Trabajo Monográfico

Dimensión global

Telmo Acosta

Orientadores: Dr. Marcelo Lanzilotta (UdelaR),
Dr. Gustavo Mata (UdelaR).

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

15 de julio de 2016

Resumen

El objetivo de este trabajo es exponer ciertas características de la dimensión global de un anillo. Luego de introducir los conceptos y herramientas básicas del álgebra homológica, veremos que la dimensión global de un anillo Λ con unidad, queda completamente determinada por las dimensiones proyectivas de los módulos cíclicos sobre el anillo Λ.
A continuación se verá que la dimensión global de anillos noetherianos y anillos semiprimarios, es simétrica, o sea que la dimensión global a derecha e izquierda coinciden, luego se mostrará mediante un ejemplo, que en general la dimensión global no tiene porqué ser simétrica y por último veremos algunas aplicaciones.

Abstract

The aim of this work is to show some charactheristics of the global dimension of a ring. After introducing basics concepts and tools of homological algebra, we are going to see that the global dimension of a ring with unit Λ, is completely determined by the projective dimension of cyclics modules over Λ.
Next we are going to show that the left and right global dimension are equal for noetherian rings and for semi-primary rings. After that we exhibe an example that left and right global dimensions doesn't coincide. Finally we are going to show some applications.

Índice general

Introducción

El concepto de dimensión global aparece por primera vez en el artículo de David Hilbert (1862-1943), *Über die Theorie der algebraischen Formen*, publicado en 1890, en el cual demuestra que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces la dimensión global de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ en igual a n.

Luego en la década de 1950 con el comienzo formal del álgebra homológica, la dimensión global toma mayor relevancia como invariante algebraico, surgiendo en esta decada varios artículos relacionados con las dimensiones homológicas de módulos y álgebras. Uno de estos artículos es el [Aus] de Maurice Auslander (1926-1994), *Global dimension*, publicado en 1955, en el cual demuestra algunas caracterizaciones de la dimensión global de anillos con unidad y que la dimensión global a izquierda y derecha coinciden para anillos noetherianos y anillos semiprimarios.

Este trabajo monográfico tiene como base el artículo [Aus] de Maurice Auslander y tiene como objetivo mostrar de forma más simple y autocontenida lo expuesto allí, para que pueda ser leído por alguien que no esté familiarizado con los conceptos y herramientas del álgebra homológica, pero que haya cursado al menos un curso de anillos y módulos.

A continuación presentaremos un breve resumen de la forma de como está dispuesto este trabajo.

El primer capítulo está dividido en dos secciones, la primera sección contiene conceptos básicos de módulos que serán necerarios en los capítulos siguientes, y en la segunda sección se introducirán los conceptos básicos de la teoría de categorías, que es el lenguaje apropiado del álgebra homológica.

En el segundo capítulo veremos en las primeras tres secciones definiciones y propiedades de los módulos proyectivos, inyectivos y planos, los cuales serán fundamentales para la definición los funtores Ext^i_Λ y Tor^Λ_i y las dimensiones homológicas. Luego en las últimas secciones veremos algunas propiedades de los anillos noetherianos y los módulos semisimples, las cuales serán necesarias en el último capítulo.

El tercer capítulo tiene como objetivo introducir los funtores Ext^i_Λ y Tor^Λ_i y mostrar algunas de sus propiedades, las cuales serán las herramientas fundamentales para llegar al objetivo de este trabajo.

En el cuarto capítulo primero veremos las definiciones de las dimensiones proyectivas, inyectivas y global, luego todavía en la primera sección, veremos que la dimensión global de un anillo Λ con unidad, queda completamente determinada por la dimensión proyectiva de los módulos cíclicos sobre Λ. En la segunda sección introduciremos la noción de dimensión global débil y luego probaremos que la dimensión global a izquierda y derecha son iguales para anillos noetherianos. El resto del capítulo está dedicado a estudiar la dimensión gobal de anillos semiprimarios, el principal resultado, será probar que la dimensión global a izquierda y a derecha son iguales para estos anillos.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Conceptos básicos de módulos.

NOTA: Sienpre trabajaremos con anillos con unidad.

DEFINICIÓN 1.1.1. *Sea Λ un anillo, un Λ módulo a izquierda, es un grupo abeliano aditivo M que tiene una multiplicación $\Lambda \times M \longrightarrow M$, denotada por $(r, m) \longrightarrow rm$, tales que $\forall m, m' \in M$ y $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$:*

i) $\lambda(m + m') = \lambda m + \lambda m'$,

ii) $(\lambda + \lambda')m = \lambda m + \lambda' m$,

iii) $(\lambda\lambda')m = \lambda(\lambda' m)$,

iv) $1m = m$.

La definición de Λ módulo a derecha es análoga con una multiplicación $M \times \Lambda \longrightarrow M$.

NOTACIÓN 1.1.2. *Para Λ módulos a izquierda usaremos la notación ${}_\Lambda M$ y para Λ módulos a derecha usaremos la notación M_Λ.*

DEFINICIÓN 1.1.3. *Sean Λ y Γ anillos, diremos que un $A \in {}_\Lambda M$ y $A \in M_\Gamma$ es un (Λ, Γ) bimódulo, si satisface la condición de compactibilidad:*

$$(\lambda a)\gamma = \lambda(a\gamma),\ \ \lambda \in \Lambda,\ \ a \in A,\ \ \gamma \in \Gamma.$$

Para los (Λ, Γ) bimódulo, usaremos la notación ${}_\Lambda M_\gamma$.

DEFINICIÓN 1.1.4. *Si M y $N \in {}_\Lambda M$, un Λ homomorfismo es una función $f : M \longrightarrow N$ tales que, $\forall m,\ m' \in M$ y $\forall \lambda \in \Lambda$,* *i)* $f(m+m')=f(m)+f(m')$,

ii) $f(\lambda m)=\lambda f(m)$.

Un Λ isomorfismo es un Λ homomorfismo biyectivo.

Notar que la composición de Λ homomorfismos es un Λ homomorfismo y si f es un Λ isomorfismo, entonces su inversa f^{-1} también es un Λ isomorfismo.

NOTACIÓN 1.1.5. *Si M y $N \in {}_{\Lambda}M$, para el conjunto de los Λ homomorfismos de M en N usaremos la notación $Hom_{\Lambda}(M,N)$, y se dirá que son morfismos de ${}_{\Lambda}M$.*

PROPOSICIÓN 1.1.6. *Si A y $B \in {}_{\Lambda}M$, entonces el conjunto $Hom_{\Lambda}(A,B)$ es un grupo abeliano, con la operación $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$ $\forall a \in A$ y $\forall f,\ g \in Hom_{\Lambda}(A,B)$. Además, si $p: A' \longrightarrow A$ y $q: B \longrightarrow B'$ son morfismos de ${}_{\Lambda}M$, entonces $(f+g)p = fp+gp$ y $q(f+g)=qf+qg$.*
Demostración:
Claramente $f+g \in Hom_{\Lambda}(A,B)$, el neutro es el morfismo $0(a)=0$ $\forall a \in A$ y el opuesto de f es $-f(a)=-(f(a))$, por lo tanto $Hom_{\Lambda}(A,B)$ es un grupo abeliano.
Para demostrar que $(f+g)p=fp+gp$, basta ver que se cumple punto a punto, $((f+g)p)(a)=(f+g)(p(a))=f(p(a))+g(p(a))=fp(a)+gp(a)=(fp+gp)(a)$ $\forall a \in A'$. La demostración de $q(f+g)=qf+qg$ es análoga.

DEFINICIÓN 1.1.7. *Sean Λ un anillo y $(A_i)_{i\in I}$ una familia indexada con $A_i \in {}_{\Lambda}M$ $\forall i \in I$. El producto directo $\prod_{i\in I} A_i$ es el producto cartesiano, o sea es el conjunto de todas la $I-uplas$ (a_i) donde $a_i \in A_i$ $\forall i \in I$, con las siguientes operaciones:*

$$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i)$$

$$\lambda(a_i)=(\lambda a_i)$$

donde $\lambda \in \Lambda$ y $a_i, b_i \in A_i$ $\forall i \in I$, de esta forma $\prod_{i\in I} A_i \in {}_{\Lambda}M$.
Si $A_i = A$ $\forall i \in I$, usaremos la siguiente notación $\prod_{i\in I} A_i = A^I$.
Si $B=\prod_{i\in I} A_i$, la j-ésima proyección es el morfismo $p_j : B \longrightarrow A_j$ tales que $p_j((a_i))=a_j$. La j-ésima inclusión es el morfismo $\iota_j : A_j \longrightarrow B$ tales que $\iota_j(a_j)=(e_i)$ donde $e_i=0$ si $i\neq j$ y $e_j=a_j$.
La suma directa $\bigoplus_{i\in I} A_i$, es el submódulo de $\prod_{i\in I} A_i$, que consiste en todos los (a_i) que tienen finitas coordenadas no nulas.
Si el conjunto I es finito la suma directa y el producto directo coinciden.

DEFINICIÓN 1.1.8. *Un $F \in {}_{\Lambda}M$ es libre si $F=\oplus_{b\in B}\Lambda_b$ donde $\Lambda_b = \langle b\rangle \simeq \Lambda$ $\forall b \in B$, el conjunto B puede ser infinito y lo llamaremos base de F.*

A continuación se introducirá el concepto de producto tensorial, el cual será útil en este trabajo para la definición del funtor Tor.

DEFINICIÓN 1.1.9. *Sean $M \in M_\Lambda$ y $N \in {}_\Lambda M$. El producto tensorial de M y N se define como el cociente del grupo libre abeliano de base $M \times N$ ($\mathbb{Z}^{M\times N}$) por el subgrupo S generado por los elementos de la forma: $(m+m',n)-(m,n)-(m',n)$, $(m,n+n')-(m,n)-(m,n')$ y $(m\lambda,n)-(m,\lambda n)$ con $m,m' \in M, n,n' \in N, \lambda \in \Lambda$.*

NOTACIÓN 1.1.10. *Para el producto tensorial de $M \in M_\Lambda$ y $N \in {}_\Lambda M$ usaremos la notación $M \otimes_\Lambda N = \mathbb{Z}^{M\times N}/S$ y para los elementos usaremos la notación $m \otimes n = (m,n)+S$.*

Notar que con la definición de producto tensorial se tiene las siguientes igualdades:

$$(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n, \ \forall m,m' \in M, \ n \in N,$$

$$m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n', \ \forall m \in M, \ n,n' \in N,$$

$$(m\lambda) \otimes n = m \otimes (\lambda n) \ \forall m \in M, \ n \in N, \ \lambda \in \Lambda.$$

DEFINICIÓN 1.1.11. *Sean $M \in M_\Lambda$, $N \in {}_\Lambda M$ y A un grupo abeliano. Un mapa $f : M \times N \longrightarrow A$ se dice Λ biaditivo si verifica:*

$$f(m+m',n) = f(m,n)+f(m',n), \ \forall m,m' \in M, \ n \in N,$$

$$f(m,n+n') = f(m,n)+f(m,n'), \ \forall m \in M, \ n,n' \in N,$$

$$f(m\lambda,n) = f(m,\lambda n), \ \forall m \in M, \ n \in N, \ \lambda \in \Lambda.$$

Notar que el mapa $\otimes : \ M \times N \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^{M\times N} \xrightarrow{\pi_S} M \otimes_\Lambda N$ es Λ biaditivo, donde i es la inclusión y π_S la proyección sobre el cociente $\mathbb{Z}^{M\times N}/S$.

PROPOSICIÓN 1.1.12. *(Propiedad universal del producto tensorial) Dados $M \in M_\Lambda$, $N \in {}_\Lambda M$, se cumple que para todo grupo abeliano A y todo mapa Λ biaditito $f : M \times N \longrightarrow A$, existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{f} : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow A$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_\Lambda N \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & \\
M \times N \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Demostración:
Como f está definida en la base de $\mathbb{Z}^{M\times N}$, se puede extender linealmente. Luego como $S \subset Ker(f)$, por ser f biaditivo, se obtiene $\bar{f}$ aplicando la propiedad universal del cociente.

COROLARIO 1.1.13. *El mapa* $\otimes : M \times N \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} N$ *es único a menos de isomorfismos de grupos.*

NOTACIÓN 1.1.14. *Dados* $g : M \longrightarrow M'$ *y* $h : N \longrightarrow N'$ *morfismos, donde* $M, M' \in M_{\Lambda}$ *y* $N, N' \in {}_{\Lambda}M$*, se tiene un mapa* $(g, h) : M \times N \longrightarrow M' \otimes_{\Lambda} N'$ *biaditivo, el cual por la propiedad universal del producto tensorial, determina un único morfismo de grupos abelianos, para el cual usaremos la siguiente notación* $g \otimes h : M \otimes_{\Lambda} N \longrightarrow M' \otimes_{\Lambda} N'$ *tales que* $(g \otimes h)(m \otimes n) = g(m) \otimes h(n)$*.*

A continuación se introducirá el concepto de límite directo, el cual será necesario para demostrar propiedades de dimensiones homólogicas.

DEFINICIÓN 1.1.15. *Sean* I *un conjunto dirigido,* $(M_i)_{i \in I}$ *una familia en* ${}_{\Lambda}M$ *y para cada par* $i, j \in I$ *con* $i \leq j$ *existe un morfismo* $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$*. Diremos que la familia* $(M_i)_{i \in I}$ *y los morfismos* f_{ji} *forman un sistema directo si verifica las siguientes condiciones:*

- $f_{ii} = 1_{M_i}, \ \forall i \in I,$
- *Si* $i \leq j \leq k$ *entonces* $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$*.*

NOTACIÓN 1.1.16. *Para un sistema directo formado por una familia* $(M_i)_{i \in I}$ *y los morfismos* f_{ji} *usaremos la siguiente notación* $((M_i), (f_{ji}))$*.*

DEFINICIÓN 1.1.17. *El límite directo de un sistema directo* $((M_i), (f_{ji}))$ *es un par* $(M, (g_i)_{i \in I})$ *donde* $M \in {}_{\Lambda}M$ *y* $g_i : M_i \longrightarrow M$ *morfismos, de forma que el siguiente diagrama es conmutativo siempre que* $i \leq j$

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "g_i"'] & & M_j \arrow[dl, "g_j"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

y que verifica la siguiente propiedad universal: si $(N, (h_i)_{i \in I})$ *es otro par que verifica la propiedad anterior, entonces existe un único morfismo* $f : M \longrightarrow N$ *tales que* $\forall i \in I$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dd, "f"] \\
M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & \\
& N
\end{tikzcd}
$$

NOTACIÓN 1.1.18. *Para el límite directo $(M, (g_i)_{i\in I})$ usaremos la siguiente notación $\varinjlim M_i$.*

EJEMPLO 1.1.19.

1. *Sean $M \in {}_\Lambda M$, I un conjunto dirigido cualquiera, la familia $(M_i)_{i\in I}$ donde $M_i = M$ $\forall i \in I$ y $f_{ji} = 1_M$ $\forall i \leq j$. Claramente el límite directo del sistema dirigido $((M_i), (f_{ji}))$ es $(M, 1_M)$.*

2. *Sea $M \in {}_\Lambda M$, usando el axioma de elección se puede ordenar M, entonces tomando $I = M$, consideremos el sistema dirigido: la familia $(M_i)_{i\in I}$ donde M_i es el submódulo de M generado por todos los $m \in M$ tales que $m \leq i$, y $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$ la inclusión. El límite directo de este sistema dirigido es claramente $(M, (\iota_i)_{i\in I})$ donde $\iota_i : M_i \longrightarrow M$ es la inclusión.*

3. *Sean I un conjunto dirigido, $M \in {}_\Lambda M$ y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de M que cumple: para cada par i, $j \in I$, existe un $k \in I$ tal que $M_i + M_j \subset M_k$. Si $i \leq j$ entonces $M_i \subset M_j$ y sea $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$ la inclusión. Entonces $((M_i), (f_{ji}))$ es un sistema dirigido y $\varinjlim M_i = \cup_{i\in I} M_i$. Si M_i son los submódulos finitamente generados de M, la condición de satisface y $\cup_{i\in I} M_i = M$. Por lo tanto todo $M \in {}_\Lambda M$ se pude ver como el límite directo de sus submódulos finitamente generados.*

La definición de límite directo en M_Λ es análoga.

PROPOSICIÓN 1.1.20. *Sean $N \in {}_\Lambda M$ y $((M_i), (f_{ji}))$ un sistema dirigido, con $M_i \in M_\Lambda$. Entonces*

$$\varinjlim (M_i \otimes_\Lambda N) \simeq (\varinjlim M_i) \otimes_\Lambda N.$$

Demostración:
[EJ] Teorema 1.6.7.

Los conceptos que se introducirán a continuación son los de sucesión exacta, sucesión exacta corta y el de escindir, los cuales son muy importantes en álgebra homológica.

DEFINICIÓN 1.1.21. *Una sucesión finita o infinita de morfismos y módulos*

$$\cdots \longrightarrow A_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} A_m \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \longrightarrow \cdots$$

se dice que es exacta en A_m si $Im(f_{m+1}) = Ker(f_m)$, y se dice que es exacta si lo es para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 1.1.22. *Una sucesión exacta corta (SEC) es una sucesión exacta del tipo*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 .$$

PROPOSICIÓN 1.1.23. *Dada la siguiente SEC*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

son equivalentes:

i) Existe $h : C \longrightarrow B$ tales que $gh = 1_C$.

ii) Existe $k : B \longrightarrow A$ tales que $kf = 1_A$.

iii) Existe $\varphi : B \longrightarrow A \oplus C$ isomorfismo tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"', "\varphi"] & C \arrow[d, "1_C"] \\ A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

donde $i_A(a) = (a, 0)$ y $\pi_C(a, c) = c$.

En particular si pasa i) o ii), $B \simeq A \oplus C$.
Demostración:
iii) $\Rightarrow$ *i)* y *ii)* Como el diagrama 1.1 conmuta, basta tomar $h = \varphi^{-1} i_C$ y $k = \pi_A \varphi$.
i) $\Rightarrow$ *iii)* Se va a demostrar que $B = Im(f) \oplus Im(h)$, donde $h : C \longrightarrow B$ verifica $gh = 1_C$. Si $b \in B$, entonces $g(b) \in C$ y $b - hg(b) \in Ker(g)$, porque $g(b - hg(b)) = g(b) - gh(g(b)) = g(b) - g(b) = 0$. Por la exactitud de la SEC, existe $a \in A$ tales que $f(a) = b - hg(b)$. De esta forma se tiene que $B = Im(f) + Im(h)$, solo queda probar que $Im(f) \cap Im(h) = \emptyset$, si $f(a) = x = h(c)$, entonces $0 = gf(a) = g(x) = gh(c)$, por lo tanto $c = 0$ y $0 = h(c) = x$. De esta forma se obtiene que $B \simeq A \oplus C$, basta considerar $\varphi = \begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : B = Im(f) \oplus Im(h) \longrightarrow A \oplus C$, y además este morfismo hace conmutar el diagrama 1.1.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Se demuestra de forma similar a *i)* $\Rightarrow$ *iii)*.

DEFINICIÓN 1.1.24. *Una SEC*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 .$$

se escinde si se verifica alguna de las condiciones de la Proposición 1.1.23.

En general una SEC no necesariamente se escinde, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.1.25. *Consideremos la siguiente sucesión en ${}_{\mathbb{Z}}M$*

$$0 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \xrightarrow{f} \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \xrightarrow{g} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

donde $f(1+2\mathbb{Z}) = 2+4\mathbb{Z}$ y $g(1+4\mathbb{Z}) = 1+2\mathbb{Z}$. Claramente f es inyectiva, g es sobreyectiva e $Im(f) = ker(g)$, por lo tanto es una SEC, pero no se escinde, porque si lo fuera tendríamos que $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, lo cual no es cierto porque tienen elementos de órdenes distintos.

La siguiente proposición conocida como el Lema de los cinco, será necesaria para probar propiedades de los funtores derivados.

PROPOSICIÓN 1.1.26. *(Lema de los cinco) Consideremos el siguiente diagrama en ${}_{\Lambda}M$ conmutativo con las filas exactas:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\
A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
\end{array}$$

Entonces:

1. *Si β y δ son sobreyectivas y ϵ es inyectiva, γ es sobreyectiva.*
2. *Si β y δ son inyectivas y α es sobreyectiva, γ es inyectiva.*
3. *Si α, β, δ y ϵ son isomorfismos, γ es un isomorfismo.*

Demostración:
1. Sea $c' \in C'$, como δ es sobreyectiva, existe $d \in D$, tales que $k'(c') = \delta(d)$, luego como ϵ es inyectiva y $\epsilon l(d) = l'\delta(d) = l'k'(c') = 0$, se tiene que $l(d) = 0$. De esta forma por la exactitud de la primera fila existe $c \in C$ tales que $d = k(c)$, luego se tiene que $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'\gamma(c) = k'(c') - \delta k(c) = k'(c') - \delta(d) = 0$. Entonces por la exactitud de la segunda fila, existe $b' \in B'$ tales que $j'(b') = c' - \gamma(c)$, luego como β es sobreyectiva, existe $b \in B$ tales que $\beta(b) = b'$. De esta forma $\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma j(b) = \gamma(c) + j'\beta(b) = \gamma(c) + j'(b') = c'$, lo cual implica que γ es sobreyectiva.
2. Sea $c \in C$ tales que $\gamma(c) = 0$, como δ es inyectivo y $\delta k(c) = k'\gamma(c) = 0$, implica que $k(c) = 0$, luego por la exactitud de la primera fila, se tiene que existe $b \in B$ tales que $j(b) = c$. De esta forma $\beta(b) \in ker(j')$ porque $j'\beta(b) = \gamma j(b) = \gamma(c) = 0$, por lo tanto existe $a' \in A'$ tales que $\beta(b) = i'(a)$. Luego como α es sobreyectiva, existe $a \in A$ tales que $\alpha(a) = a$, como β es inyectiva y $\beta(i(a) - b) = \beta i(a) - \beta(b) = i'\alpha(a) - \beta(b) = i'(a') - \beta(b) = 0$, se tiene que $i(a) - b = 0$ o sea que $i(a) = b$. Por la exactitud de la primera fila se tiene $c = j(b) = ji(a) = 0$, por lo tanto γ es inyectiva.
3. Se desprende directamente de 1. y 2..

1.2. Categorías y funtores especiales.

DEFINICIÓN 1.2.1. *$\mathcal{C}$ es una categoría si tiene:*

1. *Una clase de objetos, $Ob(\mathcal{C})$,*

2. *Para cada par $A,\ B \in Ob(\mathcal{C})$, un conjunto de morfismos de A en B, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, cuyos elementos se escriben como $f : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$.*

3. *Para cada terna $A,\ B,\ C \in Ob(\mathcal{C})$, una aplicación (composición)*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(f,g) \longrightarrow gf$$

que verifican los siguientes axiomas:

1. *Si $A \neq A'$ o $B \neq B'$, con $A,\ A',\ B,\ B' \in Ob(\mathcal{C})$, entonces*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$$

.

2. *Para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$, existe $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ tales que $f1_A = f$, $\forall f : A \longrightarrow B$ y $1_A g = g$, $\forall g : C \longrightarrow A$.*

3. *Asociatividad de la composición, para todo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, vale $h(gf) = (hg)f$.*

EJEMPLO 1.2.2.

1. *Set: la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos son las funciones.*

2. *$Vect_{\mathbb{K}}$: la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y los morfismos son las transformaciones lineales.*

3. *${}_{\Lambda}M$ (M_{Λ}): la categoría de los módulos a izquierda de un anillo Λ (la categoría de los módulos a derecha de un anillo Λ).*
Sobre estas categorías es que vamos a trabajar, y vamos hacer los siguientes abusos de notación: $Ob({}_{\Lambda}M) = {}_{\Lambda}M$ y $Hom_{{}_{\Lambda}M}(\ ,\ ) = Hom_{\Lambda}(\ ,\ )$ (igualmente con M_{Λ}).

DEFINICIÓN 1.2.3. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, un funtor covariante (contravariante) $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ asocia a cada $A \in Ob(\mathcal{C})$ un $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$ y a cada $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ un $F(g) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$ ($F(g) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B),F(A))$) tales que:*

$$F(1_A) = 1_{F(A)},\ \forall A \in Ob(\mathcal{C})$$

$$F(gh) = F(g)F(h),\ \forall h \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B),\ g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$$

$$(F(gh) = F(h)F(g),\ \forall h \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B),\ g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)).$$

EJEMPLO 1.2.4. *1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ definido por $1_{\mathcal{C}}(A) = A,\ \forall A \in Ob(\mathcal{C})$ y $1_{\mathcal{C}}(f) = f,\ \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, es el funtor identidad, que es un funtor covariante.*

2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A \in \mathcal{C}$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A,\ ) : \mathcal{C} \longrightarrow Set$, definido por $Hom_{\mathcal{C}}(A,\ )(B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y dado $f : C \longrightarrow B$ se tiene $Hom_{\mathcal{C}}(A,\ )(f) = Hom_{\mathcal{C}}(A,f) : Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ donde $Hom_{\mathcal{C}}(A,f)(g) = fg,\ \forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$, es un funtor covariante, basta con observar que:*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, 1_A) = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(A,A)}$$

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,fg)(h) = fgh = Hom_{\mathcal{C}}(A,f)(Hom_{\mathcal{C}}(A,g)(h)) =$$

$$(Hom_{\mathcal{C}}(A,f)Hom_{\mathcal{C}}(A,g))(h).$$

De forma análoga se puede ver que $Hom_{\mathcal{C}}(\ ,B) : \mathcal{C} \longrightarrow Set$, definido por $Hom_{\mathcal{C}}(\ ,B)(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ y dado $f : A \longrightarrow C$ se tiene $Hom_{\mathcal{C}}(\ ,B)(f) = Hom_{\mathcal{C}}(f,B) : Hom_{\mathcal{C}}(C,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ donde $Hom_{\mathcal{C}}(f,B)(g) = gf,\ \forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(C,B)$, es un funtor contravariante.

3. *Sean Λ un anillo y $A \in M_{\Lambda}$, entonces $A \otimes_{\Lambda} \square : {}_{\Lambda}M \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}M$ definido por $A \otimes_{\Lambda} \square(B) = A \otimes_{\Lambda} B$ y dado $f : C \longrightarrow D$ se tiene $A \otimes_{\Lambda} \square(f) = 1_A \otimes f : A \otimes_{\Lambda} C \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} B$ donde $(1_A \otimes f)(a \otimes c) = a \otimes f(c)$, es un funtor covariante. Basta observar que:*

$$1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes_{\Lambda} B}$$

$$(1_A \otimes fg)(a \otimes b) = a \otimes fg(b) = (1_A \otimes f)(a \otimes g(b)) = (1_A \otimes f)(1_A \otimes g)(a \otimes b).$$

De forma análoga se define $\square \otimes_{\Lambda} B$ y se prueba que es un funtor covariante.

NOTACIÓN 1.2.5. *Para que la notación no quede tan pesada se va utilizar la siguiente notación: $Hom_{\Lambda}(A,f) = f_*$ y $Hom_{\Lambda}(f,A) = f^*$.*

DEFINICIÓN 1.2.6. *1. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ son funtores, se define el funtor composición $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ como: $(GF)(A) = G(F(A)),\ \forall A \in \mathcal{C}$ y $(GF)(f) = G(F(f)),\ \forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, con $A,\ B \in \mathcal{C}$.*

2. *Dos funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ se dicen inversos si $FG = 1_{\mathcal{D}}$ y $GF = 1_{\mathcal{C}}$. En este caso se dice que los funtores son isomorfismos y las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen isomorfas.*

DEFINICIÓN 1.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría.*

i. *Un objeto* $I \in \mathcal{C}$ *es inicial, si* $\#Hom_{\mathcal{C}}(I, A) = 1\ \forall A \in \mathcal{C}$.

ii. *Un objeto* $F \in \mathcal{C}$ *es final, si* $\#Hom_{\mathcal{C}}(A, F) = 1\ \forall A \in \mathcal{C}$.

iii. *Un objeto es cero, si es inicial y final.*

EJEMPLO 1.2.8. *1. En Set, el elemento* $\emptyset$ *es el objeto inicial, los objetos finales son de la forma* $\{*\}$*, por lo tanto no existe elemento cero.*

2. En ${}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$, $0 = \{0\}$ *es objeto cero.*

DEFINICIÓN 1.2.9. *Una categoría* $\mathcal{C}$ *se dice aditiva si verifica las siguientes condiciones:*

i) $\mathcal{C}$ *tiene un objeto cero,*

ii) Cada $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *tiene estructura de grupo abeliano, de forma tal que la composición es distributiva frente a la suma.*

iii) $\mathcal{C}$ *tiene productos finitos.*

EJEMPLO 1.2.10. *Por la Proposición 1.1.6, se tiene que* ${}_{\Lambda}M$ *y* M_{Λ} *son categorías aditivas.*

DEFINICIÓN 1.2.11. *Un funtor* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *entre categorías aditivas se dice aditivo, si* $\forall A,\ B \in \mathcal{A}$ *se cumple que* $F : Hom_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$ *es un morfismo de grupos abelianos.*

EJEMPLO 1.2.12. *1. Por la Proposición 1.1.6 se tiene que* $Hom_{\Lambda}(A, \ )$ *y* $Hom_{\Lambda}(\ , A)$ *son funtores aditivos.*

2. Sean $A \in {}_{\Lambda}M$ *y* $B \in M_{\Lambda}$*, se puede ver fácilmente que los funtores* $\Box \otimes_{\Lambda} A$ *y* $B \otimes_{\Lambda} \Box$ *son funtores aditivos, basta observar que* $(f+g) \otimes 1_A = (f \otimes 1_A) + (g \otimes 1_A)$*, con* f *y* g *morfismos de* M_{Λ}*, y* $1_B \otimes (h+k) = (1_B \otimes h) + (1_B \otimes k)$*, con* h *y* k *morfismos de* ${}_{\Lambda}M$.

DEFINICIÓN 1.2.13. *Si* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *y* $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *son dos funtores, definimos una transformación natural* $\Phi : F \longrightarrow G$ *como una familia* $(\Phi_A)_{A \in \mathcal{C}}$ *de morfismos, con* $\Phi_A \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ *tales que para todo* $A \xrightarrow{h} B$ *, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(B) \arrow[r, "\Phi_B"] & G(B) \end{tikzcd} .$$

EJEMPLO 1.2.14. *La transformación natural identidad* $1_F : F \longrightarrow F$ *dada por* $(1_A)_{A \in \mathcal{C}}$.

DEFINICIÓN 1.2.15. *Una transformación natural* $\Phi : F \longrightarrow G$ *es un isomorfismo, si existe otra tranformación natural* $\Psi : G \longrightarrow F$ *tales que* $\Psi\Phi = 1_F$ *y* $\Phi\Psi = 1_G$.

De aquí hasta el final de esta sección se van a ver algunas propiedades de los funtores $Hom_\Lambda(A,\ )$, $Hom_\Lambda(\ ,A)$, $\Box \otimes_\Lambda A$ y $A \otimes_\Lambda \Box$.

PROPOSICIÓN 1.2.16. *Sean* $A \in M_\Lambda$ *y* $(B_i)_{i\in I} \subset {}_\Lambda M$.
Entonces hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\tau : A \otimes_\Lambda (\oplus_{i\in I} B_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I}(A \otimes_\Lambda B_i)$$

con $\tau(a \otimes (b_i)_{i\in I}) = (a \otimes b_i)_{i\in I}$.
Demostración:
Sea

$$f : A \times (\oplus_{i\in I} B_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I}(A \otimes B_i)$$

dada por $f(a,(b_i)_{i\in I}) = (a \otimes b_i)_{i\in I}$, claramente f es Λ biaditiva, la cual induce el siguiente morfismo de grupos abelianos

$$\tau : A \otimes_\Lambda (\oplus_{i\in I} B_i) \longrightarrow \oplus_{i\in I}(A \otimes_\Lambda B_i)$$

con $\tau(a \otimes (b_i)_{i\in I}) = (a \otimes b_i)_{i\in I}$.
Para mostrar que τ es un isomorfismo, se va a construir su inversa, sea

$$\iota_k : B_k \longrightarrow \oplus_{i\in I} B_i$$

la inclución, de esta forma tenemos el siguiente morfismo

$$1_A \otimes \iota_k : A \otimes_\Lambda B_k \longrightarrow A \otimes_\Lambda (\oplus_{i\in I} B_i)$$

Como la suma directa es el coproducto en ${}_\Lambda M$, tenemos el siguiente morfismo

$$\theta : \oplus_{i\in I}(A \otimes_\Lambda B_i) \longrightarrow A \otimes_\Lambda (\oplus_{i\in I} B_i)$$

con $\theta((a \otimes b_i)_{i\in I}) = a \otimes (\sum_{i\in I} \iota_i(b_i))$, que claramente es la inversa de τ.

OBSERVACIÓN 1.2.17. *Se demuestra de forma análoga que existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\tau : (\oplus_{i\in I} B_i) \otimes_\Lambda C \longrightarrow \oplus_{i\in I}(B_i \otimes_\Lambda C)$$

donde $C \in {}_\Lambda M$ *y* $(B_i)_{i\in I} \subset M_\Lambda$.

PROPOSICIÓN 1.2.18. *Sean* Λ *un anillo,* $A \in {}_\Lambda M$ *y una familia* $(B_i)_{i\in I}$ *con* $B_i \in {}_\Lambda M$ $\forall i \in I$. *Entonces hay un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\varphi : Hom_\Lambda(A, \prod_{i\in I} B_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(A, B_i)$$

con $\varphi(f) = (p_i f)$, *donde* p_i *son las proyecciones del producto directo* $\prod_{i\in I} B_i$.
Demostración:
Primero vamos a ver que φ es sobreyectiva. Sea $(f_i) \in \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(A, B_i)$, definimos $\vartheta : A \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$ como $\vartheta(a) = (f_i(a))$, claramente $\vartheta \in Hom_\Lambda(A, \prod_{i\in I} B_i)$ y $\varphi(\vartheta) = (p_i\vartheta) = (f_i)$, por lo tanto φ es sobreyectiva.
Ahora vamos a probar que φ es inyectiva. Sean $f,\ f' \in Hom_\Lambda(A, \prod_{i\in I} B_i)$ tales que $\varphi(f) = \varphi(f')$ o sea que $p_i f = p_i f'$, lo cual implica que $p_i f(a) = p_i f'(a)\ \forall a \in A$, por lo tanto $f(a) = f'(a)\ \forall a \in A$, entonces $f = f'$, lo cual implica que φ es inyectiva.
Claramente φ es un morfismo de grupos porque p_i lo es $\forall i \in I$.

PROPOSICIÓN 1.2.19. *Sean* Λ *un anillo,* $B \in {}_\Lambda M$*, y una familia* $(A_i)_{i\in I}$ *con* $A_i \in {}_\Lambda M\ \forall i \in I$*. Entonces hay un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\varphi : Hom_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \longrightarrow \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(A_i, B)$$

Demostración:
La demostración es similar a la de la Proposición 1.2.18.

COROLARIO 1.2.20. *Si* A, A', B *y* $B' \in {}_\Lambda M$*, entonces:*

$$Hom_\Lambda(A, B \oplus B') \simeq Hom_\Lambda(A, B) \oplus Hom_\Lambda(A, B')$$

$$Hom_\Lambda(A \oplus A', B) \simeq Hom_\Lambda(A, B) \oplus Hom_\Lambda(A', B)$$

como grupos abelianos.

DEFINICIÓN 1.2.21. *Sea* Λ *un anillo, y un funtor* $F : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z} M$ *covariante.*

- *Se dice que* F *es exacto a izquierda, si la exactitud de una sucesión*

  $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

  implica la exactitud de

  $$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)\ .$$

- *Se dice que* F *es exacto a derecha, si la exactitud de una sucesión*

  $$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  implica la exactitud de

  $$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0\ .$$

- *Se dice que F es exacto, si es exacto a izquierda y a derecha.*
- *Se dice que F es medio exacto, si la exactitud de una sucesión*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)\ .$$

Las definiciones son análogas cuando el funtor es contravariante.

A continuación veremos un lema que será muy importante a la hora de probar que la dimensión global de anillos semiprimarios es simétrica.

LEMA 1.2.22. *Sean Λ un anillo, $N \lhd \Lambda$ un ideal bilateral nilpotente de Λ, y T un funtor medio exacto definido en ${}_\Lambda M$. Si $T(A) = 0$ para cada $A \in {}_\Lambda M$ tales que $NA = 0$, entonces $T = 0$.*
Demostración:
La demostración será por absurdo. Supongamos que existe un $A \in {}_\Lambda M$ tales que $T(A) \neq 0$. Como N es nilpotente, existe un $k \in \mathbb{N}$ máximo tales que $T(N^k A) \neq 0$ (donde $N^0 = \Lambda$). Consideremos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow N^{k+1}A \longrightarrow N^k A \longrightarrow N^k A/N^{k+1}A \longrightarrow 0$$

$T(N^k A/N^{k+1}A) = 0$ porque $N(N^k A/N^{k+1}A) = 0$ y $T(N^{k+1}A) = 0$, entonces como T es medio exacto, se tiene que $T(N^k A) = 0$. Esta contradicción prueba el lema.

PROPOSICIÓN 1.2.23. *Sean $A \in M_\Lambda$, y*

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, con B', B y $B'' \in_\Lambda M$. Entonces

$$A \otimes_\Lambda B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_\Lambda B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_\Lambda B'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.
Demostración:

i) $Im(1_A \otimes i) \subseteq Ker(1_A \otimes p)$:
Como $(1_A \otimes p)(1_A \otimes i) = 1_A \otimes pi = 1_A \otimes 0 = 0$, por lo tanto $Im(1_A \otimes i) \subseteq Ker(1_A \otimes p)$.

ii) $Ker(1_A \otimes p) \subseteq Im(1_A \otimes i)$:
Sea $E = Im(1_A \otimes i)$, por la parte i), tenemos que $E \subseteq Ker(1_A \otimes p)$, entonces $1_A \otimes p$ induce un morfismo

$$\hat{p} : (A \otimes_\Lambda B)/E \longrightarrow A \otimes_\Lambda B'$$

de la siguiente forma $\hat{p}(a \otimes b + E) = a \otimes p(b)$, con $a \in A$ y $b \in B$. Si se prueba que $\hat{p}$ es un isomorfismo, se obtiene que $Ker(1_A \otimes p) = E$. Por lo tanto basta con probar que $\hat{p}$ es un isomorfismo, para probar esto se va a construir la inversa de $\hat{p}$.
Sea

$$f : A \times B'' \longrightarrow (A \otimes_\Lambda B)/E$$

tales que $f(a, b'') = a \otimes b$, donde $b \in B$ verifica que $p(b) = b''$ esto es posible porque p es sobreyectiva. Hay que verificar que f está bien definida, si existe otro $b_1 \in B$ tales que $p(b_1) = b''$, entonces $p(b - b_1) = 0$, por lo tanto $b - b_1 \in Ker(p) = Im(i)$, de esta forma esiste $b' \in B'$ tales que $i(b') = b - b_1$, entonces $a \otimes (b - b_1) = a \otimes i(b') \in E$. Como claramente f es biaditiva, queda definida

$$\hat{f} : A \otimes_\Lambda B'' \longrightarrow (A \otimes_\Lambda B)/E$$

con $\hat{f}(a \otimes b'') = a \otimes b + E$.
Ahora solo resta verificar que $\hat{f}\hat{p} = 1_{(A \otimes_\Lambda B)/E}$ y que $\hat{p}\hat{f} = 1_{A \otimes_\Lambda B''}$.
$(\hat{f}\hat{p})(a \otimes b + E) = \hat{f}(a \otimes p(b)) = a \otimes b + E$.
$(\hat{p}\hat{f})(a \otimes b'') = \hat{p}(a \otimes b + E) = a \otimes p(b) = a \otimes b''$.

iii) $1_A \otimes p$ es sobreyectivo:
Como todo elemento de $A \otimes B''$ es de la forma $\sum_j a_j \otimes b''_j$, y como p es sobreyectiva, para cada $b''_j \in B''$ existe al menos un $b_j \in B$ tales que $p(b_j) = b''_j$, de esta forma $(1_A \otimes p)(\sum_j a_j \otimes b_j) = \sum_j a_j \otimes p(b_j) = \sum_j a_j \otimes b''_j$.

OBSERVACIÓN 1.2.24. *La Proposición 1.2.23 prueba que el functor* $A \otimes_\Lambda \square$ *es un functor exacto a derecha, y de la misma forma que se demostró esto, se demuestra que el functor* $\square \otimes_\Lambda B$ *es también exacto a derecha.*

Los funtores $A \otimes_\Lambda \square$ y $\square \otimes_\Lambda B$ no son exactos en general como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.25. *Sean* $\Lambda = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2$ *y la siguiente sucesión exacta* $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, *donde* i *es la inclusión y* π *es la proyección canónica.*
Por un lado se sabe que $\mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$ *y por otro lado,* $\mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = 0$, *pues si* $x \otimes \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, *se tiene que* $x \otimes \frac{a}{b} = x \otimes \frac{2a}{2b} = 0 \otimes \frac{a}{2b} = 0$. *Entonces* $1_A \otimes i : \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ *no puede ser inyectivo.*
De forma similar se demuestra que $i \otimes 1_B$ *no es inyectivo.*

PROPOSICIÓN 1.2.26. *El funtor* $Hom_\Lambda(M, \ ) : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_Z M$ *es exacto a izquierda. O sea que dada una sucesión exacta* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *, se tiene que* $0 \longrightarrow Hom_\Lambda(M, A) \xrightarrow{f_*} Hom_\Lambda(M, B) \xrightarrow{g_*} Hom_\Lambda(M, C)$ *es una sucesión exacta.*
Demostración:

i) f_* es inyectiva:
Sea $h \in ker(f_*)$, o sea que $h : M \longrightarrow A$ y $f_*(h) = fh = 0$, esto implica que $f(h(m)) = 0 \ \forall m \in M$, pero como f es inyectiva, $h(m) = 0 \ \forall m \in M$, es decir $h = 0$.

ii) $Im(f_*) \subset ker(g_*)$:
$g_*f_*(h) = g_*(fh) = gfh = 0 \ \forall h \in Hom_\Lambda(M, A)$ porque $gf = 0$.

iii) $ker(g_*) \subset Im(f_*)$:
Sea $h \in ker(g_*)$, es decir $h : M \longrightarrow B$ y que $g_*(h) = gh = 0 \ \forall m \in M$, por lo tanto $h(m) \in ker(g) = Im(f) \ \forall m \in M$. Esto implica que para cada $m \in M$ existe un único $a \in A$ tales que $f(a) = h(m)$ porque f es inyectiva, por lo tanto la función $k : M \longrightarrow A$ dada por $k(m) = a$, está bien definida y claramente es un morfismo de ${}_\Lambda M$. Por como está definida k, se verifica $f_*(k)(m) = fk(m) = f(a) = h(m) \ \forall m \in M$ de esta forma $f_*(k) = h$, o sea que, $h \in Im(f_*)$.

El funtor $Hom_\Lambda(M, \ )$ no es en general exacto a derecha como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.27. *Sean* $\Lambda = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2$ *y la siguiente sucesión exacta* $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *, donde* i *es la inclusión y* π *es la proyección canónica.*
El elemento $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *tiene orden* 2*, por lo que es posible definir un morfismo de grupos* $f : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *dado por* $f(1+2\mathbb{Z}) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$*, esto implica que* $Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$*. Sin embargo,* $\mathbb{Q}$ *no tiene elementos no nulos de orden finito, por lo que* $Hom_\Lambda(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$*. Por lo tanto* π_* *no es sobreyectivo.*

PROPOSICIÓN 1.2.28. *El funtor* $Hom_\Lambda(\ , M) : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z} M$ *es exacto a izquierda. O sea que dada una sucesión exacta* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *, se tiene que* $0 \longrightarrow Hom_\Lambda(C, M) \xrightarrow{g^*} Hom_\Lambda(B, M) \xrightarrow{f^*} Hom_\Lambda(A, M)$ *es una sucesión exacta.*
Demostración:

i) g^* es inyectiva:
Sea $h \in ker(g^*)$, o sea que $h : C \longrightarrow M$ y $g^*(h) = hg = 0$. Esto

implica que $Im(g) \subset ker(h)$, pero como g es sobreyectiva, tenemos que $ker(h) = C$, por lo tanto $h = 0$.

ii) $Im(g^*) \subset ker(f^*)$:
Observar que $f^*g^*(h) = f^*(hg) = hgf = 0\ \forall h \in Hom_\Lambda(C, M)$ porque $gf = 0$.

iii) $ker(f^*) \subset Im(g^*)$:
Sea $k \in ker(f^*)$, o sea $k : B \longrightarrow M$ tales que $f^*(k) = kf = 0$. Definimos $h : C \longrightarrow M$ de la siguiente manera: si $c \in C$ entonces $h(c) = k(b)$, donde $b \in B$ es tal que $g(b) = c$, que es posible porque g es sobreyectiva. Ahora vamos a ver que h está bien definida: si $b' \in B$ es otra preimagen de c por g, entonces $g(b-b') = 0$, de esta forma $b-b' \in ker(g) = Im(f)$, por lo tanto existe $a \in A$ tales que $f(a) = b - b'$, entonces $k(b) - k(b') = k(b - b') = kf(a) = 0$. Claramente por como está definida $h \in Hom_\Lambda(C, M)$. Finalmente, $g^*(h) = hg = k$, ya que si se toma $b \in B$ y $c = g(b)$, entonces por definición $k(b) = h(c) = hg(b)$.

El funtor $Hom_\Lambda(\ , M)$ no es en general exacto a derecha como se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.29. *Sean $\Lambda = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ y la siguiente sucesión exacta* $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *, donde i es la inclusión y π es la proyección canónica.*
$Hom_\Lambda(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ porque si existe un $0 \neq g \in Hom_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, se tiene al menos un $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ y un $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tales que $g(\frac{p}{q}) = z$. Si tomamos $1 < u \in \mathbb{Z}$, tales que m.c.d.$(z, u) = 1$, se llega a que $z = g(\frac{p}{q}) = g(\frac{up}{uq}) = ug(\frac{p}{uq})$, por lo tanto u divide a z lo cual es absurdo. Claramente $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$ porque contiene a $1_{\mathbb{Z}} \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Por lo tanto i^* no puede ser sobreyectivo.

Para finalizar este capítulo se verá una relación entre los funtores Hom y el producto tensorial, que es conocido con el nombre de Teorema de Adjunción.

TEOREMA 1.2.30. *Dados dos anillos Λ y Γ y módulos $M \in M_\Lambda$, $N \in {}_\Lambda M_\Gamma$ (bimódulo) y $T \in M_\Gamma$, existe un isomorfismo natural*

$$\tau_{M,N,T} : Hom_\Gamma(M \otimes_\Lambda N, T) \longrightarrow Hom_\Lambda(M, Hom_\Gamma(N, T))$$

en las tres variables, dado por $\tau_{M,N.T}(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$ donde $f : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow T$, $m \in M$ y $n \in N$.
Demostración:
Teorema 2.75 en [Rot].

Capítulo 2

Módulos y anillos especiales.

2.1. Módulos Proyectivos.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Sea Λ un anillo, $P \in {}_{\Lambda}M$ (M_{Λ}) es proyectivo, si dado un morfismo $f : P \to B$ y un epimorfismo $g : A \to B$, con A y $B \in {}_{\Lambda}M$ (M_{Λ}), existe un morfismo $h : P \to A$, tales que $f = gh$.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 2.1.2. *Si $L \in {}_{\Lambda}M$ (M_{Λ}) es libre, entonces es proyectivo.*
Demostración:
Como L es libre, existe $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de L.
Dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se puede construir $h : L \to A$ de la siguiente forma: como g es sobreyectiva, $g^{-1}(f(e_i)) \neq \varnothing, \forall i \in I$, por el axioma de elección, se puede elegir por cada i un elemento $a_i \in g^{-1}(f(e_i))$ y definir $h(e_i) = a_i$, de esta forma $f(e_i) = g(h(e_i))$ y por lo tanto $gh = f$.

COROLARIO 2.1.3. *Dado $A \in {}_{\Lambda}M$, siempre existen $P \in {}_{\Lambda}M$ proyectivo y un morfismo $\varphi : P \longrightarrow A$ sobreyectivo.*
Demostración:
Basta considerar $P = \oplus_{a\in A}\Lambda_a$ y $\varphi(a) = a$ $\forall a \in A$, y luego usar la Proposición 2.1.2

DEFINICIÓN 2.1.4. *Sea Λ un anillo y $M \in {}_\Lambda M$. Una resolución proyectiva de M es una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada $P_i \in {}_\Lambda M$ es proyectivo.

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Dado $M \in {}_\Lambda M$, siempre existe una resolución proyectiva de M.*

Demostración:

Por el Corolario 2.1.3, se sabe de la existencia de un $P_0 \in {}_\Lambda M$ proyectivo y de un epimorfismo $d_0 : P_0 \longrightarrow M$, entonces se puede considerar la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow ker(d_0) \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión. Pero como $ker(d_0) \in {}_\Lambda M$, otra vez por el Corolario 2.1.3, se sabe que existe un $P_1 \in {}_\Lambda M$ proyectivo y un epimorfismo $f : P_1 \longrightarrow ker(d_0)$, luego tomando $d_1 = if : P_1 \longrightarrow P_0$ se tiene que $Im(d_1) = Im(if) = Im(i) = ker(d_0)$, y además se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow ker(f) \xrightarrow{i'} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

porque $ker(d_1) = ker(f)$, donde i' es la inclusión. Iterando este procedimiento construimos una resolución proyectiva de M.

PROPOSICIÓN 2.1.6. *Un $P \in {}_\Lambda M$ es proyectivo si y solo si $Hom_\Lambda(P, \ )$ es un funtor exacto.*

Demostración:

Sea P proyectivo, y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

con A, B y $C \in {}_\Lambda M$, se tiene que $Hom_\Lambda(P, \ )$ es un funtor exacto, si

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P, A) \xrightarrow{f_*} Hom_\Lambda(P, B) \xrightarrow{g_*} Hom_\Lambda(P, C) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Por la Proposición 1.2.26 se tiene que $Hom_\Lambda(P, \ )$ es un funtor exacto a izquierda, entonces solo hay que probar que g_* es sobreyectiva. Como P es proyectivo y g es sobreyectiva, dado $k : P \longrightarrow C$, existe $h : P \longrightarrow B$ tales que $k = gh = g_*h$, por lo tanto g_* es sobreyectiva.

Para el recíproco, asumimos que $Hom_\Lambda(P, \ )$ es un funtor exacto. Dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

podemos considerar la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow Ker(g) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión. Como el funtor $Hom_\Lambda(P, \ )$ es exacto, se tiene que g_* es sobre, por lo tanto existe $h \in Hom_\Lambda(P, A)$, tales que $g_*(h) = gh = f$, entonces P es proyectivo.

PROPOSICIÓN 2.1.7. *Un $P \in {}_\Lambda M$ es proyectivo, si y solo si toda sucesión exacta corta que termima en P se escinde.*
Demostración:
Sea P proyectivo y

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$

una SEC en ${}_\Lambda M$, como β es sobreyectiva, existe un morfismo $h : P \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de esta forma $\beta h = 1_P$, por lo tanto la SEC se escinde.
Por otro lado si tomamos el módulo libre L generado por los elementos de P, obtenemos un epimorfismo $\varphi : L \to P$, definido como $\varphi(p) = p, \forall p \in P$, de esta forma obtenemos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow Ker(\varphi) \hookrightarrow L \xrightarrow{\varphi} P \longrightarrow 0$$

que se escinde, entonces existe un morfismo $\psi : P \to L$ tales que $\varphi\psi = 1_P$.
Si consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "h"'] & P \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

el morfismo h existe porque L es proyectivo y por lo tanto verifica $gh = f\varphi$, si se toma $h' = h\psi$, este verifica que $gh' = gh\psi = f\varphi\psi = f1_P = f$, por lo tanto P es proyectivo.

COROLARIO 2.1.8. *Un $P \in {}_\Lambda M$ es proyectivo, entonces es un sumando directo de un módulo libre.*
Demostración:
Sea $F = \oplus_{p\in P}\Lambda_p$, o sea el módulo libre generado por los elementos de P, y

el morfismo $f : F \longrightarrow P$ donde $f(p) = p$, claramente f es sobreyectiva, de esta forma tenemos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

por lo tanto $F \simeq P \oplus Ker(f)$.

PROPOSICIÓN 2.1.9. *Sea $P = \oplus_{j\in J} P_j$ con $P_j \in {}_\Lambda M$, entonces P es proyectivo, si y solo si cada P_j es proyectivo.*

Demostración:

Supongamos que P es proyectivo y se va a probar que P_j es proyectivo. Dados $g : A \longrightarrow B$ sobreyectivo y $f : P_j \longrightarrow B$, consideremos $f' = f\pi_j : P \longrightarrow B$ donde $\pi_j : P \longrightarrow P_j$ es la proyección. Como P es proyectivo existe $h' : P \longrightarrow A$ tales que $f' = gh'$, si se considera $h = h'i_j$ donde $i_j : P_j \longrightarrow P$ es la inclusión, se tiene que $gh = gh'i_j = f'i_j = f\pi_j i_j = f$, por lo tanto cada P_j es proyectivo.

Ahora supongamos que cada P_j es proyectivo. Dados $g : A \longrightarrow B$ sobreyectivo y $f : P \longrightarrow B$, consideremos $f_j = fi_j : P_j \longrightarrow B$, como P_j es proyectivo, existe $h_j : P_j \longrightarrow A$ tales que $f_j = gh_j$, considerando $h = \oplus_{j\in J} h_j$ donde $h((p_j)_{j\in J}) = (h_j(p_j))_{j\in J}$ con $p_j \in P_j$, se tiene que $f = gh$, por lo tanto P es proyectivo.

El siguiente lema es conocido como el Lema de Schanuel, será importante para probar propiedades de la dimensión global.

LEMA 2.1.10. *(Lema de Schanuel) Dadas dos sucesiones exactas*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$$

donde B y B' son proyectivos, entonces hay un isomorfismo

$$A \oplus B' \cong A' \oplus B.$$

Demostración:

Como B es proyectivo, existe un mapa $\gamma : B \to B'$ tales que $\beta = \beta'\gamma$ y $\delta : A \to A'$ queda definido de la siguiente forma: como $Im(\alpha') = Ker(\beta') \supset Im(\gamma\alpha)$ porque $\beta'\gamma\alpha = \beta\alpha = 0$ y como α' es inyectivo, para cada $a \in A$ podemos definir $\delta(a)$ como el único $a' \in A'$ tales que $\alpha'(a') = \gamma\alpha(a)$, de esta forma $\gamma\alpha = \alpha'\delta$, o sea que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sean $f : A \to B \oplus A'$ tales que $f(a) = (\alpha(a), \delta(a))$ y $g : B \oplus A' \to B'$ tales que $g(b, a') = \gamma(b) - \alpha'(a')$.

1. f es inyectiva: porque α es inyectiva.

2. g es sobreyectiva: sea $b' \in B'$, entonces $\beta'(b') = 0$ o $\beta'(b') = c \neq 0$. Si $\beta'(b') = 0$ entonces existe $a' \in A'$ tales que $\alpha'(a') = b'$ entonces $g(-a', 0) = b'$, si $\beta'(b') = c \neq 0$ entonces existe $b \in B$ tales que $\beta(b) = c$ entonces $\gamma(b) = b'$ entonces $g(0, b) = b'$.

3. $Im(f) = Ker(g)$: $g(f(a)) = g(\alpha(a), \delta(a)) = \gamma\alpha(a) - \alpha'\delta(a) = 0$ por como está construido δ, entonces $Im(f) \subset Ker(g)$; si $(a', b) \in Ker(g)$ entonces $\gamma(b) - \alpha'(a') = 0$ entonces $\beta'\gamma(b) = \beta'\alpha'(a') = 0$, entonces $b \in Ker(\beta)$, entonces existe $a \in A$ tales que $\alpha(a) = b$ y $\delta(a) = a'$ por definición de δ.

Entonces

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \oplus A' \xrightarrow{g} B' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta y como B' es proyectivo la sucesión se escinde, entonces $B \oplus A' \cong A \oplus B'$.

2.2. Módulos Inyectivos.

DEFINICIÓN 2.2.1. *Sea Λ un anillo, $I \in {}_\Lambda M$ (M_Λ) es inyectivo, si dados un morfismo $f : A \to I$ y un monomorfismo $g : A \to B$, con A y $B \in {}_\Lambda M$ (M_Λ), existe un morfismo $h : B \to I$, tales que $f = hg$.*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Un $I \in {}_\Lambda M$ es inyectivo si y solo si $Hom_\Lambda(\ ,I)$ es un funtor exacto.*

Demostración:

Sea I inyectivo, y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

con A, B y $C \in {}_\Lambda M$, se tiene que $Hom_\Lambda(\ ,I)$ es un funtor exacto, si

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(C, I) \xrightarrow{g^*} Hom_\Lambda(B, I) \xrightarrow{f^*} Hom_\Lambda(A, I) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, por la Proposición 1.2.28 se tiene que el funtor $Hom_\Lambda(\ ,I)$ es un funtor exacto a izquierda, entonces solo hay que probar que f^* es sobreyectiva. Como I es inyectivo y f es inyectiva, se tiene que dado $h : A \longrightarrow I$, existe $k : B \longrightarrow I$, tales que $h = kf = f^*(k)$, por lo tanto f^* es sobreyectiva.
Para el recíproco, asumimos que $Hom_\Lambda(\ ,I)$ es exacto, entonces como f^* es sobreyectiva, se tiene que dado $h : A \longrightarrow I$, existe $k : B \longrightarrow I$, tales que $h = f^*(k) = kf$, por lo tanto I es inyectivo.

PROPOSICIÓN 2.2.3. *Un $I \in {}_\Lambda M$ es inyectivo, si y solo si toda sucesión exacta corta que empieza en I se escinde.*
Demostración:
Sea I inyectivo y

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

una SEC, como α es inyectiva, existe un morfismo $h : A \to I$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "1_I"] \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

de esta forma $h\alpha = 1_I$, por lo tanto la SEC se escinde.
Por otro lado sea

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

se puede construir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & D = (B \oplus I)/W \\ I \arrow[r, "i_I"'] \arrow[urr, "\gamma"] & B \oplus I \arrow[ur, "\pi_W"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "i_B"] \arrow[uur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

donde $W = \{(g(a), -f(a)), a \in A\}$, $\beta(b) = \overline{(b, 0)}$ y $\gamma(i) = \overline{(0, i)}$.
Ahora vamos a probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] & D \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$\beta(g(a)) - \gamma(f(a)) = \overline{(g(a), 0)} - \overline{(0, f(a))} = \overline{(g(a), -f(a))} = \overline{0}$.
Ahora se probará que γ es inyectivo. Si $\gamma(i) = 0$, entonces $\overline{(0, i)} = \overline{0}$, por lo tanto $(0, i) \in W$, o sea que existe $a \in A$ tales que $g(a) = 0$ y $-f(a) = i$, pero como g es inyectiva $a = 0$, de esta forma se obtiene que $i = 0$.
Consideremos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\gamma} D \longrightarrow Coker(\gamma) \longrightarrow 0$$

que por hipótesis se escinde, entonces existe un morfismo $k : D \to I$, tales que $k\gamma = 1_I$, si tomamos $h = k\beta$, esta verifica que $hg = k\beta g = k\gamma f = 1_I f = f$, por lo tanto obtuvimos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

TEOREMA 2.2.4. *(Criterio de Baer) Sea $I \in {}_\Lambda M$. Entonces I es inyectivo, si y solo si para todo ideal a izquierda $J \triangleleft \Lambda$ y todo Λ-morfismo $f : J \to I$, se puede extender a todo Λ, o sea que existe un Λ-morfismo $g : \Lambda \to I$, tales que*

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & \Lambda \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Demostración:
Si I es inyectivo, como $J \triangleleft \Lambda$ es un ideal a izquierda, entonces $J \in {}_\Lambda M$, por lo tanto existe el Λ-morfismo h que extiende a f descripto en el teorema.
Por otro lado, supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $B \in {}_\Lambda M$, A es un submódulo de B e i la inclusión.
La idea es probar que existe un morfismo $g : B \to I$ tales que $g|_A = f$.
Sea $X = \{(A', g') : A \subseteq A' \subseteq B,\ g' : A' \to I,\ g'|_A = f\}$, observar que $X \neq \varnothing$, porque $(A, f) \in X$. Le daremos un orden parcial a X de la siguiente forma: $(A', g') \leq (A'', g'')$, si $A' \subset A''$ y $g''|_{A'} = g'$.
Sea $\Omega = \{(A_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha \in \Delta}$ una cadena en X.
Definimos $A_\infty = \cup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ y $g_\infty : A_\infty \to I$ tales que $g_\infty(a) = g_\alpha(a)$ si $a \in A_\alpha$, de esta forma $(A_\infty, g_\infty) \in X$ y es una cota superior de Δ. Entonces por el Lema de Zorn, existe $(\hat{A}, \hat{f}) \in X$ maximal.
Supongamos que $\hat{A} \subsetneq B$, entonces existe $b \in B \setminus \hat{A}$. Sean $\tilde{A} = \hat{A} + \Lambda b$ y

$J = \{\lambda \in \Lambda : \lambda b \in \hat{A}\}$, es fácil ver que $J \lhd \Lambda$.
Definimos $h : J \to I$ como $h(j) = \hat{f}(jb), \forall j \in J$, entonces por hipótesis, existe $k : \Lambda \to I$, tales que $k|_J = h$.
Sea $\tilde{f} : \tilde{A} \to I$ definida por $\tilde{f}(a + \lambda b) = \hat{f}(a) + k(\lambda)$, ahora se probará que está bien definida.
Sean $a_1 + \lambda_1 b = a_2 + \lambda_2 b$ con $a_1, a_2 \in \hat{A}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, de esta forma $a_1 - a_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)b$, por lo tanto $\lambda_2 - \lambda_1 \in J$, entonces $k(\lambda_2 - \lambda_1) = h(\lambda_2 - \lambda_1)$, por lo tanto $\hat{f}(a_1) - \hat{f}(a_2) = \hat{f}((\lambda_2 - \lambda_1)b) = h(\lambda_2 - \lambda_1) = k(\lambda_2 - \lambda_1) = k(\lambda_2) - k(\lambda_1)$. De esta forma $\hat{f}(a_1) + k(\lambda_1) = \hat{f}(a_2) + k(\lambda_2)$, entonces $\tilde{f}$ está bien definida y $\tilde{f}|_{\hat{A}} = \hat{f}$, por lo tanto $(\hat{A}, \hat{f}) \lneq (\tilde{A}, \tilde{f})$ lo cual es absurdo, entonces $\hat{A} = B$.

DEFINICIÓN 2.2.5. *Sea Λ un dominio, decimos que $M \in {}_\Lambda M$ es divisible si para todo $m \in M$ y $\lambda \in \Lambda$ no nulo, existe $n \in M$ tal que $m = \lambda n$.*

PROPOSICIÓN 2.2.6. *Si Λ es un dominio de ideales principales, entonces $I \in {}_\Lambda M$ es inyectivo si y solo si I es divisible.*
Demostración:
Sean $I \in {}_\Lambda M$ inyectivo, $e \in I$ y $\lambda \in \Lambda$ no nulo. Definimos el morfismo $f : \Lambda\lambda \longrightarrow I$ como $f(a\lambda) = ae$, $\forall a \in \Lambda$, f queda bien definida porque Λ es un dominio. Como I es inyectivo, existe $\hat{f} : \Lambda \longrightarrow I$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & \Lambda\lambda \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & \Lambda \arrow[ul, dashed, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. De esta forma $\hat{f}|_{\Lambda\lambda} = \hat{f}i = f$, entonces $e = f(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \lambda\hat{f}(1)$, por lo tanto I es divisible.
Sean $I \in {}_\Lambda M$, $J \lhd \Lambda$ ideal y $f : J \longrightarrow I$ un morfismo. La idea es usar el Criterio de Baer Teorema 2.2.4, para eso hay que mostrar que se puede extender el morfismo f a todo Λ, notar que podemos suponer $J \neq 0$ porque si es nulo es trivial. Como Λ es un dominio de ideales principales existe $r \in \Lambda$ no nulo tal que $J = \Lambda r$. Sea $e = f(r) \in I$, entonces como I es divisible, existe $n \in I$ tal que $e = rn$. Definimos el morfismo $\hat{f} : \Lambda \longrightarrow I$ como $\hat{f}(a) = an$, $\forall a \in \Lambda$, notar que $\hat{f}(ar) = (ar)n = a(rn) = ae = af(r) = f(ar)$, $\forall a \in \Lambda$, por lo tanto $\hat{f}|_J = f$. Entonces por el Teorema 2.2.4 I es inyectivo.

PROPOSICIÓN 2.2.7. *Dado $A \in {}_\Lambda M$, siempre existen $E \in {}_\Lambda M$ inyectivo y un morfismo $\varphi : A \longrightarrow E$ inyectiva.*
Demostración:
Teorema 3.38 en [Rot].

DEFINICIÓN 2.2.8. *Sea $A \in {}_\Lambda M$. Una resolución inyectiva de A es una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} \ldots \longrightarrow E_n \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

donde cada $E_i \in {}_\Lambda M$ es inyectivo.

PROPOSICIÓN 2.2.9. *Dado $A \in {}_\Lambda M$, siempre existe una resolución inyectiva de A.*
Demostración:
Por la Proposición 2.2.7, se sabe que existen $E_0 \in {}_\Lambda M$ inyectivo y un morfismo inyectivo $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} E_0$, por lo tanto se puede considerar la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} E_0 \xrightarrow{\pi} E_0/Im(\epsilon) \longrightarrow 0$$

donde π es la proyección canónica. Pero como $E_0/Im(\epsilon) \in {}_\Lambda M$, nuevamente por la Proposición 2.2.7, se sabe que existen $E_1 \in {}_\Lambda M$ inyectivo y un morfismo inyectivo $0 \longrightarrow E_0/Im(\epsilon) \xrightarrow{\varphi} E_1$. Luego se puede considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & E_0/Im(\epsilon) \arrow[ur] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\epsilon"'] & E_0 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, dashed, "d_1=\varphi\pi"'] & & E_1
\end{tikzcd}.$$

Como φ es inyectiva, se tiene $Ker(\varphi\pi) = Ker(\pi) = Im(\epsilon)$, entonces la fila inferior del diagrama es exacta. Iterando este procedimiento se construye una resolución inyectiva de A.

2.3. Módulos planos.

DEFINICIÓN 2.3.1. *Sea Λ un anillo, un $A \in M_\Lambda$ es plano, si $A \otimes_\Lambda \Box$ es un functor exacto, o sea que si*

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0$$

es una SEC, con B', B y $B'' \in_\Lambda M$, entonces

$$0 \longrightarrow A \otimes_\Lambda B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_\Lambda B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_\Lambda B'' \longrightarrow 0$$

es una SEC de grupos abelianos.

OBSERVACIÓN 2.3.2. *De forma similar se define módulo plano en la categoría ${}_\Lambda M$.*

TEOREMA 2.3.3. *Sea Λ un anillo. Entonces:*

i) $\Lambda \in M_\Lambda$ *es plano.*

ii) $\oplus_j M_j$ *con* $M_j \in M_\Lambda$ *es plano si y solo si, cada* M_j *es plano.*

iii) Todo $P \in M_\Lambda$ *proyectivo es plano.*

Demostración:

i) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\ \Lambda \otimes_\Lambda A \arrow[r, "1\otimes i"'] & \Lambda \otimes_\Lambda B \end{tikzcd}$$

donde $i : A \longrightarrow B$ es inyectivo, $\sigma(a) = 1 \otimes a$ y $\tau(b) = 1 \otimes b$. Claramente σ y τ son isomorfismos, como $1_\Lambda \otimes i = \tau i \sigma^{-1}$, entonces $1_\Lambda \otimes i$ es inyectivo, y por el Lema 1.2.23 obtenemos que Λ es plano.

ii) Sea $i : A \longrightarrow B$ inyectivo, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (\oplus_j M_j) \otimes_\Lambda A \arrow[r, "1\otimes i"] \arrow[d, "\sigma"'] & (\oplus_j M_j) \otimes_\Lambda B \arrow[d, "\tau"] \\ \oplus_j (M_j \otimes_\Lambda A) \arrow[r, "\phi"'] & \oplus_j (M_j \otimes_\Lambda B) \end{tikzcd}$$

donde σ y τ son los isomorfismos dados por la Proposición 1.2.16 y $\phi(m_j \otimes a) = (m_j \otimes i(a))$. De esta forma tenemos que $1 \otimes i$ es inyectivo si y solo si $1_{M_j} \otimes i$ es inyectivo, o esa que con esto y la Proposición 1.2.23, se obtiene que $\oplus_j M_j$ es plano si y solo si, cada M_j es plano.

iii) P es proyectivo, por el Corolario 2.1.8, se tiene que P es sumando directo de $L \in M_\Lambda$ libre, y como todo libre es isomorfo a $\oplus M_j$ con $M_j = \Lambda$ para cada j, entonces por las partes i) y ii), se tiene que L es plano, y nuevamente por la parte ii), se tiene que P es plano.

2.4. Módulos semisimples.

DEFINICIÓN 2.4.1. *Sea Λ un anillo, un $A \in {}_\Lambda M$ es simple si es no nulo y no contiene submódulos excepto A y 0. Un $A \in {}_\Lambda M$ es semisimple si es suma directa de módulos simples o el módulo nulo. Decimos que un anillo Λ es simple o semisimple si lo es como ${}_\Lambda M$.*

OBSERVACIÓN 2.4.2. *Si $S \in {}_{\Lambda}M$ es simple, entonces es cíclico, o sea $S = \Lambda s$ para cualquier $s \in S$ no nulo, porque Λs es un submódulo de S no nulo, por lo tanto $\Lambda s = S$.*

PROPOSICIÓN 2.4.3. *Un módulo A es semisimple, si y solo si cada submódulo de A es un sumando directo.*
Demostración:
Sea $A = \oplus_{i\in I} S_i$, donde los S_i son submódulos simples de A.
Sean $S_J = \oplus_{i\in J\subset I} S_i$, $B \subsetneq A$ submódulo y $\mathcal{H}_B = \{J \subset I \text{ } tal \text{ } que \text{ } S_J \cap B = 0\}$ un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión. Notar que $\mathcal{H}_B \neq \emptyset$, porque si $S_i \cap B \neq 0, \ \forall i \in I$ implicaría que $B = A$. Notar también que toda cadena en $\mathcal{H}_B$ está acotada por la unión de los conjuntos que están contenidos en ella. Por lo tanto aplicando el Lema de Zorn obtenemos un elemento maximal que lo denotaremos T. De esta forma S_T cumple que $S_T \cap B = 0$ y $(S_T + S_i) \cap B \neq 0$, si $i \notin T$, o sea que $(S_T + B) \cap S_i \neq 0$ si $i \notin T$. Como S_i es simple, $S_i \subset S_T + B \ \forall i \in I$. Esto implica que $A = S_T + B$ y como $S_T \cap B = 0$, entonces B es sumando directo de A.
Ahora supongamos que todo submódulo de A es un sumando directo, esto implica que todo submódulo $B \subset A$ también tiene esta propiedad, porque si $C \subset B \subset A$ son submódulos, existe $D \subset A$ submódulo tales que $A = C \oplus D$, entonces $B = C \oplus (B \cap D)$.
Primero se probará que todo $0 \neq C \subset A$ submódulo contiene un módulo simple. Si C es simple, no hay que probar nada. Consideremos el caso en que C no es simple, o sea que existe $0 \neq U \subsetneq C$ submódulo, a su vez por hipótesis U es un sumando directo de C. Por lo tanto existe $0 \neq V \subsetneq C$ submódulo, tal que $C = U \oplus V$. Sean $0 \neq c \in U$ y $\mathcal{H}_c = \{H$ tales que $c \notin H, \ 0 \neq H \subset C$ submódulo$\}$ un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión, notar que $\mathcal{H}_c \neq \emptyset$ porque $V \in \mathcal{H}_c$ y toda cadena está acotada por la unión de los submódulos de C en ella, es fácil ver que la unión de submódulos de una cadena es también un submódulo. Luego aplicando el Lema de Zorn obtenemos $D \subset C$ un submódulo maximal con la inclusión tal que $c \notin D$, o sea que cualquier otro módulo N tales que $D \subsetneq N \subset C$, se tiene que $c \in N$. De esta forma $C = D \oplus E$, donde E es un submódulo que va ser un módulo simples, supongamos que $E = F \oplus G$ con F y G submódulos no nulos, entonces $C = D \oplus F \oplus G$. Pero esto implica que $c \in D \oplus F$ y $c \in D \oplus G$, entonces existen $d_1, d_2 \in D, \ f \in F$ y $g \in G$ tal que $d_1 + f = c = d_2 + g$, de esta forma $d_1 - d_2 = g - f \in E \cap D = 0$, entonces $f = g \in F \cap G = 0$, por lo tanto $c \in D$, lo cual es absurdo. Así podemos concluir que E no tiene submódulos propios, o sea que E es simple.
Sea $\{S_j\}_{j\in J}$ una familia maximal de submódulos simples de A. Sea $B = \sum_{j\in J} S_j$ que obviamente es una suma directa, supongamos que existe $0 \neq C \subset A$ submódulo, tales que $A = B \oplus C$, pero esto contradice la maximalidad de la familia $\{S_j\}_{j\in J}$ porque C contiene un simple, entonces $A = \oplus_{j\in J} S_j$.

PROPOSICIÓN 2.4.4. *Para cada anillo Λ, las siguientes propiedades son* *equivalentes:*

a) Λ *es semisimple como un módulo en* ${}_{\Lambda}M$*,*

b) Todo ideal a izquierda de Λ *es un sumando directo de* Λ*,*

c) Todo ideal a izquierda de Λ *es inyectivo,*

d) Si $A \in {}_{\Lambda}M$*,* A *es semisimple,*

e) Toda SEC $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ *, con* A, B *y* $C \in {}_{\Lambda}M$*, se escinde,*

f) Si $A \in {}_{\Lambda}M$*,* A *es proyectivo,*

g) Si $A \in {}_{\Lambda}M$*,* A *es inyectivo.*

Demostración:
La equivalencia entre $a)$ y $b)$ se desprende de la Proposición 2.4.3.

$d) \Rightarrow e)$ Por la Proposición 2.4.3 todo submódulo de B es un sumando directo de B, de esta forma $\alpha(A)$ es un sumando directo de B. Por otro lado como α es un morfismo inyectivo, se puede construir un morfismo $\delta : \alpha(A) \longrightarrow A$ de la siguiente forma: $\delta(b) = a$ si $\alpha(a) = b$. Luego como $\alpha(A)$ es un sumando directo de B, o sea que existe $0 \neq C' \subsetneq B$ submódulo tal que $B = \alpha(A) \oplus C'$, se puede extender δ a todo B, definiendo $\delta(c') = 0,\ \forall c' \in C'$, por lo tanto $\delta\alpha = 1_A$, entonces por definición, la SEC

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

$e) \Rightarrow d)$ Sea $C \subset A$ submódulo y consideremos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/C \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión y π es la proyección. Como la SEC se escinde, $A = C \oplus A/C$, por lo tanto C es un sumando directo de A. Entonces por la Proposición 2.4.3 A es semisimple.

La equivalencia entre $e)$ y $f)$ fue probada en la Proposición 2.1.7, y la equivalencia entre $e)$ y $g)$ fue probada en la Proposición 2.2.3. La equivalencia entre $d)$ y $g)$ se deduce de las anteriores.

$g) \Rightarrow c)$ Es obvia porque es un caso particular.

$c) \Rightarrow b)$ Si $I \triangleleft \Lambda$ es inyectivo entonces por la Proposición 2.2.3, la SEC

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/I \longrightarrow 0$$

se escinde, por lo tanto I es un sumando directo de Λ.

$b) \Rightarrow g)$ Como todo ideal I a izquierda es sumando directo de Λ, entonces todo morfismo $f : I \to A$ con $A \in {}_{\Lambda}M$, se puede extender a todo Λ, entonces por el Teorema 2.2.4, A es inyectivo.

LEMA 2.4.5. *Sean Λ un anillo, $N \triangleleft \Lambda$ un ideal bilateral nilpotente y $\Gamma = \Lambda/N$. Entonces:*

a) Si $S \in {}_{\Lambda}M$ es simple, entonces $NS = 0$.

b) $S \in {}_{\Lambda}M$ es simple, si y solo si $S \in {}_{\Gamma}M$ es simple.

c) $M \in {}_{\Lambda}M$ tal que $NM = 0$, entonces $M \in {}_{\Lambda}M$ es semisimple, si y solo si $M \in {}_{\Gamma}M$ es semisimple.

Demostración:

a) Si N es nilpotente, existe un $k \in \mathbb{N}$ tales que $\Pi_{i=1}^{k} n_i = 0$ con $n_i \in N$. Se tiene que NS es un submódulo de S porque $\Lambda NS = NS$, por lo tanto solo hay dos posibilidades, $NS = 0$ o $NS = S$, si $NS = S$, de esta forma NS es simple. Entonces es generado por un elemento, en particular existe un $n \in N$ tales que $s = ns$ para $0 \neq s \in S$, pero entonces $0 = n^k s = n^{k-1} s = \cdots = s$, de esta forma $NS = 0$.

b) Sea $S \in {}_{\Lambda}M$ simple, por la parte a) se tiene que $NS = 0$, entonces $S \in {}_{\Gamma}M$, si no es simple, existe $0 \subsetneq U \subsetneq S$ tales que $U \in {}_{\Gamma}M$, pero si esto sucede $U \in {}_{\Lambda}M$, basta definir $\lambda s = \pi_N(\lambda)s$ que viene a ser la misma operación porque $\pi_n(\lambda)s = (\lambda + N)s = \lambda s + Ns = \lambda s$. Entonces por contrarecíproco obtenemos lo deseado.
Por otro lado, si $S \in {}_{\Gamma}M$ simple. $S \in {}_{\Lambda}M$ con la operación $\lambda s = \pi_N(\lambda)s$. Si $S \in {}_{\Lambda}M$ no es simple, existe $0 \subsetneq U \subsetneq S$ tales que $U \in {}_{\Lambda}M$, pero si esto sucede $U \in {}_{\Gamma}M$, porque $NU = 0$, ya que $\pi_N(n) = 0$, $\forall n \in N$. Entonces también por contrarecíproco obtenemos lo deseado.

c) $M \in {}_{\Lambda}M$ con $NM = 0$, entonces $M \in {}_{\Gamma}M$. Luego si $M \in {}_{\Lambda}M$ es semisimple, $M = \oplus_{i \in I} S_i$ con $S_i \in {}_{\Lambda}M$ simples, por la parte b), $S_i \in {}_{\Gamma}M$ simple $\forall i \in I$, entonces $M \in {}_{\Gamma}M$ es semisimple.
El recíproco es análogo.

2.5. Anillos Noetherianos.

DEFINICIÓN 2.5.1. *Un anillo Λ es Noetheriano a izquierda (derecha) si cada ideal I a izquierda (derecha) es finitamente generado, o sea que existen $a_1, ..., a_n \in I$ tales que $I = \Lambda a_1 + ... + \Lambda a_n$.*

EJEMPLO 2.5.2. *Todo ideal del anillo de los núneros enteros $\mathbb{Z}$ es de la forma $\mathbb{Z}m$ con $m \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\mathbb{Z}$ es un anillo Noetheriano.*

PROPOSICIÓN 2.5.3. *Si Λ es un anillo Noetheriano a izquierda, entonces todo submódulo de un $A \in {}_{\Lambda}M$ finitamente generado es finitamente generado.*

Demostración:

La demostración será por inducción en $n > 0$, donde $A = \Lambda a_1 + ... + \Lambda a_n$.
Si $n = 1$, entonces $A = \Lambda a_1$, de esta forma tenemos un morfismo $\varphi : \Lambda \longrightarrow A$, dado por $\varphi(\lambda) = \lambda a_1$, de esta forma $A \simeq \Lambda / Ker(\varphi)$, si S es un submódulo de A, existe un ideal a izquierda de $J \lhd \Lambda$ tales que $Ker(\varphi) \subseteq J \subseteq \Lambda$ y $S \simeq J/Ker(\varphi)$, basta considerar $J = \varphi^{-1}(S)$. Como Λ es Noetheriano, J es finitamente generado y por lo tanto $J/Ker(\varphi)$ también es finitamente generado, entonces S es finitamente generado.
Si $n \geq 1$ y $A = \Lambda a_1 + ... + \Lambda a_n + \Lambda a_{n+1}$, considerando la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

donde $A' = \Lambda a_1 + ... + \Lambda a_n$, $A'' = A/A'$, i es la inclusión y π es la proyección natural. De esta forma $A'' = \Lambda(a_{n+1} + A')$. Si S es un submódulo de A, se tiene la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow S \cap A' \longrightarrow S \longrightarrow S/(S \cap A') \longrightarrow 0 .$$

Como $S \cap A' \subseteq A'$ por hipótesis inductiva es finitamente generado. Además por los Teoremas de isomorfismos tenemos que $S/(S \cap A') \simeq (S + A')/A' \subseteq A/A'$, de esta forma por el caso base, $S/(S \cap A')$ es finitamente generado. Por lo tanto S es finitamente generado, pues basta tomar el generador de S como representantes del generador de $S/(S \cap A')$ y los generadores de $S \cap A'$.

LEMA 2.5.4. *Sean Λ un anillo Noetheriano y $A \in {}_{\Lambda}M$ finitamente generado, entonces existe una resolución proyectiva tales que cada P_i es finitamente generado.*

Demostración:

Sea P_0 el módulo libre generado por los generadores de A y $\varphi : P_0 \twoheadrightarrow A$, como P_0 es libre y Noetheriano, obtenemos por la Proposición 2.5.3 que $Ker(\varphi)$ es finitamente generado, repitiendo este procedimiento obtenemos una resolución de proyectivos finitamente generados.

LEMA 2.5.5. *Si Λ es un anillo Noetheriano, entonces $A \in {}_{\Lambda}M$ finitamente generado es plano, si y sólo si es proyectivo.*
Demostración:
[Rot] Corolario 3.57.

Capítulo 3

Homología y funtores derivados.

3.1. Homología

DEFINICIÓN 3.1.1. *Un complejo de cadenas en* ${}_{\Lambda}M$ *es una sucesión*

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

en ${}_{\Lambda}M$ *tales que* $d_n d_{n+1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

NOTACIÓN 3.1.2. *Para los complejos de cadenas usaremos la siguiente notación* $C_{\bullet} = (C_n, d_n)$.

DEFINICIÓN 3.1.3. *Dados dos complejos de cadenas* $C_{\bullet} = (C_n, d_n)$ *y* $C'_{\bullet} = (C'_n, d'_n)$ *un morfismo entre estos* $f_{\bullet} : C_{\bullet} \longrightarrow C'_{\bullet}$ *es una sucesión de morfismos* $f_{\bullet} = (f_n)$ *con* $f_n : C_n \longrightarrow C'_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$, *tales que el siguiente diagrama conmuta para cada* $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

o sea que $f_n d_{n+1} = d'_{n+1} f_{n+1}$.

OBSERVACIÓN 3.1.4. *Considerando el morfismo identidad como* $1_{C_{\bullet}} = (1_{C_n})$ *y la composición de morfismos* $f_{\bullet} g_{\bullet} = (f_n g_n)$, *se tiene que los complejos de cadenas forman una categoría, para la cual usaremos la siguiente notación* $\mathcal{C}_{\bullet}({}_{\Lambda}M)$.

DEFINICIÓN 3.1.5. *El n-ésimo funtor de homología*

$$H_n : \mathcal{C}_\bullet({}_\Lambda M) \longrightarrow {}_\Lambda M$$

es:

- *Sea* $C_\bullet = (C_n, d_n)$*, entonces* $H_n(C_\bullet) = ker(d_n)/Im(d_{n+1})$*, esto tiene sentido porque* $d_n d_{n+1} = 0$*, lo cual implica que* $Im(d_{n+1}) \subset ker(d_n)$*. Llamaremos a* $H_n(C_\bullet)$ *el n-ésimo módulo de homología de* $C_\bullet$*.*

- *Sea* $f_\bullet = (f_n) : C_\bullet = (C_n, d_n) \longrightarrow C'_\bullet = (C'_n, d'_n)$*, entonces* $H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C'_\bullet)$*, se define de la siguiente forma: como* $d'_n f_n = f_{n-1} d_n$*, entonces* $f_n(ker(d_n)) \subset ker(d'_n)$*, por lo tanto se puede restringir* f_n *a los núcleos, o sea* $f_n : ker(d_n) \longrightarrow ker(d'_n)$*. También se tiene que* $d'_{n+1} f_{n+1} = f_n d_{n+1}$*, entonces* $f_n(Im(d_{n+1})) \subset Im(d'_{n+1})$*, de esta forma se puede aplicar la propiedad universal del cociente para obtener el siguiente mapa* $\bar{f}_n : ker(d_n)/Im(d_{n+1}) \longrightarrow ker(d'_n)/Im(d'_{n+1})$ *que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} ker(d_n) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\pi_{Im(d_{n+1})}"'] & ker(d'_n) \arrow[d, "\pi_{Im(d'_{n+1})}"] \\ \frac{ker(d_n)}{Im(d_{n+1})} \arrow[r, "\bar{f}_n"] & \frac{ker(d'_n)}{Im(d'_{n+1})} \end{tikzcd}$$

de esta forma queda bien definido $H_n(f_\bullet) = \bar{f}_n$*.*

TEOREMA 3.1.6. *(Sucesión exacta larga de homología) Sea*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

una SEC de complejos de cadenas, entonces para cada n *existe un morfismo* δ_n*, llamado morfismo de conexión, tales que la sucesión*

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_n}$$

$$H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f_\bullet)} H_{n-1}(B_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(g_\bullet)} H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots$$

es exacta.

Demostración:

[Rot] Proposición 6.9. y Teorema 6.10.

DEFINICIÓN 3.1.7. *Dos morfismos de complejos de cadenas* $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet = (C_n, d_n) \longrightarrow C'_\bullet = (C'_n, d'_n)$ *son homotópicos, si para todo* n *existen morfismos* $s_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$*, tales que* $f_n - g_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$*.*
Si $f_\bullet$ *y* $g_\bullet$ *son homotópicos, usaremos la siguiente notación* $f_\bullet \simeq_\bullet g_\bullet$*.*
Un morfismo $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ *es homotópicamente nulo, si* $f_\bullet \simeq_\bullet 0_\bullet$*, donde* $0_\bullet$ *es el morfismo nulo de complejos de cadenas.*

TEOREMA 3.1.8. *Morfismos de complejos de cadenas homotópicos inducen el mismo morfismo de homología, o sea que si* $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ *son morfismos tales que* $f_\bullet \simeq_\bullet g_\bullet$, *entonces* $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C'_\bullet)\ \forall n$.
Demostración:
Sea $x \in ker(d_n)$, o sea que $d_n(x) = 0$, de esta forma $f_n(x) - g_n(x) = d'_{n+1}s_n(x)$, entonces $f_n(x) - g_n(x) \in Im(d'_{n+1})$, por lo tanto $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$.

TEOREMA 3.1.9. *(Teorema de comparación) Dados* M *y* $N \in {}_\Lambda M$ *y un morfismo* $f : M \longrightarrow N$, *consideremos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\alpha_2"] & P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r, "\beta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si la primera fila es un complejo de cadenas con P_n *proyectivo para todo* $n \geq 0$, *y la segunda fila de es exacta, entonces existe un morfismo de complejos de cadenas* $\hat{f} : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ *donde* $P_\bullet = (P_n, \alpha_n)$ *y* $Q_\bullet = (Q_n, \beta_n)$ *con* $P_n = Q_n = 0$ *y* $\alpha_n = \beta_n = 0\ \forall n < 0$, *que extiende a* f, *o sea que* $\eta\hat{f}_0 = f\epsilon$, *lo cual implica que el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\alpha_2"] & P_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\hat{f}_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\hat{f}_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r, "\beta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\beta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Además si existe otro morfismo de complejos de cadenas $\tilde{f} : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ *que extiende a* f, *entonces* $\hat{f}$ *y* $\tilde{f}$ *son homotópicos.*
Demostración:
[Rot] Teorena 6.16.

NOTACIÓN 3.1.10. *Sea*

$$\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de $M \in {}_\Lambda M$, *para el complejo de cadenas*

$$\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

usaremos la notación P_M, *que claramente no es único.*

COROLARIO 3.1.11. *Sean* $A,\ A' \in {}_\Lambda M$ *y un morfismo* $f : A \longrightarrow A'$, *entonces existe un morfismo de complejos de cadenas* $\hat{f}_\bullet : P_A \longrightarrow P_{A'}$, *que además es único a menos de homotopía.*

El siguiente resultado muestra que los funtores de homología conmutan con los funtores aditivos exactos.

PROPOSICIÓN 3.1.12. *Si $M_\bullet$ es un complejo de cadenas en ${}_\Lambda M$ y $F : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\Lambda M$ es un funtor aditivo exacto, entonces $H_n(F(M_\bullet)) \simeq F(H_n(M_\bullet))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*
Demostración:
Proposición 6.1 en [CE].

3.2. Funtores derivados a izquierda.

Dado un funtor covariante aditivo $T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$, los funtores derivados a la izquierda $L_n T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$ se construyen de la siguiente manera: Para cada $A \in {}_\Lambda M$ elegimos una resolución proyectiva de A

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

entonces $T(P_A)$ es el siguiente complejo de cadenas

$$\ldots \longrightarrow T(P_2) \xrightarrow{T(d_2)} T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \xrightarrow{T(d_0)} 0$$

donde $d_0 = 0$.
Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$L_n T(A) = H_n(T(P_A)) = \frac{Ker(T(d_n))}{Im(T(d_{n+1}))},\ (L_n T(A) = 0,\ \forall n < 0)$$

(Esta definición no depende de la elección de la resolución proyectiva, lo cual se puede ver en [Rot] Proposición 6.20.)
Sean $A, A' \in {}_\Lambda M$, $f : A \longrightarrow A'$ un morfismo y $f_\bullet : P_A \longrightarrow P_{A'}$ dada por el Teorema 3.1.9 (Teorema de comparación), para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$L_n T(f) = H_n(T(f_\bullet)) : L_n(T(A)) \longrightarrow L_n(T(A'))$$

Claramente $L_n T$ es un funtor covariante aditivo para cada $n \in Z$.

PROPOSICIÓN 3.2.1. *Sea $T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$ un funtor covariante aditivo. Entonces si $P \in {}_\Lambda M$ es proyectivo, $L_n T(P) = 0$, $\forall n > 0$.*
Demostración:
Basta considerar la siguiente resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0\ .$$

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Sea $T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$ un funtor covariante aditivo exacto a derecha. Entonces: $L_0 T \simeq T$.*

Demostración:
Por definición $L_0T(A) = H_0(T(P_A)) = \frac{Ker(T(d_0))}{Im(T(d_1))} \simeq \frac{T(P_0)}{Ker(T(\epsilon))} \simeq T(A)$, porque T es exacto a derecha, y además $T(\epsilon)$ induce un isomorfismo natural.

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Sea*

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de $A \in {}_\Lambda M$. Definimos $K_0 = Ker(\epsilon)$ y $K_n = Ker(d_n)$, $\forall n > 0$. Entonces

$$(L_{n+1}T)A \simeq (L_nT)K_0 \simeq (L_{n-1}T)K_1 \simeq \cdots \simeq (L_1T)K_{n-1}.$$

Demostración:
Por la exactitud de la resolución proyectiva, se tiene que $K_0 = Ker(\epsilon) = Im(d_1)$, entonces llamando $Q_n = P_{n+1}$, $\delta_n = d_{n+1}$ $\forall n > 0$ y $\epsilon' = d_1$, tenemos la siguiente resolución proyectiva de K_0

$$\ldots \longrightarrow Q_2 \xrightarrow{\delta_2} Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\epsilon'} K_0 \longrightarrow 0$$

de esta forma se tiene que

$$(L_nT)K_0 \simeq H_n(T(Q_{K_0})) = \frac{Ker(T(\delta_n))}{Im(T(\delta_{n+1}))} =$$

$$\frac{Ker(T(d_{n+1}))}{Im(T(d_{n+2}))} = H_{n+1}(T(P_A)) \simeq (L_{n+1}T)A.$$

Iterando este procedimiento se llega al resultado deseado.

TEOREMA 3.2.4. *Si*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

es una SEC en ${}_\Lambda M$ y $T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$ es un funtor covariante aditivo, entonces existe una sucesión exacta larga en ${}_\mathbb{Z}M$

$$\ldots \longrightarrow (L_nT)A' \xrightarrow{(L_nT)i} (L_nT)A \xrightarrow{(L_nT)p} (L_nT)A'' \xrightarrow{\delta_n}$$

$$(L_{n-1}T)A' \xrightarrow{(L_{n-1}T)i} (L_{n-1}T)A \xrightarrow{(L_{n-1}T)p} (L_{n-1}T)A'' \xrightarrow{\delta_{n-1}}$$

$$\ldots \longrightarrow (L_0T)A' \xrightarrow{(L_0T)i} (L_0T)A \xrightarrow{(L_0T)p} (L_0T)A'' \longrightarrow 0$$

Demostración:
[Rot] Teorema 6.27.

OBSERVACIÓN 3.2.5. *Dado un funtor covariante aditivo* $T : M_\Lambda \longrightarrow M_\mathbb{Z}$*, los funtores derivados a izquierda* $L_n T : M_\Lambda \longrightarrow M_\mathbb{Z}$ *se define de igual manera y las propiedades se prueban de la misma forma.*

A continuación se definirán los funtores $Tor_n^\Lambda(\ \,, A)$ y $Tor_n^\Lambda(B, \ )$, los cuales corregirán de alguna manera la falta de exactitud a izquierda de los funtores $\square \otimes_\Lambda A$ y $B \otimes_\Lambda \square$. Serán necesarios para definir y demostrar propiedades de dimensiones homológicas.

DEFINICIÓN 3.2.6. *Sea* $A \in M_\Lambda$*, como* $A \otimes_\Lambda \square : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M$ *es un funtor covariante aditivo, quedan bien definidos los funtores derivados a izquierda*

$$Tor_n^\Lambda(A, \ ) = L_n(A \otimes_\Lambda \square), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

TEOREMA 3.2.7. *Sea* $B \in M_\Lambda$*. Entonces:*

1. $Tor_0^\Lambda(B, \ ) \simeq B \otimes_\Lambda \square$,

2. *Toda SEC*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

en ${}_\Lambda M$ *induce una sucesión exacta larga en* ${}_\mathbb{Z}M$

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} Tor_n^\Lambda(B, A') \xrightarrow{Tor_n^\Lambda(B,i)} Tor_n^\Lambda(B, A) \xrightarrow{Tor_n^\Lambda(B,p)} Tor_n^\Lambda(B, A'') \xrightarrow{\delta_n}$$

$$Tor_{n-1}^\Lambda(B, A') \xrightarrow{Tor_{n-1}^\Lambda(B,i)} Tor_{n-1}^\Lambda(B, A) \xrightarrow{Tor_{n-1}^\Lambda(B,p)} Tor_{n-1}^\Lambda(B, A'') \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\delta_1} B \otimes_\Lambda A' \xrightarrow{1_B \otimes i} B \otimes_\Lambda A \xrightarrow{1_B \otimes p} B \otimes_\Lambda A'' \longrightarrow 0\ ,$$

3. *Todo morfismo de SEC*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i'"] & C \arrow[r, "p'"] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en ${}_\Lambda M$ *induce un morfismo de sucesiones exactas largas en* ${}_\mathbb{Z}M$

$$\begin{tikzcd} Tor_n^\Lambda(B, A') \arrow[r, "Tor_n^\Lambda(B,i)"] \arrow[d, "Tor_n^\Lambda(B,f)"] & Tor_n^\Lambda(B, A) \arrow[r, "Tor_n^\Lambda(B,p)"] \arrow[d, "Tor_n^\Lambda(B,g)"] & Tor_n^\Lambda(B, A'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "Tor_n^\Lambda(B,h)"] & Tor_{n-1}^\Lambda(B, A') \arrow[d, "Tor_{n-1}^\Lambda(B,f)"] \\ Tor_n^\Lambda(B, C') \arrow[r, "Tor_n^\Lambda(B,i')"'] & Tor_n^\Lambda(B, C) \arrow[r, "Tor_n^\Lambda(B,p')"'] & Tor_n^\Lambda(B, C'') \arrow[r, "\delta_n"'] & Tor_{n-1}^\Lambda(B, A') \end{tikzcd}$$

Demostración:
1. Se desprende de la Proposición 3.2.2 ya que el funtor $B \otimes_\Lambda \square$ es exacto a derecha.
2. Sale del Teorema 3.2.4.
3. Se puede ver en [Rot] Teorema 6.26.

PROPOSICIÓN 3.2.8. *Sea $M \in M_\Lambda$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) M *es plano,*

ii) $Tor_1^\Lambda(M,\ ) = 0$,

iii) $Tor_n^\Lambda(M,\ ) = 0,\ \forall n > 0$.

Demostración:
$i) \Rightarrow iii)$ Por como están definidos los módulos planos, se tiene que el funtor $M \otimes_\Lambda \square$ es exacto, por lo tanto el complejo de cadenas $M \otimes_\Lambda P_N$ es exacto $\forall n > 0$ y $\forall N \in {}_\Lambda M$, entonces $Tor_n^\Lambda(M, N) = H_n(M \otimes_\Lambda P_N) = 0\ \forall n > 0$.
$iii) \Rightarrow ii)$ Es obvio.
$ii) \Rightarrow i)$ Por el Teorema 3.2.7, se tiene que toda SEC

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

en ${}_\Lambda M$ induce la siguiente sucesión exacta

$$0 = Tor_1^\Lambda(M, A'') \xrightarrow{\delta_1} M \otimes_\Lambda A' \xrightarrow{1_M \otimes i} M \otimes_\Lambda A \xrightarrow{1_M \otimes p} M \otimes_\Lambda A'' \longrightarrow 0\ ,$$

entonces M es plano.

TEOREMA 3.2.9. *Sean $M \in M_\Lambda$ y una familia $(N_i)_{i \in I}$ con $N_i \in {}_\Lambda M$. Entonces:*

$$Tor_n^\Lambda(M, \oplus_{i\in I} N_i) \simeq \oplus_{i \in I} Tor_n^\Lambda(M, N_i),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:
Para cada $i \in I$ por el Corolario 2.1.3 se tiene una SEC

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow N_i \longrightarrow 0$$

con P_i proyectivo, luego se puede construir la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow \oplus_{i\in I} K_i \longrightarrow \oplus_{i\in I} P_i \longrightarrow \oplus_{i\in I} N_i \longrightarrow 0$$

donde $\oplus_{i\in I} P_i$ es proyectivo por la Proposición 2.1.9, entonces por la Proposición 3.2.1 se tiene $Tor_n^\Lambda(M, P_i) = Tor_n^\Lambda(M, \oplus_{i\in I} P_i) = 0,\ \forall n > 0$. Por la

Proposición 1.2.16 se sabe que el producto tensorial conmuta con la suma directa y entonces por el Teorema 3.2.7 se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Tor_1^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}N_i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & M \otimes_{\Lambda} (\oplus_{i\in I}K_i) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] & M \otimes_{\Lambda} (\oplus_{i\in I}P_i) \arrow[d, "\beta"', "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I}Tor_1^{\Lambda}(M, N_i) \arrow[r, "\delta'"] & \oplus_{i\in I}(M \otimes K_i) \arrow[r, "p'"] & \oplus_{i\in I}(M \otimes P_i) \end{tikzcd}$$

El morfismo f_1 se construye de la siguiente forma: sea $x \in Tor_1^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}N_i)$, entonces como el diagrama conmuta y la primera fila es exacta, se tiene $p'\alpha\delta(x) = \beta p\delta(x) = 0$, por lo tanto como la segunda fila es exacta y δ' es inyectiva, existe un único $y \in \oplus_{i\in I}Tor_1^{\Lambda}(M, N_i)$ tales que $\alpha\delta(x) = \delta'(y)$. De esta forma queda bien definida $f_1(x) = y$ que claramente es un morfismo de ${}_{\mathbb{Z}}M$, luego aplicando el Lema 1.1.26 (Lema de los cinco) se obtiene $Tor_1^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}N_i) \simeq \oplus_{i\in I}Tor_1^{\Lambda}(M, N_i)$.
Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Tor_n^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}N_i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_n"] & Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}K_i) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_{n-1}"] & 0 \arrow[d, "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I}Tor_n^{\Lambda}(M, N_i) \arrow[r] & \oplus_{i\in I}Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, K_i) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se obtiene lo deseado por inducción, ya que para $n = 1$ lo tenemos probado, luego por la hipótesis de inducción, es cierto para $n - 1$, o sea que en particular se tiene $Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}K_i) \simeq \oplus_{i\in I}Tor_{n-1}^{\Lambda}(M, K_i)$, luego aplicando el Lema 1.1.26 otra vez, se obtiene $Tor_n^{\Lambda}(M, \oplus_{i\in I}N_i) \simeq \oplus_{i\in I}Tor_n^{\Lambda}(M, N_i)$.

TEOREMA 3.2.10. *Sean $N \in M_{\Lambda}$ y $((M_i), f_{ji})$ un sistema dirigido, con $M_i \in {}_{\Lambda}M$. Entonces:*

$$Tor_n^{\Lambda}(N, \varinjlim M_i) \simeq \varinjlim Tor_n^{\Lambda}(N, M_i), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:
[Rot] Proposición 7.8.

DEFINICIÓN 3.2.11. *Sea $B \in {}_{\Lambda}M$, como $\Box \otimes_{\Lambda} B : M_{\Lambda} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}M$ es un funtor covariante aditivo, quedan bien definidos los funtores derivados*

$$Tor_n^{\Lambda}(\ , B) = L_n(\Box \otimes_{\Lambda} B)$$

OBSERVACIÓN 3.2.12. *Para el funtor derivado $Tor_n^{\Lambda}(\ , B)$, son ciertas también todas las propiedades probadas anteriormente para el funtor derivado $Tor_n^{\Lambda}(A,\ )$ y las pruebas son análogas.*

3.3. Funtores derivados a derecha.

Dado un funtor contravariante aditivo $T : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M(M_\Lambda \longrightarrow M_\mathbb{Z})$. Los funtores derivados a la derecha $R^nT : {}_\Lambda M \longrightarrow {}_\mathbb{Z}M(M_\Lambda \longrightarrow M_\mathbb{Z})$ se construyen de la siguiente manera:
Para cada $A \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$ elegimos una resolución proyectiva de A

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

entonces $T(P_A)$ es el siguiente complejo de cadenas

$$\dots \longleftarrow T(P_2) \xleftarrow{T(d_2)} T(P_1) \xleftarrow{T(d_1)} T(P_0) \xleftarrow{T(d_0)} 0$$

donde $d_0 = 0$.
Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$R_nT(A) = H_n(T(P_A)) = \frac{Ker(T(d_{n+1}))}{Im(T(d_n))}, \ (R_nT(A) = 0, \ \forall n < 0)$$

(Esta definición no depende de la elección de la resolución proyectiva, lo cual se puede ver en [Rot] Proposición 6.20.)
Sean $A, A' \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$, $f : A \longrightarrow A'$ un morfismo y $f_\bullet : P_A \longrightarrow P_A$ dada por el Teorema 3.1.9 (Teorema de comparación), para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$R^nT(f) = H_n(T(f_\bullet)) : R^n(T(A')) \longrightarrow R^n(T(A))$$

Los funtores derivados a derecha tienen propiedades semejantes a las propiedades de los funtores derivados a izquierda, las pruebas se hacen de forma similar. Para no repetir los enunciados y demostraciones, se asumirá que son ciertos, por cualquer duda se puede consultar los enunciados y demostraciones en [Rot]. Hecha esta observación iremos directo a un ejemplo de funtor derivado a derecha que será muy importante en el siguiente capítulo. Estos funtores derivados a derecha son $Ext^n_\Lambda(\ ,A)$, los cuales corregirán de alguna manera la falta de exactitud a derecha del funtor $Hom_\Lambda(\ ,A)$.

DEFINICIÓN 3.3.1. *Sea $A \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$, como $Hom_\Lambda(\ ,A)$ es un funtor contravariante aditivo, quedan bien definidos los funtores derivados a derecha*

$$Ext^n_\Lambda(\ ,A) = R^n(Hom_\Lambda(\ ,A)), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

TEOREMA 3.3.2. *Sea $B \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$. Entonces:*

1. *$Ext^n_\Lambda(\ ,B)$ es un funtor contravariante aditivo para cada $n \in \mathbb{Z}$,*
2. *Si $P \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$ es proyectivo, $Ext^n_\Lambda(P,B) = 0, \ \forall n > 0$,*
3. *$Ext^0_\Lambda(\ ,B) \simeq Hom_\Lambda(\ ,B)$,*

4. Si

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de $A \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$, $K_0 = ker(\epsilon)$ *y* $K_n = ker(d_n)$ $\forall n > 0$, *entonces*

$$Ext_\Lambda^{n+1}(A,B) \simeq Ext_\Lambda^n(K_0,B) \simeq \cdots \simeq Ext_\Lambda^1(K_{n-1},B).$$

5. Toda SEC

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

en ${}_\Lambda M(M_\mathbb{Z})$ *induce una sucesión exacta larga en* ${}_\mathbb{Z}M(M_\mathbb{Z})$

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A'',B) \xrightarrow{p^*} Hom_\Lambda(A,B) \xrightarrow{i^*} Hom_\Lambda(A',B) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$Ext_\Lambda^1(A'',B) \xrightarrow{Ext_\Lambda^1(p,B)} Ext_\Lambda^1(A,B) \xrightarrow{Ext_\Lambda^1(i,B)} Ext_\Lambda^1(A',B) \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

6. Todo morfismo de SEC

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i'"] & C \arrow[r, "p'"] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en ${}_\Lambda M$ *induce un morfismo de sucesiones exactas largas en* ${}_\mathbb{Z}M$

$$\begin{tikzcd}
Ext_\Lambda^n(C'',B) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(p',B)"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(h,B)"'] & Ext_\Lambda^n(C,B) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(i',B)"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(g,B)"'] & Ext_\Lambda^n(C',B) \arrow[r, "\delta'_{n+1}"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(f,B)"'] & Ext_\Lambda^{n+1}(C'',B) \arrow[d, "Ext_\Lambda^{n+1}(h,B)"'] \\
Ext_\Lambda^n(A'',B) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(p,B)"] & Ext_\Lambda^n(A,B) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(i,B)"] & Ext_\Lambda^n(A',B) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Ext_\Lambda^{n+1}(A'',B)
\end{tikzcd}$$

Demostración:
1. Se desprende directamente de la definición.
2. Basta tomar la siguiente resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0\ .$$

3. Se desprende del hecho de que el funtor $Hom_\Lambda(\ ,B)$ es exacto a izquierda, lo cual se probo en la Proposición 1.2.28.
4. Demostración similar a la de la Proposición 3.2.3.
5. y 6. Las demostraciones son similares a las del Teorema 3.2.7.

PROPOSICIÓN 3.3.3. *Sea* $M \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) M es inyectivo,

ii) $Ext^1_\Lambda(\ ,M) = 0$,

iii) $Ext^n_\Lambda(\ ,M) = 0,\ \forall n > 0$.

Demostración:
$i) \Rightarrow iii)$ Por la Proposición 2.2.2 se sabe que el funtor $Hom_\Lambda(\ ,M)$ es exacto cuando M es inyectivo, por lo tanto $ker(d^*_{n+1})/Im(d^*_n) = 0,\ \forall n > 0$.
$iii) \Rightarrow ii)$ Es directo.
$ii) \Rightarrow i)$ Por el Teorema 3.3.2 parte 5. se tiene que toda SEC

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

en ${}_\Lambda M(M_\mathbb{Z})$ induce una sucesión exacta larga en ${}_\mathbb{Z}M(M_\mathbb{Z})$

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(A'',M) \xrightarrow{p^*} Hom_\Lambda(A,M) \xrightarrow{i^*} Hom_\Lambda(A',M) \xrightarrow{\delta_1} 0$$

lo cual por la Proposición 2.2.2, implica que M es inyectivo.

TEOREMA 3.3.4. *Sean $M \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$ y una familia $(N_i)_{i\in I}$ con $N_i \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$. Entonces:*

$$Ext^n_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} N_i, M) \simeq \prod_{i\in I} Ext^n_\Lambda(N_i, M),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:
Similar a la demostración del Teorema 3.2.9, usando el hecho que

$$Hom_\Lambda(\bigoplus_{i\in I} N_i, M) \simeq \prod_{i\in I} Hom_\Lambda(N_i, M)$$

demostrado en la Proposición 1.2.19.

A continuación se definirán los funtores derivados a derecha para funtores covariantes aditivos.

NOTACIÓN 3.3.5. *Sea*

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

una resolución inyectiva de $B \in {}_\Lambda M$, para el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

usaremos la notación E^B, que claramente no es único.

Dado un funtor covariante aditivo $T : {}_{\Lambda}M \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}M(M_{\Lambda} \longrightarrow M_{\mathbb{Z}})$, los funtores derivados a derecha $R^n T : {}_{\Lambda}M \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}M(M_{\Lambda} \longrightarrow M_{\mathbb{Z}})$ se construyen de la siguiente manera:
Para cada $B \in {}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$ elegimos una resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

entonces $T(E^B)$ es el siguiente complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow T(E^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^1) \xrightarrow{T(d^1)} T(E^2) \longrightarrow \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$R^n T(B) = H_{-n}(T(E^B)) = \frac{Ker(T(d^n))}{Im(T(d^{n-1}))},\ (R^n T(B) = 0,\ \forall n < 0)$$

Esta definición no depende de la resolución inyectiva, lo cual es dual a lo que sucede con la definición de funtor derivado a izquierda.
Sean $B,\ B' \in {}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$, $f : B \longrightarrow B'$ un morfismo y por el dual al Teorema 3.1.9 (Teorema de comparación), se tiene $f^{\bullet} : E^B \longrightarrow E^{B'}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$R^n T(f) = H_{-n}(T(f^{\bullet}))$$

Como ya se ha observado anteriormente los funtores derivados a derecha tienen propiedades similares a los funtores derivados a izquierda, por mayor interés se puede consultar a [Rot].
A continuación vamos a estudiar los funtores derivados a derecha $Ext^n_{\Lambda}(A,\ )$, los cuales corregirán de alguna forma la falta de exactitud a derecha del funtor $Hom_{\Lambda}(A,\ )$, además de ser una herramienta importante en el siguiente capítulo.

DEFINICIÓN 3.3.6. *Sea $A \in {}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$, como $Hom_{\Lambda}(A,\ )$ es un funtor covariante aditivo, quedan bien definidos los funtores derivados a derecha*

$$Ext^n_{\Lambda}(A,\ ) = R^n(Hom_{\Lambda}(A,\ )),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Los siguientes teoremas y proposiciones se demuestran dualmente a los teoremas y proposiciones de funtores derivados a izquierda, a causa de esto no se hará la demostración.

TEOREMA 3.3.7. *Sea $B \in {}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$. Entonces:*

1. *$Ext^n_{\Lambda}(B,\ )$ es un funtor covariante aditivo para cada $n \in \mathbb{Z}$,*
2. *Si $E \in {}_{\Lambda}M(M_{\Lambda})$ es inyectivo, $Ext^n_{\Lambda}(B, E) = 0,\ \forall n > 0$,*
3. *$Ext^0_{\Lambda}(B,\ ) \simeq Hom_{\Lambda}(B,\ )$,*

4. Si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

es una resolución inyectiva de $A \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$*, definimos* $V_0 = Im(\epsilon)$ *y* $V_n = Im(d^n)$ $\forall n > 0$*, entonces*

$$Ext_\Lambda^{n+1}(B, A) \simeq Ext_\Lambda^n(B, V_0) \simeq \cdots \simeq Ext_\Lambda^1(B, V_{n-1}).$$

5. Toda SEC

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

en ${}_\Lambda M(M_\mathbb{Z})$ *induce una sucesión exacta larga en* ${}_\mathbb{Z}M(M_\mathbb{Z})$

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(B, A') \xrightarrow{i_*} Hom_\Lambda(B, A) \xrightarrow{p_*} Hom_\Lambda(B, A'') \xrightarrow{\delta^1}$$

$$Ext_\Lambda^1(B, A') \xrightarrow{Ext_\Lambda^1(B,i)} Ext_\Lambda^1(B, A) \xrightarrow{Ext_\Lambda^1(B,p)} Ext_\Lambda^1(B, A'') \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

6. Todo morfismo de SEC

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i'"] & C \arrow[r, "p'"] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en ${}_\Lambda M$ *induce un morfismo se sucesiones exactas largas en* ${}_\mathbb{Z}M$

$$\begin{tikzcd}
Ext_\Lambda^n(B, A') \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(B,i)"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(B,f)"'] & Ext_\Lambda^n(B, A) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(B,p)"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(B,g)"'] & Ext_\Lambda^n(B, A'') \arrow[r, "\delta^{n+1}"] \arrow[d, "Ext_\Lambda^n(B,h)"'] & Ext_\Lambda^{n+1}(B, A') \arrow[d, "Ext_\Lambda^{n+1}(B,f)"'] \\
Ext_\Lambda^n(B, C') \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(B,i')"] & Ext_\Lambda^n(B, C) \arrow[r, "Ext_\Lambda^n(B,p')"] & Ext_\Lambda^n(B, C'') \arrow[r, "\delta'^{n+1}"] & Ext_\Lambda^{n+1}(B, C')
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 3.3.8. *Sea* $M \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) M *es proyectivo,*

ii) $Ext_\Lambda^1(M, \ ) = 0$,

iii) $Ext_\Lambda^n(M, \ ) = 0, \ \forall n > 0$.

TEOREMA 3.3.9. *Sean* $M \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$ *y una familia* $(N_i)_{i \in I}$ *con* $N_i \in {}_\Lambda M(M_\Lambda)$*. Entonces:*

$$Ext_\Lambda^n(M, \prod_{i \in I} N_i) \simeq \prod_{i \in I} Ext_\Lambda^n(M, N_i), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

El siguiente resultado muestra una relación entre los funtores Ext^i_Λ y Tor^Λ_i, el cual será útil cuando vayamos a probar la simetría de la dimensión global.

TEOREMA 3.3.10. *Dados* Λ *y* Γ *y* $M \in M_\Lambda$, $N \in {}_\Lambda M_\Gamma$ *y* $E \in M_\Gamma$ *inyectivo, entonces*

$$Ext^i_\Lambda(M, Hom_\Gamma(N, E)) \simeq Hom_\Gamma(Tor^\Lambda_i(M, N), E), \ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:
El caso $i = 0$ es por el Teorema 1.2.30 (Teorema de Adjunción).
Para $i < 0$ es obvio porque los dos lados de la igualdad es cero.
Para $i > 0$, por definición se tiene

$$Ext^i_\Lambda(M, Hom_\Gamma(N, E)) = H_i(Hom_\Lambda(P_M, Hom_\Gamma(N, E)),$$

por el Teorema 1.2.30 se tiene

$$H_i(Hom_\Lambda(P_M, Hom_\Gamma(N, E)) \simeq H_i(Hom_\Gamma(P_M \otimes_\Lambda N, E)),$$

como E es inyectivo, por la Proposición 2.2.2 se tiene que $Hom_\Gamma(\ , E)$ es exacto, entonces por la Proposición 3.1.12

$$H_i(Hom_\Gamma(P_M \otimes_\Lambda N, E)) \simeq Hom_\Gamma(H_i(P_M \otimes_\Lambda N), E)$$

y por definición

$$Hom_\Gamma(H_i(P_M \otimes_\Lambda N), E) = Hom_\Gamma(Tor^\Lambda_i(M, N), E).$$

Capítulo 4

Dimensiones Homológicas.

4.1. Dimensión global e ideales.

DEFINICIÓN 4.1.1. *Si $A \in {}_{\Lambda}M$, la dimensión proyectiva a izquierda de A es el menor $n \in \mathbb{Z}$ para el cual existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

donde $P_0, ..., P_n \in {}_{\Lambda}M$ son proyectivos. Si no existe tal sucesión para cualquier n, decimos que la dimensión proyectiva a izquierda de A es infinita. Diremos que la dimensión proyectiva del módulo nulo es -1.

NOTACIÓN 4.1.2. *Para la dimensión proyectiva a izquierda de un $A \in {}_{\Lambda}M$ se utilizará la siguiente notación $ldp_{\Lambda}A$.*

EJEMPLO 4.1.3. *Sea $A \in {}_{\Lambda}M$ proyectivo, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$$

lo cual implica que $ldp_{\Lambda}A \leq 0$.

DEFINICIÓN 4.1.4. *Si $A \in {}_{\Lambda}M$, la dimensión inyectiva a izquierda de A es el menor $n \in \mathbb{Z}$ para el cual existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_n \longrightarrow 0$$

donde $I_0, ..., I_n \in {}_{\Lambda}M$ son inyectivos. Si no existe tal sucesión para cualquier n, decimos que la dimensión inyectiva a izquierda de A es infinita. Diremos que la dimensión inyectiva del módulo nulo es -1.

NOTACIÓN 4.1.5. *Para la dimensión inyectiva a izquierda de un $A \in {}_{\Lambda}M$ se utilizará la siguiente notación $ldi_{\Lambda}A$.*

EJEMPLO 4.1.6. *Si $A \in {}_\Lambda M$ es inyectivo, entonces $ldi_\Lambda A \leq 0$.*

Las definiciones de dimensión proyectiva y dimensión inyectiva tienen sentido porque siempre existen resolución proyectiva e inyectiva para cualquier módulo, esto está garantizado por las Proposiciones 2.1.5 y 2.2.9.

DEFINICIÓN 4.1.7. *La dimensión global a izquierda de un anillo Λ es $l.gl.dim\Lambda = \sup_{A \in {}_\Lambda M} ldp_\Lambda A$.*

EJEMPLO 4.1.8. *Si Λ es un anillo semisimple, por la Proposición 2.4.3, todo $A \in {}_\Lambda M$ es proyectivo e inyectivo, entonces $ldp_\Lambda A \leq 0$, $ldi_\Lambda A \leq 0$ y por lo tanto $l.gl.dim\Lambda \leq 0$.*

OBSERVACIÓN 4.1.9. *Se definen de forma similar la dimensión proyectiva a derecha de $A \in M_\Lambda (rdp_\Lambda A)$, la dimensión inyectiva a derecha $(rdi_\Lambda A)$ y la dimensión global a derecha del anillo Λ, como $r.gl.dim\Lambda = \sup_{A \in M_\Lambda} rdp_\Lambda A$.*

PROPOSICIÓN 4.1.10. *Sean $A \in {}_\Lambda M$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $ldp_\Lambda A < n$,

b) $Ext^n_\Lambda(A, C) = 0$ *para todo* $C \in {}_\Lambda M$.

Demostración:
a) $\Rightarrow$ *b)* Como $ldp_\Lambda A < n$ existe una resolución proyectiva de A de la forma

$$0 \longrightarrow P_l \xrightarrow{d_l} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

con $l < n$. Entonces por definición de $Ext^m_\Lambda(\ ,C)$ se tiene $Ext^m_\Lambda(A, C) = 0$, $\forall m > l$, en particular como $n > l$ se obtiene $Ext^n_\Lambda(A, C) = 0$ para todo $C \in {}_\Lambda M$.
b) $\Rightarrow$ *a)* Sea

$$\dots \longrightarrow P_l \xrightarrow{d_l} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de A, por el Teorema 3.3.2 parte 4, se tiene $Ext^n_\Lambda(A, C) \simeq Ext^1_\Lambda(K_{n-2}, C)$, $\forall C \in {}_\Lambda M$ donde $K_n = Ker(d_n)$, $\forall n > 0$ y $K_0 = Ker(\epsilon)$. Entonces $Ext^1_\Lambda(K_{n-2}, C) = 0$, $\forall C \in {}_\Lambda M$ por lo tanto, por la Proposición 3.3.8 se tiene que K_{n-2} es proyectivo. Por lo tanto se puede tomar la siguiente resolución proyectiva de A

$$0 \longrightarrow K_{n-2} \xrightarrow{i} P_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

donde i es la inclusión, por lo tanto $ldp_\Lambda A < n$.

COROLARIO 4.1.11. *Sean A, A' y $A'' \in {}_\Lambda M$ tales que $ldp_\Lambda A' < n$, $ldp_\Lambda A'' < n$ y la siguiente SEC*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

Entonces $ldp_\Lambda A < n$.
Demostración:
Basta aplicar el functor $Ext^n_\Lambda(\ ,C)$ a la SEC, con $C \in {}_\Lambda M$.

PROPOSICIÓN 4.1.12. *Sean $A \in {}_\Lambda M$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *$ldi_\Lambda A < n$,*

b) *$Ext^n_\Lambda(C, A) = 0$ para todo $C \in {}_\Lambda M$.*

Demostración:
La demostración es análoga a la de la Proposición 4.1.10.

LEMA 4.1.13. *Si*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una SEC, donde A, B y $C \in {}_\Lambda M$, con B proyectivo y C no proyectivo, entonces $ldp_\Lambda C = 1 + ldp_\Lambda A$.
Demostración:
Sea

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de A. Entonces

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\alpha d_0} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de C porque α es inyectiva y d_0 es sobreyectiva, o sea que $Im(\alpha d_0) = Im(\alpha) = Ker(\beta)$ y $Ker(\alpha d_0) = Ker(d_0) = Im(d_1)$, con esto obtenemos que $ldp_\Lambda C \leq ldp_\Lambda A + 1$.
Por otro lado si consideramos

$$0 \longrightarrow P'_m \xrightarrow{d'_m} \dots \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} C \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de C, se puede deducir que $ldp_\Lambda Ker(d'_0) \leq ldp_\Lambda C - 1$ y queda definida la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ker(d'_0) \xrightarrow{i} P'_0 \xrightarrow{d'_0} C \longrightarrow 0$$

que si la consideramos con

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

se puede decir que $Ker(d_0') \oplus B \simeq A \oplus P_0'$ por el Lema 2.1.10, entonces $ldp_\Lambda(Ker(d_0') \oplus B) = ldp_\Lambda(A \oplus P_0')$.
Ahora solo resta probar que $ldp_\Lambda(Ker(d_0') \oplus B) = ldp_\Lambda Ker(d_0')$ y que $ldp_\Lambda(A \oplus P_0') = ldp_\Lambda A$. Por el Teorema 3.3.4 se tiene
$Ext^n_\Lambda(\oplus_{i\in I} M_i, N) \simeq \Pi_{i\in I} Ext^n_\Lambda(M_i, N)$, este isomorfismo implica que $ldp_\Lambda(\oplus_{i\in I} M_i) = \sup_{i\in I} ldp_\Lambda M_i$, por lo tanto como $ldp_\Lambda P_0' \leq 0$ y $ldp_\Lambda B = 0$ se obtiene lo deseado. Entonces $ldp_\Lambda A = ldp_\Lambda Ker(d_0') \leq ldp_\Lambda C - 1$, con lo cual se concluye que $ldp_\Lambda C = ldp_\Lambda A + 1$.

El próximo lema será fundamental para probar las características de la dimensión global mencionadas en la introducción.

LEMA 4.1.14. *Sea $A \in {}_\Lambda M$, $\varnothing \neq I$ un conjunto bien ordenado con i_0 el elemento mínimo y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de A, tales que si $i, j \in I$ con $i < j$, entonces $A_i \subseteq A_j$. Si $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ y $ldp_\Lambda(A_i/A_i') \leqslant n$ $\forall i \in I$, donde $A_i' = \bigcup_{j<i} A_j$ $\forall i > i_0$ y $A_{i_0}' = 0$, entonces $ldp_\Lambda A \leqslant n$.*
Demostración:
La prueba será por inducción en n.
Si $n = 0$, entonces tenemos que para todo $i \in I$, $ldp_\Lambda(A_i/A_i') \leqslant 0$, lo cual implica que A_i/A_i' es proyectivo, entonces por la Proposición 2.1.7 se tiene que la siguiente SEC se escinde

$$0 \longrightarrow A_i' \longrightarrow A_i \longrightarrow A_i/A_i' \longrightarrow 0$$

Entonces existe C_i submódulo de A_i tales que $C_i \simeq A_i/A_i'$, de esta forma $A_i = A_i' \oplus C_i$.
La idea es probar que $A = \oplus_{i\in I} C_i$, como los C_i son proyectivos, entonces por la Proposición 2.1.9 A es proyectivo, entonces $ldp_\Lambda A \leq 0$.
Sea $\mathcal{H} = \{i \in I \;/ B_i = \sum_{j\leq i} C_j \text{ } \textit{que es suma directa}\}$, notar que si $i \in \mathcal{H}$ entonces $j \in \mathcal{H}$, si $j < i$ y que $\mathcal{H} \neq \emptyset$ porque $B_{i_0} = A_{i_0} = C_{i_0}$.
Se puede ver que $N = \cup_{i\in\mathcal{H}} B_i = \{\sum_{j\in J\subset\mathcal{H}\ finito} c_j \;/\; 0 \neq c_j \in C_j\}$. La idea es probar que $N = \oplus_{i\in\mathcal{H}} C_i$, supongamos que no es cierto, entonces existen $I_1,\ I_2 \subset \mathcal{H}$ finitos con $I_1 \neq I_2$ y $n \in N$ tal que $n = \sum_{i\in I_1} c_i = \sum_{i\in I_2} c_i'$ con $c_i \neq 0$ $\forall i \in I_1$ y $c_i' \neq 0$ $\forall i \in I_2$. Como $I_1 \cup I_2$ es un conjunto finito y bien ordenado por lo tanto tiene máximo $m \in \mathcal{H}$, entonces existe B_m tal que $n \in B_m$ por lo tanto n se escribe de forma única, lo cual contradice lo supuesto.
Supongamos que $\mathcal{H} \subsetneq I$, sea $s = $mín$\{i \in I \backslash \mathcal{H}\}$ que existe porque el conjunto I es bien ordenado. Notar que s es el supremo de $\mathcal{H}$, entonces $N \subset A_s'$, de esta forma $N \oplus C_s = \oplus_{i<s} C_i \oplus C_s = \oplus_{i\leq s} C_i$, entonces $s \in \mathcal{H}$, por lo tanto $\mathcal{H} = I$.

Supongamos que $X = A \setminus N \neq \emptyset$, sea $e = \text{mín}\{i \in I / x \in A_i,\ con\ x \in X\}$ que existe por la forma que tiene A y que el conjunto I es bien ordenado, notar que $e > i_0$ porque $A_{i_0} \subset N$. Si $x \in A_e$, como $A_e = A'_e \oplus C_e$, existen $x' \in A'_e$ y $c \in C_e$ tal que $x = x' + c$, notar que $x' \notin N$ porque de esta forma $x \in N$, entonces $x' \in X$ por lo tanto $x' \notin A_i,\ \forall i < e$ o sea que $x' \notin A'_e$, lo cual es absurdo, entonces $A = \oplus_{i \in I} C_i$.
Supongamos $n > 0$, que el lema es cierto para $n-1$ y que $ldp_\Lambda(A_i/A'_i) \leq n, \forall i \in I$.
Sean F, F_i yF'_i los módulos libres generados por los elementos de A, A_i yA'_i respectivamente, o sea que $F = \oplus_{a \in A} \Lambda a$, $F_i = \oplus_{a \in A_i} \Lambda a$ y $F'_i = \oplus_{a \in A'_i} \Lambda a$, $R = Ker(F \twoheadrightarrow A)$, $R_i = F_i \cap R$ y $R'_i = F'_i \cap R$. Ahora el objetivo es mostrar que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow R_i/R'_i \xrightarrow{f} F_i/F'_i \xrightarrow{g} A_i/A'_i \longrightarrow 0$$

f existe y es inyectiva por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_{R'_i}"] & F_i \arrow[r, "\pi_{F'_i}"] & F_i/F'_i \\ R_i/R'_i \arrow[urr, dashed, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

y el $Ker(\pi_{F'_i} i) = F'_i \cap R_i = R'_i$
g existe, es sobre y $Ker(g) = Im(f)$ por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{F'_i}"] & A_i \arrow[r, "\pi_{A'_i}"] & A_i/A'_i \\ F_i/F'_i \arrow[urr, dashed, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

donde φ está determinada por $\varphi(a) = a, \forall a \in A$. De esta forma $Ker(\pi_{A'_i}\varphi) \supset F'_i$, pero ademas $Ker(\varphi) = R_i$, entonces el $Ker(g) = R_i/F'_i = Im(f)$.
Por otro lado tenemos $F_i/F'_i = \oplus_{a \in A_i - A'_i} \Lambda a$ es libre por lo tanto proyectivo y $ldp_\Lambda(A_i/A'_i) \leq n$. Entonces por el Lema 4.1.13 se puede deducir que $ldp_\Lambda(R_i/R'_i) \leq n-1$. Como $(R_i)_{i \in I}$ cumple que si $i \leq j$, entonces $R_i \subseteq R_j, R = \bigcup_{i \in I} R_i$ y $R'_i = \bigcup_{j<i} R_j$, por lo tanto por hipótesis de inducción se tiene que $ldp_\Lambda R \leq n-1$.
Si se considera la siguiente S.E.C.

$$0 \longrightarrow R \overset{i}{\hookrightarrow} F \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

por el Lema 4.1.13 se concluye que $ldp_\Lambda A \leq n$.

TEOREMA 4.1.15. *Sea Λ un anillo con unidad, entonces se cumple:*

a) $l.gl.dim\Lambda = \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$,

b) $l.gl.dim\Lambda = \sup_{I \lhd \Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$,

c) Ademas si Λ *no es semisimple* $l.gl.dim\Lambda = 1 + \sup_{I\lhd\Lambda} ldp_\Lambda I$.

Demostración:

a) Sea $A \in_\Lambda M$ arbitrario, usando el Principio del buen orden que es equivalente al Axioma de elección, se puede ordenar los elementos de A. Sea A_i el submódulo de A generado por los $a_j \in A$ tales que $j \leq i$ y A'_i es el submódulo de A generado por los a_j con $j < i$, de esta forma A_i/A'_i es 0 o es generado por un elemento, por lo tanto $ldp_\Lambda(A_i/A'_i) \leq \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$. Como la familia $(A_i)_{i\in I}$ satisface las hipótesis del Lema 4.1.14 se puede concluir que $ldp_\Lambda A \leq \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$, entonces $l.gl.dim\Lambda = \sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B)$.

b) Si $I \lhd \Lambda$, entonces $\Lambda/I \in {}_\Lambda M$, de esta forma $\sup_{I\lhd\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I) \leq l.gl.dim\Lambda$.
Por otro lado tenemos que $\sup_{B=\Lambda b} ldp_\Lambda(B) \leq \sup_{I\lhd\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$ porque $B \simeq \Lambda/Ker(\Lambda \twoheadrightarrow \Lambda b)$, entonces por la parte a) obtenemos que $l.gl.dim\Lambda = \sup_{I\lhd\Lambda} ldp_\Lambda(\Lambda/I)$

c) Sea
$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \Lambda \xrightarrow{\pi_I} \Lambda/I \longrightarrow 0$$
con $I \lhd \Lambda$. Λ es un módulo libre como ${}_\Lambda M$, por la Proposición 2.1.2 Λ es proyectivo y por hipótesis sabemos que Λ no es semisimple, o sea $l.gl.dim\Lambda > 0$. De esta forma no todos los módulos de la forma Λ/I pueden ser proyectivos, entonces por el Lema 4.1.14 $ldp_\Lambda(\Lambda/I) = 1 + ldp_\Lambda I$, tomando supremo en ambos lados de la igualdad en los ideales obtenemos $l.gl.dim\Lambda = 1 + \sup_{I\lhd\Lambda} ldp_\Lambda I$, del lado izquierdo es por la parte b).

4.2. Dimensión global de anillos Noetherianos

DEFINICIÓN 4.2.1. *La dimensión débil a izquierda de* $A \in_\Lambda M$ *es menor que n, con* $n \in \mathbb{Z}$ *si y sólo si* $Tor_n^\Lambda(C, A) = 0, \forall C \in M_\Lambda$, *en caso que no exista un n, decimos que la dimensión débil a izquierda de A es infinita.*

NOTACIÓN 4.2.2. *Para la dimensión débil de* $A \in_\Lambda M$ *se utilizará la siguiente notación* $w.l.dim_\Lambda A$

EJEMPLO 4.2.3. *1. Si $A \in {}_\Lambda M$ es plano, por la Proposición 3.2.8 $Tor_1^\Lambda(C, A) = 0, \ \forall C \in M_\Lambda$, entonces $w.l.dim_\Lambda A \leq 0$.*

2. Si $A \in {}_\Lambda M$ es proyectivo, por el Teorema 2.3.3 A es plano, por lo tanto $w.l.dim_\Lambda A \leq 0$.

OBSERVACIÓN 4.2.4. *La dimensión débil a derecha de $C \in M_\Lambda$ se define de forma análoga y la notación es $w.r.dim_\Lambda C$.*

DEFINICIÓN 4.2.5. *La dimensión global débil de un anillo Λ es menor que n, con $n \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $Tor_n^\Lambda = 0$, en caso que no exista un n, decimos que la dimensión global débil de Λ es infinita.*

OBSERVACIÓN 4.2.6.

$$\sup_{A \in {}_\Lambda M} w.l.dim_\Lambda A = w.gl.dim \Lambda = \sup_{C \in M_\Lambda} w.r.dim_\Lambda C.$$

TEOREMA 4.2.7. *Si Λ es un anillo Noetheriano a izquierda, entonces*

$$l.gl.dim \Lambda = w.gl.dim \Lambda.$$

Similarmente, si Λ es un anillo Noetheriano a derecha, entonces

$$r.gl.dim \Lambda = w.gl.dim \Lambda.$$

Demostración:
Supongamos que $l.gl.dim \Lambda = n$, de esta forma para cualquier $A \in {}_\Lambda M$ existe una resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P_s \xrightarrow{d_s} P_{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

con $s \leq n$ y $Ker(d_{s-1}) \simeq P_s$. Por lo tanto, por el Teorema 2.3.3, $Ker(d_{s-1})$ es un módulo plano, como por el Teorema 3.2.9 se tiene $Tor_{s+1}^\Lambda(C, A) \simeq Tor_1^\Lambda(C, Ker(d_{s-1})) = 0$, entonces $w.gl.dim \Lambda \leq n$. Por otro lado por el Teorema 3.2.10 se sabe que los funtores Tor_n^Λ conmutan con el límite directo y como se vio en el ejemplo 1.1.19 todo módulo se puede ver como límite directo de sus submódulos finitamente generados. Por esta razón, esta parte de la demostración se restringirá a los módulos finitamente generados.
Supongamos que $w.gl.dim \Lambda = n$, sean $A \in_\Lambda M$ finitamente generado y una resolución proyectiva de proyectivos finitamente generados que existe por el Lema 2.5.4. De esta forma $Tor_1^\Lambda(C, Ker(d_{n-1})) = 0$, lo cual implica que $Ker(d_{n-1})$ es plano y como es finitamente generado, entonces por el Lema 2.5.5, es proyectivo. De esta forma la resolución proyectiva tiene a lo sumo largo n, por lo tanto $l.gl.dim \Lambda \leq n$.
La demostración para el caso de que alguna de las dimensiones es infinita se hace por absurdo suponiendo que la otra no es infinita.

COROLARIO 4.2.8. *Si Λ es un anillo Noetheriano, entonces*

$$l.gl.dim \Lambda = w.gl.dim \Lambda = r.gl.dim \Lambda.$$

4.3. Dimensión global de anillos semiprimarios

DEFINICIÓN 4.3.1. *Sea Λ un anillo. Decimos que Λ es semiprimario si existe un $N \triangleleft \Lambda$ ideal bilateral nilpotente, tales que $\Gamma = \Lambda/N$ es semisimple. Al ideal N lo llamaremos el radical de Λ.*

La siguiente proposición muestra que tiene sentido la definición de radical de un anillo.

PROPOSICIÓN 4.3.2. *Sean Λ un anillo y $N \triangleleft \Lambda$ un ideal bilateral nilpotente, tal que $\Gamma = \Lambda/N$ es semisimple, entonces N es único.*
Demostración:
Supongamos que existe otro $N' \triangleleft \Lambda$ ideal bilateral nilpotente, o sea que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{k} x_i = 0$ con $x_i \in N'$, tal que Λ/N' es semisimple. Sean $x \in N'$ y $J = \{\sum_{i\in I} a_i\bar{x}b_i$ donde $\bar{x}$ es la clase de x en Γ, $a_i,\ b_i \in \Gamma$ e I son conjuntos finitos$\}$. Claramente J es un ideal bilateral de Γ, vamos a probar que J es nilpotente. Sea $a_j\bar{x}b_j$ con $a_j,\ b_j \in \Gamma$, tomamos representantes s_j y r_j de a_j y b_j respectivamente en Λ, como N' es un ideal bilateral $s_jxr_j \in N'$ entonces $\prod_{j=1}^{k} s_jxr_j = 0$, de esta forma $\prod_{j=1}^{k} a_j\bar{x}b_j = 0$, por lo tanto $\prod_{j=1}^{k}(\sum_{i\in I_j} a_i\bar{x}b_i) = 0$. Como J es un ideal nilpotente de Γ por el Lema 2.4.5 se tiene que $JS = 0$ para cualquier $S \in {}_{\Gamma}M$ simple. Por otro lado se tiene que $\Gamma = \oplus_{t\in T}S_t$ con S_t simple $\forall t \in T$ y $J = J\Gamma$ porque Γ tiene unidad, entonces $J = \oplus_{t\in T}JS_t = 0$, por lo tanto $\bar{x} = 0$, o sea que $x \in N$, con lo cual $N' \subset N$.
Con razonamiento análogo se prueba que $N \subset N'$, por lo tanto $N = N'$.

El siguiente ejemplo muestra un anillo semiprimario que no es noetheriano, lo cual justifica esta sección.

EJEMPLO 4.3.3. *Sea Λ el anillo $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, donde $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de los números racionales y $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los números reales, vamos a probar que Λ es semiprimario y su radical es $N = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Además Λ no es Noetheriano.*
$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *entonces N es un ideal bilateral de Λ y claramente $N^2 = 0$, por lo tanto es nilpotente.*
$\Lambda/N \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, *sean $I = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + N$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} + N$, claramente I y J son submódulos simples como M_{Λ} de Λ/N, y como $\Lambda/N \simeq I \oplus J$, entonces Λ/N es semisimple, por lo tanto Λ es semiprimario a derecha. De forma análoga se demuestra que Λ es es semiprimario a izquierda, por lo tanto es semiprimario.*

Para probar que Λ no es Noetheriano, basta considerar los ideales de la forma $I_n = \begin{pmatrix} 0 & \oplus_{i\leq n}\mathbb{Q}\pi^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *estos forman una cadena creciente de ideales tales que* $I_n \subsetneq I_{n+1}$, *esto es cierto porque* π *es un número trascendente.*

TEOREMA 4.3.4. *Sea Λ un anillo semiprimario, con N su radical y $\Gamma = \Lambda/N$. Entonces para cada $A \in {}_\Lambda M$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $Tor_n^\Lambda(\Gamma, A) = 0$,

b) $Tor_n^\Lambda(C, A) = 0, \forall C \in M_\Lambda$ *simple,*

c) $w.l.dim_\Lambda A < n$,

d) $Ext_\Lambda^n(A, \Gamma) = 0$,

e) $Ext_\Lambda^n(A, C) = 0, \forall C \in_\Lambda M$ *simple,*

f) $ldp_\Lambda A < n$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ *b)* Sea $C \in M_\Lambda$ simple, por el Lema 2.4.5 $C \in M_\Gamma$ simple, y además es isomorfo a un sumando directo de Γ. Por el Teorema 3.2.9 sabemos que el funtor Tor_n^Λ conmuta con la suma directa, tenemos que $Tor_n^\Lambda(C, A)$ es un sumando directo de $Tor_n^\Lambda(\Gamma, A)$ y como $Tor_n^\Lambda(\Gamma, A) = 0$, entonces $Tor_n^\Lambda(C, A) = 0$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sea $B \in M_\Lambda$ tales que $BN = 0$, de esta forma se puede considerar $B \in M_\Gamma$, y como Γ es semisimple, por la Proposición 2.4.4 $B \in M_\Gamma$ es semisimple y por el Lema 2.4.5 $B \in M_\Lambda$ es semisimple, o sea que $B = \oplus_{i\in I} C_i$ con $C_i \in M_\Lambda$ simple. Como $Tor_n^\Lambda(C, A) = 0, \forall C \in M_\Lambda$ simple y $Tor_n^\Lambda(B, A) \simeq Tor_n^\Lambda(\oplus_{i\in I} C_i, A) \simeq \oplus_{i\in I} Tor_n^\Lambda(C_i, A)$ entonces $Tor_n^\Lambda(B, A) = 0$. Por lo tanto por el Lema 1.2.22 $Tor_n^\Lambda(D, A) = 0, \forall D \in M_\Lambda$, o sea que $w.l.dim_\Lambda A < n$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Aquí se va a necesitar el isomorfismo del Teorema 3.3.10

$$Ext_\Lambda^n(A, Hom_\mathbb{Z}(B, T)) \simeq Hom_\mathbb{Z}(Tor_n^\Lambda(B, A), T)$$

donde $B \in M_\Lambda$ arbitrario y $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que es inyectivo por la Proposición 2.2.6 ya que $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros es un dominio de ideales principales y como $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales es divisible, entonces $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es divisible. Como $Tor_n^\Lambda(B, A) = 0$, por el isomorfismo se obtiene que $Ext_\Lambda^n(A, Hom_\mathbb{Z}(B, T)) = 0$. Si tomamos $B = Hom_\mathbb{Z}(\Gamma, T)$, de esta forma

$B \in M_\Gamma$ definiendo $(f\alpha)(\beta) = f(\alpha\beta), \forall f \in Hom_{\mathbb{Z}}(\Gamma, T)$ y $\alpha, \beta \in \Gamma$ (con la misma operación $B \in M_\Lambda$). También podemos considerar $Hom_{\mathbb{Z}}(B,T)$, con la siguiente operación $(\gamma g)(\beta) = g(\beta\gamma)$ con $\gamma \in \Gamma, g \in Hom_{\mathbb{Z}}(B,T)$ y $\beta \in B$. Observar que $(\gamma\alpha)g(\beta) = (\gamma(\alpha g))(\beta) = (\alpha g)(\beta\gamma) = g(\beta(\gamma\alpha))$. De esta forma como Γ es semisimple, $Hom_{\mathbb{Z}}(B,T)$ es semisimple. El $\Gamma-$morfismo $\varphi : \Gamma \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(B,T)$, definido por $(\varphi(\gamma))(f) = f(\gamma), \forall f \in B, \gamma \in \Gamma$ es inyectivo, porque si existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $f(\gamma) = 0 \; \forall \; f \in B$, entonces $\gamma = 0$, porque si $\gamma \neq 0$ se puede construir un $f \in B$ tal que $f(\gamma) \neq 0$, de esta forma Γ es isomorfo a un sumando directo de $Hom_{\mathbb{Z}}(B,T)$. Por el Teorena 3.3.4 el funtor Ext^n_Λ conmuta con la suma directa finita en la segunda variable, se obtiene que $Ext^n_\Lambda(A,\Gamma) = 0$.

$d) \Rightarrow e)$ El mismo tipo de argumento utilizado en $(a) => b))$ cambiando $Tor^\Lambda_n(\ ,A)$ por $Ext^n_\Lambda(A,\ )$.

$e) \Rightarrow f)$ Sea $B \in_\Lambda M$ tales que $NB = 0$, de esta forma se puede considerar $B \in {}_\Gamma M$, entonces $B = \oplus_{i\in I} C_i$ con C_i simples y B es submódulo de $\prod_{i\in I} C_i \in {}_\Gamma M$ que es semisimple ya que Γ lo es, por lo tanto B es un sumando directo de $\prod_{i\in I} C_i$, de esta forma $Ext^n_\Lambda(A,B)$ es un sumando directo de $Ext^n_\Lambda(A, \prod_{i\in I} C_i)$. Por otro lado por el Teorema 3.3.9 se sabe que el funtor Ext^n_Λ conmuta con el producto, o sea que $Ext^n_\Lambda(A, \prod_{i\in I} C_i) \simeq \prod_{i\in I} Ext^n_\Lambda(A, C_i) = 0$. Entonces $Ext^n_\Lambda(A,B) = 0$, de esta forma por el Lema 1.2.22 $Ext^n_\Lambda(A,D) = 0, \forall D \in_\Lambda M$, lo cual implica que $ldp_\Lambda A < n$.

$f) \Rightarrow a)$ $ldp_\Lambda A \geqslant w.l.dim_\Lambda A$, en particular $Tor^\Lambda_n(\Gamma, A) = 0$.

COROLARIO 4.3.5. *Si Λ es un anillo semiprimario y $A \in {}_\Lambda M$, entonces*

$$w.l.dim_\Lambda A = ldp_\Lambda A.$$

Similarmente, si $A \in M_\Lambda$, entonces

$$w.r.dim_\Lambda A = rdp_\Lambda A.$$

COROLARIO 4.3.6. *Si Λ es un anillo semiprimario, entonces*

$$l.gl.dim\Lambda = w.gl.dim\Lambda = r.gl.dim\Lambda.$$

El siguiente ejemplo muestra un anillo cuyas dimensiones globales a derecha e izquierda son diferentes.

EJEMPLO 4.3.7. *Sea Λ el anillo $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, los ideales a derecha de Λ son:*
$\begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$.
$\Lambda \in M_\Lambda$ es proyectivo.

$\begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \simeq \Lambda$ *basta considerar el siguiente isomorfismo*
$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ *donde* $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
Por lo tanto $\begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ *es proyectivo.*
$\Lambda \simeq \begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ *por lo tanto* $\begin{pmatrix} m\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ *son proyectivos.*
$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, *basta tomar el siguiente isomorfismo*
$\varphi : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donde* $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$
Por lo tanto $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es proyectivo.*
$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ *por lo tanto es proyectivo.*
Por lo tanto por el Teorema 4.1.15 $r.gl.dim\Lambda \leq 1$.
Por otro lado tenemos que $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *es un ideal a izquierda de* Λ, *pero este no es proyectivo como* ${}_{\Lambda}M$ *porque si consideramos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \arrow[d, "1"] \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}^{\mathbb{Q}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

este no se factoriza porque es semejante a factorizar el siguiente diagrama de ${}_{\mathbb{Z}}M$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[d, "1"] \\ \mathbb{Z}^{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Esto es porque $\begin{pmatrix} z & p \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & zr \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Supongamos que existe un morfismo $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{Q}}$ *que factoriza a* $1 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$. *Entonces* $f \neq 0$, *por lo tanto existe al menos una de las coordenadas* $f_i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tales que* $f_i \neq 0$, *entonces existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tales que* $f_i(q) = n \neq 0$. *Pero si tomamos* $m \in \mathbb{Z}$ *tales que* m *no divide a* n, *como* f *es un morfismo de* ${}_{\mathbb{Z}}M$ *podemos hacer lo siguiente* $n = f_i(\frac{mq}{m}) = mf_i(\frac{q}{m})$ *entonces* m *divide a* n, *lo cual es absurdo, por lo tanto no existe el morfismo* f.

Entonces $ldp_\Lambda \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 1$, *lo cual implica por el Teorema 4.1.15 que* $l.gl.dim\Lambda \geq 2$, *entonces* $l.gl.dim\Lambda \neq r.gl.dim\Lambda$.

NOTACIÓN 4.3.8. *Cuando el anillo* Λ *sea semiprimario usaremos la notación* $gl.dim\Lambda$, *ya que coiciden la dimensión global a derecha y a izquierda.*

TEOREMA 4.3.9. *Sean* Λ *un anillo semiprimario,* N *su radical y* $\Gamma = \Lambda/N$. *Entonces para cada* $A \in {}_\Lambda M$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $Ext^n_\Lambda(\Gamma, A) = 0$,

b) $Ext^n_\Lambda(C, A) = 0$, $\forall C \in {}_\Lambda M$ *simples,*

c) $ldi_\Lambda A < n$.

Demostración:
$a \Rightarrow b$) Como $C \in {}_\Lambda M$ es simple, entonces por el Lema 2.4.5, $C \in {}_\Gamma M$ es simple y además por la Proposición 2.4.3, C es isomorfo a un sumando directo de Γ. Por lo tanto existe un $C' \in {}_\Lambda M$ tales que $\Gamma \simeq C \oplus C'$, entonces por el Teorema 3.3.4 tenemos que

$$0 = Ext^n_\Lambda(\Gamma, A) \simeq Ext^n_\Lambda(C \oplus C', A) \simeq Ext^n_\Lambda(C, A) \oplus Ext^n_\Lambda(C', A)$$

lo cual implica que $Ext^n_\Lambda(C, A) = 0$.
$b) \Rightarrow c)$ Sea $B \in M_\Lambda$ tales que $BN = 0$, de esta forma se puede considerar $B \in M_\Gamma$, y como Γ es semisimple, B es semisimple, o sea que $B = \oplus_{i\in I} C_i$ con $C_i \in {}_\Lambda M$ simples $\forall i \in I$. Como por el Teorema 3.3.4 $Ext^n_\Lambda(\oplus_{i\in I} C_i, A) \simeq \prod_{i\in I} Ext^n_\Lambda(C_i, A)$ y por hipótesis tenemos que $Ext^n_\Lambda(C, A) = 0, \forall C \in {}_\Lambda M$, entonces $Ext^n_\Lambda(B, A) = 0$. Por lo tanto por el Lema 1.2.22 $Ext^n_\Lambda(D, A) = 0, \forall D \in {}_\Lambda M$, por lo tanto por la Proposición 4.1.12 $ldi_\Lambda A < n$.
$c) \Rightarrow a)$ Como $ldi_\Lambda A < n$, entonces por la Proposición 4.1.12 $Ext^n_\Lambda(B, A) = 0$, $\forall B \in {}_\Lambda M$ en particular $Ext^n_\Lambda(\Gamma, A) = 0$.

COROLARIO 4.3.10. *Sean* Λ *un anillo semiprimario,* N *su radical y* $\Gamma = \Lambda/N$. *Entonces:*

a) $gl.dim\Lambda = ldi_\Lambda\Gamma$,

b) $gl.dim\Lambda = ldp_\Lambda\Gamma$,

c) $gl.dim\Lambda = 1 + ldp_\Lambda N$,

d) $gl.dim\Lambda = \sup_{\{C \in {}_\Lambda M \ simple\}} ldp_\Lambda C$,

e) $gl.dim\Lambda = \sup_{\{C \in {}_\Lambda M \ simple\}} ldi_\Lambda C$.

Demostración:

a) Si $A \in {}_{\Lambda}M$ por el Teorema 4.3.4, partes $d)$ y $f)$, tenemos que $ldp_{\Lambda}A \leq ldi_{\Lambda}\Gamma$, por lo tanto $gl.dim\Lambda \leq ldi_{\Lambda}\Gamma$. Por otro lado tenemos que si $gl.dim\Lambda < n$ entonces $Ext^n_{\Lambda} = 0$ entonces $ldi_{\Lambda}\Gamma < n$, por lo tanto $ldi_{\Lambda}\Gamma \leq gl.dim\Lambda$. De esta forma obtenemos que $gl.dim\Lambda = ldi_{\Lambda}\Gamma$.

b) Si $A \in {}_{\Lambda}M$ por el Teorema 4.3.9, partes $a)$ y $c)$ tenemos que $ldi_{\Lambda}A \leq ldp_{\Lambda}\Gamma$, entonces por la parte $a)$ tenemos que $gl.dim\Lambda \leq ldp_{\Lambda}\Gamma$, pero por definición $ldp_{\Lambda}\Gamma \leq gl.dim\Lambda$, por lo tanto $gl.dim\Lambda = ldp_{\Lambda}\Gamma$.

c) Si $N \neq 0$, entonces Λ no es semisimple y además $gl.dim\Lambda = ldp_{\Lambda}\Gamma > 0$, por lo tanto Γ no es proyectivo y considerando la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0$$

estamos en las hipótesis del Lema 4.1.13. Por lo tanto $gl.dim\Lambda = ldp_{\Lambda}\Gamma = 1 + ldp_{\Lambda}N$. Si $N = 0$, entonces Λ es semisimple, por lo tanto $gl.dim\Lambda = 0$ y como $ldp_{\Lambda}0 = -1$, de esta forma $gl.dim\Lambda = 1 + ldp_{\Lambda}N$.

d) Como Γ es semisimple, $\Gamma = \oplus_{i\in I}C_i$ con $C_i \in {}_{\Gamma}M$, pero por el Lema 2.4.5, tenemos que todo $C \in {}_{\Lambda}M$ simple es isomorfo a algún $C_i \in {}_{\Gamma}M$ y vice versa. Por otro lado por el Teorena 3.3.4 tenemos el siguiente isomorfismo $Ext^n_{\Lambda}(\oplus_{i\in I}M_i, N) \simeq \Pi_{i\in I}Ext^n_{\Lambda}(M_i, N)$, este isomorfismo implica que $ldp_{\Lambda}(\oplus_{i\in I}M_i) = \sup_{i\in I} ldp_{\Lambda}M_i$, de esta forma $\sup_{\{C\in_{\Lambda}M\ simple\}} ldp_{\Lambda}C = ldp_{\Lambda}\Gamma = gl.dim\Lambda$.

e) Es análoga a la demostración de la parte $d)$.

COROLARIO 4.3.11. *Sean Λ un anillo semiprimario, N su radical y $\Gamma = \Lambda/N$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $gl.dim\Lambda < n$,

b) $Ext^n_{\Lambda}(\Gamma, \Gamma) = 0$, *en ambos lados* $\Gamma \in {}_{\Lambda}M$,

c) $Ext^n_{\Lambda}(\Gamma, \Gamma) = 0$, *en ambos lados* $\Gamma \in M_{\Lambda}$,

d) $Tor^{\Lambda}_n(\Gamma, \Gamma) = 0$, *en la primera coordenada* $\Gamma \in M_{\Lambda}$ *y en la segunda* $\Gamma \in {}_{\Lambda}M$.

Demostración:
Por los Corolarios 4.3.6 y 4.3.10 se tiene que

$$gl.dim\Lambda = ldp_{\Lambda}\Gamma = w.dim_{\Lambda}\Gamma = r.dim_{\Lambda}\Gamma,$$

esta igualdad demuesta que a) implica b), c), y d).
$b) \Rightarrow a)$ Por el Teorema 4.3.4 se tiene que si $Ext^n_\Lambda(\Gamma, \Gamma)$, entonces $ldp_\Lambda \Gamma < n$ y por el Corolario 4.3.10 se tiene que $ldp_\Lambda \Gamma = gl.dim\Lambda$, de esta forma si $Ext^n_\Lambda(\Gamma, \Gamma) = 0$, entonces $gl.dim\Lambda < n$.
Las implicancias $c) \Rightarrow a)$ y $d) \Rightarrow a)$ se demuestan de forma similar.

4.4. Aplicaciones

PROPOSICIÓN 4.4.1. *Sea Λ es un anillo semiprimario que satisface que todo conjunto no vacío de ideales tiene un elemento mínimo (o sea es un anillo artiniano) y $gl.dim\Lambda > 0$, entonces existe un ideal a izquierda J de Λ indescomponible tales que $J^2 = 0$ y $gl.dim\Lambda = 1 + ldp_\Lambda J$.*

Demostración:
Sea J un ideal a izquierda contenido en el ideal radical N, mínimo con respecto a la condición que $ldp_\Lambda J = ldp_\Lambda N$, este conjunto no es vacío porque N pertenece. Si $J = A \oplus B$, entonces $ldp_\Lambda J = \sup(ldp_\Lambda A, ldp_\Lambda B)$, pero por la condición de mínimo, A o B tiene que ser el ideal trivial, por lo tanto J es indescomponible. Supongamos que $J^2 \neq 0$, entonces existe $\lambda \in J$ tales que $J\lambda \neq 0$. Consideremos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow J \xrightarrow{f} J\lambda \longrightarrow 0$$

donde $f(j) = j\lambda$. Por estar J contenido en N es nilpotente, de esta forma existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n = 0$, entonces $\lambda^{n-1} \in Ker(f)$, por lo tanto $0 \neq Ker(f) \neq J$. Además $J\lambda$ y $Ker(f)$ son ideales de J que están contenidos estrictamente, por lo tanto $\sup(ldp_\Lambda J\lambda, ldp_\Lambda Ker(f)) < ldp_\Lambda J$, tendría que ser un menor o igual, pero por la condición de minimalidad de J queda el menor estricto. Por otro lado tenemos que por la SEC y Corolario 4.1.11 $ldp\Lambda J \leq \sup(ldp_\Lambda J\lambda, ldp_\Lambda Ker(f))$. Esta contradición prueba que $J^2 = 0$. Por como se definio J vale que $ldp_\Lambda J = ldp_\Lambda N$ y por el Corolario 4.3.10 se tiene que $gl.dim\Lambda = 1 + ldp_\Lambda J$.

PROPOSICIÓN 4.4.2. *Sea Λ un anillo semiprimario tales que cada módulo simple a izquierda es isomorfo a un ideal a izquierda de Λ, entonces $gl.dim\Lambda = 0$ o ∞.*

Demostración:
Supongamos que $gl.dim\Lambda = n$, $0 < n < \infty$. Por el Corolario 4.3.10 se tiene que $gl.dim\Lambda = \sup_{\{C \in {}_\Lambda M \ simple\}} ldp_\Lambda C$, tomamos C simple tal que $gl.dim\Lambda = ldp_\Lambda C$. Por hipótesis tenemos que $C \simeq I$ donde I es un ideal a izquierda de Λ, de esta forma $ldp_\Lambda I = gl.dim\Lambda = n$. Consideremos la siguiente SEC

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/I \longrightarrow 0$$

si Λ/I es proyectivo, entonces la SEC se escinte, por lo tanto $\Lambda \simeq I \oplus \Lambda/I$, como Λ es proyectivo, I es un sumando directo, entonces I es proyectivo también. De esta forma $ldp_\Lambda I = 0$, esta contradicción implica que Λ/I no es proyectivo. Entonces considerando la SEC y por el Lema 4.1.13 se tiene que $ldp_\Lambda \Lambda/I = 1 + ldp_\Lambda I = 1 + n$, lo cual es absurdo porque $ldp_\Lambda \Lambda/I \leq gl.dim\Lambda = n$. Esta contradicción prueba la proposición.

Bibliografía

[Rot] Joseph Rotman. An introduction to homological algebra. Springer, 2009.

[EJ] Edgar Enochs and Overtoun Jenda. Relative homological algebra. Walter de Gruyter, 2000.

[CE] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. Homological algebra. Princeton University Press, 1956.

[Aus] Maurice Auslander. On the dimension of modules and algebras (iii), Global dimension. Nagoya Mathematical Journal, 9:67–77, 1955.

[Hat] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[Wei] Charles A. Weibel. History of homological algebra. Departament of mathematics, Rutgers University, U.S.A. http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/survey.pdf.