $\Lambda = B[M]$ un álgebra shod, extensión por un punto de un álgebra de Artin B a través de un módulo M. Entonces B es un álgebra shod y $\tau_B M \in add\mathcal{L}_B$ o M es proyectivo.

Demostración:

Si el álgebra B no fuera shod, existiría un módulo $X \in \mathrm{ind}B$ con $dp_B X \geq 2$ y también $di_B X \geq 2$. Esto implicaría que $dp_\Lambda(0, X, 0) \geq 2$ y que $di_\Lambda(0, X, 0) \geq 2$, lo que contradice la hipótesis.

En el caso que $\tau_B M = 0$ tenemos que M es proyectivo. Supongamos entonces que $0 \neq \tau_B M \notin \mathrm{add}\mathcal{L}_B$, o sea que existe $M_1 \in \mathrm{ind}B$ sumando directo de M tal que $\tau_B M_1 \notin \mathcal{L}_B$. Entonces existe $X \in \mathrm{ind}B$ con $dp_B X \geq 2$ y un camino en $\mathrm{ind}B$ (δ) : $X \rightsquigarrow \tau_B M_1$. Como $dp_B X \geq 2$ entonces $dp_\Lambda(0, X, 0) \geq 2$ y por lo tanto existe un inyectivo $I \in \mathrm{ind}\Lambda$ tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(I, \tau_\Lambda(0, X, 0)) \neq 0$. Así podemos construir un camino en $\mathrm{ind}\Lambda$:

$$(\delta') : I \to \tau_\Lambda(0, X, 0) \to E \to (0, X, 0) \overset{(0,(\delta),0)}{\rightsquigarrow} (0, \tau_B M_1, 0)$$

$$\to (0, F_1, 0) \to (0, M_1, 0) \to (k, M, di) = P(M),$$

donde (γ) : $0 \to \tau_B M_1 \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} M_1 \to 0$ es la sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}B$ con pozo M_1 y donde $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ es la descomposición de F en $\mathrm{ind}B$.

Afirmación: $(0, (\gamma), 0)$ es una sucesión de Auslander-Reiten en $\mathrm{mod}\Lambda$.

Como $(0, (\gamma), 0)$ es una sucesión exacta corta, es suficiente mostrar que los morfismos $(0, f_i, 0)$ y $(0, g_i, 0)$ son irreducibles $\forall i = 1, \ldots, n$. Supongamos existe $1 \leq i \leq n$ tal que $(0, f_i, 0)$ no es irreducible. En ese caso tenemos que $(0, \tau_B M_1, 0) \xrightarrow{(0,f_i,0)} (0, F_i, 0)$ factoriza a través de $T \in \mathrm{mod}\Lambda$, y como f_i era irreducible en $\mathrm{mod}B$, se deduce que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, T) \neq 0$. Luego como T es un Λ-predecesor de $(0, F_i, 0)$, predecesor no isomorfo a P, tanto T sea o no isomorfo a P, se llega a una contradicción con el Lema 5.1.2. Análogamente si suponemos que $(0, g_i, 0)$ no es irreducible para algún $1 \leq i \leq n$, y de esa manera queda demostrada la afirmación. Mas el camino (δ') puede ser refinado a un camino de morfismos irreducibles conteniendo aún dos ganchos no consecutivos. Esto es una contradicción. ∎

Lema 5.1.4

Sea Λ un álgebra shod tal que $\mathcal{P}_\Lambda^g \neq \phi$. Entonces existe un álgebra shod B y $M \in modB$ tal que $\Lambda = B[M]$ con M proyectivo o $\tau_B M \in add\mathcal{L}_B$.

Demostración:

Consideramos la relación definida en la familia de los módulos proyectivos indescomponibles: $P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, P_2) \neq 0$.

Según el Lema 5.1.1 existe P un elemento maximal de $\mathcal{P}_\Lambda^g$ que también es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$. Considerando $M = \mathrm{rad}_\Lambda(P)$ se obtiene que $\Lambda \cong B[M]$. Luego, por el Lema 5.1.3, sabemos que M es proyectivo o $\tau_B M \in \mathrm{add}\mathcal{L}_B$ y que B es un álgebra shod. ∎

Definición 5.1.2

Diremos que un camino está finitamente inserto en una componente si los módulos del mismo pertenecen a la componente y cada morfismo del camino se descompone en suma de composiciones de morfismos irreducibles pertenecientes a la componente.

Lema 5.1.5

Sea $\Lambda = B[M]$ un álgebra shod, con $M = \mathrm{rad}_\Lambda(P)$, donde P es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda^g$. Dada la descomposición en indescomponibles de $M = \bigoplus_{i=1}^{i=s_1} M_i$, consideramos $\mathcal{C}$ la componente de Γ_Λ que contiene a M y $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1..s_2}$ $(s_2 \leq s_1)$, la familia de componentes de Γ_B que contienen algún sumando directo de M . Entonces:

1. *las componentes $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1..s_2}$ tienen un número finito de órbitas y no contienen ciclos;*
2. *se verifica que $rad_B^\infty(\mathcal{C}_i) = 0$, $\forall i = 1 \dots s_2$, (las componentes $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1..s_2}$ son estándar generalizadas);*
3. *las componentes $\mathcal{C}_i$ son dirigidas en $modB$, $\forall i = 1, \dots, s_2$.*

Demostración:

1. Consideremos $\mathcal{C}_i$ una componente cualquiera de Γ_B conteniendo M_i un sumando indescomponible de M (reordenando podemos hacer coincidir índices). En el caso que $\mathcal{C}_i$ sea no semiregular, como B es shod, por el Corolario 3.4.2, obtenemos que $\mathcal{C}_i$ tiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos.

   Supongamos entonces, de ahora en más, que $\mathcal{C}_i$ es semiregular. Consideremos primero el caso en que $\mathcal{C}_i$ contiene al menos un módulo inyectivo (y por lo tanto no contiene módulos proyectivos). Sea $I \in \mathcal{C}_i$ inyectivo. Sabemos por el Lema 5.1.1, que $\tau_B M_i \in \mathcal{L}_B$. Por otro lado si $\mathcal{C}_i$ tiene un número infinito de órbitas o si $\mathcal{C}_i$ contiene un ciclo orientado, como $I \in \mathcal{C}_i$, por el Teorema 3.4.1, obtendríamos que $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{R}_B \setminus \mathcal{L}_B$, lo que implicaría una contradicción. Luego, también en este caso $\mathcal{C}_i$ tiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos.

   Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{C}_i$ es semiregular pero no contiene inyectivos. Coloquemos primero la situación en que $\mathcal{C}_i$ es regular. Supongamos que $\mathcal{C}_i$ contiene un ciclo o tiene un número infinito de órbitas. En el segundo caso por el Lema 3.1.3, también obtenemos un camino en ind$B$ $M_i \rightsquigarrow M_i$ pasando por módulos de $\mathcal{C}_i$. Considerando ambas situaciones, si al levantar el camino a indΛ, este queda finitamente inserto en $\mathcal{C}$, obtendríamos, por el Teorema 3.2.1, que $\mathcal{C}$ es un tubo semiregular, lo cual contradice la hipótesis, pues $\mathcal{C}$ es no semiregular. Si el ciclo no queda finitamente inserto en $\mathcal{C}$ obtenemos en indΛ un camino $M_1 \rightsquigarrow M_1$ con un morfismo en el radical infinito entre dos módulos de $\mathcal{C}$ o con dos (o más) morfismos en el radical infinito. El primer caso es contradictorio con la hipótesis ya que $\mathrm{rad}^{\infty}_{\Lambda}(\mathcal{C}) = 0$ pues $\mathcal{C}$ es no semiregular. En el segundo caso, consideramos el primer y el último morfismo del camino que están en el radical infinito. Aplicando los Lemas 4.1.1 y 4.1.2 sobre los morfismos citados, conseguimos un camino desde un inyectivo para un proyectivo pasando por dos morfismos en el radical infinito, lo que contradice el

Teorema 2.2.1.

Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{C}_i$ contiene proyectivos (y por lo tanto no contiene inyectivos). Supongamos que contiene un ciclo orientado. Nuevamente al levantar el ciclo a indΛ este no puede quedar finitamente inserto en $\mathcal{C}$ con lo que obtenemos un morfismo en el radical infinito entre dos módulos de $\mathcal{C}$ o dos morfismos en el radical infinito, uno saliendo de $\mathcal{C}$ y otro llegando a $\mathcal{C}$, con lo cual se llega a la misma contradicción que arriba. Luego $\mathcal{C}_i$ no contiene ciclos orientados.

Afirmación: $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{R} \neq \phi$.

Como $\mathcal{C}_i$ no contiene inyectivos, sabemos que existe $\tau^{-r}M_i$, $\forall r \geq 0$. Como la componente no contiene ciclos y es estable a derecha, entonces existe $X \in \mathcal{C}_i$ no predecesor por un camino de irreducibles de ningún módulo proyectivo y sucesor de M_i. Ahora si $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{R} = \phi$ entonces $X \notin \mathcal{R}$. Luego existe $Y \in \mathrm{mod}B$ sucesor de X tal que $di_B(Y) \geq 2$. Así obtenemos un camino:

$$(\delta): \; X \rightsquigarrow Y \surd \tau^{-1}Y \xrightarrow{f} P_0,$$

siendo P_0 un módulo proyectivo indescomponible. Luego, por lo asumido respecto del módulo X, el camino (δ) contiene un morfismo en el radical infinito. Entonces existe un camino desde M_i hasta un proyectivo P_0, pasando por un morfismo del radical infinito. Levantamos el camino a indΛ y obtenemos un camino desde M_i hasta P_0 también pasando por un morfismo en el radical infinito. Luego, aplicando el Lema 4.1.1, obtenemos un camino desde un inyectivo hasta un proyectivo, pasando por un morfismo en el radical infinito, lo que contradice a la Proposición 2.1.4. Por lo tanto la afirmación queda demostrada. Si la componente $\mathcal{C}_i$ tiene un número infinito de órbitas, como contiene un módulo proyectivo, entonces, por el Teorema 3.4.1 se obtiene que $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{L}_B \setminus \mathcal{R}_B$. Esto contradice la afirmación anterior. Luego $\mathcal{C}_i$ contiene un número finito de órbitas.

2. Consideremos $\mathcal{C}_i$ una componente cualquiera de Γ_B conteniendo M_i un sumando

indescomponible de M.

En el caso que $\mathcal{C}_i$ sea no semiregular, como B es shod, por el Corolario 4.2.3, obtenemos que $\mathcal{C}_i$ es estándar generalizada.

Supongamos entonces, de ahora en más, que $\mathcal{C}_i$ es semiregular.

Consideremos primero el caso en que $\mathcal{C}_i$ contiene proyectivos (y por lo tanto no contiene inyectivos). Sabemos que la componente $\mathcal{C}_i$ contiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos. Supongamos que existe $f \in \mathrm{rad}_B^{\infty}(X, Y)$, con $X, Y \in \mathcal{C}_i$. Por los Lemas 4.1.1 y 4.1.2, existe:

$$X \to \cdots \to X' \xrightarrow{f'} Y' \to \cdots \to Y$$

con $f' \in \mathrm{rad}_B^{\infty}(X', Y')$, X' sucesor de M_i e Y' predecesor de un proyectivo $P' \in \mathcal{C}_i$. Luego, encontramos un camino:

$$M_i \rightsquigarrow X' \xrightarrow{f'} Y' \rightsquigarrow P',$$

con $f' \in \mathrm{rad}_B^{\infty}(X', Y')$. Levantamos el camino a $\mathrm{ind}\Lambda$ y obtenemos un camino desde M_i hasta P' también pasando por un morfismo en el radical infinito. Luego, aplicando el Lema 4.1.1, obtenemos un camino desde un inyectivo hasta un proyectivo, pasando por un morfismo en el radical infinito, lo que contradice la Proposición 2.1.4.

Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{C}_i$ contiene al menos un módulo inyectivo (y por lo tanto no contiene módulos proyectivos). Sea $I \in \mathcal{C}_i$ inyectivo. Supongamos que existe $f \in \mathrm{rad}_B^{\infty}(X, Y)$ con $X, Y \in \mathcal{C}_i$. Como la componente $\mathcal{C}_i$ tiene un número finito de órbitas y no contiene ciclos, aplicando los Lemas 4.1.1 y 4.1.2, obtenemos un camino $I \rightsquigarrow M_i$ en $\mathrm{ind}B$, con un morfismo en el radical infinito. Luego levantamos ese camino a $\mathrm{ind}\Lambda$ y obtenemos un camino $I \rightsquigarrow M_i \to P$, con un morfismo en el radical infinito, obteniendo así la misma contradicción que arriba.

Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{C}_i$ es regular. Sabemos que $\mathcal{C}_i$ tiene un número finito de órbitas. Supongamos que $\mathcal{C}_i$ no es estándar generalizada. Como es regular, utilizando la Observación 4.1.1, conseguimos un camino $M_i \rightsquigarrow M_i$, conteniendo un morfismo en el radical infinito. Razonando como en el item anterior se llega a una contradicción.

3. Comenzamos la demostración de este punto con una afirmación:

   Afirmación: $M_1, M_2, \ldots, M_{s_1}$ son dirigidos en mod$B$.

   Supongamos que existe M_i no dirigido en mod$B$ para algún $i \in 1, \ldots, s_1$. Luego existe un camino en ind$B$ (η) : $M_i \rightsquigarrow M_i$. Levantamos ese camino a indΛ y obtenemos que M_i no es dirigido en modΛ, lo que contradice el Corolario 4.2.4 . Entonces queda demostrada la afirmación. Supongamos ahora que existe $X \in \mathcal{C}_i$ no dirigido. Luego existe un camino (ζ) : $X \rightsquigarrow X$, a través de módulos indescomponibles. De los puntos anteriores surge que $\mathcal{C}_i$ no contiene ciclos orientados y tampoco morfismos en el radical infinito. Entonces (ζ) ha de contener un morfismo $f_1 \in \mathrm{rad}_B^\infty(X_1, Y_1)$, $X_1 \in \mathcal{C}_i$, y otro morfismo $f_2 \in \mathrm{rad}_B^\infty(Y_2, X_2)$, $X_2 \in \mathcal{C}_i$. Por lo probado anteriormente, $\mathcal{C}_i$ tiene un número finito de órbitas, por lo que aplicando los Lemas 4.1.1 y 4.1.2, obtenemos un camino en ind$B$:

   $$\text{(i) } I_h \rightsquigarrow P_h \text{ o (ii) } I_h \rightsquigarrow M_i \text{ o (iii) } M_i \rightsquigarrow M_i \text{ o (iv) } M_i \overset{\delta_B}{\rightsquigarrow} P_h,$$

   todos conteniendo algún morfismo en el radical infinito, donde I_h es un inyectivo indescomponible y P_h es un proyectivo indescomponible. El primer caso contradice la Proposición 2.1.4. En el segundo, haciendo un desarrollo como en el punto anterior obtenemos también una contradicción. El tercero es contradictorio con la afirmación demostrada arriba. En el cuarto caso levantamos el camino δ_B a indΛ y obtenemos un camino $M_i \overset{\delta_\Lambda}{\rightsquigarrow} P_h$ conteniendo al menos un morfismo en el radical infinito. Luego aplicando el Lema 4.1.1 a la componente $\mathcal{C}$ y al primer morfismo de δ_Λ que esté en radical infinito, obtenemos un camino: $I' \rightsquigarrow P_h$, entre un inyectivo y un proyectivo indescomponibles y con algún morfismo en el radical infinito, lo que contradice la Proposición 2.1.4. ∎

Lema 5.1.6

Sean Λ un álgebra shod con $\mathcal{P}^g_\Lambda \neq \phi$, B álgebra shod tal que $\Lambda = B[M]$ con $M \in modB$ (según Lema 5.1.4). Si $\mathcal{P}^g_B = \phi$ entonces $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, siendo B_s un álgebra indescomponible inclinada, $\forall s = 1, \ldots, m$.

Demostración:

Consideramos P maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$ y todos los módulos inyectivos $\{I_j\}_{j=1..n}$, que son comienzo de algún camino hasta el proyectivo P:

$$(\delta_j): \; I_j \to \cdots \to P.$$

(Observar que estamos considerando un camino para cada inyectivo I_j, aunque puede existir más de un camino desde ese inyectivo I_j hasta P).

Consideramos $rad_\Lambda(P) = M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$, con M_i indescomponible, $\forall i = 1, \ldots, t$, y $\mathcal{C}$ la componente de Γ_Λ que contiene a M y a P. Como P es maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$, ha de ser maximal en el conjunto de los proyectivos indescomponibles, respecto de la relación $\preceq$, según lo probado en el Lema 5.1.1. Luego por el Lema 5.1.4, tenemos que $\Lambda = B[M]$, con B un álgebra shod y con $\mathcal{P}^g_B = \phi$ según hipótesis. Esto último implica en particular que B es casi inclinada. Luego $B = B_1 \times \ldots \times B_m$, producto de álgebras indescomponibles donde cada B_i ha de ser casi inclinada $\forall i = 1, \ldots, m$.

Consideraremos dos familias $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, las cuales definimos de la siguiente manera:

podemos afirmar, usando la Proposición 2.1.4, que cada camino (δ_j) entre el inyectivo I_j y P, es refinable a un camino de morfismos irreducibles, a los que seguiremos anotando como (δ_j). Es por eso que la componente $\mathcal{C}$ contiene todos los caminos (δ_j), $\forall j = 1, \ldots, n$. Luego, dado un camino:

$$(\delta_j): \; I_j \to \cdots \to M_{i_j} \to P,$$

consideraremos el comienzo del mismo:

$$(\xi_j): \; I_j \to \cdots \to M_{i_j},$$

donde M_{i_j} es un sumando directo indescomponible de M, $\forall j = 1, \ldots, n$. El módulo proyectivo P no pertenece a (ξ_j), $\forall j = 1, \ldots, n$, pues de lo contrario obtendríamos:

$$I_j \overset{\delta_j}{\rightsquigarrow} P \rightsquigarrow P \rightsquigarrow P$$

que según [BS] es un camino que contiene dos o más ganchos no consecutivos, lo cual es una contradicción. Luego con el Lema 5.1.2, deducimos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \xi_j) = 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$. Luego, si $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \xi_j) = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$, cada (ξ_j) es un camino de morfismos irreducibles en mod$B$. De esta manera clasificaremos las álgebras $B_1, \ B_2, \ldots, B_m$ en dos familias $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, según contengan o no un comienzo de camino (ξ_j), para algún $j \in 1 \ldots, n$. O sea reordenando tenemos que: $\mathcal{B}_1 = \{ \ B_1, B_2, \ldots, B_t \ \}$, aquellas álgebras que contienen en su categoría de módulos algún (ξ_j); y $\mathcal{B}_2 = \{ \ B_{t+1}, B_{t+2}, \ldots, B_m \ \}$, aquellas álgebras que contienen algún sumando de $M = rad_\Lambda(P)$, pero no contienen ningún comienzo de camino. Probaremos que en ambos casos las álgebras B_i, $\forall i = 1, \ldots, n$, son inclinadas.

1. Caso $B_i \in \mathcal{B}_1$. Llamaremos $\mathcal{C}_i$ a una de las componentes de Γ_{B_i} que contiene un o más comienzo de caminos. Sea:

   $$(\xi_h): \ I_h \to \cdots \to M_h$$

   un comienzo de camino contenido en $\mathcal{C}_i$. Por el Lema 5.1.3, sabemos que $\tau_B M_h = \tau_{B_i} M_h \in \mathcal{L}_{B_i} \cap \mathcal{C}_i$. Como $I_h \in \mathcal{C}_i$, y B_i es casi inclinada, utilizando el Teorema 5.2 de [CS], inferimos que B_i tiene que ser inclinada.

2. Caso $B_i \in \mathcal{B}_2$. Consideramos $M_h \in B_i$ sumando indescomponible de $M = rad_\Lambda(P)$ en modΛ. Llamamos $\mathcal{C}_i$ a la componente de Γ_{B_i} que contiene a M_h. Luego, por el Lema 5.1.3, sabemos que M_h es proyectivo o $\tau_{B_i} M_h \in \mathcal{L}_{B_i}$. En el primer caso también vale que $M_h \in \mathcal{L}_{B_i}$ pues B_i es casi inclinada. Luego en ambos casos podemos afirmar que $\mathcal{L}_{B_i} \cap \mathcal{C}_i \neq \phi$. Supongamos ahora que B_i es casi inclinada pero no inclinada. Como $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{L}_{B_i} \neq \phi$, entonces, por el Teorema 5.2 de [CS], $\mathcal{C}_i$ no contiene inyectivos. Supongamos que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{R}_{B_i} = \phi$. En ese caso $\forall \ N \in \mathcal{C}_i$ existe un camino en indB_i:

   $$\delta(N, P_N): \ N \to \cdots \to \tau X \surd X \to P_N,$$

donde P_N es un proyectivo indescomponible.

Afirmación: Existen infinitos módulos $N \in \mathcal{C}_i$ y por lo menos un proyectivo P_0 tal que $P_N = P_0$ y $\delta(N, P_N)$ contiene algún morfismo $f \in \mathrm{rad}^\infty(\mathrm{ind}B_i)$.

La componente $\mathcal{C}_i$ es estable a derecha pues no contiene inyectivos y no contiene módulos $\tau-$periódicos pues, por el Lema 5.1.5, no contiene ciclos. Claro es que a lo sumo contiene un número finito de proyectivos, por lo que es fácil deducir que existen infinitos módulos $N \in \mathcal{C}_i$ sucesores por caminos de irreducibles de todos los proyectivos de $\mathcal{C}_i$. Luego dado un módulo N en esas condiciones, consideramos $\delta(N, P_N)$. Sabemos que $\mathcal{C}_i$ no contiene ciclos orientados por lo que, al ser N sucesor de todos los proyectivos de $\mathcal{C}_i$, el camino $\delta(N, P_N)$ ha de tener un morfismo en el radical infinito (en caso contrario sería posible refinar el camino a otro de morfismos irreducibles, con lo cual $P_N \in \mathcal{C}_i$ y entonces obtendríamos un ciclo en $\mathcal{C}_i$). Así entonces queda probada la afirmación. Fijemos ahora un módulo N_0 en las condiciones de la afirmación anterior, que además sea sucesor por un camino de irreducibles de M_h. No es difícil observar, dado que en $\mathcal{C}_i$ no hay inyectivos, que tal módulo existe. Sea $(\eta): \; M_h \rightsquigarrow N_0$, tal camino de irreducibles en $\mathcal{C}_i$. De esta manera obtenemos un camino:

$$M_h \overset{\eta}{\rightsquigarrow} N_0 \overset{\delta(N_0,P_0)}{\rightsquigarrow} P_0,$$

con algún morfismo en el radical infinito. Luego levantando el camino a $\mathrm{ind}\Lambda$, obtenemos un camino desde $M_h \in \mathcal{C}$ hasta un proyectivo P_0 con un morfismo en el radical infinito. Aplicando el Lema 4.1.1, obtenemos en $\mathrm{ind}\Lambda$ un camino desde un inyectivo hasta un proyectivo conteniendo un morfismo en el radical infinito, lo que contradice la Proposición 2.1.4. Entonces $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{R}_{B_i} \neq \phi$ y estamos suponiendo que B_i es casi inclinada pero no inclinada, con lo que se deduce que $\mathcal{C}_i$ no contiene proyectivos. Concluimos que $\mathcal{C}_i$ es regular. Por otro lado, por el Lema 5.1.5, la componente $\mathcal{C}_i$ es dirigida. Entonces, usando el Teorema 1.5 de [C], $\mathcal{C}_i$ tiene que ser una componente de conexión. Por lo tanto el álgebra B_i ha de ser inclinada. ∎

5.2 Resultado central y ejemplos.

Teorema 5.2.1

Considero Λ *un álgebra shod estricta, donde* $\mathcal{P}_\Lambda = \{ P_1, \ldots, P_n \}$*. Entonces* $\Lambda = (\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m)[M_t] \ldots [M_1]$ *con* $t \leq n$*, donde* $M_j = rad_\Lambda(P_j)$*,* $\forall 1 \leq j \leq t$ *y* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ *son álgebras indescomponibles inclinadas.*

Demostración:

Como Λ es shod estricta tenemos que $\mathcal{P}^g_\Lambda \neq \phi$ y luego por el Lema 5.1.1 sabemos que existe por lo menos un elemento maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$ que también es maximal en $\mathcal{P}_\Lambda$. Supongamos que $P_1 \in \mathcal{P}^g_\Lambda$ es uno de los elementos maximales (sino reordenamos $\mathcal{P}^g_\Lambda$). Luego, si consideramos $M_1 = rad_\Lambda(P_1)$, obtenemos, por el Lema 5.1.4, que $\Lambda = \Lambda'[M_1]$, donde $\Lambda' = \Lambda'_1 \times \ldots \times \Lambda'_s$, con Λ'_i indescomponible y shod, $\forall i = 1, \ldots, s$. También concluimos que M_1 es proyectivo o $0 \neq \tau_{\Lambda'} M_1 \in \mathrm{add}\mathcal{L}_{\Lambda'}$ y obviamente $\#\mathcal{P}_{\Lambda'} < \#\mathcal{P}_\Lambda$. En particular se obtiene $\#\mathcal{P}_{\Lambda'_i} < \#\mathcal{P}_\Lambda$, $\forall i = 1, \ldots, s$. Luego, utilizando notación similar a la de la demostración anterior, para todo camino:

$$(\delta_j): \ I_j \to \cdots \to M_{1_j} \to P,$$

consideraremos el comienzo del mismo:

$$(\xi_j): \ I_j \to \cdots \to M_{1_j},$$

donde M_{1_j}, $\forall j$, es un sumando directo indescomponible de M_1. Consideremos las álgebras Λ'_j tales que $\mathcal{P}^g_{\Lambda'_j} = \phi$. Se deduce que estas son casi inclinadas y puede suceder que el quiver de Auslander-Reiten contenga o no un comienzo de camino:

$$(\xi_j): \ I_j \to \cdots \to M_{1_j}.$$

Supongamos que el primer caso se da, o sea que existe Λ'_j tal que el quiver de Auslander-Reiten contiene un comienzo de camino (ξ_j). Llamamos $\mathcal{C}_j$ a la componente de $\Gamma_{\Lambda'_i}$ que contiene un o más comienzo de caminos y sea:

$$(\xi_j): \ I_j \to \cdots \to M_{1_j}$$

uno de los mencionados comienzo de camino, donde M_{1_j} es sumando indescomponible de $M_1 = rad_\Lambda(P_1)$. Sabemos que M_1 es proyectivo o $0 \neq \tau_{\Lambda'} M_1 \in \mathcal{L}_{\Lambda'}$. Ya que Λ'_j es casi inclinada, en ambos casos se verifica que $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{L}_{\Lambda'_j} \neq \phi$. Entonces, como Λ'_j es casi inclinada, si fuese no inclinada, usando el Teorema 5.2 de [CS], como $\mathcal{C}_j$ contiene un inyectivo, obtendríamos que $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{R}_{\Lambda'_j} \setminus \mathcal{L}_{\Lambda'_j}$, lo que implica una contradicción. Luego Λ'_j es inclinada. Supongamos ahora que el segundo caso se da, o sea que existe Λ'_j tal que el quiver de Auslander-Reiten no contiene un comienzo de camino. Sea $\mathcal{C}_j$ la componente de $\Gamma_{\Lambda'_j}$ que contiene a M_{1_j} sumando de $M_1 = rad_\Lambda(P)$. Sabemos que M_{1_j} es proyectivo o $0 \neq \tau_{\Lambda'_j} M_{1_j} \in \mathcal{L}_{\Lambda'_j}$. Como Λ'_j es casi inclinada en ambos casos $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{L}_{\Lambda'_j} \neq \phi$. Si la componente $\mathcal{C}_j$ contiene inyectivos, usando nuevamente el Teorema 5.2 de [CS], obtenemos que Λ'_j es inclinada y no hay nada para agregar. Consideremos entonces el caso en que $\mathcal{C}_j$ no contiene inyectivos. Razonando igual que en el caso análogo de la demostración del Lema 5.1.6 concluimos que $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{R}_{\Lambda'_j} \neq \phi$. Luego si la componente $\mathcal{C}_j$ contiene proyectivos, usando el mismo Teorema que arriba, obtenemos que Λ'_j es inclinada y no hay nada para agregar. Consideremos entonces el caso en que $\mathcal{C}_j$ tampoco contiene proyectivos. Como Λ'_j es casi inclinada, como $\mathcal{C}_j$ no contiene inyectivos ni proyectivos y ya que por el Lema 5.1.6 sabemos que $\mathcal{C}_j$ es dirigida, podemos concluir entonces por el Teorema 1.5 de [C] que Λ'_j es inclinada pues a $\mathcal{C}_j$ sólo le queda la posibilidad de ser una componente de conexión. Por lo tanto Λ'_j es inclinada en ambos casos.

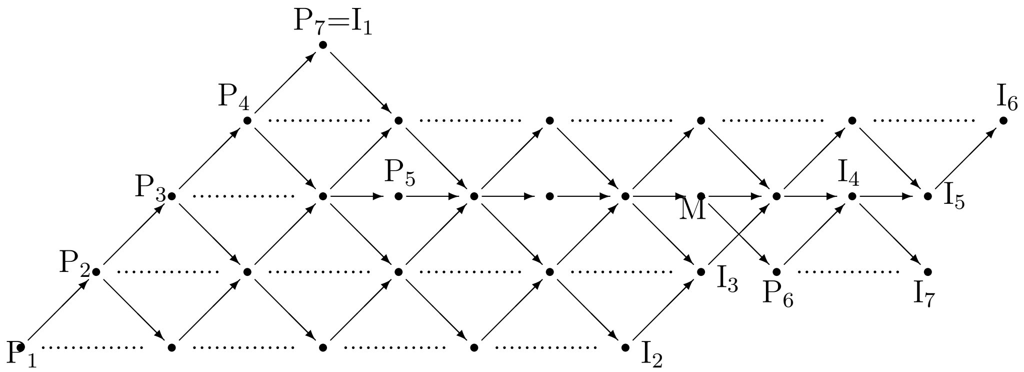
Finalmente obtenemos que $\Lambda = \Lambda'[M_1]$, donde $\Lambda' = \Lambda'_1 \times \ldots \times \Lambda'_s$, producto de álgebras shod indescomponibles. Mas si $\mathcal{P}^g_{\Lambda'_i} = \phi$ por lo demostrado arriba, Λ'_i es un álgebra inclinada. En el caso que $\mathcal{P}^g_{\Lambda'_i} \neq \phi$, pues recomenzamos el proceso considerando un proyectivo maximal en esa familia y vemos ahora a Λ'_i como extensión por un punto. Tenemos que $\#\mathcal{P}^g_{\Lambda'_i} \leq \#\mathcal{P}^g_{\Lambda'} \leq \#\mathcal{P}_{\Lambda'} < \mathcal{P}_\Lambda$, por lo que el número de proyectivos finales de caminos no seccionales está acotado por el número de proyectivos indescomponibles y este número desciende estrictamente en cada paso de descomposición. Luego el proceso finaliza.

Resumiendo $\Lambda = (\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m)[M_t] \ldots [M_1]$, con Λ_i inclinada indescomponible, $\forall i = 1, \ldots, m$. $\blacksquare$

El siguiente ejemplo intenta dar una idea del procedimiento seguido en el Teorema 5.2.1. Consideremos el álgebra $\Lambda = B[P_4]$ extensión por un punto de B, álgebra observada en el Ejemplo 5.1.1 (I). Su carcaj ordinario es:

$$\begin{tikzcd} & & 7 \arrow[d, "\mu"] & & & \\ 6 \arrow[r, "\epsilon"] & 5 \arrow[r, "\delta"] & 4 \arrow[r, "\gamma"] & 3 \arrow[r, "\beta"] & 2 \arrow[r, "\alpha"] & 1 \end{tikzcd} \quad \text{con } \alpha\beta\gamma\delta = \gamma\delta\epsilon = 0.$$

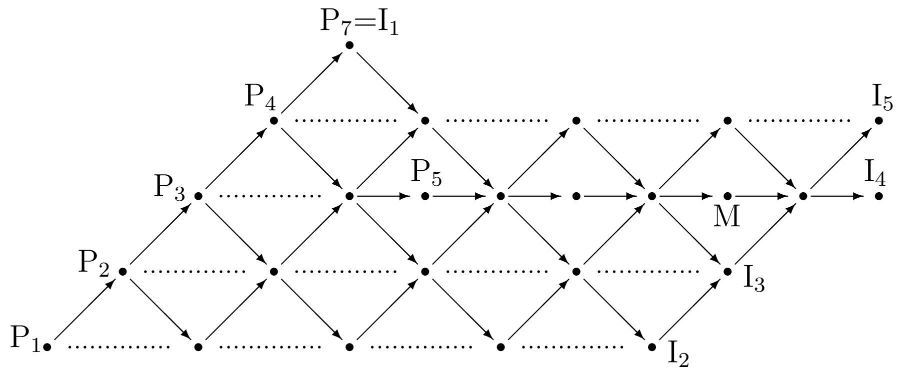
En este caso, el carcaj de Auslander-Reiten de Λ tiene el siguiente esqueleto:



En este caso tenemos que $\mathcal{P}^g_\Lambda = \{ P_6 \}$, y por lo tanto este proyectivo es maximal en esa familia. Siguiendo el procedimiento explicitado en el Teorema 5.2.1, consideramos $M = rad_\Lambda(P_6)$. Entonces $\Lambda \cong \Lambda'[M]$, siendo el carcaj ordinario de Λ':

$$\begin{tikzcd} & 7 \arrow[d, "\mu"] & & & \\ 5 \arrow[r, "\delta"] & 4 \arrow[r, "\gamma"] & 3 \arrow[r, "\beta"] & 2 \arrow[r, "\alpha"] & 1 \end{tikzcd} \quad \text{con } \alpha\beta\gamma\delta = 0.$$

Luego el carcaj de Auslander-Reiten de Λ' tiene el siguiente esqueleto:



Se puede concluir observando que el carcaj posee secciones completas que el álgebra Λ' es inclinada.

Coisa Mais Linda.

Coisa mais bonita

É você, assim

Justinho você

Eu juro

Eu não sei por que você

Você é mais bonita que a flor

Quem dera

A primavera da flor

Tivesse todo esse aroma de beleza

Que é o amor

Perfumando a natureza

Numa forma de mulher

Porque tão linda assim

Não existe, a flor

Nem mesmo a cor não existe

É o amor

Nem mesmo o amor existe

E. G.

Capítulo 6

COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD.

El objetivo en esta sección será probar que la cohomología de Hochschild de un álgebra shod es cero desde el grado dos en adelante. La descripción de la cohomología de Hochschild surge de discutir y compartir ideas al respecto con los Dres. Flavio Coelho y Ángela Savioli (IME-USP), por lo que este es un trabajo en común con ellos. Sin embargo las demostraciones que aparecen en este capítulo son originales.

Utilizaremos como herramienta de demostración la conocida sucesión exacta larga de Happel que describe la relación entre las cohomologías de Hochschild de un álgebra y una extensión por un punto de la misma. Más precisamente si

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k & 0 \\ {}_kM_B & B \end{pmatrix}$$

entonces se obtiene la sucesión exacta larga:

$$0 \to \mathrm{H}^0(\Lambda) \to \mathrm{H}^0(B) \to \frac{\mathrm{End}_{B(M)}}{k} \to \mathrm{H}^1(\Lambda) \to \mathrm{H}^1(B) \to \mathrm{Ext}^1_B(M,M) \to$$

$$\mathrm{H}^2(\Lambda) \to \mathrm{H}^2(B) \to \mathrm{Ext}^2_B(M,M) \to \mathrm{H}^3(\Lambda) \to \mathrm{H}^3(B) \to \mathrm{Ext}^3_B(M,M) \to \dots$$

Recordamos también que la cohomología de Hochschild es invariante bajo el proceso de inclinación. En particular la cohomología de Hochcschild de un álgebra inclinada es cero a partir del grado dos.

6.1 Preliminares.

Lema 6.1.1

Sea $\Lambda = B[M]$ un álgebra shod, con $M = rad_\Lambda(P)$, indescomponible, siendo P maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$. Entonces $Ext^1_B(M,M) = 0$.

Demostración:

Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_B(M,M) \neq 0$, o sea existe una sucesión exacta corta que no escinde (δ) : $0 \to M \to E \to M \to 0$. Consideramos la descomposición de E en módulos indescomponibles: $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Como (δ) no escinde y M es indescomponible entonces $\mathrm{Hom}_B(M, E_i) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}_B(E_i, M) \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Luego existe $M \to E_1 \to M$, un ciclo del cual participa M, lo que implica que M no es dirigido, contradiciendo el Lema 5.1.5. Entonces $\mathrm{Ext}^1_B(M,M) = 0$. ∎

Lema 6.1.2

Sea $\Lambda = B[M]$ un álgebra shod, con $M = rad_\Lambda(P)$, descomponible, siendo P maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$. Entonces $Ext^1_B(M,M) = 0$.

Demostración:

Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_B(M,M) \neq 0$. Entonces existe M_1 sumando indescomponible de M tal que $\mathrm{Ext}^1_B(M, M_1) \neq 0$. Si $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_2 puede ser descomponible, consideramos el Λ-módulo P/M_2.

Afirmación: $P/M_2 = (k, M_1, \pi)$.

Consideramos el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & 0 & \to & k\otimes M & \stackrel{id}{\to} & k\otimes M\cong M & \to & 0\\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow id & \circlearrowleft & \downarrow \pi & & \\
0 & \to & M_2 & \xrightarrow{i_{M_2}} & M & \xrightarrow{\pi} & M_1 & \to & 0
\end{array}.
$$

A partir del mismo se demuestra la afirmación. Usando el Lema 2.2 de [HRS1], podemos concluir que $id_\Lambda(P/M_2) \geq 2$, pues $\mathrm{Ext}^1_B(M,M_1) \neq 0$. Por otro lado $\mathrm{Ext}^1_B(M,M_1) = \mathrm{Ext}^1_B(M_1,M_1) \oplus \mathrm{Ext}^1_B(M_2,M_1)$. Razonando análogamente a lo hecho en la demostración del Lema anterior podemos concluir que $\mathrm{Ext}^1_B(M_1,M_1) = 0$, de lo que se deduce que $\mathrm{Ext}^1_B(M_2,M_1) \neq 0$. En particular M_2 no es proyectivo. Luego considerando la sucesión:

$$(\eta):\ 0 \to M_2 \hookrightarrow P \to P/M_2 \to 0,$$

concluimos que $dp_B(P/M_2) \geq 2$. Esto es absurdo pues tendríamos un módulo $P/M_2 \in \mathrm{ind}\Lambda$ con dimensión proyectiva e inyectiva mayor o igual que dos siendo Λ un álgebra shod. Entonces $\mathrm{Ext}^1_B(M,M) = 0$. ■

Lema 6.1.3

Sea $\Lambda = B[M]$ un álgebra shod con $M = rad_\Lambda(P)$, donde P es maximal en $\mathcal{P}^g_\Lambda$. Entonces $Ext^2_B(M,M) = 0$.

Demostración:

Supongamos que $\mathrm{Ext}^2_B(M,M) \neq 0$. Entonces existe M_1 sumando indescomponible de M tal que $\mathrm{Ext}^2_B(M,M_1) \neq 0$.

Afirmación: $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M,M_1) = \mathrm{Ext}^2_B(M,M_1) \neq 0$.

Sabemos que $\forall Q \in \mathcal{P}_B$, se verifica que $\mathrm{Hom}_B(Q,M_1) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda((0,Q,0),(0,M_1,0))$. Como la resolución proyectiva de M en $\mathrm{mod}\Lambda$ y en $\mathrm{mod}B$ coincide, podemos concluir que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M_1) = \mathrm{Ext}^i_B(M,M_1)$, $\forall i \geq 0$. De esta manera queda probada la afirmación. Consideremos ahora la sucesión exacta corta:

$$(\eta) : 0 \to M_1 \hookrightarrow P \to P/M_1 \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,-)$ a (η) obtenemos la sucesión exacta larga:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, P/M_1) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, M_1) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, P) \to \cdots.$$

Como $P \in \mathcal{P}^g_\Lambda$ entonces $P \in \mathcal{R}_\Lambda \setminus \mathcal{L}_\Lambda$, y por lo tanto $id_\Lambda(P) \leq 1$. Luego $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, P) = 0$, con lo que se deduce que si $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(M, M_1) \neq 0$ entonces $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, P/M_1) \neq 0$. Utilizando las fórmulas de Auslander-Reiten se deduce que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P/M_1, \tau_\Lambda M) \neq 0$. Luego existe N sumando indescomponible de M tal que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P/M_1, \tau_\Lambda N) \neq 0$. Obsérvese que P/M_1 es indescomponible, por lo que se obtiene el siguiente camino en $\mathrm{ind}\Lambda$:

$$P \to P/M_1 \to \tau_\Lambda N \surd N \to P,$$

lo que implica que P no es dirigido, contradiciendo el Lema 4.2.4. Se concluye que $\mathrm{Ext}^2_B(M, M) = 0$. ∎

6.2 Resultado central y ejemplo.

Teorema 6.2.1

Dada un álgebra estricta shod Λ *se verifica que* $H^i(\Lambda) = 0$, $\forall i \geq 2$.

Demostración:

Sabemos por el Teorema 5.2.1 que toda álgebra shod Λ se puede obtener como iteración de extensiones por un punto sobre un álgebra inclinada no necesariamente indescomponible. O sea: $\Lambda = (\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m)[M_t] \ldots [M_1]$, donde $M_j = \mathrm{rad}_\Lambda(P_j)$, $P_j \in \mathcal{P}_\Lambda = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $\forall j = 1, \ldots, t$. Fijamos la misma notación que en esa sección:

$$\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m = B_t;$$
$$(\Lambda_1 \times \ldots\ldots. \times \Lambda_m)[M_t] = B_{t-1};$$
$$(\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m)[M_t][M_{t-1}] = B_{t-1}[M_{t-1}] = B_{t-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Lambda = (\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_m)[M_t] \ldots [M_1] = \ldots = B_1[M_1] = B_0.$$

En esta notación $M_j = rad_\Lambda(P_j)$, $\forall j = 1, \ldots, t$, donde, según la construcción efectuada en el Teorema 5.2.1, P_j es maximal en $\mathcal{P}^g_{B_{j-2}}$. Utilizando reiteradas veces la sucesión exacta larga de Happel obtenemos la siguiente lista de sucesiones exactas largas:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_{B_1}(M_1, M_1) \to \mathrm{H}^2(\Lambda) \to \mathrm{H}^2(B_1) \to$$

$$\mathrm{Ext}^2_{B_1}(M_1, M_1) \to \mathrm{H}^3(\Lambda) \to \mathrm{H}^3(B_1) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_{B_2}(M_2, M_2) \to \mathrm{H}^2(B_1) \to \mathrm{H}^2(B_2) \to$$

$$\mathrm{Ext}^2_{B_2}(M_2, M_2) \to \mathrm{H}^3(B_1) \to \mathrm{H}^3(B_2) \to \cdots$$

....

....

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_{B_t}(M_t, M_t) \to \mathrm{H}^2(B_{t-1}) \to \mathrm{H}^2(B_t) \to$$

$$\mathrm{Ext}^2_{B_t}(M_t, M_t) \to \mathrm{H}^3(B_{t-1}) \to \mathrm{H}^3(B_t) \to \cdots$$

Comenzamos por analizar la última sucesión exacta larga. Según los Lemas 6.1.1, 6.1.2 y 6.1.3, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_{B_t}(M_t, M_t) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_{B_t}(M_t, M_t) = 0$. Esto implica que: $\mathrm{H}^2(B_{t-1}) \cong \mathrm{H}^2(B_t)$ y $\mathrm{H}^3(B_{t-1}) \hookrightarrow \mathrm{H}^3(B_t)$. Analizando análogamente las otras sucesiones exactas largas obtenemos:

$$\mathrm{H}^2(B_t) \cong \mathrm{H}^2(B_{t-1}) \cong \mathrm{H}^2(B_{t-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{H}^2(B_1) \cong \mathrm{H}^2(\Lambda),$$

y también se concluye que:

$$\mathrm{H}^3(\Lambda) \hookrightarrow \mathrm{H}^3(B_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{H}^3(B_{t-2}) \hookrightarrow \mathrm{H}^3(B_{t-1}) \hookrightarrow \mathrm{H}^3(B_t).$$

Sabemos que $\mathrm{H}^2(B_t) = 0$ y que $\mathrm{H}^3(B_t) = 0$ pues B_t es un álgebra inclinada. Luego $\mathrm{H}^2(B_j) = 0$ y $\mathrm{H}^3(B_j) = 0$, $\forall 0 \leq j \leq t$. En particular $\mathrm{H}^2(\Lambda) = 0$ y $\mathrm{H}^3(\Lambda) = 0$. Por otro lado sabemos que $\mathrm{dgl}\Lambda \leq 3$, lo que implica que $\mathrm{H}^j(\Lambda) = 0$, $\forall j \geq 4$. Luego podemos concluir que $\mathrm{H}^j(\Lambda) = 0$, $\forall j \geq 2$. ■

Presentamos un ejemplo en donde se calcula la cohomología de Hochschild de un álgebra shod con los procedimientos seguidos en el teorema anterior.

Ejemplo 6.2.1

Consideramos nuevamente Λ la k-álgebra dada por el carcaj:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 & & \\
2 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] & 6 \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{con } \beta\alpha = \delta\epsilon = \gamma\beta = \gamma\delta = 0.
$$

Recordamos su carcaj de Auslander-Reiten:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & \mathrm{P}_6 \arrow[dr] & \\
 & \mathrm{P}_4 \arrow[dr] & & \mathrm{P}_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_6 \\
\mathrm{P}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & & \mathrm{P}_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_2 \\
 & & & & & & \mathrm{P}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Así $\Lambda = \Lambda'[S_3][S_5]$, donde $\Lambda' = kQ/I$ siendo Q el siguiente carcaj:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 & \\
3 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{con } \gamma.\beta = \gamma.\delta = 0.
$$

El carcaj de Auslander-Reiten asociado es el siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}_4 \arrow[dr] & & \mathrm{P}_3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_5 \\
\mathrm{P}_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{S}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \mathrm{P}_5 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \mathrm{I}_3
\end{tikzcd}
$$

Esta álgebra fue presentada en el Ejemplo 1.6.1, la cual es inclinada del álgebra hereditaria $H = \mathrm{End}_{\Lambda'}(T)$ donde T es el módulo presentado en ese ejemplo. Sabemos que $\mathrm{H}^i(\Lambda') = 0$, $\forall i \geq 2$, y por varias razones $\mathrm{H}^1(\Lambda') = 0$ (por ejemplo podemos observar que Λ' tiene radical cuadrado nulo y además el carcaj ordinaro de Λ' es un árbol). Luego tenemos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \to \mathrm{H}^0(\Lambda'[S_3]) \to \mathrm{H}^0(\Lambda') \to \frac{\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(S_3,S_3)}{k} \to \mathrm{H}^1(\Lambda'[S_3]) \to \mathrm{H}^1(\Lambda') \to \mathrm{Ext}^1_{\Lambda'}(S_3, S_3) \to \cdots$$

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^0(\Lambda'[S_3][S_5]) \to \mathrm{H}^0(\Lambda'[S_3]) \to \frac{\mathrm{Hom}_{\Lambda'[S_3]}(S_5,S_5)}{k} \to \mathrm{H}^1(\Lambda'[S_3][S_5]) \\ \to \mathrm{H}^1(\Lambda'[S_3]) \to \mathrm{Ext}^1_{\Lambda'[S_3]}(S_5, S_5) \to \cdots. \end{aligned}$$

Por lo afirmado anteriormente $\mathrm{H}^1(\Lambda') = 0$ y también es claro que $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(S_3, S_3) = k$ y $\mathrm{Hom}_{\Lambda'[S_3]}(S_5, S_5) = k$. Con estos cómputos y de acuerdo al Teorema 6.2.1 surge que:

$$\mathrm{H}^*(\Lambda) = k \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$$

.

Desaparecidos.

Están en algún sitio

concertados / desconcertados / sordos /

buscándose / buscándonos

bloqueados por los signos y las dudas

contemplando las verjas de las plazas

los timbres de las puertas

las viejas azoteas

ordenando sus sueños / sus olvidos

quizá convalescientes de su muerte privada

Otra voz canta.

Por detrás de mi voz

-escucha, escucha-

otra voz canta.

Viene de atrás, de lejos;

viene de sepultadas

bocas y canta.

Dicen que no están muertos

-escúchalos, escucha-

mientras se alza la voz

que los recuerda y canta.

Escucha, escucha,

otra voz canta.

nadie les ha explicado con certeza

si ya se fueron o si no

si son pancartas o temblores

sobrevivientes o responsos
ven pasar árboles y pájaros
e ignoran a que sombra pertenecen

Dicen que ahora viven
en tu mirada.
(Sostenlos con tus ojos,
con tus palabras;
sostenlos con tu vida,
que no se pierdan,
que no se caigan).
Escucha, escucha,
otra voz canta.

cuando empezaron a desaparecer,
hace tres / cinco / siete ceremonias
a desaparecer como sin sangre
como sin rostro y sin nosotros,
vieron por la ventana de su ausencia
lo que quedaba atrás
ese andamiaje de cielo y humo.

No son sólo memoria,
son vida abierta,
continua y ancha;
son camino que empieza.
Cantan conmigo,
conmigo cantan.
Dicen que no están muertos

-escúchalos, escúchalos-

mientras se alza la voz

que los recuerda y canta.

Cantan conmigo,

conmigo cantan.

cuando empezaron a desaparecer
como el oasis en los espejismos
a desaparecer sin últimas palabras
tenían en sus manos los trocitos
de cosas que querían
están en algún sitio / nube o tumba
están en algún sitio / estoy seguro
allá en el sur del alma
es posible que hayan extraviado la brújula
y hoy vaguen preguntando preguntando
dónde carajo queda el buen amor
porque vienen del odio

Mario Benedetti.

Dicen que no están muertos,

-escúchalos, escucha-

mientras se alza la voz

que los recuerda y canta.

Escucha, escucha,

otra voz canta.

No son sólo memoria,

son vida abierta,

son camino que empieza

y que nos llama.

Cantan conmigo,

conmigo cantan;

cantan conmigo,

conmigo cantan;

cantan conmigo,

conmigo cantan.

Daniel Viglietti.

Bibliografía

[ARIV] M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras IV: Invariants given by almost split sequences*, Comm. Algebra **5**, (1977).

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, (1995).

[AS] M. Auslander, S. Samlø, *Preprojective modules over artin algebras*, J. Algebra **66**, (1980).

[Ass] I. Assem, *Tilting theory - an introduction*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, Vol 26 PWN, Warsaw (1990).

[Baer] D. Baer, *Wild hereditary artin algebras and linear methods*, Manuscr. Math. **55**, (1986).

[BB] S. Brenner, M. Butler, *Generalizations of Bernstein-Gelfand and Ponomarev reflection functors*, Proc. ICRA II (Ottawa), **832** of Lectures Notes in Mathematicas, Springer verlag, (1980).

[BGS] I. Bernstein, I. Gelfand, V. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspechi Mat. Nauk. **28**, 19-38, (1973) = Russian Math. Surveys **28**, 17-32 (1973).

[BS] R. Bautista, S. Smalø, *Nonexistent cycles*, Comm. in Algebra 11, (1983).

[C] F. U. Coelho, *Directing components for quasitilted algebras*, Colloquium Mathematicum, **82**,2, 271-275, (1999).

[CH] F. U. Coelho, D. Happel, *Quasitilted algebras admit a preprojective component*, Proceedings of Amer. Math. Soc., **125**,5, 1283-1291, (1997).

[CL] F. U. Coelho, M. Lanzilotta, *Algebras with small homological dimensions*, Manuscripta Math., **100**, 1-11, (1999).

[CS] F. U. Coelho, A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components for quasitilted algebras*, Fund. Math. **149**, (1996).

[DK] Y. Drozd, V. Kirichenko, *Finite dimensional algebras*, Springer-Verlag, (1994).

[HPR] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, *Vinberg's characterisation of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications to DTr-periodic modules*, in: Representation Theory II, Springer Lecture Notes Math. **832**, (1980).

[HR] D. Happel, I. Reiten, *An introduction to quasitilted algebras.*

[HRi] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **274**, (1982).

[HRS1] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 575, Vol. 120, (1996).

[HRS2] D. Happel, I. Reiten, S. Smalø, *Quasititlted algebras*, NATO Advanced Science Institute Series/Kluwer Academic Publishers, Vol. 424 163-182, (1994).

[IT] K. Igusa, G. Todorov, *A characterization of finite Auslander-Reiten quivers*, J. Algebra **89** (1984) 148-177.

[Liu] S. Liu, *Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver*, Journal London Math. Soc. **43**, (1993).

[ML] Marcelo Lanzilotta, *Tesis de maestría*, IME-USP, (1997).

[R] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics **1099**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1984).

[Sko] A. Skowroński, *Regular Auslander-Reiten components containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**, (1994).

[Zha] Y. Zhang, *The structure of stable components*, Can. J. Math. **43**, (1991).