

**Algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées
m-amassées aimables**

par

Viviana Gubitosi

thèse présentée au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de Docteur ès Sciences (Ph.D)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, janvier 2014

Le 20 janvier 2014

*le jury a accepté la thèse de Madame Viviana Gubitosi
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur Ibrahim Assem
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur Vasilisa Shramchenko
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Juan Carlos Bustamante
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Ralf Schiffler
Membre externe
Département de mathématiques
Université du Connecticut

Professeur Thomas Brüstle
Président-rapporteur
Département de mathématiques

*À mon fils Máximo
et
à la mémoire de ma mère.*

Sommaire

Dans cette thèse nous nous consacrons à l'étude des algèbres qui sont dérivées équivalentes aux algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$. Dans la première partie nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre A soit dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} . Dans la deuxième partie, nous trouvons une caractérisation du carquois lié des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ et finalement nous donnons le critère analogue à l'antérieur pour qu'une algèbre B soit dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Remerciements

Je tiens premièrement à remercier mon directeur de doctorat M. Ibrahim Assem, pour son encadrement et son soutien moral et financier.

Aussi, je voudrais remercier Juan Carlos Bustamante pour ses conseils et sa disponibilité à discuter dans la première partie de mon travail.

J'aimerais aussi remercier l'ISM, la Faculté de Sciences de l'Université de Sherbrooke et le Département de Mathématiques de l'Université de Sherbrooke pour leur soutien financier.

Sur un ordre plus personnel, je remercie toute ma famille pour leur support constant et leur amour. Surtout mon fils, ma soeur et mon père. Je ne pourrais pas passer sans remercier ma mère. Son souvenir reste toujours en moi et m'accompagne dans tout ce que je fais.

Finalement, je tiens à remercier mes amies de la vie qui, de près ou de loin, m'auront encouragé et accompagné tout au long de mon doctorat. Je pense notamment à Stefanie, Verónica, Claudio y Carmina. De plus, je ne peux pas oublier de remercier Marcelo et mes amies des études qui partagent aussi mon amour pour la mathématique. Un gros merci à Jie, Serge, Ana, Dalia et Gustavo.

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	iii
Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Catégories dérivées	5
1.1.1 La catégorie d'orbites	7
1.2 Carquois et algèbres de chemins	7
1.2.1 Carquois	8
1.2.2 L'algèbre de chemins	9
1.2.3 Carquois liés	9
1.3 Algèbres aimables et invariants dérivés	10
1.4 L'invariant ϕ de Avella-Alaminos et Geiss	11
2 Algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m-amassées de type \mathbb{A}	15
2.1 Algèbres inclinées m -amassées	16
2.2 Algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A}	16
2.2.1 Mouvements polygonaux élémentaires et mutations locales induites	19
2.2.2 La forme normale	21
2.3 Algèbres branchées	21
2.4 Algèbres \mathbb{A} -branchées	24
2.5 Équivalences d'inclinaison	25
2.5.1 Modules inclinants de Brenner-Butler	26

2.6	Relations extrémales	28
2.7	Comment éliminer une relation extrême à gauche ρ	30
2.8	Algorithme pour éliminer les relations	33
2.9	Caractérisation des algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m - amassées de type \mathbb{A}	34
3	Une réalisation géométrique de la catégorie m-amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ d'après Torkildsen	39
3.1	Le polygone $P_{p,q,m}$	39
3.1.1	Les m -diagonales dans $P_{p,q,m}$	40
3.1.2	Les $(m + 2)$ -angulations de $P_{p,q,m}$	43
3.2	La catégorie des m -diagonales	44
3.2.1	Le décalé d'une m -diagonale	44
3.2.2	Mouvements élémentaires	45
3.2.3	Définition de la catégorie $C_{p,q}^m$ des m -diagonales	48
3.2.4	Le carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$	49
3.2.5	Le niveau d'une m -diagonale	50
3.3	La catégorie m -amassée et la catégorie des m -diagonales	51
3.4	Carquois colorés et mutations de carquois colorés	54
3.5	Le carquois coloré associé à une $(m + 2)$ -angulation	55
3.6	Interprétation des objets inclinants m -amassés	56
4	Algèbres inclinées m-amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$	57
4.1	Quelques résultats sur les morphismes nuls dans \mathcal{C}_m	57
4.2	Morphismes non nuls entre les facteurs d'un objet inclinant m -amassé T	59
4.3	Des objets dans les composantes tubulaires	66
4.4	Le carquois ordinaire de l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(F(\Delta))$	72
4.5	Quelques résultats sur les $(m + 2)$ -angulations	78
4.6	Les relations du carquois associé à une $(m + 2)$ -angulation	80
4.7	Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$	95
4.7.1	Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables	95
4.7.2	Le carquois lié des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$	97

5	Algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m-amassées de type \tilde{A}	111
5.1	Algèbres \tilde{A} -branchées	112
5.1.1	Algèbres solaires	115
5.2	Relations d'union	117
5.2.1	Relations d'union externes	119
5.2.2	Comment éliminer les relations d'union externes	120
5.2.3	Relations d'union internes	124
5.2.4	Rayons sans relations d'union	130
5.2.5	Comment rassembler les cycles saturés	131
5.2.6	Comment faire que tous les cycles saturés partagent seulement une flèche avec le cycle racine	133
5.3	Algorithme pour arriver à la forme normale	135
	Conclusion	151
	Bibliographie	155

Introduction

En 2006 les catégories amassées et les algèbres inclinées amassées ont été introduites par Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov [13] avec l'objectif de modéliser la combinatoire des algèbres amassées de Fomin et Zelevinsky [18] en utilisant la théorie d'inclinaison des algèbres héréditaires de dimension finie sur un corps algébriquement clos. Ces algèbres ont été étudiées par différents auteurs. En particulier, dans [8], Bobiński et Buan ont trouvé une caractérisation des algèbres qui sont dérivées équivalentes à des algèbres inclinées amassées de types \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$. Plus tard, les catégories amassées et les algèbres inclinées amassées ont été généralisées par Thomas [28] aux catégories m -amassées et aux algèbres inclinées m -amassées, respectivement, de sorte que quand on prend $m = 1$ on est dans le cas incliné amassé. Le but de cette thèse est de généraliser le résultat de [8]. C'est à dire de trouver toutes les algèbres qui sont dérivées équivalentes aux algèbres inclinées m -amassées de types \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$. Pour ce faire nous avons besoin d'une caractérisation (en termes de carquois liés) des algèbres inclinées m -amassées des types \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$. Pour le type \mathbb{A} cette caractérisation a été faite par Murphy dans [24]. Pour le type $\tilde{\mathbb{A}}$ nous avons généralisé le résultat de Murphy.

Dans le chapitre 1 nous fixons les notations et la terminologie. Nous commençons par une brève exposition des carquois liés, des algèbres aimables, des catégories dérivées et des équivalences dérivées. Aussi nous introduisons l'invariant dérivé ϕ d'Avella-Alaminos et Geiss pour les algèbres aimables.

Dans le chapitre 2 nous commençons en rappelant les résultats principaux de Murphy. Nous continuons avec l'étude des algèbres qui sont dérivées équivalentes aux algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} . Pour le faire nous introduisons un type particulier d'algèbres aimables que nous appelons *branchées*. Notamment, la caractérisation que nous avons trouvée est la suivante.

Théorème (A) *Soit A une algèbre connexe, les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *A est une algèbre branchée .*
- (b) *A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $N_{r,s}$.*
- (c) *A est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $N_{r,s}$.*
- (d) *A est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .*

Le chapitre 3 est consacré à l'étude d' une réalisation géométrique de la catégorie m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ réalisée par Torkildsen dans [29]. Cette réalisation géométrique nous permet dans le chapitre 4 de trouver une caractérisation des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ en termes de leurs carquois avec relations. En fait, nous prouvons le théorème suivant.

Théorème (B) *Soit Δ une $(m + 2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$.*

- (a) *Le carquois $Q_{\text{End}_{\mathbb{C}_m}(F(\Delta))}$ associé à l'algèbre $\text{End}_{\mathbb{C}_m}(F(\Delta))$ est égal au carquois Q_{Δ}^0 associé à la $(m + 2)$ -angulation Δ .*
- (b) *L' algèbre kQ_{Δ}^0/I_{Δ} est isomorphe à l'algèbre inclinée m -amassée $\text{End}_{\mathbb{C}_m}(F(\Delta))$.*

En particulier, ce résultat nous permet de trouver le carquois lié des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ et de prouver le corollaire suivant qui généralise les résultats de Assem, Brüstle et al., [2] pour les algèbres inclinées 1-amassées de types \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$; et de Murphy [24] pour les algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} , pour tout $m \geq 2$.

Corollaire (C) *Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables pour tout $m \geq 2$.*

Finalement, au chapitre 5 nous étudions les algèbres qui sont dérivées équivalentes aux algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$. Nous cherchons une caractérisation de ces algèbres en termes de leurs carquois liés. Pour le faire nous introduisons un type d'algèbres aimables que nous appelons $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées et nous montrons le théorème suivant.

Théorème (D) *Soit A une algèbre connexe avec (au moins) un cycle non saturé, les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *A est une algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée .*
- (b) *A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$*

ou $B_{k,n,t}$.

(c) A est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ou $B_{k,n,t}$.

(d) A est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type \tilde{A} .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des notions de base qui seront utilisées par la suite. Notamment, nous fixons les notations et la terminologie. Dans la première section nous définissons les catégories dérivées et des catégorie d'orbites. Aussi nous présentons la notion d'équivalence dérivée. Dans la deuxième section, nous introduisons la notion de carquois et montrons comment on peut lui associer une algèbre, l'algèbre de chemins. À la section trois nous présentons une classe particulière de quotients d'algèbres de chemins, les algèbres aimables. Finalement on introduit l'invariant dérivé ϕ d'Avella-Alaminos et Geiss pour les algèbres aimables.

1.1 Catégories dérivées

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne . On peut lui associer sa catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ (voir par exemple [20] ou [30]). La construction est comme suit.

On commence avec la *catégorie de complexes* bornée $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$. Les objets sont les familles $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où les X^i sont des objets de \mathcal{A} tels qu'il existe $n, n' \in \mathbb{Z}$ ($n < n'$) de sorte que $X_i = 0$ pour tout $i > n'$ et pour tout $i < n$. Les morphismes $d_X^i : X^i \rightarrow X^{i+1}$ satisfont à la relation $d_X^i d_X^{i-1} = 0$ pour tout i . Un morphisme de complexes de \dot{X} à \dot{Y} est un morphisme $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tel que $f^{i+1} \circ d_X^i = d_Y^i \circ f^i$ pour tout i .

Les objets de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ sont les complexes bornés d'objets de \mathcal{A} , mais nous allons modifier les morphismes de la catégorie de complexes en deux étapes.

Deux morphismes $f, g : \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ sont *homotopes* s'il existe une famille de morphismes $h^i : X^i \rightarrow Y^{i-1}$ tels que $f^i - g^i = h^{i+1}d_X^i - d_Y^{i-1}h^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les complexes bornés de \mathcal{A} et les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes. On appelle cette catégorie la *catégorie d'homotopie des complexes*. Cette catégorie est triangulée (Voir par exemple [20] ou [30]).

Pour un complexe $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, on définit les groupes de cohomologie $H^i(\dot{X}) = \text{Ker } d_X^i / \text{Im } d_X^{i-1}$. Un morphisme de complexes $f : \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ est appelé un *quasi-isomorphisme* si les morphismes induits $H^i(f) : H^i(\dot{X}) \rightarrow H^i(\dot{Y})$ sont des isomorphismes pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ainsi, un quasi-isomorphisme est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme de groupes de cohomologie.

Les morphismes de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ sont obtenus de ceux de la catégorie d'homotopie $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ en inversant formellement les quasi-isomorphismes. Plus précisément, en localisant par rapport au système multiplicatif des quasi-isomorphismes. Ainsi, un morphisme de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ peut être représenté par une paire de morphismes $\dot{X} \xleftarrow{s} L \xrightarrow{f} \dot{Y}$, où s est un quasi-isomorphisme.

Dans la catégorie dérivée, on peut définir un foncteur de décalage [1]. Sur les objets au moyen de $\dot{X}[1] = (X^{i+1}, -d_X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$, et sur les morphismes $f[1] = (f^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. La catégorie dérivée munie du foncteur de décalage [1] est triangulée.

On rappelle qu'une *équivalence triangulée* est une équivalence $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre deux catégories triangulées \mathcal{C} et \mathcal{C}' qui préserve les triangles.

Définition 1.1. *Deux catégories abéliennes \mathcal{A} et \mathcal{B} sont dites **dérivées équivalentes** s'il existe une équivalence triangulée entre $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ et $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$.*

Définition 1.2. *On dit que **deux algèbres A et B sont dérivées équivalentes** si leurs catégories de modules de type fini $\text{mod}A$ et $\text{mod}B$ sont dérivées équivalentes.*

Quand \mathcal{A} est une catégorie abélienne héréditaire, la catégorie dérivée est plus facile à comprendre. Dans ce cas, chaque objet indécomposable \dot{X} de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ est isomorphe à un complexe concentré, c'est à dire, qu'il existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $X^i \neq 0$ si et seulement si $i = i_0$ et X^{i_0}

est un objet indécomposable de \mathcal{A} . En outre, pour deux objets $X, Y \in \mathcal{A}$ et $i \in \mathbb{Z}$, on a que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X[i], Y[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Aussi, si \mathcal{A} a des suites presque scindées et est de dimension globale finie (ce qui est le cas par exemple si $\mathcal{A} = \mathrm{mod}(H)$, où H est une algèbre héréditaire de dimension finie sur un corps) $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ a des triangles presque scindés induits des suites de \mathcal{A} .

Dans cette situation, nous identifions les objets de \mathcal{A} aux objets de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ concentrés en degré 0.

1.1.1 La catégorie d'orbites

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps et F un automorphisme de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)$.

Définition 1.3. *La catégorie d'orbites $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)/F$ est la catégorie dont les objets sont les F -orbites $\tilde{X} = (F^i X)_{i \in \mathbb{Z}}$, avec X un objet de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)$ et l'ensemble de morphismes de $\tilde{X} = (F^i X)_{i \in \mathbb{Z}}$ à $\tilde{Y} = (F^i Y)_{i \in \mathbb{Z}}$ est donné par*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)/F}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)}(X, F^i Y).$$

Des exemples de catégories d'orbites sont les *catégories amassées* définies par Buan, Marsh, Reineke, Reiten et Todorov dans [13] comme suit. Soit A une algèbre héréditaire. On note $\tau_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)}$ la translation d'Auslander-Reiten dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)$, et $[1]$ le foncteur de décalage. On définit le foncteur F comme étant la composition $\tau_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)}^{-1}[1]$. Alors, la catégorie amassée \mathcal{C}_A est la catégorie d'orbites $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)/F$.

Keller a montré dans [23] que cette catégorie est triangulée. Plus généralement, il a montré que si on prend $F = \tau_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}A)}^{-1}[m]$ avec $m \geq 1$, la catégorie d'orbites obtenue est aussi triangulée.

1.2 Carquois et algèbres de chemins

Cette section contient la terminologie et les définitions relatives à la notion de carquois. On verra aussi comment construire une algèbre (dite de chemins) à partir d'un carquois.

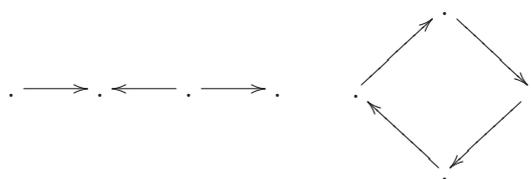
1.2.1 Carquois

Définition 1.4. Un *carquois* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un quadruplet formé de deux ensembles : Q_0 (dont les éléments sont appelés points ou sommets) et Q_1 (dont les éléments sont appelés flèches), et de deux applications $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associent à chaque flèche $\alpha \in Q_1$ sa source $s(\alpha) \in Q_0$ et son but $t(\alpha) \in Q_0$.

Une flèche α de source $i = s(\alpha)$ et de but $j = t(\alpha)$ est notée $\alpha : i \rightarrow j$ ou encore $i \xrightarrow{\alpha} j$. Un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est noté plus simplement Q .

Un carquois est donc un graphe orienté sans aucune restriction.

Exemples 1.5. Les exemples suivants sont des carquois :



Un carquois Q est dit *fini* si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis. Le graphe sous-jacent \overline{Q} d'un carquois Q est obtenu en oubliant l'orientation des flèches. Le carquois Q est dit *connexe* si \overline{Q} est connexe.

Soient Q un carquois et $a, b \in Q_0$. Un *chemin de longueur* $l \geq 1$ de source a et de but b (ou plus brièvement de a vers b) est une composition de flèches $\alpha_l \cdots \alpha_1$ où $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $1 \leq i \leq l$ et tel que $s(\alpha_1) = a$, $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$ (pour tout i tel que $2 \leq i \leq l$) et $t(\alpha_l) = b$.

De plus, à chaque point $a \in Q_0$ on associe un chemin de longueur 0 dit *chemin stationnaire* ou *chemin trivial* en a . On le note ϵ_a et on a $s(\epsilon_a) = t(\epsilon_a) = a$. Dans tout ce qui suit, le terme chemin signifiera un chemin de longueur plus grande ou égale à zéro.

1.2.2 L'algèbre de chemins

Voyons maintenant comment construire l'algèbre de chemins d'un carquois. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette thèse, k désigne un corps algébriquement clos.

Définition 1.6. Soit Q un carquois. L'**algèbre de chemins** kQ de Q est la k -algèbre dont le k -espace vectoriel sous-jacent a comme base l'ensemble de tous les chemins (de longueur $l \geq 0$) dans Q , et telle que le produit de deux chemins $\alpha_n \cdots \alpha_1$ et $\beta_k \cdots \beta_1$ est nul si $t(\beta_k) \neq s(\alpha_1)$ et est égal au chemin composé $\alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_k \cdots \beta_1$ si $t(\beta_k) = s(\alpha_1)$. Le produit de deux éléments arbitraires de kQ est alors obtenu par distributivité.

Exemple 1.7. Soit Q le carquois suivant



La base de kQ est alors $\{\epsilon_1, \alpha, \alpha\alpha = \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$. On voit aisément que kQ est isomorphe à l'algèbre $k[x]$ des polynômes en x .

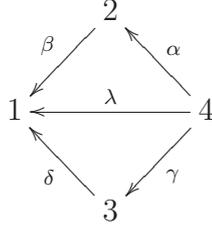
1.2.3 Carquois liés

Nous notons R l'idéal bilatère de kQ engendré par l'ensemble des flèches de Q . Donc R en tant que k -espace vectoriel admet pour base l'ensemble des chemins de longueur au moins un.

Définition 1.8. Soit Q un carquois fini. Un idéal I de kQ est **admissible** s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $R^m \subseteq I \subseteq R^2$. Si I est un idéal admissible de kQ , la paire (Q, I) est appelée un **carquois lié**. L'algèbre quotient kQ/I est l'**algèbre du carquois lié** (Q, I) .

Exemples 1.9.

1. Pour tout carquois Q et tout $m \geq 2$, l'idéal R^m est admissible.
2. Soit Q le carquois suivant



L'idéal $I_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ est admissible. En effet, $I_1 \subseteq R^2$, alors que $R^3 = 0$. Par contre, $I_2 = \langle \beta\alpha - \lambda \rangle$ ne l'est pas car $\beta\alpha - \lambda \notin R^2$.

Sous certaines conditions toute algèbre A est isomorphe au quotient d'une algèbre de chemins par un idéal admissible. L'énoncé précis est le suivant.

Théorème 1.10. ([1], Theorem 3.7) Soit A une k algèbre de dimension finie, sobre et connexe, alors il existe un carquois lié (Q, I) tel que $A \cong kQ/I$.

□

1.3 Algèbres aimables et invariants dérivés

On s'intéresse à une classe particulière d'algèbres de chemins qui est appelée classe des *algèbres aimables*. Cette classe a été définie par Assem et Skowroński dans [3]. On rappelle la définition.

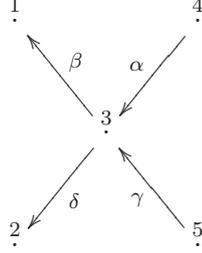
Définition 1.11. Soit Q un carquois et I un idéal admissible de l'algèbre de chemins kQ . On dit que la paire (Q, I) est un **carquois aimable** s'il satisfait aux conditions suivantes.

1. Pour chaque sommet i de Q , il y a au plus deux flèches de source i et au plus deux flèches de but i .
2. Pour chaque flèche β de Q , il existe au plus une flèche γ_1 telle que $\gamma_1\beta \notin I$ et au plus une flèche α_1 telle que $\beta\alpha_1 \notin I$.
3. Pour chaque flèche β in Q , il existe au plus une flèche γ_2 telle que $\gamma_2\beta \in I$ et au plus une flèche α_2 telle que $\beta\alpha_2 \in I$.
4. I est engendré par des chemins de longueur deux.

Nous disons que l'algèbre kQ/I est l'**algèbre aimable** associée à la paire (Q, I) .

Exemples 1.12.

1. Les algèbres $A = kQ$ avec Q un carquois de graphe sous-jacent Dynkin de type \mathbb{A} sont aimables.
2. L'algèbre A donnée par le carquois



lié par $\beta\alpha = 0$ and $\delta\gamma = 0$, est aimable.

Schröer and Zimmermann ont prouvé dans [27] que la classe des algèbres aimables est stable sous l'équivalence dérivée. En outre, pour les algèbres aimables le nombre de sommets et de flèches du carquois ordinaire et la fonction $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ introduite par Avella-Alaminos et Geiss dans [4], et que nous décrirons dans la sous-section suivante, sont des invariants dérivés.

1.4 L'invariant ϕ de Avella-Alaminos et Geiss

Soit $A = kQ/I$ une algèbre aimable, où $Q = (Q_0, Q_1)$ est un carquois connexe. Un *chemin permis* de A est un chemin $C = \alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1$ qui ne contient pas de relations zéro. Un chemin permis C est un *fil permis non trivial* si pour tout $\beta \in Q_1$ ni $C\beta$ ni βC n'est un chemin permis. De même, un *chemin interdit* de A est une suite $\Pi = \alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1$ formée de flèches deux à deux distinctes de Q avec $\alpha_{i+1}\alpha_i \in I$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Un chemin interdit Π est un *fil interdit non trivial* si pour tout $\beta \in Q_1$ ni $\Pi\beta$ ni $\beta\Pi$ n'est un chemin interdit. Soit $v \in Q_0$ tel que $\text{Card}\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = v\} \leq 1$, $\text{Card}\{\alpha \in Q_1 : t(\alpha) = v\} \leq 1$ et si $\beta, \gamma \in Q_1$ sont tels que $s(\gamma) = v = t(\beta)$ alors $\gamma\beta \notin I$. Alors on convient que e_v est un *fil permis trivial* en v et on le note h_v . Soit \mathcal{H}_A l'ensemble des fils permis en A , triviaux ou non triviaux. De même, soit $v \in Q_0$ tel que $\text{Card}\{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) = v\} \leq 1$, $\text{Card}\{\alpha \in Q_1 : t(\alpha) = v\} \leq 1$ et si $\beta, \gamma \in Q_1$ sont tels que $s(\gamma) = v = t(\beta)$ alors $\gamma\beta \in I$. Alors on convient que e_v est un *fil interdit trivial* en v et on le note p_v . Notons que certains chemins peuvent être simultanément permis et interdits.

Il est possible maintenant de définir deux fonctions $\sigma, \varepsilon : Q_1 \rightarrow \{1, -1\}$ qui satisfont aux trois conditions suivantes.

1. Si $\beta_1 \neq \beta_2$ sont des flèches telles que $s(\beta_1) = s(\beta_2)$, alors $\sigma(\beta_1) = -\sigma(\beta_2)$.
2. Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ sont des flèches avec $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$, alors $\varepsilon(\gamma_1) = -\varepsilon(\gamma_2)$.
3. Si β et γ sont des flèches avec $s(\gamma) = t(\beta)$ et $\gamma\beta \notin I$, alors $\sigma(\gamma) = -\varepsilon(\beta)$.

On peut prolonger ces fonctions à des fils de A comme suit : pour un fil non trivial $H = \alpha_n \cdots \alpha_2 \alpha_1$ on définit $\sigma(H) := \sigma(\alpha_1)$ et $\varepsilon(H) := \varepsilon(\alpha_n)$. S'il existe un fil permis non trivial h_v pour un $v \in Q_0$, la connexité de Q assure l'existence d'un $\gamma \in Q_1$ tel que $s(\gamma) = v$ ou d'un $\beta \in Q_1$ tel que $t(\beta) = v$. Dans le premier cas, on définit $\sigma(h_v) = -\varepsilon(h_v) := -\sigma(\gamma)$ et dans le second, on définit $\sigma(h_v) = -\varepsilon(h_v) := \varepsilon(\beta)$. S'il existe un fil interdit p_v pour un $v \in Q_0$, on sait qu'il existe $\gamma \in Q_1$, tel que $s(\gamma) = v$ ou $\beta \in Q_1$ tel que $t(\beta) = v$. Dans le premier cas, on définit $\sigma(p_v) = \varepsilon(h_v) := -\sigma(\gamma)$, et dans le second $\sigma(p_v) = \varepsilon(h_v) := -\varepsilon(\beta)$.

La définition suivante est un algorithme combinatoire qui produit certaines paires de nombres naturels en utilisant seulement le carquois lié qui définit l'algèbre aimable. Dans l'algorithme, nous passons dans le sens direct par les fils permis et dans le sens inverse par les fils interdits de sorte que chaque flèche et son inverse sont utilisées exactement une fois.

Définition 1.13. (Avella-Alaminos et Geiss, [4]) *L'algorithme est comme suit.*

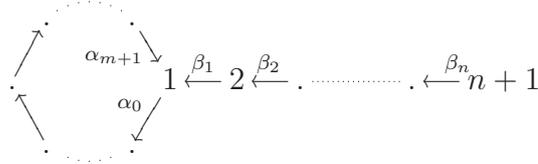
1. (a) *On commence avec un fil permis H_0 de A .*
 (b) *Si H_i est défini, soit Π_i le fil interdit qui finit en $t(H_i)$ et tel que $\varepsilon(H_i) = -\varepsilon(\Pi_i)$.*
 (c) *Soit H_{i+1} le fil permis qui commence en $s(\Pi_i)$ et tel que $\sigma(H_{i+1}) = -\sigma(\Pi_i)$.*
Le processus s'arrête quand $H_n = H_0$ pour un entier naturel n . Soit $m = \sum_{1 \leq i \leq n} l(\Pi_{i-1})$ où l est la longueur d'un chemin, c'est à dire, le nombre des flèches sur le chemin.
On a obtenu la paire (n, m) .
2. *On répète la première étape jusqu'à ce que tous les fils permis de A ont été utilisés.*
3. *S'il existe des cycles orientés dans lesquelles chaque paire de flèches consécutives forme une relation, on ajoute la paire $(0, m)$ pour chacun de ces cycles, où m est la longueur du cycle.*
4. *On pose $\phi_A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, où $\phi_A(n, m)$ est le nombre des fois où la paire (n, m) apparaît dans l'algorithme.*

La fonction ϕ_A est invariante sous l'équivalence dérivée, c'est à dire :

Théorème 1.14. (Avella-Alaminos et Geiss, [4]) *Soit A et B deux algèbres aimables. Si A et B sont dérivées-équivalentes, alors $\phi_A = \phi_B$.*

Remarque 1.15. Observons que $\phi_A(0, m + 2)$ compte le nombre de $(m + 2)$ -cycles (c'est à dire de cycles de longueur $(m + 2)$) saturés (c'est à dire que la composition de deux flèches consécutives quelconques dans le cycle doit être une relation). Ces $(m + 2)$ -cycles jouent un rôle crucial quand on considère l'équivalence dérivée des algèbres inclinées m -amassées.

Exemple 1.16. Soit $A = kQ/I$ l'algèbre aimable suivante



où le cycle est un $(m + 2)$ -cycle saturé.

Nous commençons l'algorithme avec $H_0 = \alpha_0\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n$ alors $\Pi_0 = p_{t(\alpha_0)}$. Donc, $H_1 = \alpha_1$ et $\Pi_1 = p_{t(\alpha_1)}$. Puis on continue à parcourir le cycle jusqu'à $H_{m+1} = \alpha_{m+1}$ mais ici $\Pi_{m+1} = \beta_1$ et après $H_{m+2} = h_2$, $\Pi_{m+2} = \beta_2$, et on continue à aller vers l'arrière par les flèches β . On arrive à $H_{m+n+1} = h_{n+1}$, $\Pi_{m+n+1} = p_{n+1}$ et $H_{m+n+2} = H_0$. Les uniques fils interdits de longueur non nulle sont des flèches β . Ainsi on obtient la paire $(m + n + 2, n)$ et $\phi_A(m + n + 2, n) = 1$.

La troisième étape de l'algorithme nous donne la paire $(0, m + 2)$ et $\phi_A(0, m + 2) = 1$.

Chapitre 2

Algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A}

Lorsqu'on étudie les catégories de modules on est souvent intéressé par elles modulo les équivalences dérivées ou équivalences pour les inclinaisons et les co-inclinaisons. Dans [15] Buan et Vatne ont donné un critère pour décider quand deux algèbres inclinées amassées de type \mathbb{A} sont dérivées équivalentes. Plus tard, Bastian dans [5] a donné une classification analogue pour le cas $\tilde{\mathbb{A}}$. Dans [8] Bobiński et Buan ont considéré une question plus générale, celle de trouver une caractérisation des algèbres qui sont dérivées équivalentes à des algèbres inclinées amassées de type \mathbb{A} ou $\tilde{\mathbb{A}}$.

Les catégories amassées et les algèbres inclinées amassées ont été généralisées par Thomas [28] aux catégories m -amassées et aux algèbres inclinées m -amassées, respectivement, de sorte que quand on prend $m = 1$ on est dans le cas incliné amassé. Alors, la question naturelle de trouver un critère pour savoir quand deux algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} ou $\tilde{\mathbb{A}}$ sont dérivées équivalentes se pose. Pour le cas \mathbb{A} , Murphy dans [24] a donné un critère nous permettant de vérifier si deux algèbres inclinées m -amassées sont dérivées équivalentes ou pas. Dans ce chapitre nous travaillons sur le problème de trouver toutes les algèbres qui sont dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} .

Nous commençons ce chapitre en rappelant la définition des algèbres inclinées m -amassées de n'importe quel type. Cependant, nous travaillerons avec le type \mathbb{A} . En outre, nous résumerons ici les résultats principaux de Murphy [24].

2.1 Algèbres inclinées m -amassées

Soit m un entier positif et H une algèbre héréditaire de dimension finie sur un corps algébriquement clos k . On note τ la translation d' Auslander-Reiten dans la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(H)$; $[1]$ le foncteur décalage de $\mathcal{D}^b(H)$ et $[m]$ sa $m^{\text{ème}}$ puissance, c'est à dire $[1]^m = [m]$.

Définition 2.1. La *catégorie m -amassée* est la catégorie d'orbites

$$\mathcal{C}_m(H) := \mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[m]$$

Dans les catégories m -amassées on définit les objets inclinants m -amassés comme suit.

Définition 2.2. On dit qu'un objet T de $\mathcal{C}_m(H)$ est *inclinant m -amassé* s'il satisfait aux conditions suivantes :

1. $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(T, X[i]) = 0$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, si et seulement si $X \in \text{add}(T)$.
2. $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(X, T[i]) = 0$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, si et seulement si $X \in \text{add}(T)$.

Définition 2.3. L'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)$ d'un objet inclinant m -amassé T est appelée *algèbre inclinée m -amassée*.

2.2 Algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A}

Ici, nous nous concentrons sur le cas où H est une algèbre héréditaire de type Dynkin \mathbb{A} .

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.4. [24] Les algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} sont aimables, pour tout $m \geq 1$.

Définition 2.5. On dit qu'un cycle de (Q, I) est *m -saturé* s'il est orienté de longueur $m+2$ et la composition de deux flèches consécutives du cycle est une relation dans I .

Définition 2.6. Soit (Q, I) un carquois lié. Deux relations r et r' sont dites *consécutives* s'il existe une marche $v = wr = r'w'$ dans le carquois lié (Q, I) telle que r et r' pointent dans la même direction et partagent une flèche.

En plus, [24] nous permet de faire les remarques suivantes.

Remarques 2.7. Soit A une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .

1. Les seuls cycles qui peuvent apparaître dans A sont les cycles m -saturés.
2. Si $m \neq 1$, il peut y avoir des relations en dehors des cycles.
3. Il peut exister au plus $m - 1$ relations consécutives en dehors d'un cycle.

Par la suite, nous travaillerons avec un m fixe.

Comme le montre le théorème suivant, les cycles m -saturés jouent un rôle crucial dans la classification dérivée des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} .

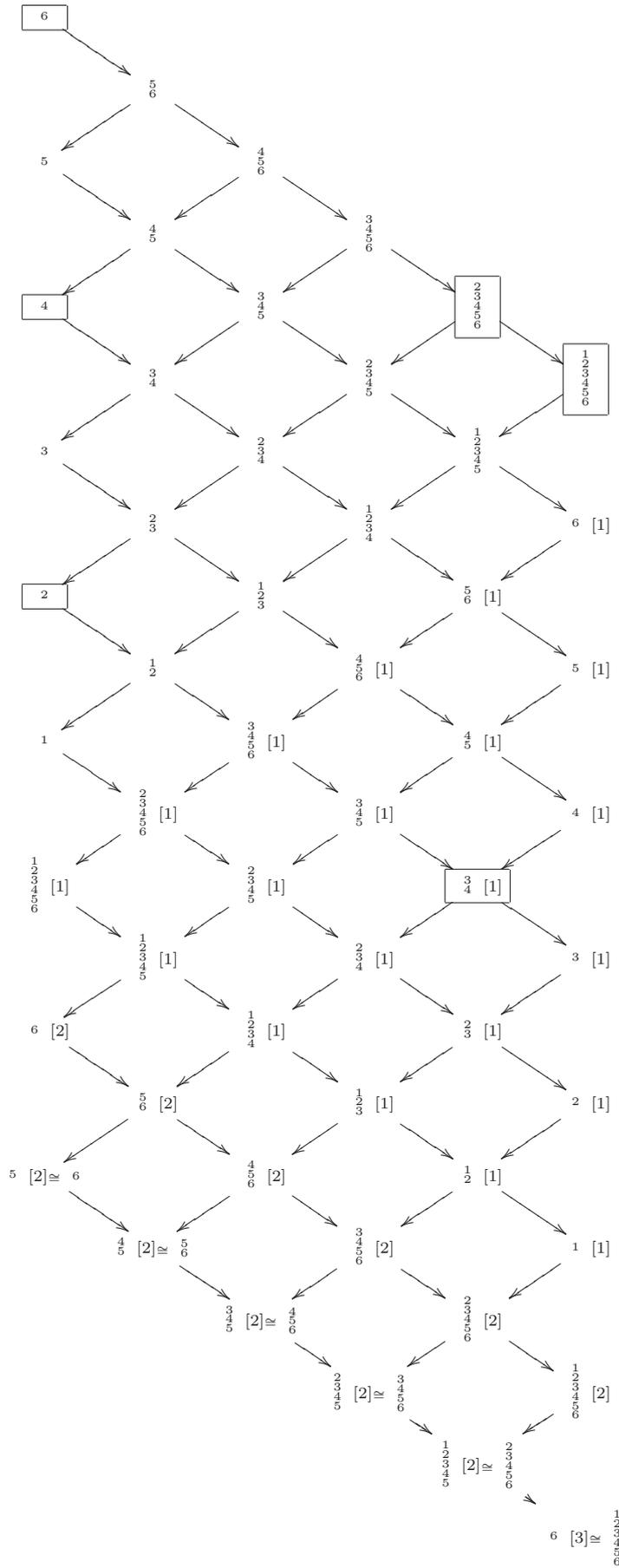
Théorème 2.8. [24] *Deux composantes connexes d'une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} sont dérivées équivalentes si et seulement si leurs carquois ont le même nombre de cycles m -saturés et de flèches.*

L'énoncé du théorème 2.8 souligne que, pour $m \geq 2$, une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} peut ne pas être connexe. Ceci est une différence notable avec le cas où $m = 1$: en effet, les algèbres inclinées 1-amassées sont toujours connexes.

Exemple 2.9. On considère le carquois $Q = \mathbb{A}_6$ avec l'orientation linéaire

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$$

et on prend la catégorie 2-amassée $\mathcal{C}_2(kQ)$



admissible d_0 , il existent m différentes m -diagonales admissibles d_1, d_2, \dots, d_m de P que nous pouvons voir comme des "rotations" dans le sens anti-horaire de d_0 dans les deux $(m + 2)$ -gones qui ont d_0 comme arête commune.

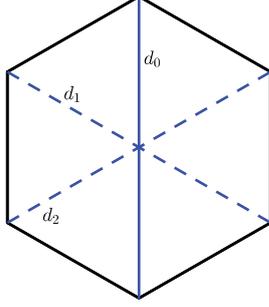


FIGURE 2.1 – Les deux "rotations" de la diagonale d_0 dans un hexagone.

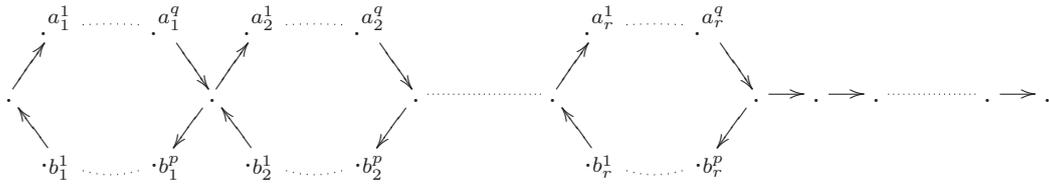
Définition 2.11. [24] Soit \mathcal{T} une division maximale de P . Pour chaque m -diagonale admissible $d_0 \in \mathcal{T}$ nous définirons une opération μ_m . Cette opération est la "rotation" de d_0 dans le sens anti-horaire dans les deux $(m + 2)$ -gones qui ont d_0 comme arête commune. Alors, nous avons que $\mu_m(d_i) = d_{i+1}$, si $0 \leq i \leq m - 1$ et $\mu_m(d_m) = d_0$ où d_1, \dots, d_m sont des m -diagonales admissibles qui sont des "rotations" de d_0 . En plus, nous définissons $\mu_m^{-1} = \mu_m^m$. Nous appellerons les opérations μ_m et μ_m^{-1} **mouvements polygonaux élémentaires**.

Définition 2.12. [24] Soit A l'algèbre inclinée m -amassée associé à la division \mathcal{T} et A' l'algèbre inclinée m -amassée associé à la division \mathcal{T}' obtenue à partir de \mathcal{T} en appliquant un mouvement polygonal élémentaire μ à une de ces diagonales. Alors, nous dirons que l'algèbre A' est l'**algèbre mutée** de A ou plus précisément, que l'algèbre A' est obtenue à partir de A par le moyen de la **mutation locale induite par le mouvement polygonal élémentaire** μ .

2.2.2 La forme normale

Maintenant nous définirons la forme normale des algèbres inclinées m -amassées. Voir ([24], Definition 3.9).

Définition 2.13. Soit $r, s \in \mathbb{N}$, on note $N_{r,s}$ l'algèbre aimable donnée par le carquois lié

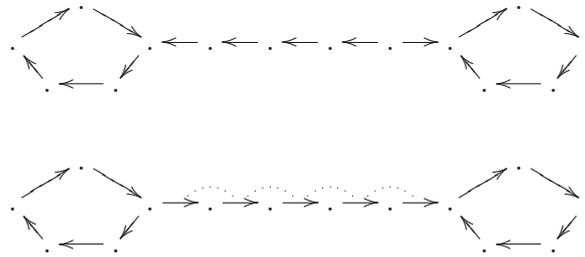


où il y a s flèches et r cycles m -saturés (et ce sont les seuls cycles). Si m est pair $p = q = \frac{m}{2}$ et si m est impair $p = \frac{m-1}{2}$ et $q = \frac{m+1}{2}$.

Remarque 2.14. Comme dans [24] nous disons qu'une algèbre de type $N_{r,s}$ est dans sa forme normale. Il est prouvé ([24], Theorem 4.1) que chaque composante connexe d'une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} peut être réduite à la forme normale au moyen de mutations locales induites par des mouvements polygonaux élémentaires. Ces mutations induisent une équivalence dérivée entre l'algèbre originale et l'algèbre mutée. En outre, la famille d'algèbres aimables $N_{r,s}$ (avec $r, s \in \mathbb{N}$) a un représentant dans chaque classe d'équivalence dérivée de chaque composante connexe d'une algèbre inclinée m -amassée.

2.3 Algèbres branchées

Comme dans le cas $m = 1$ la classe des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} n'est pas stable sous l'équivalence dérivée : il est possible qu'une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} soit dérivée équivalente à une algèbre qui n'est pas inclinée m -amassée. Soit par exemple les deux algèbres suivantes où tous les cycles sont 3-saturés.



La première est une algèbre inclinée 3-amassée qui est dérivée équivalente à la seconde. Néanmoins la seconde algèbre n'est pas inclinée 3-amassée puisqu'elle a 4 relations consécutives qui ne sont pas dans un cycle. (Voir la Remarque 2.7).

Notre objectif est de classifier toutes les algèbres qui sont dérivées équivalentes à une algèbre inclinée m -amassée A de type \mathbb{A} , et l'exemple précédent sert à motiver nos constructions.

Notre premier but est de trouver toutes les algèbres qui sont dérivées équivalentes à une algèbre de type $N_{r,s}$. De cette façon nous obtiendrons la forme de chaque composante connexe d'une algèbre dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée. Si on se rappelle que les algèbres inclinées m -amassées sont aimables et que l'amabilité est un invariant dérivé, on voit que les algèbres cherchées sont nécessairement aimables. En outre, puisque le nombre total de cycles (saturés ou pas) et de t -cycles saturés sont des invariants sous l'équivalence dérivée pour tout $t \in \mathbb{N}$, on en déduit que les seuls cycles dans les algèbres cherchées sont des cycles m -saturés. Par conséquent nos candidats sont les algèbres qui satisfont à la définition suivante.

Définition 2.15. *On dit qu'une algèbre $B = kQ/I$ est **branchée** (ou, plus précisément, m -branchée) si B est une algèbre aimable dont les seuls cycles sont des cycles m -saturés de sorte que, si on enlève une flèche arbitraire de chaque cycle, le carquois lié résultant soit un arbre aimable.*

Exemple 2.16. *L'algèbre suivante est branchée.*

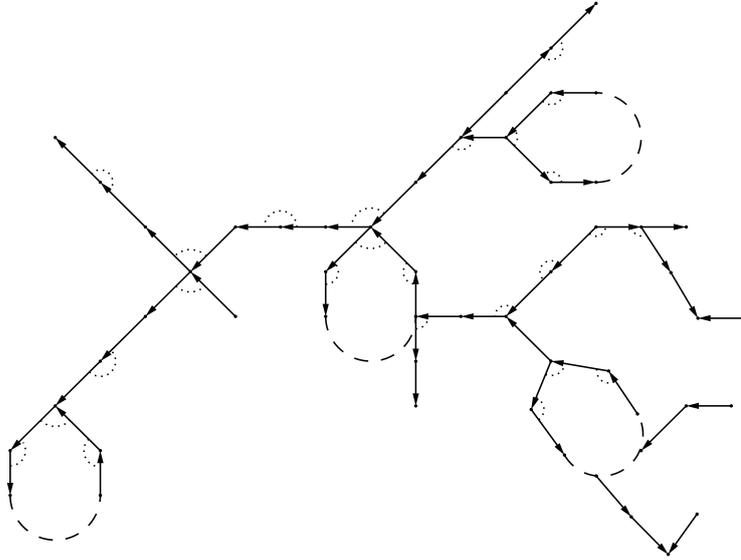


FIGURE 2.2 – Carquois branchée.

Lemme 2.17. *Soit $r, s \in \mathbb{N}$ et B une algèbre dérivée équivalente à $N_{r,s}$, alors B est une algèbre branchée ayant exactement r cycles m -saturés et s sommets.*

Démonstration. Il est clair que le nombre de sommets est un invariant dérivé. Donc le carquois de B a s sommets. Puisque $N_{r,s}$ est aimable et que l'amabilité est aussi un invariant dérivé, alors B est aimable. Il reste à prouver que B a exactement r cycles m -saturés. Ceci se déduit directement des résultats d'Avella-Alaminos et Geiss qui affirment que le nombre total de cycles (saturés ou pas) et la fonction ϕ d'une algèbre aimable sont des invariants dérivés. En particulier, $\phi(0, m+2)$ compte le nombre de cycles m -saturés.

Donc $\phi_B(0, m+2) = \phi_{N_{r,s}}(0, m+2) = r$ donne que B a exactement r cycles et chacun est alors m -saturé.

□

Corollaire 2.18. *Soit B une algèbre qui est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée, alors chaque composante connexe de B est branchée.*

Démonstration. Cela suit de ce que chaque composante connexe d'une algèbre dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée est dérivée équivalente à une algèbre de type $N_{r,s}$. (Voir [24] ou la remarque 2.14 plus haut). \square

2.4 Algèbres \mathbb{A} -branchées

Un des principaux objectifs de ce chapitre est de montrer que la réciproque est également vraie. C'est à dire que les algèbres qui sont dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées sont précisément les algèbres branchées.

L'idée est de prendre une algèbre branchée et de construire une suite d'équivalences dérivées permettant d'effacer successivement les relations qui sont en dehors des cycles m -saturés, nous amenant ainsi à une algèbre de type $N_{r,s}$ qui, nous le savons déjà, est inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .

Afin de simplifier notre travail, nous définissons une sous-classe d'algèbres branchées. La définition est comme suit.

Définition 2.19. *Soit (Q, I) un carquois lié aimable qui peut contenir uniquement des cycles m -saturés. On dit que (Q, I) est \mathbb{A} -branchée si quand on enlève tous les cycles m -saturés de Q , le carquois résultant est une union de carquois de type \mathbb{A} .*

En particulier, les seules relations dans I sont celles des cycles m -saturés et chaque sommet de Q_0 a degré plus petit que trois, sauf les points auxquels deux cycles m -saturés différents sont attachés.

Exemple 2.20. *L'algèbre suivante est \mathbb{A} -branchée.*

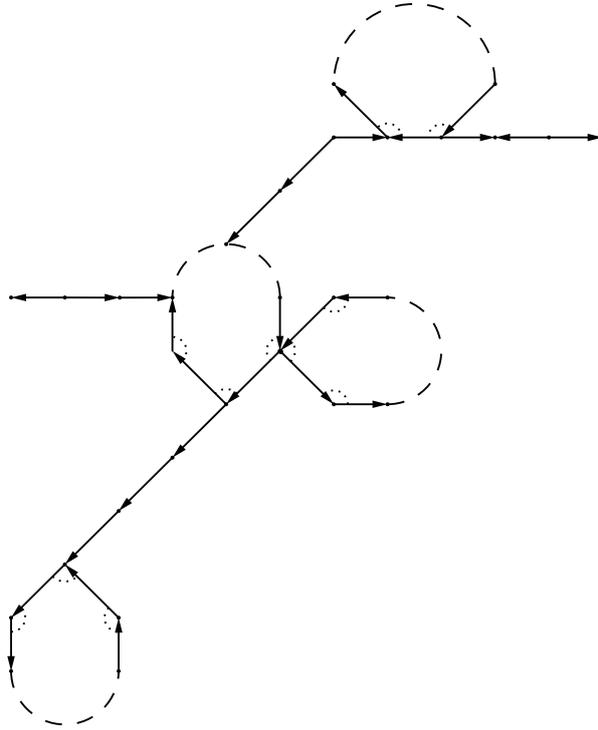


FIGURE 2.3 – Carquois \mathbb{A} -branchée.

2.5 Équivalences d'inclinaison

On rappelle (voir [9, 22]) que si A est une algèbre, alors un A -module T est appelé un *module inclinant* si $dp_A(T) \leq 1$, $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$ et $T = \bigoplus_i T_i$, avec les T_i indécomposables, tel que le cardinal de classes d'isomorphismes de T_i est égal à n , où n est le rang du groupe de Grothendieck de A . Dualement, on définit la notion de module co-inclinant. Ici, nous supposons que tous nos modules inclinants sont basiques, c'est à dire que $T_i \not\cong T_j$, si $i \neq j$.

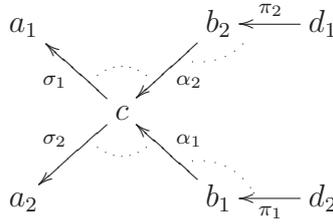
Définition 2.21. *Deux algèbres A et B sont dites **équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons** s'il existe une suite $A = A_0, A_1, \dots, A_r = B$ d'algèbres telle que, pour tout $0 \leq i < r$, il existe un A_i -module inclinant ou co-inclinant T_i tel que $A_{i+1} \simeq \text{End}_{A_i}(T_i)$.*

Il a été prouvé par Happel dans [21] que si A et B sont équivalentes pour les inclinaisons et

les co-inclinaisons, alors elles sont dérivées équivalentes.

2.5.1 Modules inclinants de Brenner-Butler

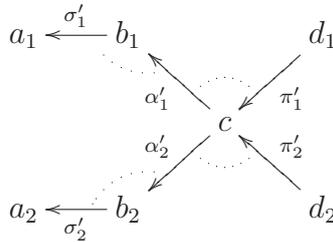
La construction suivante est due à Brenner et Butler (voir [10], Ch. 2, Theorem IX) et généralise les réflexions APR. Soit (Q, I) un carquois aimable sans boucles. Soit $c \in Q_0$ tel que, pour chaque $\alpha \in Q_1$ tel que $s(\alpha) = c$ il existe une flèche (nécessairement unique) $\beta_\alpha \in Q_1$ avec $t(\beta_\alpha) = c$ et $\alpha\beta_\alpha \notin I$. La description de la situation générale que l'on trouvera dans le voisinage de c dans le carquois lié est comme suit.



Définissons un nouveau carquois lié (Q', I') comme suit :

- $Q'_0 = Q_0$
 - $Q'_1 = (Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2, \sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{\alpha'_1, \alpha'_2, \pi'_1, \pi'_2, \sigma'_1, \sigma'_2\}$
- et soit I' l'idéal engendré par $(I \setminus \{\sigma_1\alpha_2, \sigma_2\alpha_1, \alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2\}) \cup \{\alpha'_1\sigma'_1, \alpha'_2\sigma'_2, \alpha'_1\pi'_1, \alpha'_2\pi'_2\}$
où $\alpha'_m, \pi'_m, \sigma'_m$ pour $m \in \{1, 2\}$ sont des flèches telles que $b_m = s(\sigma'_m) = t(\alpha'_m)$, $c = s(\alpha'_m) = t(\pi'_m)$, $d_m = s(\pi'_m)$ et $a_m = t(\alpha'_m)$.

Le carquois lié (Q', I') est illustré ci-bas



On dira que (Q', I') est obtenu de (Q, I) au moyen de la transformation V_c , c'est à dire $(Q', I') = V_c(Q, I)$.

Le résultat suivant résume des informations utiles pour la suite.

Lemme 2.22. *Soit $A = kQ/I$ une algèbre aimable et $c \in Q_0$ comme plus haut. Alors*

(a) Le module $T_c = \tau^{-1}S_c \oplus (\oplus_{d \neq c} P_d)$ est un A -module inclinant.

(b) $\text{End}_A(T_c) \cong kQ'/I'$.

Démonstration.

(a) Puisque c n'est pas une source, on a $\text{Hom}_A(DA, S_c) = 0$, et donc $dp_A(\tau^{-1}S_c) \leq 1$, en vertu de [1, IV, 2.7]. Puisque T_c a $|Q_0|$ facteurs directs indécomposables et que tous sauf un sont projectifs, il reste à prouver que $\tau^{-1}S_c$ n'a pas d'auto-extensions, c'est à dire que $\text{DExt}_A^1(\tau^{-1}S_c, \tau^{-1}S_c) \cong \text{Hom}_A(\tau^{-1}S_c, S_c)$ est nul. On sait que

$$\text{Ext}_A^1(S_c, S_c) \cong \underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}S_c, S_c) = 0$$

Donc, tout morphisme $f : \tau^{-1}S_c \rightarrow S_c$ se factorise par la couverture projective $p : P_c \rightarrow S_c$ et par conséquent il existe $g : \tau^{-1}S_c \rightarrow P_c$ tel que $f = pg$. On prétend que $\text{Img} \subseteq \text{rad}P_c$. En effet, si ce n'est pas le cas, g serait surjective, donc scinderait, une absurdité. Mais $\text{Img} \subseteq \text{rad}P_c$ implique immédiatement $f = 0$.

(b) C'est un calcul immédiat. □

Le module inclinant T_c est appelé *le module inclinant de Brenner-Butler* en c , ou BB-module inclinant. De même, on peut définir le BB-module co-inclinant en un point y , et la transformation correspondante V'_y sur les carquois. Avec la notation précédente, $V'_c(Q', I') = (Q, I)$.

Lemme 2.23. *Les mutations locales induites par des mouvements polygonaux élémentaires sont en fait des équivalences pour les inclinaisons et les co-inclinaisons.*

Démonstration. Voir [24] démonstrations des théorèmes 3.13 et 3.16. □

Corollaire 2.24. *Toute composante connexe A d'une algèbre inclinée m -amassée est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $N_{r,s}$.*

Démonstration. Il suit de [24], démonstration du théorème 4.1 que A est dérivée équivalente, via les mutations locales induites par les mouvements polygonaux élémentaires, à une algèbre $N_{r,s}$. En outre, en vertu du lemme 2.23, on sait que ces mutations sont en fait des équivalences pour les inclinaisons et les co-inclinaisons. □

Corollaire 2.25. *Si (Q, I) est un carquois lié \mathbb{A} -branché, alors l'algèbre kQ/I est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $N_{r,s}$.*

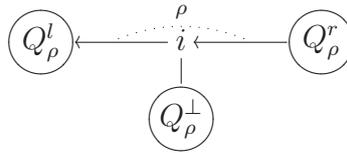
Démonstration. Les algèbres \mathbb{A} -branchées forment une sous-classe de la classe des algèbres inclinées m -amassées, donc notre énoncé suit directement du corollaire précédent. \square

2.6 Relations extrémales

Ce qui reste à faire est de partir d'une algèbre branchée qui n'est pas \mathbb{A} -branchée et d'éliminer toutes les relations qui ne sont pas dans les cycles m -saturés (au moyen d'équivalences pour les inclinaisons et les co-inclinaisons). Quand on finit d'éliminer ces relations on obtient une algèbre \mathbb{A} -branchée, qui est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à l'originale et, comme vu dans le corollaire plus haut, elle sera équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons (via les mutations mentionnées plus haut) à une algèbre de la forme $N_{r,s}$.

Avant de donner une méthode pour éliminer les relations (qui ne sont pas dans les cycles m -saturés) dans une algèbre branchée, nous devons établir un ordre d'élimination. Cet ordre sera basé sur l'élimination des relations que nous appellerons *extrémales à gauche (ou à droite)*.

Soit (Q, I) un carquois branché et $x \xleftarrow{i} \overset{\rho}{\leftarrow} z$ une relation qui n'est pas dans un cycle m -saturé. Le carquois obtenu de Q en enlevant le sommet i et toutes les flèches incidentes n'est pas connexe. Soit Q_ρ^l la composante connexe contenant x , Q_ρ^r celle contenant z et Q_ρ^\perp l'union (peut-être vide) des composantes connexes restantes.

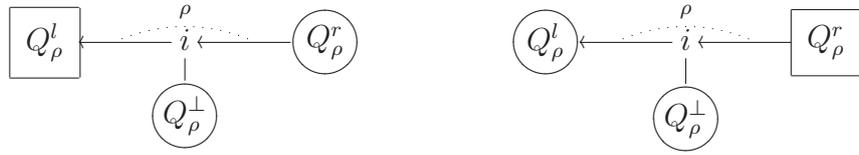


Dans ce qui suit, nous adoptons la convention suivante au sujet des décorations sur les noms des carquois : \textcircled{Q} veut dire que Q est lié par un idéal I tel que (Q, I) est un carquois lié branché, alors que \boxed{Q} veut dire que le carquois est \mathbb{A} -branché.

Définition 2.26. Soit (Q, I) un carquois lié branché et $x \xleftarrow{i} \overset{\rho}{\leftarrow} z$ une relation qui n'est pas dans un cycle m -saturé. La relation ρ est dite :

- a) **Extrémale à gauche** si Q_ρ^l est un carquois \mathbb{A} -branché,

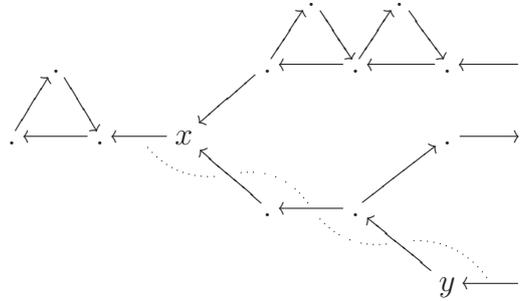
b) **Extrémale à droite** si Q_ρ^r est un carquois \mathbb{A} -branché.



relation extrémale à gauche

relation extrémale à droite.

Exemple 2.27. Soit A l'algèbre donnée par le carquois lié suivant

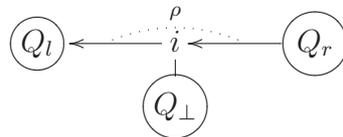


où chaque cycle est 1-saturé.

Alors, la relation impliquant le sommet x est extrémale à gauche et la relation impliquant le sommet y est extrémale à droite. Les autres relations ne sont pas extrémales.

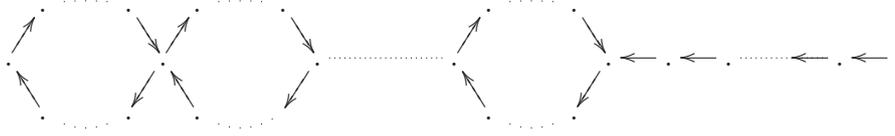
Lemme 2.28. Si $A = kQ/I$ est une algèbre branchée qui n'est pas \mathbb{A} -branchée, alors A admet toujours une relation extrémale à gauche et une relation extrémale à droite.

Démonstration. Par récurrence sur $n = |Q_0|$. Soit ρ une relation qui n'est pas dans un cycle m -saturé. Localement (Q, I) a la forme suivante :



Si ρ n'est pas extrémale, il existe des relations (en dehors des cycles m -saturés) dans Q_r et Q_l . Puisque $|(Q_r)_0| < n$ et $|(Q_l)_0| < r$ alors il existe des relations extrémales en Q_r et dans Q_l . Alors la relation extrémale à gauche de Q_l est aussi extrémale à gauche dans Q et la relation extrémale à droite de Q_r est aussi extrémale à droite dans Q . \square

Remarque 2.29. Il suit de ([24], Theorem 4.1) que si on a un carquois \mathbb{A} -branché, on peut le supposer de la forme



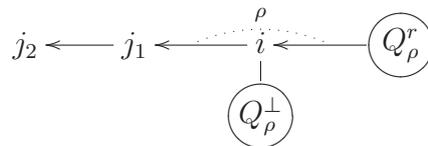
parce que le carquois est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons (via les mutations données par Murphy) à n'importe quel carquois \mathbb{A} -branché avec le même nombre de cycles m -saturés et de sommets.

Ainsi la remarque précédente permet de supposer que le sous-carquois représenté par \square dans la définition de relation extrémale, a toujours cette forme ou bien celle du cas particulier où il n'y a aucun cycle m -saturé.

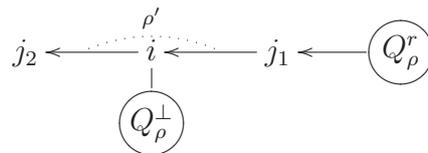
2.7 Comment éliminer une relation extrémale à gauche ρ .

Nous verrons maintenant comment éliminer une relation extrémale à gauche ρ .

Lemme 2.30. *Le carquois lié aimable*

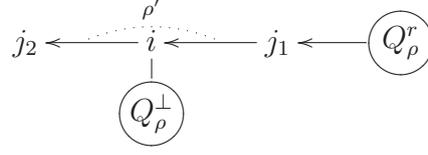


est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable

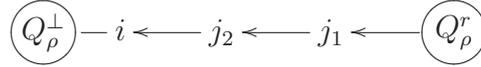


Démonstration. On applique la transformation V_{j_1} . □

Lemme 2.31. *Le carquois lié aimable*

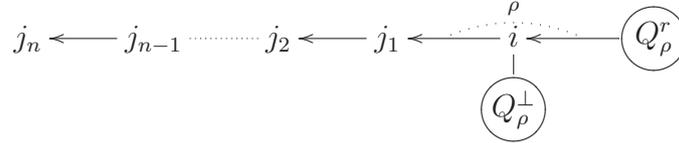


est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable

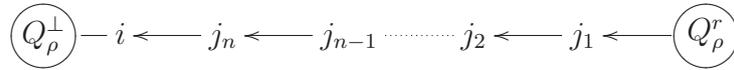


Démonstration. On applique la transformation V_{j_2} . □

Lemme 2.32. *Le carquois lié aimable*



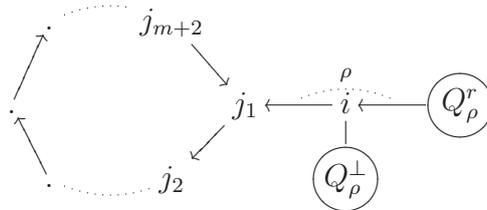
est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



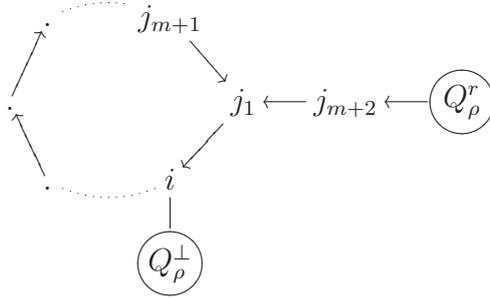
Démonstration. On applique la composition des transformations $V_{j_n} \cdots V_{j_1}$. □

Par conséquent, si on a une relation extrême ρ dont le sous-carquois représenté par \square n'a pas de cycles m -saturés, une application du lemme 2.32 donne une nouvelle algèbre qui est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à la forme originale de laquelle nous avons éliminé la relation ρ . Il reste à montrer comment éliminer une relation extrême quand il y a des cycles m -saturés dans le sous-carquois représenté par \square .

Lemme 2.33. *Le carquois lié aimable*



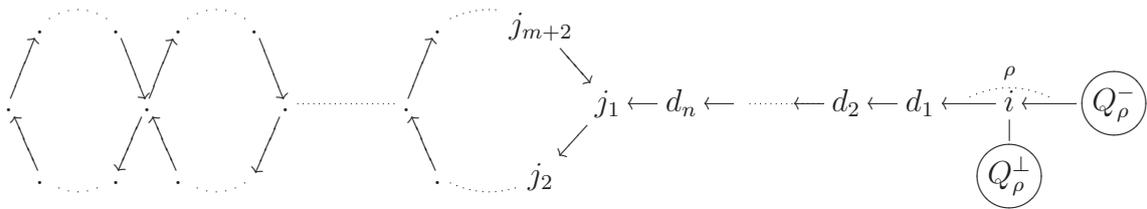
est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



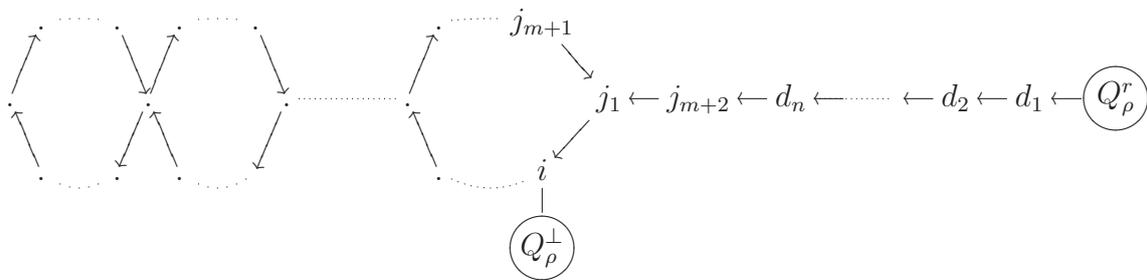
où tous les cycles sont m -saturés.

Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{j_{m+2}} V_{j_1}$. □

Corollaire 2.34. *Le carquois lié aimable*



est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



où tous les cycles sont m -saturés.

Démonstration. Cela suit des lemmes 2.30 et 2.33. □

Ainsi nous savons comment éliminer une relation extrême à gauche par le biais d'équivalences d'inclinaisons ou de co-inclinaisons. Dualement, nous pouvons éliminer une relation extrême à droite par le biais d'équivalences d'inclinaisons ou de co-inclinaisons. Donc, pour

éliminer toutes les relations qui ne sont pas dans les cycles m -saturés que nous avons dans notre algèbre branchée, on commence avec une relation extrémale et on répète le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de relations.

2.8 Algorithme pour éliminer les relations

On peut résumer le processus décrit plus haut dans la proposition suivante qui, avec le corollaire 2.18, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre B soit équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .

Proposition 2.35. *Soit $B = kQ/I$ une algèbre branchée. Alors il existe une suite d'inclinaisons et de co-inclinaisons qui transforme l'algèbre B en une algèbre \mathbb{A} -branchée A' .*

Démonstration. Soit $B = kQ/I$ une algèbre branchée qui n'est pas \mathbb{A} -branchée. Le résultat suit de l'exécution de l'algorithme suivant :

1ère étape On choisit une relation extrémale ρ dans (Q, I) .

2ème étape Au moyen du processus décrit dans les lemmes 2.32 et 2.33, on obtient une nouvelle algèbre $A' = kQ'/I'$ qui est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à B . Dans (Q', I') , il y a exactement une relation de moins que dans (Q, I) , à savoir la relation ρ .

3ème étape Si A' est \mathbb{A} -branchée, on a fini. Sinon on retourne à la 1ère étape avec A' jouant le rôle de B .

Le processus s'achève en un nombre fini d'étapes, puisque le nombre de relations en dehors des cycles de (Q, I) est fini. □

Corollaire 2.36. *Soit $A = kQ/I$ une algèbre m -branchée, alors A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .*

Démonstration. Le résultat précédent dit que A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre \mathbb{A} -branchée A' . En vertu du lemme 2.25 on sait que A' est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à un $N_{r,s}$ convenable, qui est incliné m -amassé. □

2.9 Caractérisation des algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A}

Nous sommes maintenant en mesure de donner une caractérisation des algèbres dérivées équivalentes à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .

Théorème 2.37. *Soit A une algèbre connexe, les conditions suivantes sont équivalentes*

- (a) A est une algèbre branchée .
- (b) A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $N_{r,s}$.
- (c) A est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $N_{r,s}$.
- (d) A est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type \mathbb{A} .

Démonstration. (a) implique (b) Cela suit du corollaire 2.36.

(b) implique (c) Il a été prouvé par Happel dans [21] que, si A et B sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons, alors elles sont dérivées équivalentes.

(c) implique (d) En vertu de [24], on sait que les algèbres de type $N_{r,s}$ sont inclinées m -amassées de type \mathbb{A} .

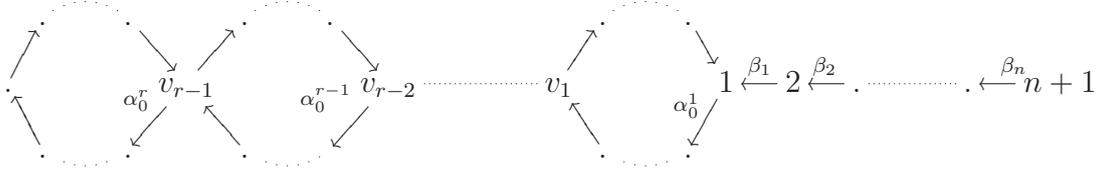
(d) implique (a) Suit du corollaire 2.18.

□

Définition 2.38. *À une algèbre m -branchée A on peut associer une **paire invariante** (r_A, s_A) où r_A est le nombre de cycles m -saturés et s_A le nombre de sommets du carquois de A .*

Le calcul suivant sera utile par la suite.

Soit $(Q_{r,s}, I)$ le carquois lié associé à la forme normale. Nous allons étiqueter les flèches et les sommets de $Q_{r,s}$ comme suit : soit v_j le sommet en commun entre le $j^{\text{ème}}$ et le $(j+1)^{\text{ème}}$ cycle. En outre, soit 1 l'unique sommet de degré 3 dans $Q_{r,s}$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ soient $\alpha_0^j, \alpha_1^j, \dots, \alpha_{m+1}^j$ les $m+2$ flèches du $j^{\text{ème}}$ cycle, de sorte que la source de α_0^j est précisément v_{j-1} , fixons $v_0 = 1$. En plus, soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les flèches restantes, où la source de β_n est $n+1$, l'unique source du carquois, et $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$ n'appartient pas à I . Voir la figure ci-dessous.



Étant donné une paire $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on va noter $(a, b)^*$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(a, b)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Lemme 2.39. *Soit $N_{r,s}$ la forme normale. Alors,*

$$\phi_{N_{r,s}} = r \cdot (0, m+2)^* + (s+2-2r, s-r(m+2))^*$$

Démonstration. Le terme $r \cdot (0, m+2)^*$ suit de l'étape (3) de l'algorithme 1.13. Avant de poursuivre, notez que le nombre total des flèches est

$$s = n + r(m+2). \quad (2.1)$$

Alors, on a $s+2-2r = n+rm+2$, et $s-r(m+2) = n$. Nous procédons maintenant par récurrence sur r . Comme il nous est utile pour la suite, nous commençons par le cas $r=2$. Le cas $r=1$ suit de l'exemple 1.16.

Supposons $r=2$, et soit k tel que $t(\alpha_k^1) = v_1$. Commençons l'algorithme avec $H_0 = \alpha_0^1 \beta_1 \cdots \beta_n$ donc $\Pi_0 = p_{t(\alpha_0^1)}$. Ainsi, $H_1 = \alpha_1^1$ et $\Pi_1 = p_{t(\alpha_1^1)}$. Ensuite, nous continuons à parcourir le cycle le plus à droite possible jusqu'à $H_{k-1} = \alpha_{k-1}^1$ and $\Pi_{k-1} = p_{t(\alpha_{k-1}^1)}$. A la prochaine étape, nous obtenons $H_k = \alpha_0^2 \alpha_k^1$, en allant au deuxième cycle, et $\Pi_k = p_{t(\alpha_0^2)}$. Alors, nous commençons à parcourir le deuxième cycle, et obtenons $H_{k+m} = \alpha_m^2$, de sorte qu'à la prochaine étape, nous avons $H_{k+m+1} = \alpha_{k+1}^1 \alpha_{m+1}^2$, en revenant au premier cycle. En le parcourant nous sommes amenés à $H_{2m} = \alpha_m^1$ et puis $H_{2m+1} = \alpha_{m+1}^1$, mais, au contraire de ce qui précède, $\Pi_{2m+1} = \beta_1$. Dès lors, $H_{2m+2} = h_2$, $\Pi_{2m+2} = \beta_2$, et nous continuons allant vers l'arrière à travers les flèches β . Nous arrivons ensuite à $H_{2m+n+1} = h_{n+1}$, $\Pi_{2m+n+1} = p_{n+1}$ and $H_{2m+n+2} = H_0$. Les uniques fils interdits de longueur différente de zéro sont les flèches β . Puis, nous obtenons la paire $(2m+n+2, n)$. Si on remplace n par l'expression obtenue dans l'équation 2.1, on obtient la paire désirée.

Supposons maintenant que l'énoncé est vrai pour $l=r-1$, et analysons l'algorithme pour $l=r$. Les fils interdits de longueur différente de zéro qui vont apparaitre sont exactement les

mêmes que ceux dans le cas $r = 2$, à savoir les flèches β , donc nous allons obtenir une paire de la forme (T, n) . Ce qui reste à voir, c'est combien d'étapes sont ajoutées à l'algorithme, afin que nous puissions déterminer T . Nous affirmons qu'il y a exactement m étapes. En effet, nous ajoutons un seul cycle m -saturé. Comme dans le cas $r = 2$, deux de ces flèches permettent de passer d'un cycle à l'autre, et celles qui restent (chacune d'elles) conduisent à une étape supplémentaire de l'algorithme. Le nombre total des étapes est, en vertu de l'hypothèse de récurrence, et de l'argument précédent

$$T = (n + (r - 1)m + 2) + m = n + rm + 2.$$

Puisque chaque fil permis a été utilisé, la preuve est finie. □

Le corollaire suivant nous donne un nouvel invariant dérivé pour les algèbres m -branchées.

Corollaire 2.40. *Soit A et B deux algèbres m -branchées. Alors A et B sont dérivées équivalentes si et seulement si les paires invariantes (r_A, s_A) et (r_B, s_B) coïncident.*

Démonstration. Si A et B sont des algèbres branchées qui sont dérivées équivalentes, il suit du théorème précédent que A est dérivée équivalente à une algèbre de type N_{r_A, s_A} et B est dérivée équivalente à une algèbre N_{r_B, s_B} . Calculant l'invariant ϕ d'Avella-Alaminos et Geiss aux algèbres N_{r_A, s_A} et N_{r_B, s_B} on en déduit que les paires (r_A, s_A) et (r_B, s_B) coïncident. Réciproquement, si A et B sont des algèbres branchées ayant les paires associées égales $(r_A, s_A) = (r_B, s_B) = (r, s)$, alors A et B sont toutes deux dérivées-équivalentes à $N_{r, s}$ et donc entre elles. □

En plus, nous pouvons montrer facilement que l'invariant ϕ d'Abella-Alaminos est un invariant complet dans l'ensemble des algèbres branchées.

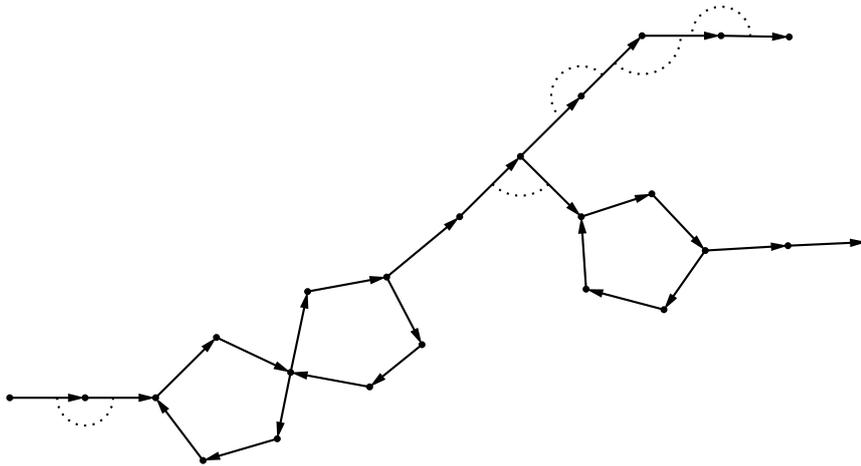
Théorème 2.41. *Soit A et A' des algèbres aimables dérivées-équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A et A' sont dérivées équivalentes.
- (b) A et A' sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons.
- (c) $\phi_A = \phi_{A'}$.

Démonstration. Le seul énoncé qui reste à prouver est (c) implique (a) et cela suit du corollaire 2.40.

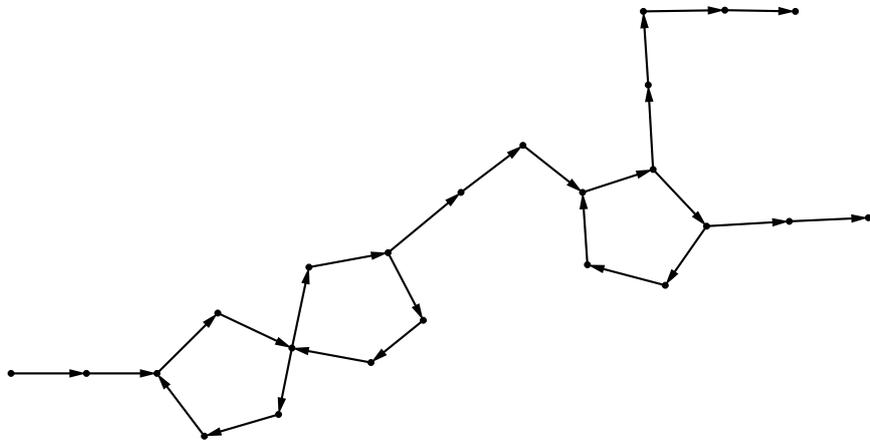
□

Exemple 2.42. Soit A l'algèbre 3-branchée donnée par le carquois lié suivant :

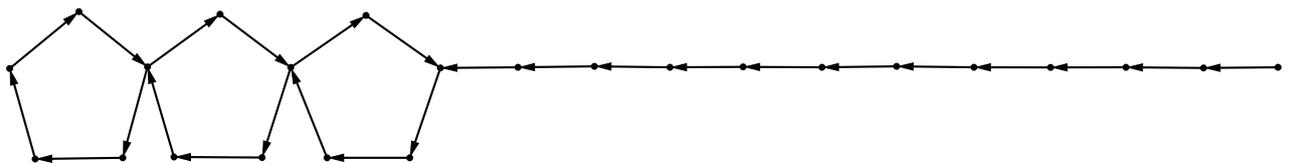


où tous les cycles sont 3-saturés. Observons que A n'est pas inclinée 3-amassée de type \mathbb{A} parce qu'elle contient trois relations consécutives.

Alors, A est dérivée équivalente à l'algèbre \mathbb{A} -branchée A' donnée par le carquois lié suivant :



Enfin, A' est est dérivée équivalente à l'algèbre $N_{3,24}$:



Chapitre 3

Une réalisation géométrique de la catégorie m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ d'après Torkildsen

Dans [17] Caldero, Chapoton et Schiffler ont défini une catégorie où les objets sont les diagonales d'un polygone régulier. Ensuite, la théorie générale des algèbres amassées provenant de surfaces pointées a été exposée dans [19] par Fomin, Shapiro et Thurston. Plus tard, le modèle géométrique de [17] a été étendu au type Dynkin \mathbb{D} par Schiffler [26] et au type $\tilde{\mathbb{A}}$ par Assem, Brüstle, Charbonneau-Jodoin et Plamondon dans [2] puis par Brüstle et Zhang dans [11]. Baur et Marsh ont étendu les modèles géométriques pour les catégories amassées de types \mathbb{A} et \mathbb{D} aux catégories m -amassées des mêmes types dans [6] et [7] respectivement. Finalement, dans [29], Torkildsen a étendu le modèle au type $\tilde{\mathbb{A}}$. Dans ce chapitre nous nous consacrons à l'étude de ce dernier modèle.

3.1 Le polygone $P_{p,q,m}$

Soient $m \geq 1$ et $p, q \geq 2$, trois entiers. On fixe $n = p + q$. Le polygone $P_{p,q,m}$ est un mp -polygone régulier avec un mq -polygone régulier dans le centre duquel on a fait un trou à l'intérieur. Quand $m = 1$ nous écrivons simplement $P_{p,q}$.

Notons $P_{p,q,m}^0$ l'intérieur de la surface comprise entre le polygone intérieur et le polygone

extérieur. Nous étiquetons les sommets sur le polygone extérieur $O_0, O_1, \dots, O_{mp-1}$ dans le sens anti-horaire et les sommets sur le polygone intérieur $I_0, I_1, \dots, I_{mq-1}$, dans le sens horaire. Si un des polygones a 2 sommets, on dessine le polygone comme un cercle avec deux points marqués. Pour plus de simplicité, nous dessinons toujours les polygones de façon que les sommets O_0 et I_0 soient le plus près possible mis en gardant le même centre.

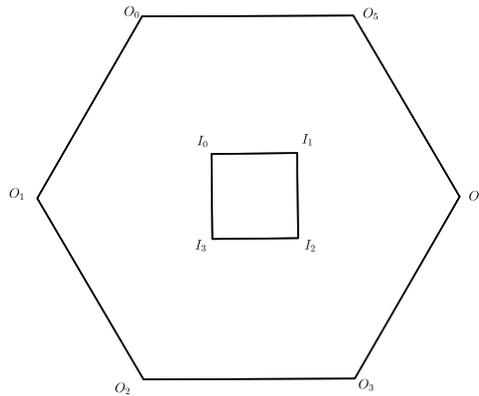


FIGURE 3.1 – $P_{3,2,2}$

3.1.1 Les m -diagonales dans $P_{p,q,m}$

Soit $\delta_{i,k}$ le chemin dans le sens anti-horaire entre O_i et O_{i+k-1} au long de la frontière du polygone extérieur, où k est le nombre de sommets que $\delta_{i,k}$ traverse (y compris les sommets de début et fin).

Si $k = pm + 1$, le chemin tourne autour du polygone exactement une fois. Si $k > pm + 1$, le chemin se croise.

De même, on note $\gamma_{i,k}$ le chemin dans le sens horaire entre I_i et I_{i+k-1} au long de la frontière du polygone intérieur, où k est le nombre de sommets que le chemin traverse. Bien sûr, ici, nous calculons toujours modulo pm et qm .

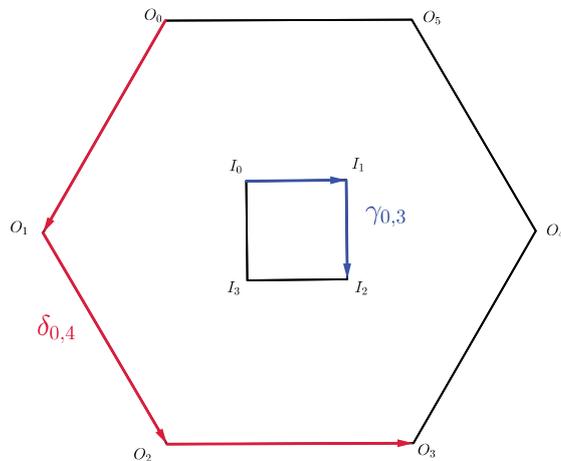


FIGURE 3.2 – Les chemins $\delta_{0,4}$ et $\gamma_{0,3}$ dans $P_{3,2,2}$.

Maintenant, nous considérons les chemins des types suivants.

- Les chemins de type 1 sont des chemins dans $P_{p,q,m}^0$ entre un sommet du polygone extérieur et un sommet du polygone intérieur, c'est à dire, un chemin entre O_i et I_j pour certains i et j .
- Les chemins de type 2 sont des chemins α entre O_i et O_{i+k-1} dans $P_{p,q,m}^0$, et de manière que α est homotope à $\delta_{i,k}$ pour certain $k \geq 3$.
- Les chemins de type 3 sont des chemins α entre I_i et I_{i+k-1} dans $P_{p,q,m}^0$, de façon que α est homotope à $\gamma_{i,k}$ pour certain $k \geq 3$.

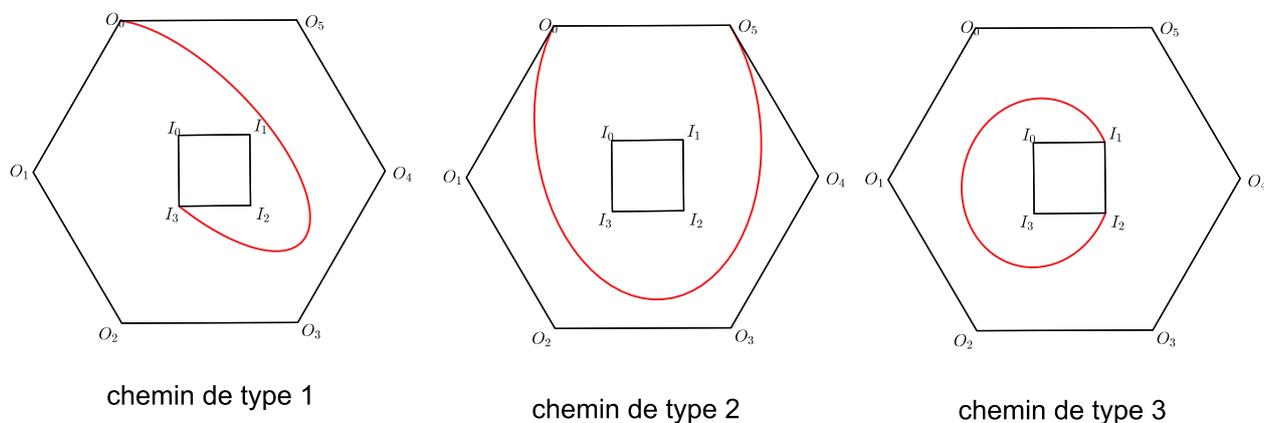


FIGURE 3.3 – Exemples des chemins de type 1, 2 et 3 dans $P_{3,2,2}$.

On dit que deux chemins sont *équivalents* si ils commencent et se terminent au même sommet et ils sont homotopes. On appelle cette classe d'équivalence *diagonales* dans $P_{p,q,m}$.

On note $O_{i,k}$ les diagonales homotopes à $\delta_{i,k}$, et $I_{i,k}$ les diagonales homotopes à $\gamma_{i,k}$.

Une m -diagonale dans $P_{p,q,m}$ est une diagonale des types ci-dessus, mais avec les restrictions suivantes :

- Une m -diagonale de type 1 est une diagonale entre O_i et I_j où i est congruent à j modulo m .
- Les m -diagonales de type 2 sont toutes les diagonales de la forme $O_{i,km+2}$, avec $k \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, pm - 1\}$.
- Les m -diagonales de type 3 sont toutes les diagonales de la forme $I_{i,km+2}$, avec $k \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, qm - 1\}$.

3.1.2 Les $(m + 2)$ -angulations de $P_{p,q,m}$

On dit qu'un ensemble de m -diagonales *se croise* si ces diagonales s'intersectent dans l'intérieur de $P_{p,q,m}$.

Définition 3.1. *Un ensemble de m -diagonales qui ne se croisent pas et qui divisent $P_{p,q,m}$ en $(m + 2)$ -gones est appelé une $(m + 2)$ -angulation.*

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.2. *([29], Proposition 4.3) N'importe quelle $(m + 2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$ contient exactement $p + q$ m -diagonales, et il existe au moins une m -diagonale de type 1.*

Exemples 3.3. *Voici les exemples de 4-angulations de $P_{2,2,2}$ et de $P_{3,2,2}$.*

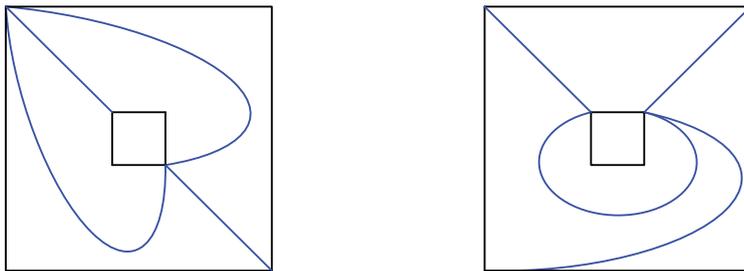


FIGURE 3.4 – Exemples de 4-angulations de $P_{2,2,2}$.

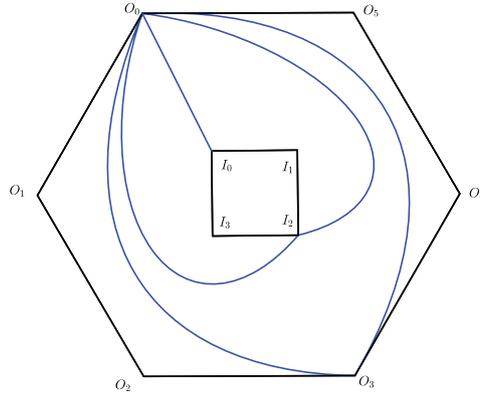


FIGURE 3.5 – Exemple d’une 4-angulation de $P_{3,2,2}$.

3.2 La catégorie des m -diagonales

Torkildsen dans [29] a défini la catégorie des m -diagonales. La construction a été motivée par [17], où les auteurs ont défini la catégorie amassée de type \mathbb{A} à l’aide des diagonales dans les polygones réguliers. Cette construction a été généralisée dans [6] aux catégories m -amassées.

3.2.1 Le décalé d’une m -diagonale

Soit α une m -diagonale dans $P_{p,q,m}$ et s un entier positif. Nous définissons $\alpha[s]$ comme étant la m -diagonale obtenue en tournant le polygone extérieur s crans dans le sens horaire et le polygone intérieur s crans dans le sens anti-horaire. Plus précisément,

- Pour les m -diagonales de type 1 : Si α est une diagonale entre O_i et I_j , $\alpha[s]$ est obtenu en déplaçant continument l’extrémité O_i de α de s crans dans le sens horaire à O_{i-s} et l’extrémité I_j de s crans dans le sens anti-horaire à I_{j-s} .
- Pour les m -diagonales de type 2 : $O_{i,k}[s] = O_{i-s,k}$;
- Pour les m -diagonales de type 3 : $I_{i,k}[s] = I_{i-s,k}$.

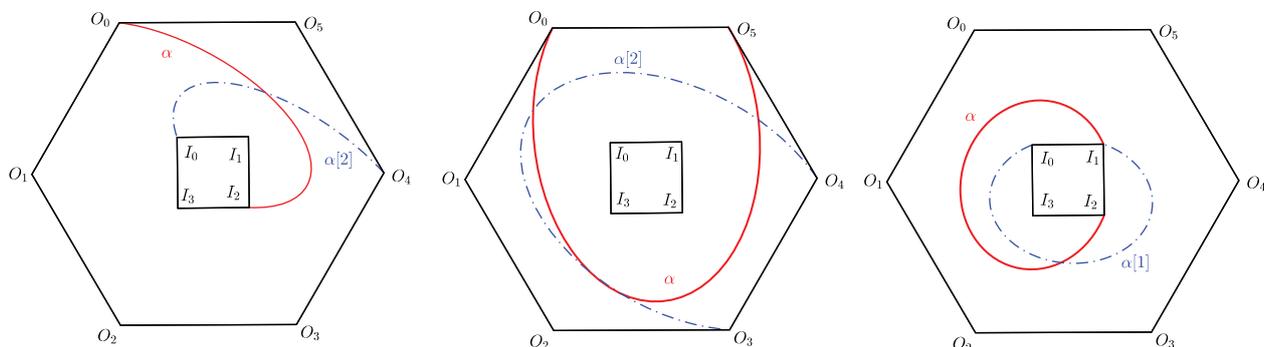


FIGURE 3.6 – Exemples de décalés pour des 2-diagonales des trois types.

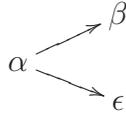
Nous calculons toujours modulo mp et mq lorsque nous nous référons aux sommets du polygone extérieur ou du polygone intérieur respectivement. Évidemment, nous pouvons définir l'opération inverse $[-s]$. Certainement cette opération est correctement définie, car si α est une m -diagonale, alors $\alpha[s]$ est aussi une m -diagonale pour tous les entiers s .

3.2.2 Mouvements élémentaires

Nous définissons d'abord les mouvements élémentaires des m -diagonales, qui sont certaines opérations qui envoient une m -diagonale à une autre m -diagonale. L'opération devrait être considérée comme un mouvement continu des extrémités de la m -diagonale.

Nous considérons plusieurs cas.

- m -diagonales de type 1 : Si α est une m -diagonale entre O_i et I_j , il y a exactement deux mouvements élémentaires :



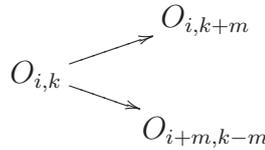
où la m -diagonale β est la m -diagonale obtenue de α en déplaçant continument l'extrémité O_i de α de m crans dans le sens anti-horaire à O_{i+m} . La m -diagonale ϵ est la m -diagonale obtenue de α en déplaçant continument l'extrémité I_j de α de m crans dans le sens horaire à I_{j+m} .

– m -diagonale de type 2 : Soit $O_{i,k}$ une m -diagonale de type 2. Alors on a les deux cas suivants :

– Si $k = m + 2$, il existe exactement un mouvement élémentaire,

$$O_{i,k} \rightarrow O_{i,k+m}.$$

– Si $k > m + 2$, il existe exactement deux mouvements élémentaires :

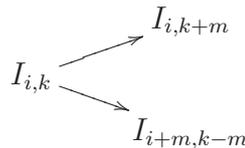


– m -diagonale de type 3 : Soit $I_{i,k}$ une m -diagonale de type 3. Alors on a les deux cas suivants :

– Si $k = m + 2$, il existe exactement un mouvement élémentaire,

$$I_{i,k} \rightarrow I_{i,k+m}.$$

– Si $k > m + 2$, il existe exactement deux mouvements élémentaires :



On peut penser aux mouvements élémentaires des m -diagonales de type 1 comme correspondant à une rotation du polygone extérieur m crans dans le sens anti-horaire et du polygone

intérieur m crans dans le sens horaire.

Si nous fixons $\tau = [m]$ nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.4. (*[29], Proposition 6.2*) Soient α et β deux m -diagonales. Alors, il existe un mouvement élémentaire $\alpha \rightarrow \beta$ si et seulement s'il existe un mouvement élémentaire $\tau\beta \rightarrow \alpha$.

Exemple 3.5. Les deux mouvements élémentaires pour la 2-diagonale α de type 1 dans $P_{2,2,2}$:

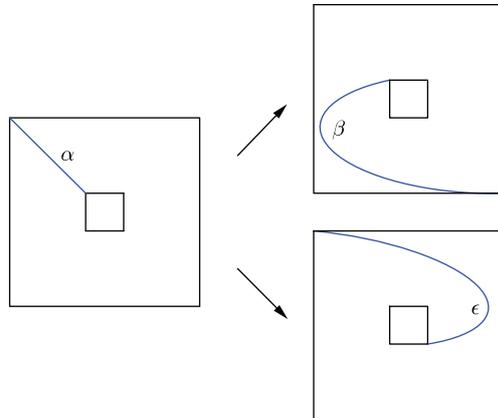


FIGURE 3.7 – Les deux mouvements élémentaires de la diagonale α .

Exemple 3.6. Mouvements élémentaires pour les m -diagonales de type 2 :

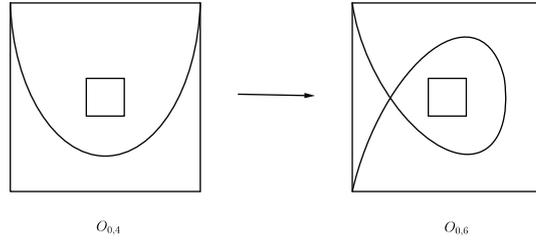


FIGURE 3.8 – L'unique mouvement élémentaire de la 2-diagonale $O_{0,4}$ de type 2.

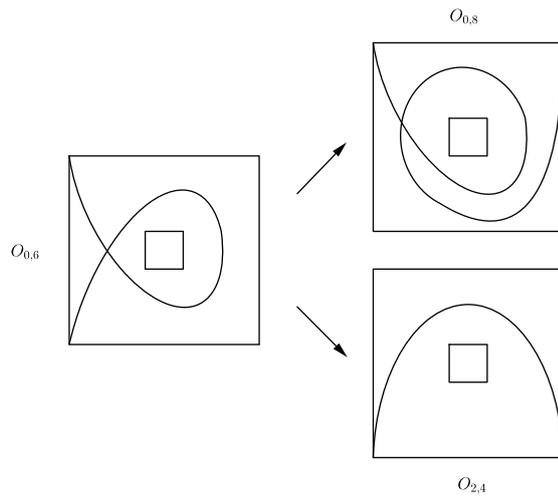


FIGURE 3.9 – Les deux mouvements élémentaires de la diagonale $O_{0,6}$ de type 2.

3.2.3 Définition de la catégorie $C_{p,q}^m$ des m -diagonales

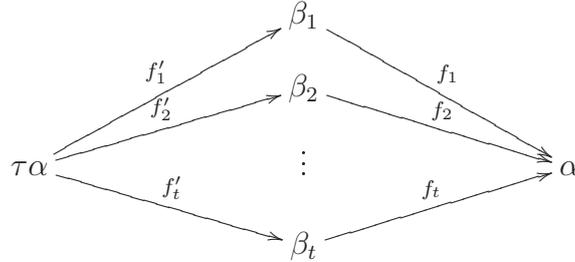
Soit k un corps algébriquement clos et soit $C_{p,q}^m$ la catégorie k -linéaire définie comme suit. Les objets indécomposables sont les m -diagonales, d'où les objets dans $C_{p,q}^m$ sont les ensembles finis de m -diagonales. L'espace des morphismes entre les objets indécomposables X et Y est

l'espace vectoriel sur k engendré par les mouvements élémentaires modulo certaines relations de maille que nous définissons ci-dessous.

Soit α un objet indécomposable (une m -diagonale) dans $C_{p,q}^m$. Si $f : \beta \rightarrow \alpha$ est un mouvement élémentaire, il existe un mouvement élémentaire $f' : \tau\alpha \rightarrow \beta$ en vertu de la proposition 3.4. Soit L l'ensemble de tous les mouvements élémentaires se terminant en α . Alors, la relation de maille est définie comme

$$\sum_{f \in L} f f'.$$

Considérons la situation suivante, où f_1, f_2, \dots, f_n sont tous les mouvements élémentaires se terminant en α .



Cela signifie que la somme des compositions $f_i f'_i$ est 0. Dans notre cas il y a au plus deux mouvements élémentaires, donc $t = 1$ ou $t = 2$.

L'automorphisme τ est clairement une équivalence sur cette catégorie. En fait $[s]$ est une équivalence pour tout s .

3.2.4 Le carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$

Étant donné $P_{p,q,m}$ et la catégorie des m -diagonales $C_{p,q}^m$, nous définissons un carquois de la manière suivante. Les sommets sont les objets indécomposables (c'est à dire les m -diagonales), et il y a une flèche de l'objet indécomposable α à l'objet indécomposable β si et seulement s'il y a un mouvement élémentaire $\alpha \rightarrow \beta$. Nous l'appellons le carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$.

3.2.5 Le niveau d'une m -diagonale

Soit α une m -diagonale. Si α est de type 1, nous disons que α est en *niveau* d (où $0 \leq d < m$) si on peut obtenir une m -diagonale entre O_d et I_d à partir de α en appliquant un suite finie de τ et de mouvements élémentaires. Si α est de type 2 (ou 3), on dit que α est en niveau d si on peut obtenir la m -diagonale $O_{d+1,m+2}$ (ou $I_{d+1,m+2}$) à partir de α en appliquant un suite finie de τ et de mouvements élémentaires.

Nous noterons T_p^d (T_q^d) la composante de la catégorie des m -diagonales contenant les objets de type 2 (3) dans le niveau d et S^d la composante constituée par des diagonales de type 1 dans le niveau d .

Exemple 3.7. La figure suivante est la composante T_p^1 de la catégorie des 2-diagonales $C_{2,2}^2$.

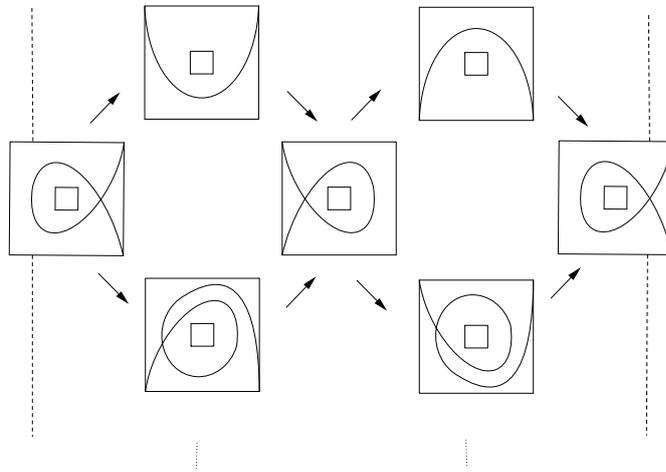


FIGURE 3.10 – Tube T_p^1 de la catégorie $C_{2,2}^2$.

et la figure suivante est la composante S_0 de la catégorie des 2-diagonales $C_{2,2}^2$.

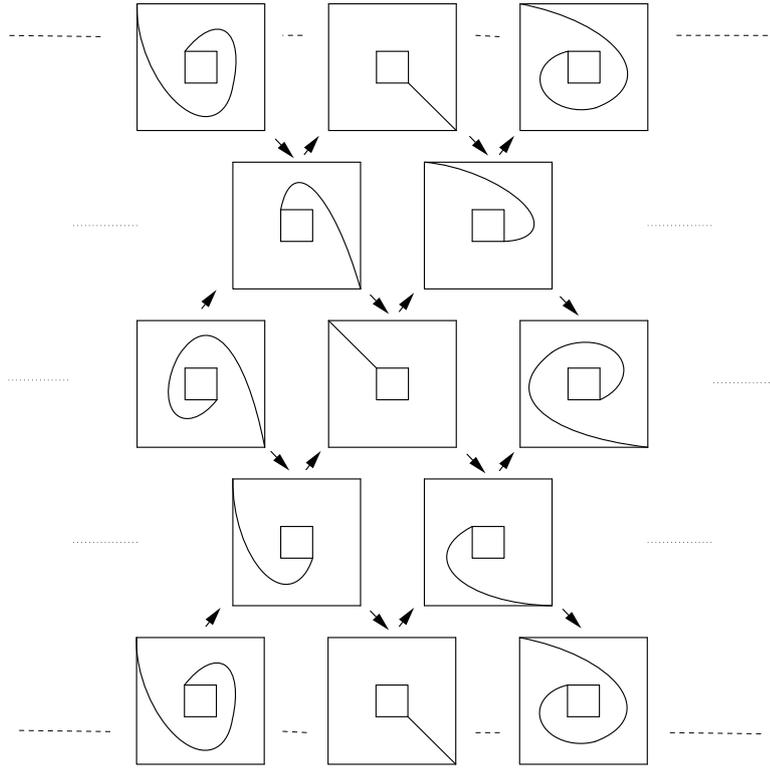


FIGURE 3.11 – Composante S_0 de la catégorie $C_{2,2}^2$.

3.3 La catégorie m -amassée et la catégorie des m -diagonales

En suivant la même notation que [29], nous noterons \mathcal{T}_p^d (\mathcal{T}_q^d), le tube de rang p (q) de degré d dans la catégorie m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$. Par ailleurs, notons \mathcal{S}^d la composante dans le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie m -amassée composée des objets de la forme $\tau^s P[d]$ où P est un projectif.

Maintenant, nous voulons définir un foncteur additif $F : C_{p,q}^m \rightarrow \mathcal{C}_m$, où \mathcal{C}_m est la catégorie m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$. Il suffit de définir le foncteur sur les objets indécomposables et les mouvements élémentaires. Nous voulons aussi que F induise un isomorphisme de carquois entre le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie des m -diagonales et un sous-carquois du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie m -amassée.

Tout d'abord, nous allons définir une $(m+2)$ -angulation particulière Δ_P de $P_{p,q,m}$. Cette

$(m + 2)$ -angulation est telle que l'image $F(\Delta_P) = \bigoplus_{i=0}^{p+q-1} P_i$. Ainsi, $\Delta_P = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+q-1}\}$ où toutes les diagonales sont de type 1 avec nombre de tours 0. Pour $i \in \{0, \dots, p\}$, α_{p-i} est la diagonale dans le sens horaire commençant en O_{im} et se terminant en I_0 et pour $i \in \{1, \dots, q-1\}$, α_{p+i} est la diagonale dans le sens anti-horaire commençant en O_0 et se terminant en $I_{(q-i)m}$.

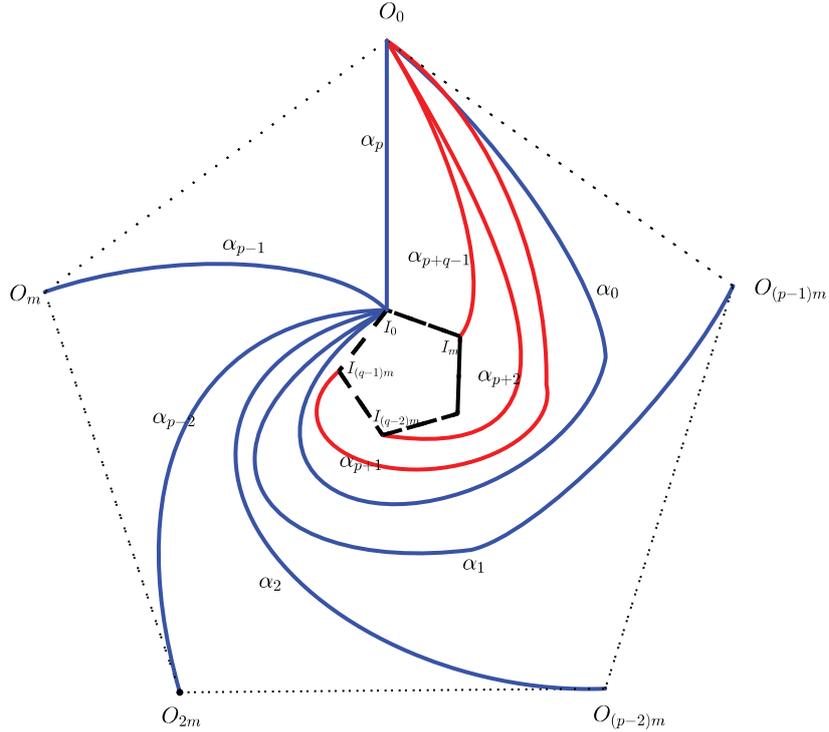


FIGURE 3.12 – $(m + 2)$ – angulation Δ_P de $P_{p,q,m}$

La m -diagonale α_i dans Δ_P est envoyée par F à P_i . Ensuite, nous définissons $F(\alpha_i[d]) = P_i[d]$ et $F(\tau^t \alpha_i[d]) = \tau^t P_i[d]$ pour tout entier t . Cela prend en charge toutes les m -diagonales de type 1, et par le fait que tous les éléments de S^d sont de la forme $\tau^t \alpha_i[d]$, cela est une bijection entre l'ensemble des m -diagonales de type 1 et l'ensemble des objets indécomposables dans les composantes transjectives du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie m -amassée.

Nous noterons $Q_i^s[d]$ les objets indécomposables dans \mathcal{T}_p^d , où s est la quasi-longueur de Q_i^s .

Étant donné i , un rayon est une suite sectionnelle infinie de morphismes irréductibles

$$Q_i^1[d] \rightarrow Q_i^2[d] \rightarrow Q_i^3[d] \rightarrow Q_i^4[d] \rightarrow \dots,$$

et un corayon est une suite sectionnelle infinie de morphismes irréductibles

$$\dots \rightarrow Q_{i-3}^4[d] \rightarrow Q_{i-2}^3[d] \rightarrow Q_{i-1}^2[d] \rightarrow Q_i^1[d].$$

Pour les m -diagonales de type 2 nous définissons $F(O_{im,jm+2}[d]) = Q_i^j[d]$. Nous faisons de même avec les m -diagonales de type 3, qui correspondent aux objets dans les tubes de rang q .

Ensuite, nous avons les résultats suivants :

Proposition 3.8. [29] *La composante S^d du carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$ est isomorphe à la composante S^d du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie m -amassée \mathcal{C}_m de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, pour tous les entiers d , avec $0 \leq d < m$.*

Proposition 3.9. [29] *Les composantes T_p^d et T_q^e du carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$ sont isomorphes à \mathcal{T}_p^d et \mathcal{T}_q^e respectivement dans le carquois de la catégorie m -amassée.*

Nous savons que le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie m -amassée a des tubes de rang 1 contenant des objets homogènes non-rigides. Donc, le foncteur F n'est pas dense. Cependant, si \mathcal{C}' est la sous-catégorie pleine de la catégorie m -amassée \mathcal{C}_m constituée de l'ensemble des objets qui sont dans l'union des composantes S^d , \mathcal{T}_p^d et \mathcal{T}_q^d , avec $0 \leq d < m$, on obtient le foncteur induit $G : C_{p,q}^m \rightarrow \mathcal{C}'$. Alors, G est dense et fidèle. Le foncteur n'est pas plein, puisque nous n'avons pas tous les morphismes en $C_{p,q}^m$ entre les objets dans des composantes différentes dans le carquois d'Auslander-Reiten : il n'y a pas de morphismes correspondant aux morphismes dans le radical infini.

Le théorème suivant récapitule.

Théorème 3.10. [29] *Le foncteur G induit un isomorphisme de carquois entre le carquois d'Auslander-Reiten de $C_{p,q}^m$ et le carquois d'Auslander-Reiten de $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}_m$. En outre G est dense et fidèle, et nous avons que $G(\alpha[s]) \cong G(\alpha)[s]$, pour toute m -diagonale α et pour tout entier s .*

3.4 Carquois colorés et mutations de carquois colorés

La mutation de carquois a été définie par Fomin et Zelevinsky dans leur travail avec des algèbres amassées [18]. Buan et Thomas dans [14] ont étendu cette notion à une classe de carquois colorés (également définie par eux) pour modéliser les mutations dans la catégorie m -amassée.

Les *carquois m -colorés* sont des carquois où les flèches entre les sommets ont des couleurs choisies dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites.

- Il n'y a pas de boucles.
- S'il y a une flèche entre i et j avec la couleur c , alors il n'y a pas de flèches entre i et j avec une couleur $c' \neq c$.
- S'il y a r flèches entre i et j de la couleur c , alors il y a r flèches entre j et i de la couleur $m - c$.

La *mutation du carquois coloré* Q au sommet j est définie comme le carquois $\mu_j(Q)$ obtenu comme suit.

1. Pour chaque paire de flèches $i \xrightarrow{(c)} j \xrightarrow{(0)} k$, où $i \neq k$ et $c \in \{0, 1, \dots, m\}$, ajouter une flèche de i à k de la couleur c et une flèche de k à i de la couleur $m - c$.
2. S'il existe des flèches de différentes couleurs d'un sommet i à un sommet k , annuler le même nombre de flèches de chaque couleur jusqu'à ce que il n'y a que des flèches de la même couleur de i à k .
3. Ajouter un à la couleur de toutes les flèches entrantes à j , et soustraire un à la couleur de toutes les flèches sortantes de j .

Buan et Thomas ont montré en [14] que la mutation de carquois colorés garde la trace de l'échange des facteurs indécomposables des objets inclinés m -amassés.

Proposition 3.11. ([14], Corollary 7.2) *Soit \mathcal{C}_m une catégorie m -amassée correspondant au carquois acyclique Q . Alors, tous les carquois des algèbres inclinées m -amassées de type Q sont donnés par des mutations colorées répétées de Q .*

En outre, le sous-carquois du carquois coloré donné par les flèches de la couleur (0) est le carquois ordinaire de l'algèbre inclinée m -amassée.

3.5 Le carquois coloré associé à une $(m + 2)$ -angulation

Pour n'importe quelle $(m + 2)$ -angulation Δ de $P_{p,q,m}$, Torkildsen définit dans [29] le carquois coloré Q_Δ correspondant de la manière suivante. Les $p + q$ sommets sont des m -diagonales et il y a une flèche entre deux sommets i et j si les m -diagonales entourent un $(m + 2)$ -gone en commun. La couleur de la flèche est le nombre d'arêtes formant le segment de la frontière du $(m + 2)$ -gone qui se trouve entre i et j dans le sens horaire à partir de i .

Exemple 3.12. Les carquois suivants sont des carquois colorés associés aux 4-angulations de $P_{2,2,2}$.

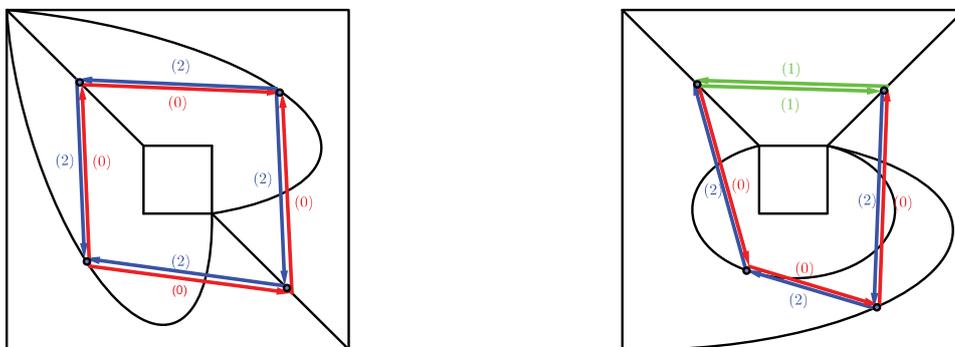


FIGURE 3.13 – Exemples de carquois 2-colorés de type $\tilde{\mathbb{A}}_{2,2}$.

On peut observer que cette définition est la même qui a été donnée par Buan et Thomas [14] pour le cas Dynkin \mathbb{A} .

Il est immédiat que tout tel carquois vérifie les conditions de [14] pour les carquois colorés.

Remarque 3.13. [29] Tout carquois coloré de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$ peut être obtenu à partir d'une $(m+2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$ et réciproquement, tout carquois coloré correspondant à une $(m+2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$, est le carquois coloré d'une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$.

3.6 Interprétation des objets inclinants m -amassés

D'abord rappelons qu'un objet M dans la catégorie m -amassée est dit *rigide* si $\text{Ext}_{\mathcal{C}_m}^i(M, M) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Une collection finie $\{X_i\}$ d'objets rigides est dite *Ext-compatible* si la somme directe $\bigoplus X_i$ est rigide. D'après Zhu [31] un objet inclinant m -amassé T est un objet rigide maximal. C'est à dire, que les facteurs directs indécomposables de T forment un ensemble Ext-compatible maximal.

La construction décrite ci-dessus a également un élément supplémentaire important. C'est la correspondance entre les objets indécomposables dans la catégorie m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$ et les objets dans la catégorie des diagonales de $P_{p,q,m}$. Cette correspondance est définie de sorte que deux objets indécomposables X et Y sont Ext-compatibles si et seulement si les m -diagonales d_X et d_Y correspondantes ne se croisent pas. Comme un ensemble maximal de diagonales qui ne se croisent pas est une $(m+2)$ -angulation et un ensemble maximal d'objets Ext-compatibles est un objet inclinant m -amassé, nous avons que les $(m+2)$ -angulations correspondent bijectivement aux objets inclinants m -amassés de \mathcal{C}_m .

Si on enlève une m -diagonale d'une $(m+2)$ -angulation, nous pouvons la remplacer par $m+1$ m -diagonales différentes pour obtenir un autre $(m+2)$ -angulation. Cela correspond au remplacement d'un facteur indécomposable T_k d'un objet inclinant m -amassé $T = \bigoplus_i T_i$ par un des compléments de $\bigoplus_{j \neq k} T_j$ différents de T_k .

Chapitre 4

Algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$

L'objectif de ce chapitre est de généraliser le résultat de Murphy [24] dans lequel il donne une description des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} en termes de carquois avec relations. Pour ce faire, il travaille avec la réalisation géométrique de la catégorie m -amassée de type \mathbb{A} faite par Baur et Marsh dans [6]. Nous ferons de même en utilisant le modèle géométrique proposé par Torkildsen dans [29] pour le type $\tilde{\mathbb{A}}$ (que nous avons présenté dans le chapitre antérieur).

L'idée de ce chapitre est de montrer que toutes les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont données par une $(m+2)$ -angulation Δ du polygone $P_{p,q,m}$ de telle façon que le carquois ordinaire de l'algèbre est le carquois Q_{Δ}^0 et les relations sont aussi déterminées par la $(m+2)$ -angulation. Cette description nous permet en plus de prouver que les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables.

4.1 Quelques résultats sur les morphismes nuls dans \mathcal{C}_m

Pour commencer ce chapitre nous allons rappeler la propriété $(m+1)$ -Calabi-Yau de la catégorie m -amassée \mathcal{C}_m et exposer quelques résultats sur les morphismes dans \mathcal{C}_m que nous pouvons déduire facilement de cette propriété et de la définition des morphismes sur \mathcal{C}_m .

Théorème 4.1. [12] *La catégorie m -amassée \mathcal{C}_m est Calabi-Yau de CY-dimension $m+1$ (brièvement $m+1$ -Calabi-Yau ou $(m+1)$ -CY), c'est à dire qu'il existe un isomorphisme*

bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(X, \tau Y[1]) \cong D \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(Y, X)$$

Lemme 4.2. *Soit H une algèbre héréditaire. Si $m > 2$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(M, N[2]) = 0$ pour tout $M, N \in \mathrm{mod}H$.*

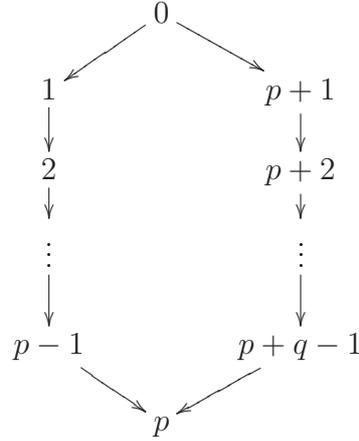
Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(M, N[2]) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b(H)}(M, F^i N[2]) \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b(H)}(M, \tau^{-i} N[im + 2]) \end{aligned}$$

Tous les termes $\mathrm{Hom}_{D^b(H)}(M, \tau^{-i} N[im + 2])$ avec $im + 2 < 0$ sont nuls parce que les objets M et $\tau^{-i} N$ se trouvent dans $(\mathrm{mod}H)[0]$. En plus, tous les termes $\mathrm{Hom}_{D^b(H)}(M, \tau^{-i} N[im + 2])$ avec $im + 2 \geq 2$ sont zéro puisque H est héréditaire. Pour conclure, comme $m > 2$, on ne peut pas avoir $im + 2 = 0$ ou $im + 2 = 1$ et alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(M, N[2]) = 0$.

□

Par la suite, nous allons fixer la numération et l'orientation suivantes du carquois $\tilde{\mathbb{A}}$:



où $p, q \geq 1$.

Rappelons que si H est une algèbre héréditaire de type $\tilde{\mathbb{A}}$, alors le carquois d'Auslander-Reiten de $D^b(H)$ contient des composantes transjectives \mathcal{C}_d , des composantes tubulaires \mathcal{T}_p^d de rang p , des composantes tubulaires \mathcal{T}_q^d de rang q et des composantes tubulaires de rang 1.

Lemme 4.3. *Soit X un objet dans la composante tubulaire \mathcal{T}_p^x et soit Y un objet dans la composante tubulaire \mathcal{T}_q^x , avec $p \neq q$. Alors, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(X, Y[1]) = 0$.*

Démonstration. En utilisant la propriété $m + 1$ -Calabi-Yau de \mathcal{C}_m on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(X, Y[1]) &\cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^{-1}Y, X) \\ &\cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(Y, \tau X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car il n'y a pas de morphismes entre tubes différents. □

4.2 Morphismes non nuls entre les facteurs d'un objet inclinant m -amassé T

Définition 4.4. *Soit \mathcal{C} une composante transjective du carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{C}_m et soit M un objet dans \mathcal{C} . Alors on définit les sous-ensembles suivants :*

$$M^r = \{N \in \mathcal{C} \text{ tels que } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(M, N) \neq 0\}$$

$$M^l = \{N \in \mathcal{C} \text{ tels que } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(N, M) \neq 0\}$$

Étant donné un objet M dans \mathcal{C} l'ensemble $M^r \setminus (\tau^{-1}M)^r$ détermine deux rayons qui commencent en M . Par convention on appellera M^{ru} le rayon qui se trouve en haut et M^{dr} le rayon en bas.

De même l'ensemble $M^l \setminus (\tau M)^l$ détermine deux rayons qui se terminent en M . Par convention on appellera M^{lu} le rayon qui se trouve en haut et M^{dl} le rayon en bas.

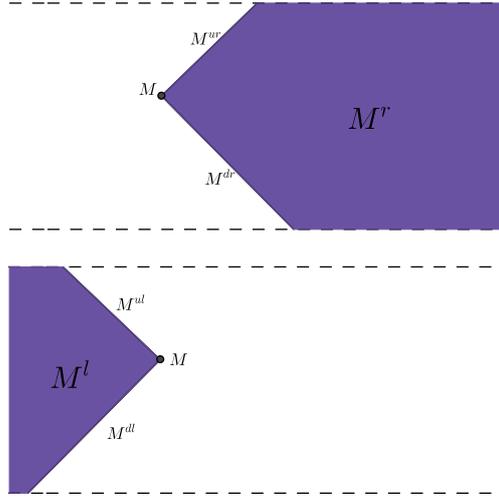


FIGURE 4.1 – Les ensembles M^{ur} , M^{dr} , M^{ul} , M^{dl} , M^r et M^l .

Convention 4.5. Soit P_p le projectif associé au sommet p . Nous convenons que P_p^{dr} est le rayon

$$P_p \rightarrow P_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0$$

et que P_p^{ur} est le rayon

$$P_p \rightarrow P_{p+q-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{p+1} \rightarrow P_0$$

Remarque 4.6. Observons que dans la composante de \mathcal{C}_m isomorphe à \mathcal{S}^0 les rayons parallèles à $P_p \rightarrow P_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0$ sont en bijection (par le biais de F^{-1}) avec les diagonales qui partagent un sommet dans le polygone intérieur.

De façon analogue, les rayons parallèles à $P_p \rightarrow P_{p+q-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{p+1} \rightarrow P_0$ sont en bijection (par le biais de F^{-1}) avec les diagonales qui partagent un sommet dans le polygone extérieur.

Dans les lemmes qui suivent nous verrons la relation existant entre deux facteurs indécomposables d'un objet inclinant m -amassé T s'ils sont dans la même composante.

Lemme 4.7. *Soit T un objet inclinant m -amassé et soient M, N deux objets dans une des composantes transjectives. Alors,*

1. *Si $M \in \text{add}(T)$, alors $\tau^{-i}M \notin \text{add}(T)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Si $M, N \in \text{add}(T)$ et il existe un morphisme non nul $M \rightarrow N$, alors $N \in M^{ur} \cup M^{dr}$.*

Démonstration. (1) Dans la catégorie inclinée m -amassée on a que $[m] = \tau$. Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}_m}(M, \tau^{-i}M[m]) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{C}_m}(M, \tau^{-(i-1)}M) \neq 0.$$

Alors $\tau^{-i}M \notin \text{add}(T)$.

(2) Comme il existe un morphisme non nul $M \rightarrow N$, nous savons que $N \in M^r$. Supposons que $N \notin M^{ur} \cup M^{dr}$. Alors $N = \tau^{-i}N'$ avec $N' \in M^{ur} \cup M^{dr}$ ou $N = \tau^{-i}M$, $i \in \mathbb{N}^*$. En vertu de 1 nous savons qu'il est impossible d'avoir $N = \tau^{-i}M$. Donc $N = \tau^{-i}N'$ avec $N' \in M^{ur} \cup M^{dr}$ et nous avons :

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}_m}(M, \tau^{-i}N'[m]) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{C}_m}(M, \tau^{-(i-1)}N') \neq 0.$$

Par conséquent $N = \tau^{-i}N' \notin \text{add}(T)$, qui est une contradiction. □

Lemme 4.8. *Soit T un objet inclinant m -amassé et $M \in \text{add}(T)$ un objet dans une composante tubulaire de rang p . Alors, M se trouve dans les $p - 1$ premiers niveaux du tube.*

Démonstration. Observons que si d_M est une diagonale de type 2 telle que $F(d_M) = M$ alors d_M est de la forme $O_{*, km+2}$, où k est le niveau de la diagonale dans le tube T_p . Si $k \geq p$, $km + 2 \geq pm + 2$. Ensuite, la diagonale s'auto-intersecte et ne peut pas faire partie d'une $(m + 2)$ -angulation. En conséquence M ne peut pas être un facteur d'un objet inclinant m -amassé. □

Lemme 4.9. *Soit T un objet inclinant m -amassé et soient M, N deux objets dans une composante tubulaire de rang p . Si $M, N \in \text{add}(T)$ et il y a un morphisme non nul $M \rightarrow N$, alors $N \in M^{ur} \cup M^{dr} \cap \{ \text{les } p - 1 \text{ premiers niveaux du tube } \}$.*

Démonstration. De même que dans le lemme 4.7 on montre que $N \in M^{ur} \cup M^{dr}$. Il nous reste à prouver que N appartient aux $p - 1$ premiers niveaux du tube, mais cela suit du lemme antérieur. □

Maintenant, nous voulons étudier les relations existant entre deux facteurs d'un objet inclinant m -amassé quand ils sont dans des composantes différentes.

Lemme 4.10. *Soit T un objet inclinant m -amassé. Supposons que $P_a \in \text{add}(T)$ et $\tau^r P_b[1] \in \text{add}(T)$. Alors, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_a, \tau^r P_b[1]) = 0$.*

Démonstration. Comme $P_a, \tau^r P_b[1] \in \text{add}(T)$ et T est un objet m -inclinant on a que

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^r P_b[1], P_a[1]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_b, \tau^{-r} P_a)$$

et alors $\tau^{-r} P_a \notin P_b^r$. Par ailleurs, si $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_a, \tau^r P_b[1])$ en utilisant la propriété $m+1$ -CY de \mathcal{C}_m on obtient $0 \neq D \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^r P_b, \tau P_a) \cong D \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_b, \tau^{1-r} P_a)$ et $\tau(\tau^{-r} P_a) \in P_b^r$, ce qui est absurde. \square

Pour continuer nous avons besoin des définitions suivantes.

Définition 4.11. *Soit \mathcal{C} une composante tubulaire du carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{C}_m et soit M un objet dans \mathcal{C} . Alors on définit les sous-ensembles suivants :*

$$M^+ = \{N \in \mathcal{C} \text{ tels que } \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(M, N) \neq 0 \text{ et } N \text{ appartient aux } p-1 \text{ premiers niveaux}\}$$

$$M^- = \{N \in \mathcal{C} \text{ tels que } \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(N, M) \neq 0 \text{ et } N \text{ appartient aux } p-1 \text{ premiers niveaux}\}$$

De manière analogue nous pouvons définir les mêmes sous-ensembles si \mathcal{C} est une composante dans la catégorie des m -diagonales $\mathcal{C}_{p,q}^m$.

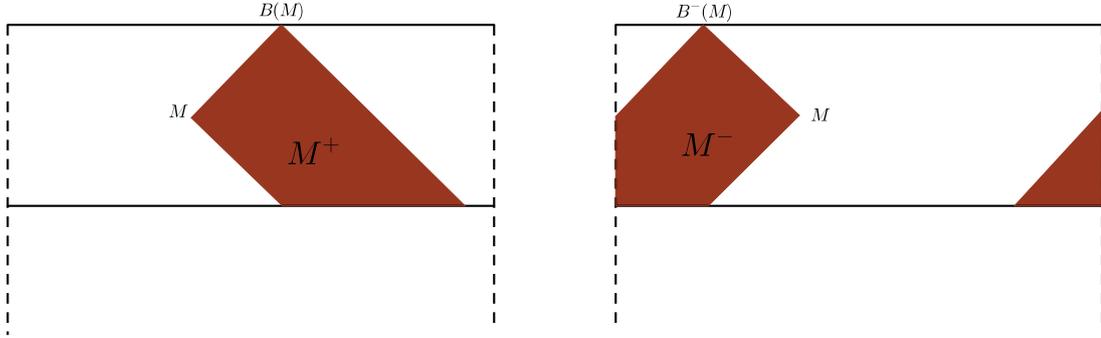


FIGURE 4.2 – Les sous-ensembles M^+ et M^-

Remarque 4.12. *Observons que la définition contient la supposition que la composante \mathcal{C} est tubulaire.*

Nous allons fixer la notation suivante pour les éléments sur la bouche des tubes de rang p (de degré 0).

$$M_0 := \begin{array}{c} 0 \\ p+1 \\ \vdots \\ p \end{array}$$

et

$$M_k := S_{p-k} \quad \text{if } 1 \leq k < p.$$

Définition 4.13. *Soit M un objet dans la bouche d'un tube de rang p . Nous définissons le cône \widehat{M} de M comme étant l'ensemble*

$$\widehat{M} = \left(\bigcup_{N \in M^{dr}} N^{dl} \right) \cap \{p-1 \text{ premiers niveaux}\}$$

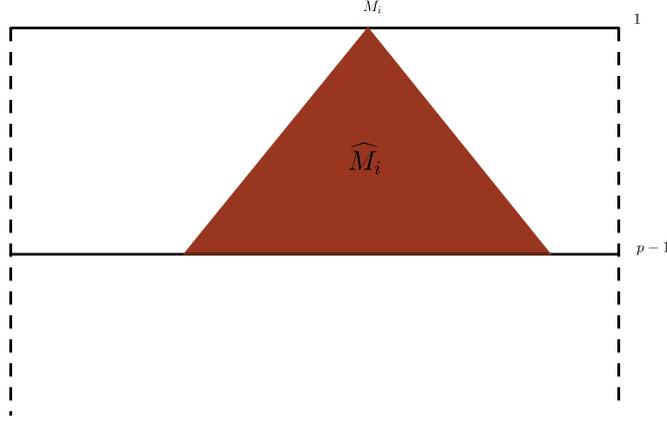


FIGURE 4.3 – Le cône de M_i

Remarque 4.14. Soit M un objet indécomposable dans le même tube que S_i .

Si $i \in [1, \dots, p-1]$,

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_i, M) = \begin{cases} 1, & \text{si } M \in \widehat{S}_i; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $i \in \{0, p, p+1, \dots, p+q-1\}$,

$$\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_i, M) = \begin{cases} 1, & \text{si } M \in \widehat{M}_0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le simple S_i apparaît seulement une fois en tant que facteur de composition de M si $M \in \widehat{S}_i$ et aucune fois en dehors du cône \widehat{S}_i . Pour l'élément quasi-simple M_0 , ce sont les simples S_0, S_p et S_j (avec $j \in [p+1, \dots, p+q-1]$) qui apparaissent une fois dans le cône \widehat{M}_0 et aucune fois dans le complément. Les autres simples n'apparaissent pas. \square

Lemme 4.15. Soit T un objet inclinant m -amassé et soient $P_b, N \in \text{add}(T)$ avec N un objet dans la composante tubulaire \mathcal{T}_p . Supposons que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_b, N) \neq 0$, alors $N \in M_*^{dl}$ où

$$* = \begin{cases} p-b, & \text{si } b \in [1, \dots, p-1]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Comme $\text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(P_b, N) \neq 0$, en vertu de la remarque 4.14, nous savons que $N \in \widehat{M}_*$ où $*$ = $\begin{cases} p - b, & \text{si } b \in [1, \dots, p - 1]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

En plus, comme $P_b, N \in \text{add}(T)$, on a que $0 = \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(N, P_b[1]) \cong D \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(P_b, \tau N)$. Alors $\tau N \in \widehat{M}_*^c$ et $N \in (\tau^{-1} \widehat{M}_*)^c = (\widehat{M}_{*-1})^c$. Par conséquent $N \in \widehat{M}_* \cap (\widehat{M}_{*-1})^c = M_*^{dl}$. \square

Lemme 4.16. *Soit T un objet inclinant m -amassé et soient $N, \tau^r P_b[1] \in \text{add}(T)$ avec N un objet dans la composante tubulaire \mathcal{T}_p . Supposons que $\text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(N, \tau^r P_b[1]) \neq 0$, alors $N \in M_{*-1+r}^{dr}$ avec $*$ comme dans le lemme antérieur (et on calcule $* - 1 + r$ modulo p).*

Démonstration. Car $0 \neq \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(N, \tau^r P_b[1]) \cong D \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(\tau^r P_b, \tau N) \cong D \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(P_b, \tau^{1-r} N)$ on sait que $\tau(\tau^{-r} N) \in \widehat{M}_*$. En outre, comme $\tau^r P_b[1], N \in \text{add}(T)$ on a que

$$0 = \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(\tau^r P_b[1], N[1]) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(P_b, \tau^{-r} N)$$

Donc $\tau^{-r} N \in (\widehat{M}_*)^c$. En conséquence $\tau^{-r} N \in (\widehat{M}_*)^c \cap \tau^{-1} \widehat{M}_* = M_{*-1}^{dr}$ et $N \in \tau^r M_{*-1}^{dr} = M_{*-1+r}^{dr}$. \square

La définition suivante sert seulement à simplifier la notation dans le lemme qui suivra.

Définition 4.17. *Soit B un objet dans un tube de rang p qui se trouve au niveau $v \in [1, \dots, p - 1]$ du tube. On définit l'indice $\alpha(B)$ de B par*

$$\alpha(B) = p - 1 - v$$

Lemme 4.18. *Soit T un objet inclinant m -amassé et soient $B, D \in \text{add}(T)$ tels que $B \in \mathcal{T}_p^i$ et $D \in \mathcal{T}_p^{i+1}$. Alors $\text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(B, D) \neq 0$ si et seulement si $D \in (\mathcal{B}^-(\tau B)[1])^{dl} \cap \{ \text{les } \alpha(B) \text{ premiers niveaux du tube} \}$ et le niveau v de B es différent de $p - 1$.*

Démonstration. Comme $D \in \mathcal{T}_p^{i+1}$ il existe $D' \in \mathcal{T}_p^i$ tel que $D = D'[1]$. En outre, puisque $B, D = D'[1] \in \text{add}(T)$ on a

$$0 = \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(D'[1], B[1]) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(D', B)$$

et

$$0 = \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(D'[1], B[2]) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(D', B[1]) \cong D \text{Hom}_{\mathfrak{e}_m}(B, \tau D')$$

En conséquence $D' \in (B^- \cup (\tau^{-1}B)^+)^c$. Si en plus nous voulons que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(B, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(B, D'[1]) \cong D \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m}(D', \tau B)$$

soit non nul, nous avons que $D' \in (\tau B)^- \setminus (B^- \cup (\tau^{-1}B)^+) = (\mathcal{B}^-(\tau B))^{dl} \cap \{ \text{les } \alpha(B) \text{ premiers niveaux du tube} \}$. \square

4.3 Des objets dans les composantes tubulaires

Par la suite, nous allons également fixer une notation pour les diagonales de type 2 (ou 3) en fonction du degré d du tube T_p^d (ou T_q^d) et du niveau k qui a la diagonale dans le tube correspondant. Donc, les p (ou q) diagonales qui sont dans le niveau k du tube T_p^d (ou T_q^d) sont paramétrées par $O_{mx-(d+1), km+2}$ avec $x \in [1, \dots, p]$ et $k \geq 1$.

Afin d'alléger la notation, étant donné que les valeurs de d et m sont fixées, on notera aussi la diagonale $O_{mx-(d+1), km+2}$ par la paire (x, k) .

Remarque 4.19. Avec la notation que nous avons fixée précédemment pour les éléments sur la bouche du tube, nous avons :

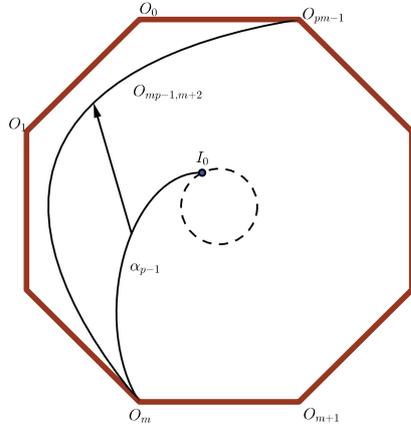
$$F(O_{mx-1, m+2}) = M_{x+1}$$

et

$$F(O_{mx-(i+1), m+2}) = F(O_{mx-1, m+2}[i]) = M_{x+1}[i],$$

(où on calcule le sous-indice toujours modulo p).

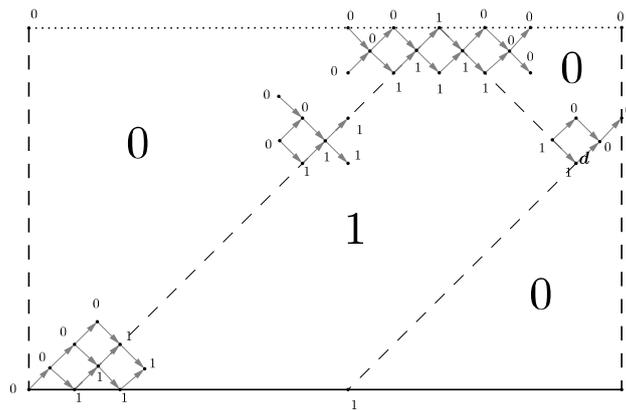
Démonstration. Étant donné qu'il y a un morphisme dans \mathcal{C}_m entre les objets P_{p-1} et S_{p-1} et que en plus P_{p-1} est en bijection (par le biais du foncteur F^{-1}) avec la diagonale α_{p-1} de type 1, on a que S_{p-1} correspond à l'unique diagonale de type 2 qui est au niveau zéro et se termine au sommet $t(\alpha_{p-1}) = O_m$. En conséquence S_{p-1} correspond à la diagonale $O_{mp-1, m+2}$.



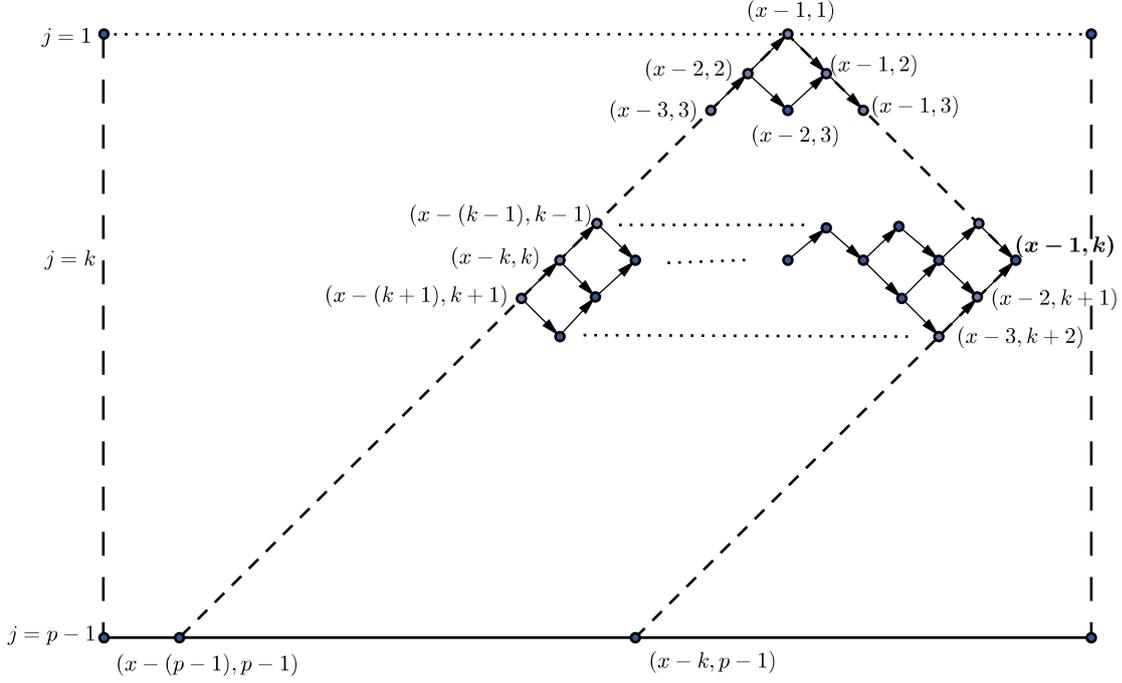
Pour le reste des objets dans les bouches des différents tubes on observe que $\tau O_{mx-1,m+2} = O_{mx-1,m+2}[m] = O_{m(x-1)-1,m+2}$, $\tau M_x = M_{x-1}$ (où x est calculé modulo p) et le foncteur F commute avec τ .

□

Exemple 4.20. Étant données $d, d' \in T_p^r$, la figure suivante nous montre $\dim(\text{Hom}_{\mathcal{C}_{p,q}^m}(d', d))$.



Alors, si $d = O_{m(x-1)-(r+1),km+2} = (x-1, k)$ la zone marquée dans la figure suivante est d^- :



et nous pouvons la paramétrer comme

$$\{(x-i, j)\} \text{ avec } \begin{cases} i \in [1, \dots, j], & \text{si } j \in [1, \dots, k]; \\ i \in [j-k+1, \dots, j], & \text{si } j \in [k+1, \dots, p-1]. \end{cases}$$

À chaque diagonale d dans une composante tubulaire de $\mathcal{C}_{p,q}^m$, on va associer deux diagonales (qui peuvent coïncider) dans la bouche du tube selon la définition suivante.

Définition 4.21. Soit d une diagonale de type 2 ou 3. On définit $B(d)$ comme étant l'unique diagonale qui se trouve à l'intersection de d^{ur} et de la bouche du tube. De même on définit $B^-(d)$ comme étant l'unique diagonale qui se trouve à l'intersection de d^{ul} et de la bouche du tube.

De la même manière on définit $B(T)$ et $B^-(T)$ si T est un objet dans une composante tubulaire de \mathcal{C}_m .

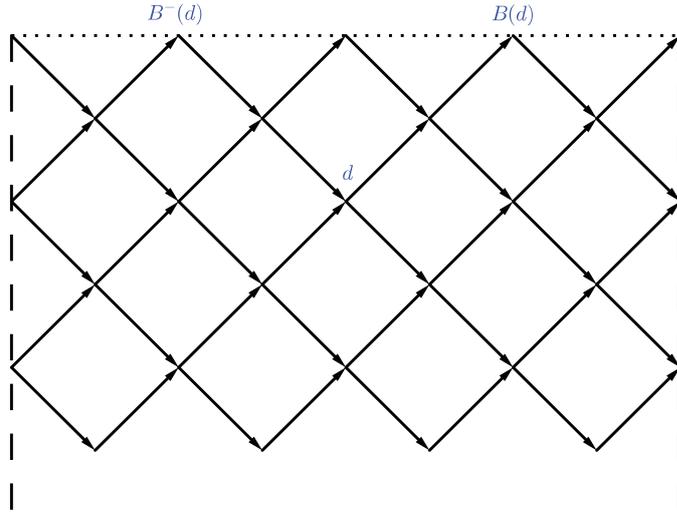
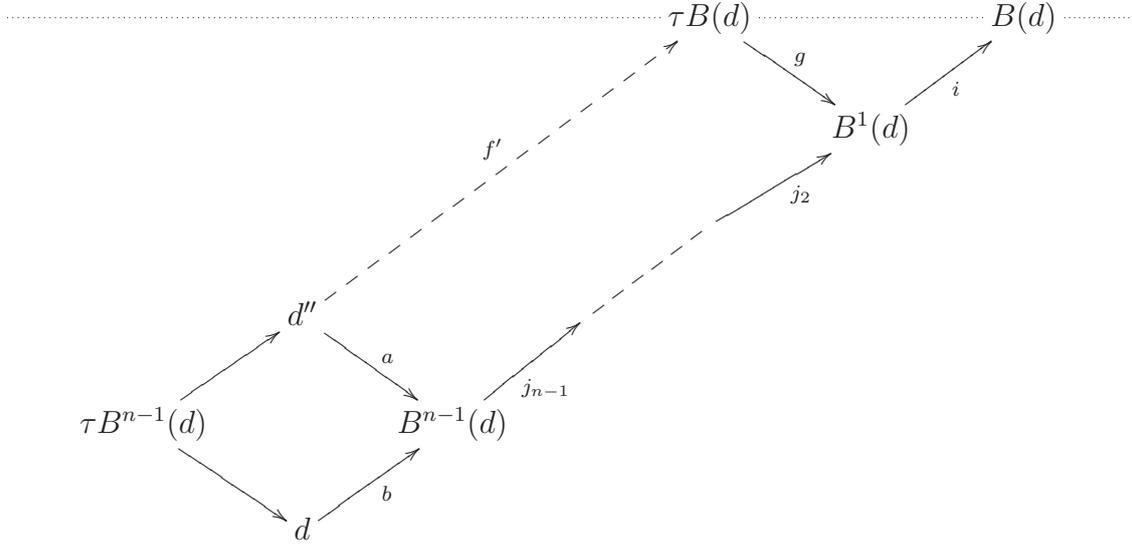


FIGURE 4.4 – La diagonale d et les objets $B(d)$ et $B^-(d)$.

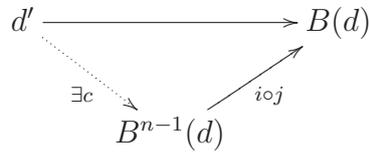
La proposition suivante (et sa duale) montrent l'importance des objets qu'on vient de définir.

Proposition 4.22. *Soit d' une diagonale de type 1 et soit d une diagonale de type 2 (ou 3). Si $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(F(d'), F(d)) = 0$, alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(F(d'), FB(d)) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que nous pouvons factoriser le morphisme $F(d') \rightarrow F(B(d))$ par le morphisme $F(d') \rightarrow F(d)$. On va le faire par récurrence sur le niveau k de la diagonale $d = O_{*,km+2}$ (ou son image $F(d)$) dans le tube T_p (ou \mathcal{T}_p). Si $k = 1$ la diagonale se trouve dans la bouche du tube et alors $B(d) = d$. Supposons que l'énoncé est vrai pour tout $k \leq n$. Soit d une diagonale dans le niveau $n+1$. Nous nommerons les éléments dans le rayon $d^{ur} \ d \xrightarrow{b} B^{n-1}(d) \xrightarrow{j_{n-1}} B^{n-2}(d) \xrightarrow{j_{n-2}} \dots \xrightarrow{j_2} B^1(d) \xrightarrow{i} B(d)$ (où l'indice s est le niveau dans le tube moins 1). Nous avons la situation suivante dans le tube :

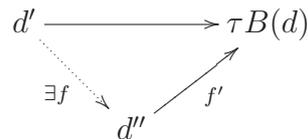


Soit $j = j_2 \circ \dots \circ j_{n-1}$. En vertu de l'hypothèse de récurrence nous avons qu'il existe $c : d' \rightarrow B^{n-1}(d)$ tel que le diagramme



commute.

En plus, puisque $0 \rightarrow \tau B^{n-1}(d) \rightarrow d'' \oplus d \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}} B^{n-1}(d)$ est une suite presque scindée, nous avons qu'il existe un morphisme $\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} : d' \rightarrow d'' \oplus d$ tel que $c = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix}$. De plus, si nous appliquons l'hypothèse de récurrence à la diagonale d'' , nous obtenons qu'il existe $f : d' \rightarrow d''$ tel que le diagramme



commute. Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} & & d' \\
& & & & \swarrow & & \downarrow c \\
0 & \longrightarrow & \tau B^{n-1}(d) & \longrightarrow & d'' \oplus d & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}} & B^{n-1}(d) \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} & & \downarrow j \\
& & & & \tau B(d) \oplus d & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & j \circ b \end{pmatrix}} & B^1(d) \\
& & & & & & \downarrow i \\
& & & & & & B(d)
\end{array}$$

et la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
d' & \xrightarrow{i \circ j \circ c} & B(d) \\
& \searrow & \nearrow \\
\begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} & & d'' \oplus d
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& & \nearrow i \circ \begin{pmatrix} g & j \circ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \circ g \circ f' & i \circ j \circ b \end{pmatrix} \\
& & \searrow
\end{array}$$

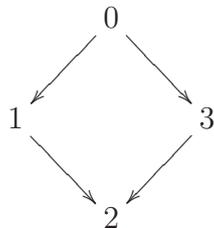
qui est en fait la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
d' & \longrightarrow & B(d) \\
& \searrow h' & \nearrow i \circ j \circ b \\
& & d
\end{array}$$

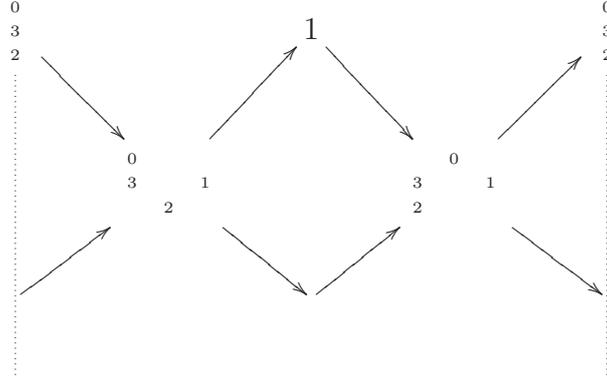
parce que $i \circ g = 0$.

□

Remarque 4.23. Observons que la réciproque n'est pas valide. Soit A l'algèbre de type $\tilde{\mathbb{A}}_{2,2}$ donnée par le carquois :



Alors un des tubes de rang 2 du carquois d'Auslander-Reiten de $\text{mod}A$ est le suivant



Il est clair que le morphisme $(2 \rightarrow 1)$ est nul mais le morphisme $(2 \rightarrow \begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \quad 1)$ ne l'est pas.

4.4 Le carquois ordinaire de l'algèbre $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(F(\Delta))$

Si $\Delta = \{d_1, \dots, d_{p+q}\}$ est une $(m+2)$ -angulation, alors nous notons $F(\Delta) := F(d_1) \oplus \dots \oplus F(d_{p+q})$ l'objet inclinant m -amassé correspondant.

L'idée maintenant est de comparer le sous-carquois de couleur zéro du carquois coloré associé à une $(m+2)$ -angulation Δ avec le carquois de l'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(F(\Delta))$.

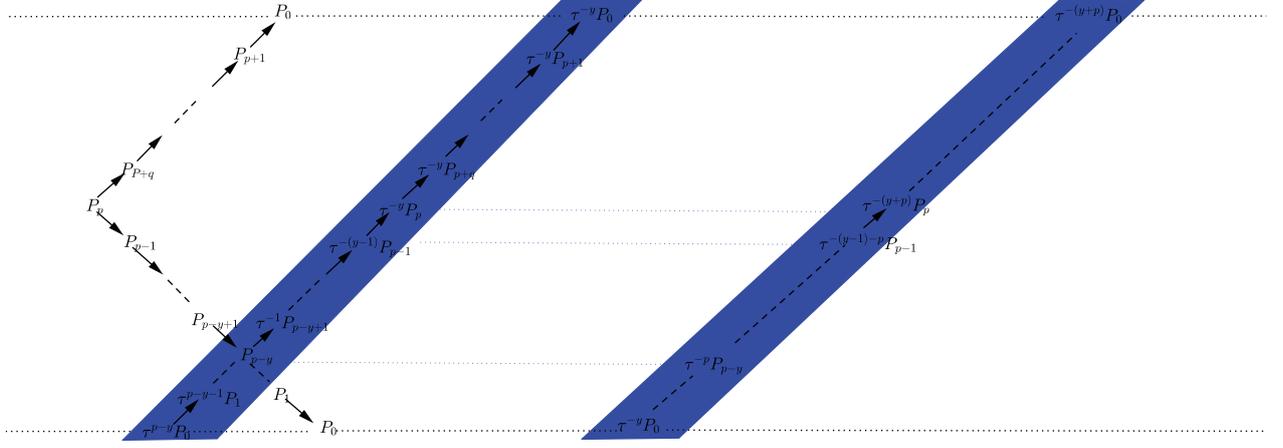
Définition 4.24. Soit x un sommet du polygone extérieur. Nous définissons $d_{x\curvearrowright}$ comme étant l'ensemble de toutes les m -diagonales de type 1 qui commencent au sommet x .

Remarque 4.25. Soit x un sommet du polygone extérieur (alors $0 \leq x \leq mp - 1$) tel que $x \equiv 0 \pmod{m}$. Donc, il existe $y \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x = m(p - y)$ et :

1. la diagonale α_{p-y} appartient à $d_{x\curvearrowright}$ et $d_{x\curvearrowright}$ appartient à la composante S^0 .
2. $F(d_{x\curvearrowright}) = \{\tau^k P_{(p-y)-j}$ si $k \equiv j \pmod{p}$, $j \in \{-y, \dots, p-y\}\} \cup \{\tau^{-y+kp} P_{p+j} : k \in \mathbb{Z}, j \in \{0, \dots, q\}\}$.

Démonstration. L'existence de y est claire. Ensuite, pour 1 on observe simplement que la diagonale α_{p-y} (si $y \in \{1, \dots, p\}$) est par définition une diagonale avec nombre de tours 0 à

partir du sommet $O_{m(p-y)=x}$ et se terminant au sommet I_0 et elle appartient à la composante S^0 . Alors $F(d_{x\curvearrowright})$ est le rayon infini suivant qui contient l'objet $F(\alpha_{p-y}) = P_{p-y}$:



Par conséquent, $F(d_{x\curvearrowright}) = \{\tau^k P_{(p-y)-j}$ si $k \equiv j \pmod{p}$, $j \in \{-y, \dots, p-y\}\} \cup \{\tau^{-y+kp} P_{p+j} : k \in \mathbb{Z}, j \in \{0, \dots, q\}\}$.

□

Remarque 4.26. En général, si $x \equiv m - i \pmod{m}$ avec $i \in \{0, \dots, m-1\}$ alors, il existe $y \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x = m(p-y) - i$ et :

1. $d_{x\curvearrowright}$ appartient à la composante S^i .
2. $F(d_{x\curvearrowright}) = \{\tau^k P_{(p-y)-j}[i]$ si $k \equiv j \pmod{p}$, $j \in \{-y, \dots, p-y\}\} \cup \{\tau^{-y+kp} P_{p+j}[i] : k \in \mathbb{Z}, j \in \{0, \dots, q\}\}$.

□

Nous noterons Q_Δ^0 le carquois associé à la $(m+2)$ -angulation Δ dans lequel nous tenons seulement compte des flèches de la couleur 0. Puis nous voulons montrer le résultat suivant :

Proposition 4.27. Soit Δ une $(m+2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$. Le carquois $Q_{\text{End}_{\mathbb{C}_m}(F(\Delta))}$ associé à l'algèbre $\text{End}_{\mathbb{C}_m}(F(\Delta))$ est égal au carquois Q_Δ^0 associé à la $(m+2)$ -angulation Δ .

Démonstration. Si d_i est une diagonale dans la $(m+2)$ -angulation de $P_{p,q,m}$, on note T_i l'objet indécomposable de \mathbb{C}_m tel que $F(d_i) = T_i$.

Si deux diagonales d_1 et d_2 partagent un sommet, il existe un chemin entre d_1 et d_2 dans Q_Δ^0 . Supposons que le chemin est orienté de d_1 vers d_2 .

Commençons en supposant que les deux diagonales se trouvent dans le même $(m+2)$ -gone et supposons que d_1 et d_2 sont toutes les deux diagonales du même type 1 (2 ou 3) qui partagent un sommet. Alors d_1 et d_2 appartiennent à la même composante S^d (T_p^d ou T_q^d). Alors, comme on a une flèche $d_1 \rightarrow d_2$ et les deux diagonales ne se croisent pas, on sait que $d_2 \in d_1^{ur} \cup d_1^{dr}$. En vertu de l'isomorphisme entre les composantes S^d et \mathcal{S}^d on a que $T_2 \in T_1^{ur} \cup T_1^{dr}$. Alors, il est clair qu'il existe un morphisme $T_1 \rightarrow T_2$ dans \mathcal{C}_m .

Maintenant voyons le cas où d_1 et d_2 se trouvent dans deux $(m+2)$ -gones différents. Comme elles partagent un sommet de $P_{p,q,m}$ il doit exister une troisième diagonale d_3 qui a en commun le même sommet. Alors, on a les flèches $d_1 \rightarrow d_3 \rightarrow d_2$ dans Q_Δ^0 . Supposons que d_3 est du même type que d_1 et d_2 . Puisqu'on a les flèches $d_1 \rightarrow d_3 \rightarrow d_2$ on connaît que $T_3 \in T_1^{ur} \cup T_1^{dr}$ et $T_2 \in T_3^{ur} \cup T_3^{dr}$. Supposons (sans perte de généralité) que $T_2 \in T_1^{ur}$. Alors, si $T_3 \in T_1^{dr}$ on a que $T_2 \notin T_3^{ur} \cup T_3^{dr}$ qui est une contradiction. En conséquence, T_2 et T_3 appartiennent à T_1^{ur} . Ainsi T_1, T_2 et T_3 sont dans le même rayon de la composante \mathcal{S}^d et il est clair qu'il existe des morphismes $T_1 \rightarrow T_3 \rightarrow T_2$ dans \mathcal{C}_m .

Continuons avec le cas où d_1 est une diagonale de type 1 et d_2 est une diagonale de type 2 (ou 3) et qu'elles font partie du même $(m+2)$ -gone. Pour simplifier la notation nous supposons que toutes les diagonales sont en degré 0. Alors, on peut écrire $d_1 = d_{xz}$ où $x = s(d_1)$, $z = t(d_1)$ et $x \equiv 0 \pmod{m}$ et $d_2 = O_{my-1, km+2}$ avec $y \in [1, \dots, p]$ et $k \in [1, \dots, p-1]$. Puisqu'on a une flèche $d_1 \rightarrow d_2$, on sait que d_1 précède d_2 et que $t(d_2) = x$. Donc, $t(d_2) = my - 1 + km + 1 \equiv x \pmod{mp}$ et alors $m(k+y) \equiv x \pmod{mp}$. De plus, $x \equiv 0 \pmod{m}$ (car $d_1 \in S^0$), donc $x = my'$ avec $y' \in [0, \dots, p-1]$. Des deux dernières équations on obtient $m(k+y-y') \equiv 0 \pmod{mp}$ et alors $k+y \equiv y' \pmod{p}$. En conséquence $B(d_2) = O_{m(y+k-1)-1, m+2} = O_{m(y'-1)-1, m+2}$ et

$$F(B(d_2)) = M_{y'} = \begin{cases} 0 \\ p+1 \\ \vdots \\ p \\ S_{p-y'}, & \text{si } y' \equiv 0 \pmod{p}; \\ S_{p-y'}, & \text{si } y' \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

On veut montrer qu'il y a un morphisme non nul $T_1 \rightarrow T_2$ in \mathcal{C}_m . En vertu de la proposition 4.22 il suffit de montrer qu'il existe un morphisme non nul $T_1 \rightarrow F(B(d_2))$.

$T_1 \in F(d_{x \curvearrowright})$ où

$$F(d_{x \curvearrowright}) = \{\tau^k P_{p-y'-i}, \text{ si } k \equiv i \pmod{p}\} \cup \{\tau^{-y'+kp} P_{p+j} : k \in \mathbb{Z}, j \in [0, \dots, q]\}$$

Soit $s := p - y' - i$ avec $k \equiv i \pmod{p}$. Ensuite, nous avons les possibilités suivantes :

– Si $y' \equiv 0 \pmod{p}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^k P_s, M_0) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, \tau^{-k} M_0) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, M_k) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, S_{p-k}) \neq 0 \end{aligned}$$

car $p - k \equiv p - i = s$.

si $j \in [0, \dots, q]$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^{kp} P_{p+j}, M_0) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+j}, \tau^{-kp} M_0) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+j}, M_0) \neq 0 \end{aligned}$$

parce qu'on a un monomorphisme $P_{p+j} \hookrightarrow M_0$.

– Si $y' \not\equiv 0 \pmod{p}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^k P_s, M_{y'}) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, \tau^{-k} M_{y'}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, M_{k+y'}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_s, S_{p-k-y'}) \neq 0 \end{aligned}$$

car $p - y' - k \equiv p - y' - i = s$.

Si $j \in [0, \dots, q]$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^{-y'+kp} P_{p+j}, M_{y'}) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+j}, \tau^{y'-kp} M_{y'}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+j}, M_{y'-y'+kp}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+j}, M_0) \neq 0 \end{aligned}$$

puisqu'on a un monomorphisme $P_{p+j} \hookrightarrow M_0$.

Par conséquent, dans tous les cas vus ci-haut on a un morphisme $T_1 \rightarrow T_2$ dans \mathcal{C}_m .

Maintenant voyons le cas où d_1 et d_2 se trouvent dans des $(m+2)$ -gones différents. Comme avant, étant donné qu'elles partagent un sommet de $P_{p,q,m}$ il doit exister une troisième diagonale d_3 qui a en commun le même sommet. Alors, on a les flèches $d_1 \rightarrow d_3 \rightarrow d_2$ dans Q_Δ^0 .

D'abord, supposons que d_3 est une diagonale du même type que d_2 et que les deux diagonales partagent un sommet. Alors, si $x := t(d_2)$, nous avons que $x = t(d_3)$ aussi car si par contre $x = s(d_3)$ il est impossible pour la diagonale d_3 d'être dans le milieu de d_1 et d_2 . Puis d_2 et d_3 partagent le sommet final et en conséquence $d_2 \in d_3^{ur}$. Supposons que $F(d_1) = P_a$ (si ce n'est pas le cas on applique la composition τ^i nécessaire). Alors, comme il existe un morphisme non nul $T_1 = P_a \rightarrow T_3$, en vertu du lemme 4.15 on a que $T_3 \in M_*^{dl}$, où $*$ = 0 si $a \in [p, p+1, \dots, p+q-1, 0]$ ou $*$ = $p-a$ si $a \in [1, \dots, p-1]$. Comme $d_2 \in d_3^{ur}$ on a que T_2, T_3 tous les deux appartiennent au même rayon M_*^{dl} .

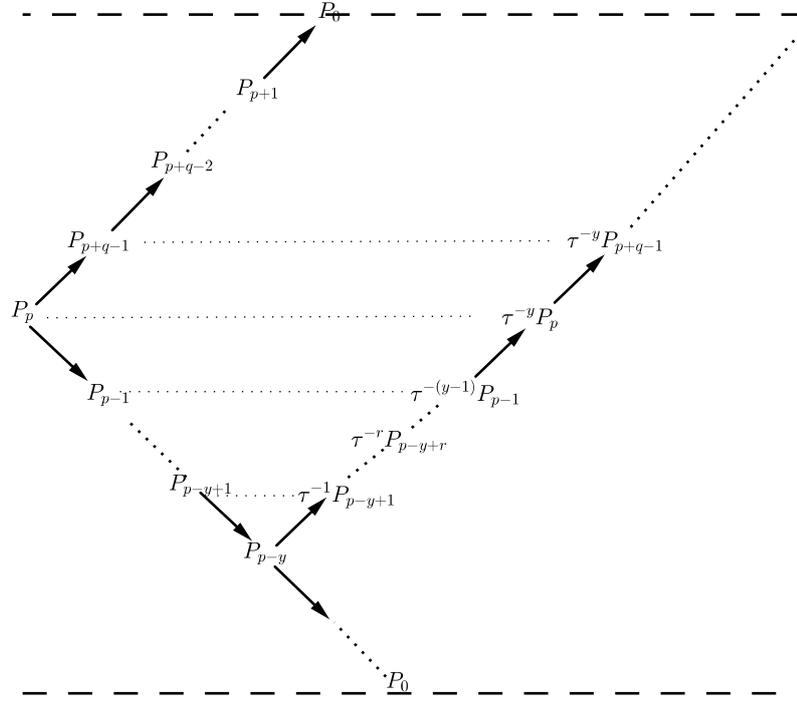
Si $a \in [1, \dots, p-1]$ le rayon M_*^{dl} est

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & p+1 & & p+1 & & p+1 \\ & & a & & a & & a \\ \cdots \rightarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & p+q-1 & & p+q-1 & & p+q-1 \\ & & p & & p & & p \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & p+1 & & p+1 & & p+1 \\ & & a & & a & & a \\ \cdots \rightarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & p+q-1 & & p+q-1 & & p+q-1 \\ & & p & & p & & p \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & p+1 & & p+1 & & p+1 \\ & & a & & a & & a \\ \cdots \rightarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & p+q-1 & & p+q-1 & & p+q-1 \\ & & p & & p & & p \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & a & & a & & a \\ & & a+1 & & a+1 & & a+1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & p-1 & & p-1 & & p-1 \end{array} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & a & & a & & a \\ & & a+1 & & a+1 & & a+1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & p-1 & & p-1 & & p-1 \end{array} \rightarrow a$$

d'où on déduit facilement que la composition $P_a \rightarrow T_3 \rightarrow T_2$ est non nulle. Comme, en vertu de la remarque 4.14 $\dim(\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_a, T_2)) = 1$ on a que le morphisme $P_a \rightarrow T_2$ se factorise par T_3 . Le calcul est totalement analogue si $a \in [p, p+1, \dots, p+q-1, 0]$.

Finalement, supposons que d_3 est une diagonale du même type que d_1 (type 1). On veut montrer que le morphisme $T_1 \rightarrow T_2$ se factorise par T_3 . Comme d_1 est une diagonale de type 1 on peut supposer que $T_1 = P$ avec P projectif dans $\text{mod } H$. On sait qu'il existe un morphisme $d_1 \rightarrow d_3$ alors $d_3 \in d_1^{ur}$ et de façon équivalente $T_3 \in T_1^{ur}$. Si $T_1 = P_{p+z}$ avec $z \in [0, \dots, q-1]$ on a que T_3 doit être $P_{p+z'}$ avec $0 < z' < z$. Par contre, si $T_1 = P_{p-y}$ avec $y \in [1, \dots, p]$ on a que $T_3 = \tau^{-r}P_{p-y+r}$ avec $r \in [1, \dots, y-1]$ ou $T_3 = \tau^{-y}P_{p+x}$ avec $x \in [0, \dots, q-1]$. Voir figure ci-dessous.

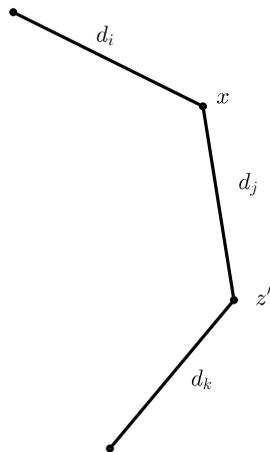


Dans tous les cas le morphisme $T_1 \rightarrow T_3$ est l'inclusion de T_1 dans T_3 , alors si f est le morphisme non nul $T_3 \rightarrow T_2$, la composition $T_1 \rightarrow T_3 \rightarrow T_2$ est la restriction $f|_{T_1}$ qui clairement est non nulle. Comme, en vertu de la remarque 4.14, $\dim \text{Hom}_{\text{em}}(T_1, T_2) = 1$ on a que $f|_{T_1}$ est le morphisme $T_1 \rightarrow T_2$ comme on voulait montrer.

□

4.5 Quelques résultats sur les $(m + 2)$ -angulations

Lemme 4.28. *Soient d_i , d_j et d_k des m -diagonales qui font partie d'un même $(m + 2)$ -gone dans la $(m + 2)$ -angulation Δ . Supposons qu'elles sont disposées de telle sorte que d_i et d_j partagent un sommet de $P_{p,q,m}$, d_j et d_k partagent un autre sommet de $P_{p,q,m}$ mais d_i , d_j et d_k n'ont pas de sommets en commun (Voir figure au-dessous). Alors d_i , d_j et d_k ne peuvent pas être toutes les trois des m -diagonales de type 1.*



Démonstration. On suppose que $d_i \cap d_j = \{x\}$ avec x un sommet du mp -polygone extérieur. Comme les trois diagonales délimitent un $(m + 2)$ -gone, les diagonales d_j et d_k partagent un sommet mais il ne peut pas être x . Puis, $d_j \cap d_k = \{z' = t(d_j)\}$ avec z' dans le mq -polygone intérieur. Alors $t(d_k) = z'$ et $s(d_k) = x'$ avec $x' \neq x$. Nous avons deux possibilités pour la diagonale d_k dépendant de la direction qu'elle prend.

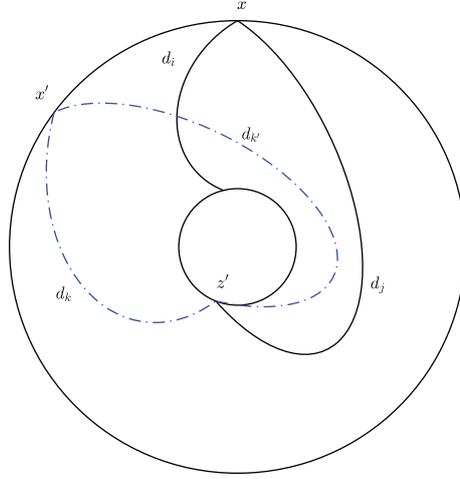


FIGURE 4.5 – Les trois diagonales ne peuvent pas être de type 1.

Si d_k est une diagonale entre x' et z' dans le sens horaire, il est clair que $d_k \cap d_i \neq \emptyset$, ce qui est impossible. Si par contre d_k est une diagonale entre x' et z' dans le sens anti-horaire nous aurons une flèche $d_k \rightarrow d_j$ au lieu d'une flèche $d_j \rightarrow d_k$ dans Q_Δ^0 . En conséquence, il est impossible que les trois diagonales soient de type 1. □

Lemme 4.29. *Soient d et d' des m -diagonales de type 2 (ou 3). Si d appartient à la composante \mathcal{T}_p^i (ou \mathcal{T}_q^i) de la catégorie des m -diagonales $\mathcal{C}_{p,q}^m$ et d' est telle que la source $s(d')$ de d' est le même sommet que le but $t(d)$ de d , alors d' appartient à la composante \mathcal{T}_p^{i-1} .*

Démonstration. Comme $d \in \mathcal{T}_p^i$, $d = O_{mx-(i+1), km+2}$ avec $x \in \{1, \dots, p\}$ et $k \geq 1$. Alors, $s(d) = mx - (i+1)$ et $t(d) = mx - (i+1) + km + 1 = m(x+k) - i$. Si $s(d') = t(d)$ on a que $d' = O_{m(x+k)-i, k'm+2}$ avec $k' \geq 1$. Ensuite $d' \in \mathcal{T}_p^{i-1}$ comme nous voulions. □

Une conséquence facile de ce lemme est la remarque suivante.

Remarque 4.30. *Soient d et d' deux m -diagonales de type 2 (ou type 3) qui appartiennent à la même composante du carquois d'Aulander-Reiten de la catégorie des m -diagonales $\mathcal{C}_{p,q}^m$. Alors, le but de la diagonale d ne peut pas être la source de la diagonale d' et vice-versa.*

4.6 Les relations du carquois associé à une $(m + 2)$ -angulation

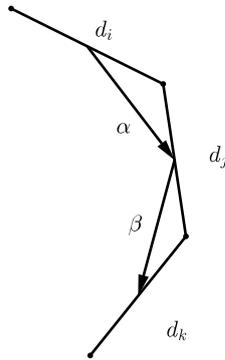
À la lumière des résultats précédents, nous savons comment trouver les carquois de toutes les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$. Notre problème est maintenant de trouver les relations dans le carquois associé.

Nous allons définir un idéal I_Δ associé à une $(m + 2)$ -angulation Δ de $P_{p,q,m}$ comme suit : (Notez que c'est la même définition donnée par Murphy dans le cas \mathbb{A}).

Définition 4.31. Soient i, j, k les sommets dans $(Q_\Delta^0)_0$ associés aux diagonales d_i, d_j et d_k respectivement. Étant données deux flèches consécutives $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ dans Q_Δ^0 , on définit $\beta\alpha = 0$ si les diagonales d_i, d_j et d_k appartiennent au même $(m + 2)$ -gone de la $(m + 2)$ -angulation Δ . Notons I_Δ l'idéal dans l'algèbre de chemins kQ_Δ^0 qui est engendré par ces relations.

Proposition 4.32. L'algèbre kQ_Δ^0/I_Δ est isomorphe à l'algèbre inclinée m -amassée $\text{End}_{e_m}(F(\Delta))$.

Démonstration. En premier lieu nous montrerons que toutes les relations dans l'idéal I_Δ sont aussi des relations dans $\text{End}_{e_m}(F(\Delta))$. Supposons que d_i, d_j et d_k sont des m -diagonales qui font partie du même $(m + 2)$ -gone et supposons en plus qu'elles sont disposées de telle sorte que d_i et d_j partagent un sommet de $P_{p,q,m}$, d_j et d_k partagent un autre sommet de $P_{p,q,m}$ pendant que d_i, d_j et d_k n'ont pas un sommet en commun.

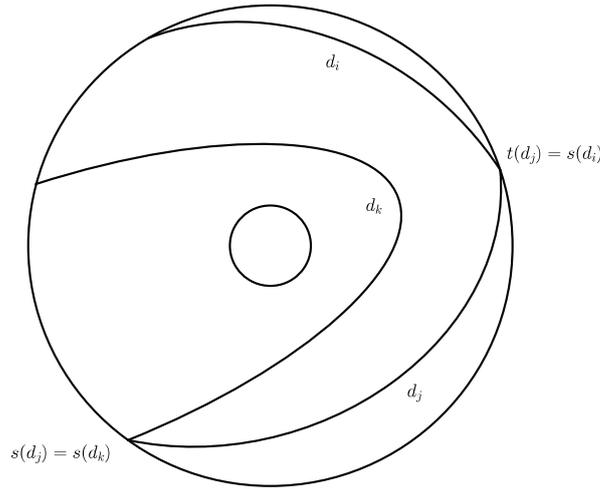


En vertu de la définition de Q_{Δ}^0 nous avons des flèches $d_i \xrightarrow{\alpha} d_j$ et $d_j \xrightarrow{\beta} d_k$ dans Q_{Δ}^0 qui sont en bijection avec les flèches $T_i \rightarrow T_j$ et $T_j \rightarrow T_k$ entre les facteurs indécomposables de $T := F(\Delta)$. Nous voulons montrer que la composition $T_i \rightarrow T_j \rightarrow T_k$ est zéro dans \mathcal{C}_m .

Nous allons séparer la preuve en plusieurs cas, en fonction du type des diagonales. D'abord, on observe qu'en vertu du lemme 4.28 les trois diagonales d_i, d_j et d_k ne peuvent pas être simultanément de type 1. Ensuite, nous avons les cas suivants :

(a) Les trois diagonales sont de type 2 (ou 3) : Voyons les sous-cas possibles.

1. Les sources de d_j et d_k sont la même : Puisque d_i, d_j et d_k font partie du même $(m+2)$ -gone, il est impossible d'avoir $d_i \cap d_j = s(d_j) = s(d_k)$. Alors $d_i \cap d_j = t(d_j)$.



Comme les sources de d_j et d_k coïncident, les deux diagonales ont degré égal (supposons r), et comme en plus il existe un morphisme non nul $d_j \rightarrow d_k$ on a que $d_k \in d_j^{dr}$. Alors, en vertu du lemme 4.29, la diagonale d_i a degré $r - 1$. En appliquant le lemme 4.18 au morphisme induit $T_i \rightarrow T_j$ nous obtenons que $T_j \in (\mathcal{B}^-(\tau T_i)[1])^{dl} \cap \{ \text{les } \alpha(T_i) \text{ premiers niveaux du tube} \}$. Si $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) \neq 0$, en vertu du même lemme, nous aurions que T_k appartient au même ensemble que T_j . Mais, si c'était le cas, on ne peut pas avoir $T_k \in T_j^{dr}$ comme on a vu ci-haut. En conséquence la composition $T_i \rightarrow T_j \rightarrow T_k$ est zéro.

2. Le but de d_k est égal à la source de d_j : Comme il y a un morphisme non nul $d_i \rightarrow d_j$

on a que $t(d_j) = t(d_i)$ ou $s(d_i) = t(d_j)$. Dans le premier cas il est clair que les trois diagonales ne peuvent pas délimiter un même $(m+2)$ -gone. Alors $s(d_i) = t(d_j)$. Supposons que $d_k \in T_p^i$, donc comme $t(d_k) = s(d_j)$ le lemme 4.29 implique que $d_j \in T_p^{i-1}$. Le même lemme appliqué aux diagonales d_i et d_j nous donne que $d_i \in T_p^{i-2}$. On veut montrer que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = 0$. Si $m > 2$ soit $T'_k \in \mathcal{T}_p^{i-2}$ tel que $T_k := T'_k[2]$, alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T'_k[2]) = 0$ en vertu du lemme 4.2. Si par contre $m = 2$ les deux diagonales d_i et d_k appartiennent au même tube, disons T^0 et d_j appartient au tube T^1 . Donc, l'unique manière d'avoir un morphisme non nul $d_i \rightarrow d_k$ est que les deux diagonales partagent un sommet. C'est à dire que $s(d_i) = s(d_k)$ ou $t(d_i) = t(d_k)$. Supposons que $s(d_i) = s(d_k)$, alors comme $t(d_j) = s(d_i)$ nous avons que $t(d_j) = s(d_k)$. Rappelons que nous sommes dans le cas où $s(d_j) = t(d_k)$, par conséquent les diagonales d_j et d_k partagent les mêmes extrémités et alors il n'est pas possible d'avoir une diagonale d_i du même type de façon que les trois diagonales délimitent un même $(m+2)$ -gone. Si $t(d_i) = t(d_k)$ un calcul analogue nous donne que les diagonales d_j et d_i partagent les mêmes extrémités et alors il n'est pas possible d'avoir une diagonale d_k du même type de façon que les trois diagonales délimitent un même $(m+2)$ -gone. Par conséquent il est impossible d'avoir un morphisme non nul $T_i \rightarrow T_k$.

3. Les buts de d_j et d_k sont égaux : Voyons les possibilités pour d_i . Si $t(d_i) = s(d_j)$ les trois diagonales ne peuvent pas délimiter le même $(m+2)$ -gone. Alors $s(d_i) = s(d_j)$ et par conséquent $T_j \in T_i^{dr}$. Puisque les trois diagonales se trouvent dans le même tube, en vertu du lemme 4.9, pour montrer que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = 0$ il suffit de voir que $T_k \notin T_i^{ur} \cup T_i^{dr}$. Cela se déduit directement de ce que $T_j \in T_i^{dr}$ et comme $t(d_j) = t(d_k)$, $T_k \in T_j^{ur}$.

(b) Il y a une diagonale de chaque type : Comme $d_i \cap d_j$ est un sommet dans le polygone intérieur (extérieur) et $d_j \cap d_k$ est un sommet dans le polygone extérieur (intérieur), la diagonale d_j doit être la diagonale de type 1. Supposons que $d_j \in S^z$ et que $d_i \in T_p^x$ est la diagonale de type 2 et $d_k \in T_q^y$ est la diagonale de type 3. Puisqu'il existe des flèches $d_i \rightarrow d_j \rightarrow d_k$ on a que $z = y = x + 1$. Alors, si on prend $T_{k'} \in \mathcal{T}_p^x$ tel que $T_k = T_{k'}[1]$, en vertu du lemme 4.3 on a que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_{k'}[1]) = 0$.

(c) Deux diagonales sont de type 1 et l'autre est de type 2 (ou 3) : Étudions les sous-cas pos-

sibles.

1. d_i et d_j sont de type 1 et d_k est de type 2 (ou 3) : Soit $d_i \cap d_j = \{x\}$. Supposons que x appartient au polygone extérieur. Puisqu'il y a un morphisme $d_j \rightarrow d_k$ avec d_k une diagonale de type 2, nous avons $d_j \cap d_k = \{y\}$ avec y aussi dans le polygone extérieur. Comme d_j est une diagonale de type 1, elle a un seul sommet dans le polygone extérieur, et alors $x = y$ et d_k commence ou se termine au sommet x . En conséquence $d_i \cap d_j \cap d_k = \{x\}$ et il est impossible pour les trois diagonales de délimiter le même $(m+2)$ -gone. Puis nous sommes dans le cas où x appartient au polygone intérieur, les deux diagonales de type 1 se terminent au sommet x et les diagonales d_j et d_k partagent le sommet y du polygone extérieur. Ensuite $d_j \in d_i^{dr}$ c'est à dire $T_j \in T_i^{dr}$. Sans perte de généralité, comme T_i appartient à la composante transjective \mathcal{S}^0 nous pouvons supposer que $T_i = P[0]$ ($= P$ par abus de notation) avec P un projectif dans $\text{mod } H$. (Si T_i n'est pas projectif on peut appliquer la composition τ^s jusqu'à trouver un projectif). Donc, $T_i \in P_p^{ur} \cup P_p^{dr}$ où P_p est le projectif associé au sommet p du carquois.

Si $T_i \in P_p^{dr}$ alors $T_i = P_a$ avec $a \in [1, \dots, p]$ et $T_j = P_b$ avec $0 \leq b < a < p$. Comme il existe un morphisme non nul $T_j \rightarrow T_k$, le lemme 4.15 implique que $T_k \in S_b^{dl}$. Si la composition $T_i \rightarrow T_k$ est non nulle, le même lemme appliqué à T_i nous donne que $T_k \in S_a^{dl}$. Clairement $S_a^{dl} \neq S_b^{dl}$ et par conséquent $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = 0$.

Si par contre $T_i \in P_p^{ur} \setminus \{P_p\}$, $T_i = P_{p+z}$ ou $T_i = \tau^{-z}P_a$ (avec $z \in [1, \dots, q-1]$ et $a \in [0, \dots, p]$). Comme $T_j \in T_i^{dr}$ on a que $T_j = \tau^{-r}P_{p+z+r}$ avec $r > 0$ et $1 \leq z \leq q-1$ dans le premier cas ou $T_j = \tau^{-z}P_a$ dans le deuxième. Si la composition $T_i \rightarrow T_j \rightarrow T_k$ n'est pas nulle, en vertu du lemme 4.15, nous avons que $T_k \in M_0^{dl}$. Voyons le premier cas. Comme $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_j, T_k) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^{-r}P_{p+z+r}, T_k) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P_{p+z+r}, \tau^r T_k)$ le même lemme nous donne que $T_k \in \tau^{-r}M_0^{dl} = M_r^{dl}$. Alors, $M_r^{dl} = M_0^{dl}$ et par conséquent $r \equiv 0 \pmod{p}$ et de façon équivalente $r = kp$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme d_i est la diagonale en bijection avec le projectif P_{p+z} et d_j la diagonale en bijection avec $\tau^{-r}P_{p+z+r}$ nous avons que d_i est la diagonale entre les sommets O_0 et I_x avec nombre de tours zéro et $d_j = \tau^{-r}d$ avec d la diagonale entre les sommets O_0 et I_y avec nombre de tours zéro et $y > x$. Alors $d_j = \tau^{-r}d = d[-rm] = d[-kpm]$ et en conséquence d_j est une diagonale entre les sommets O_0 et I_y et il n'est pas possible d'avoir une diagonale d_k de type 2 entre les deux. Le calcul pour le deuxième cas est identique.

2. d_i est de type 2 (ou 3) et d_k et d_j sont de type 1 : C'est le cas dual de 1.

3. d_i et d_k sont de type 1 et d_j est de type 2 (ou 3) : Supposons que $d_i \cap d_j = \{x\}$ et $d_j \cap d_k = \{y\}$ avec x, y dans le polygone extérieur de telle manière que $s(d_j) = y$ et $t(d_j) = x$. En particulier $x \neq y$ et $x = y + km + 1 \pmod{mp}$ avec $k \geq 1$. Supposons $d_i \in S^r$, alors $x \equiv m - r \pmod{m}$ et ensuite $y \equiv x - 1 \equiv m - (r + 1) \pmod{m}$. Puis $d_k \in S^{r+1}$ et $d_j \in T_p^r$. Comme $d_i \in S^r$ et $d_k \in S^{r+1}$ il existe $s, s' \in \mathbb{Z}$ et P, P' objets projectifs (dans $\text{mod}H$) tels que $T_i = \tau^s P[r]$ et $T_k = \tau^{s'} P'[r + 1]$. Donc :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^s P[r], \tau^{s'} P'[r + 1]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(\tau^s P, \tau^{s'} P'[1]) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(P, \tau^{s-s'} P'[1]) = 0 \end{aligned}$$

en vertu du lemme 4.10.

(d) Deux des diagonales sont de type 2 (ou 3) et l'autre est de type 1 : D'abord voyons que d_j ne peut pas être la diagonale de type 1. Si c'était le cas, comme il y a des flèches $d_i \rightarrow d_j$ et $d_j \rightarrow d_k$ les trois diagonales doivent partager un sommet du polygone extérieur (intérieur si d_i, d_k sont de type 3), mais de cette façon il est impossible que les trois diagonales délimitent le même $(m + 2)$ -gone. Alors, supposons que d_i et d_j sont de type 2 et d_k est de type 1. Si $s(d_i) = s(d_j)$ les diagonales possibles d_k de type 1 soit se croisent avec $d_i \cup d_j$ soit ne délimitent pas le même $(m + 2)$ -gone. (Voir figure 4.6).

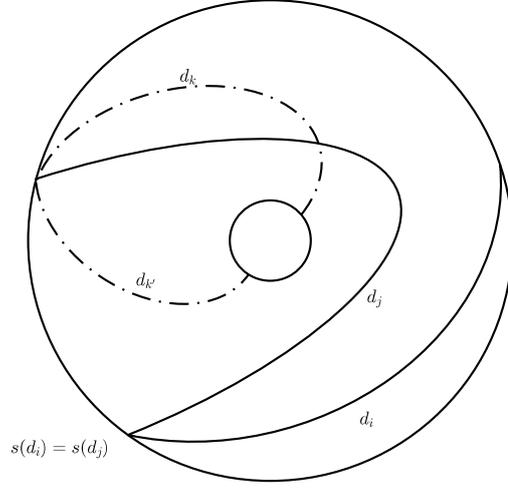


FIGURE 4.6 – Les possibles d_k si $s(d_i) = s(d_j)$.

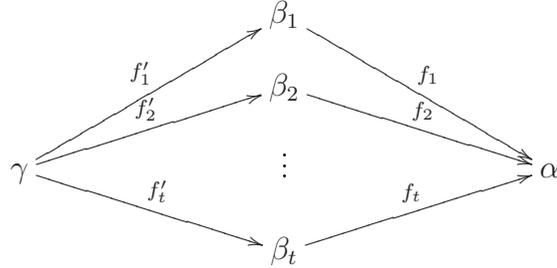
Ensuite, $t(d_j) = s(d_i)$ et si $d_j \in T^r$ alors $d_i \in T^{r-1}$ en vertu du lemme 4.29. En outre $d_k \in S^{r+1}$. Si $m > 2$ soit $d'_k \in S^{r-1}$ telle que $d_k = d'_k[2]$. En conséquence, le lemme 4.2 implique que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T'_k[2]) = 0$. Si $m = 2$ nous pouvons supposer que $d_i \in T^0$, $d_j \in T^1$ et $d_k \in S^0$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{D^b(H)}(T_i, F^j T_k) \\ &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{D^b(H)}(T_i, \tau^{-j} T_k[2j]) \end{aligned}$$

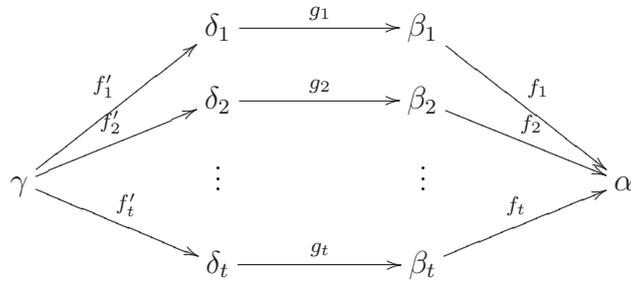
Tous les termes $\text{Hom}_{D^b(H)}(T_i, \tau^{-j} T_k[2j])$ avec $j < 0$ sont nuls parce que les objets T_i et $\tau^{-j} T_k$ se trouvent dans $(\text{mod } H)[0]$ et il n'y a pas de morphismes vers l'arrière dans la catégorie dérivée $D^b(\text{mod } H)$. Si $2j \geq 2$ tous les termes $\text{Hom}_{D^b(H)}(T_i, \tau^{-j} T_k[2j])$ sont nuls parce que H est héréditaire. Pour conclure, quand $j = 0$ le terme $\text{Hom}_{D^b(H)}(T_i, T_k) = 0$ car il n'y a pas de morphismes d'un objet dans le tube \mathcal{T}^0 vers un objet dans la composante S^0 . En conséquence, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(T_i, T_k) = 0$.

Jusqu'ici nous avons vu que toutes les relations dans l'idéal I_Δ sont aussi relations dans $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(F(\Delta))$. Pour finir, il nous reste à montrer qu'il n'y a pas des autres relations possibles

dans $\text{End}_{\text{cm}}(F(\Delta))$. C'est à dire que il n'y a pas de relations de longueur (minimale) plus grand ou égal à trois ni de relations des types commutatives



où une combinaison linéaire des compositions $f_i f'_i$ est 0 et $t \geq 2$ ou



où une combinaison linéaire des compositions $f_i g_i f'_i$ est 0, $t \geq 2$ et les chemins g_i peuvent avoir longueur arbitraire.

Commençons par voir qu'il n'y a pas de relations de longueur (minimale) plus grande ou égale à trois. Soit $(A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D)$, où $\gamma\beta\alpha = 0$, une relation de longueur $r \geq 3$. Les flèches $(A \rightarrow B)$ et $(C \rightarrow D)$ sont de longueur 1 et le chemin $(B \rightsquigarrow C)$ peut avoir longueur arbitraire. De plus, supposons que les compositions $(A \rightarrow B \rightsquigarrow C)$ et $(B \rightsquigarrow C \rightarrow D)$ ne sont pas nulles. Soit d_* la m -diagonale telle que $F(d_*) = *$ avec $* \in \{A, B, C, D\}$. Nous pouvons séparer la preuve en plusieurs cas.

(a') Les 4 diagonales sont de type 1. Selon le lemme 4.10 il n'y a pas de morphismes non nuls entre les composantes S^d et S^{d+1} . Par conséquent les quatre diagonales doivent être dans la même composante S^d et alors dans le rayon d_A^{ur} ou le rayon d_A^{dr} . Ensuite, la composition $(A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D)$ ne peut pas être nulle, ce qui est absurde.

(b') Trois diagonales sont de type 1 et une est de type 2 (ou 3). D'après la discussion dans le cas précédent, nous avons que les trois diagonales de type 1 doivent appartenir à la même

composante S^d . Ensuite, nous pouvons supposer que d_A, d_B et d_C sont de type 1 en S^0 et d_D est de type 2 dans un tube. Comme le morphisme $(C \rightarrow D)$ n'est pas nul, nous savons que d_D partage avec d_C le sommet dans le polygone extérieur. En conséquence, $d_D \in T^0$ et tous les objets sont dans le même degré 0. Ensuite, nous pouvons y penser comme étant dans le cas $m = 1$ et puisque les algèbres inclinées 1-amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables, nous obtenons qu'il n'est pas possible d'avoir la relation $(A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D) = 0$.

(c') Deux diagonales sont de type 2 (ou 3) et deux sont de type 1. En vertu du lemme 4.10, nous avons que les deux diagonales de type 1 sont consécutives dans la même composante S^d ou une diagonale est d_A et l'autre est d_D . D'abord supposons que nous sommes dans le premier cas. Alors, nous avons les sous-cas suivants :

1. Si d_A et d_B appartiennent à S^0 et d_C et d_D sont dans le même tube T^0 , nous pouvons y penser comme étant dans le cas $m = 1$ et conclure que ce n'est pas possible. Si par contre, d_C est dans le tube T^0 et d_D est dans le tube T^1 , le calcul fait dans la partie (d) précédente montre que $(B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D) = 0$, ce qui est absurde.
2. Si d_C et d_D appartiennent à S^1 , nous avons le cas dual au cas antérieur.
3. Si d_B et d_C appartiennent à S^0 , la diagonale d_D appartient à T^1 . Ensuite, le calcul fait dans la partie (c) antérieure nous donne que $(B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D) = 0$, ce qui est absurde.

Finalement, supposons que d_A et d_D sont les diagonales de type 1. Donc, nous avons deux sous-cas :

1. Si d_B et d_C sont dans le même tube nous pouvons supposer que les objets B, C appartiennent au tube \mathcal{T}^d et l'objet D appartient à la composante \mathcal{S}^{d+1} . Supposons que $A = P_a$ et $D = \tau^r P_b[1]$. Si $(A \rightarrow B \rightsquigarrow C) = 0$ nous avons une contradiction ; sinon, en vertu du lemme 4.15 nous avons que $B, C \in M_*^{dl}$ avec

$$* = \begin{cases} p - b, & \text{si } a \in [1, \dots, p - 1]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $(C \rightarrow D) \neq 0$ le lemme 4.16 implique que $C \in \tau^{r-1}M_{\#}^{dr} = M_{\#+r-1}^{dr}$ avec

$$\# = \begin{cases} p - b, & \text{si } b \in [1, \dots, p-1]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite $\{C\} = M_{\#+r-1}^{dr} \cap M_*^{dl}$. Si $(B \rightarrow D)$ était non nul alors on aurait que $B \in M_{\#+r-1}^{dr} \cap M_*^{dl} = \{C\}$, ce qui est absurde.

2. Si d_B et d_C sont dans tubes différents, le calcul fait dans la partie (d) antérieure montre que $(B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D) = 0$, ce qui est absurde.

(d') Trois diagonales sont de type 2 (ou 3) et une est de type 1. Voyons les différents sous-cas possibles.

1. Supposons que d_A et d_B appartiennent à T^0 , d_C appartient à S^1 et d_D à T^1 . Alors on peut supposer que $C = \tau^r P_c[1]$ et comme $(A \rightarrow B \rightarrow C) \neq 0$, le lemme 4.16 implique que $A, B \in M_{*-1+r}^{dr}$ avec

$$* = \begin{cases} p - c, & \text{si } c \in [1, \dots, p-1]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $(B \rightsquigarrow C \rightarrow D) \neq 0$, le niveau de B est différent de $p-1$ et par conséquent $\alpha(B) \neq 0$. Le lemme 4.18 nous donne que $D \in (\mathcal{B}^-(\tau B)[1])^{dl} = (\tau \mathcal{B}^-(B)[1])^{dl} = (\tau M_{*-1+r}[1])^{dl} = (M_{*-1+r-1}[1])^{dl}$. D'un autre côté, comme $(C \rightarrow D) \neq 0$, on a que $\tau^{-r}D \in (M_*[1])^{dl}$ et par conséquent $D \in (M_{*+r}[1])^{dl} \cap (M_{*+r-2}[1])^{dl} = \emptyset$ sauf si $p=2$. Mais, pour $p=2$ ce cas n'est pas possible puisqu'on ne peut pas avoir deux facteurs de T dans la bouche du tube.

2. Supposons que d_A et d_B appartiennent à T^0 , d_C appartient à T^1 et d_D à S^2 . Comme le morphisme $(C \rightarrow D)$ est non nul, nous avons que la diagonale d_D et la diagonale d_C partagent la source de d_C . Ensuite, le calcul fait dans la partie (d) précédente nous donne que $(B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D) = 0$, ce qui est absurde.
3. Supposons que les trois diagonales de type 2 sont une dans le tube T^d et les deux autres dans le tube T^{d+1} . Alors, le calcul fait dans la partie (a) – 1 précédente nous

donne que la composition des morphismes entre ces trois diagonales est zéro. Ce qui est absurde.

4. Supposons que chaque diagonale de type 2 est dans un tube différent. Alors, par exemple, $d_A \in T^0$, $d_B \in T^1$ et $d_C \in T^2$ et le calcul fait précédemment dans la partie (a)2, nous montre que $(A \rightarrow B \rightsquigarrow C) = 0$, ce qui est une absurdité.
5. Supposons que d_A appartient à T^0 , d_B appartient à T^1 , d_C à S^2 et d_D à T^2 . Alors, les trois diagonales d_A, d_B et d_C sont dans la situation du cas (d) antérieur et par conséquent, la composition $(A \rightarrow B \rightsquigarrow C) = 0$, ce qui est une absurdité.
6. Supposons que les trois diagonales d_A, d_B et d_C sont dans le tube T^0 et d_D est dans la composante S^1 . Alors, on peut penser à ce cas comme étant dans $m = 1$ parce que toutes les diagonales se trouvent dans le même degré. Comme on sait que pour $m = 1$ il n'y a pas de relations de longueur plus grande ou égale à 3 on a fini.

(e') Les quatre diagonales sont de type 2 (ou 3). Voyons les sous-cas possibles qui ne se trouvent pas dans les possibilités étudiées dans le cas (d') pour les trois diagonales de type 2.

1. d_A et d_B sont dans le tube T^0 et d_C et d_D sont dans le tube T^1 . Alors, on a deux options pour les objets C et D . Soit $D \in C^{ur}$, ou soit $D \in C^{dr}$. Supposons que $D \in C^{ur}$. Soient C' et D' tels que $C'[1] = C$ et $D'[1] = D$, donc $D' \in C'^{ur}$. Comme $(A \rightarrow C)$ et $(B \rightarrow D)$ ne sont pas nuls, la propriété $m + 1$ -CY de \mathcal{C}_m nous donne que $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(A, C'[1]) \cong D \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(C', \tau A)$ et $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(B, D'[1]) \cong D \text{Hom}_{\mathcal{C}_m}(D', \tau B)$. Alors, $C' \in (\tau A)^-$ et $D' \in (\tau B)^-$. Le même calcul appliqué au morphisme nul $(A \rightarrow D)$ nous donne $D' \in ((\tau A)^-)^c$. En outre, comme il existe un morphisme non nul $(A \rightarrow B)$ il faut que les sources de d_A et d_B soient le même sommet. Ensuite, $B \in A^{dr}$ et de façon équivalente $\tau B \in (\tau A)^{dr}$. Par conséquent, $D' \in C'^{ur} \cap ((\tau B)^- \setminus (\tau A)^-) = \emptyset$, et ce cas n'est pas possible. Pour conclure, supposons que $D \in C^{dr}$, alors $s(d_C) = s(d_D)$ et le calcul fait dans la partie (a) précédente nous donne que $(B \rightsquigarrow C \rightarrow D) = 0$.

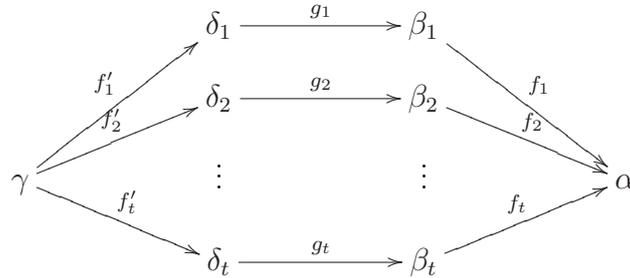
2. d_A, d_B et d_C sont dans le tube T^0 et d_D est dans le tube T^1 . Observons que A, B et

C sont dans le même rayon, qui est le rayon C^{dl} ou A^{dr} . Si A, B et C appartiennent au rayon C^{dl} alors $\mathcal{B}^-(\tau C) \neq \mathcal{B}^-(\tau B)$ et comme $(C \rightarrow D) \neq 0$, $D \in (\mathcal{B}^-(\tau C)[1])^{dl} \neq (\mathcal{B}^-(\tau B)[1])^{dl}$. En conséquence, le lemme 4.18 implique que $(B \rightarrow D) = 0$.

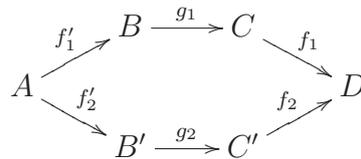
Si par contre A, B et C appartiennent au rayon A^{dr} nous avons que $\mathcal{B}^-(\tau C) = \mathcal{B}^-(\tau A)$. En outre, comme on a les morphismes $A \rightarrow B \rightarrow C$ dans le même rayon il est impossible que le niveau de A soit $p - 1$, et alors $\alpha(C) < \alpha(A) \neq 0$. Puisque $(C \rightarrow D) \neq 0$ on a que $D \in (\mathcal{B}^-(\tau C)[1])^{dl} \cap \{ \text{les } \alpha(C) \text{ premiers niveaux du tube} \} \subset (\mathcal{B}^-(\tau A)[1])^{dl} \cap \{ \text{les } \alpha(A) \text{ premiers niveaux du tube} \}$. En conséquence, le lemme 4.18 implique que $(A \rightsquigarrow D) \neq 0$, ce qui est une absurdité.

Observons que dans tous les cas sauf les cas (a'), (b'), les deux derniers sous-cas du cas (c') et le sous-cas (e').2 nous n'avons pas utilisé le fait que la composition $A \rightarrow B \rightsquigarrow C \rightarrow D$ était nulle et nous sommes arrivés à montrer qu'une des sous-compositions $A \rightarrow B \rightsquigarrow C$ ou $B \rightsquigarrow C \rightarrow D$ était nulle.

Ensuite, voyons que nous ne pouvons pas avoir de relations de la forme



où une combinaison linéaire des compositions $f_i g_i f'_i$ est 0, $t \geq 2$ et les chemins g_i peuvent avoir longueur arbitraire. L'idée est de montrer que toutes les compositions $f_i g_i f'_i$ sauf au plus une sont nulles. Alors on peut supposer que $t = 2$ et on voit que nous ne pouvons pas avoir une relation du type



Relation de commutativité (*)

où une combinaison linéaire des compositions $f_i g_i f'_i$ est nulle.

La remarque qu'on vient de faire nous permet de montrer que quand les diagonales d_A, d_B, d_C et d_D ne se trouvent pas dans les cas (a'), (b'), les deux derniers sous-cas du cas (c') et le sous-cas (e').² on ne peut pas avoir un tel type de relation. Alors, il nous reste à voir seulement ces quatre cas.

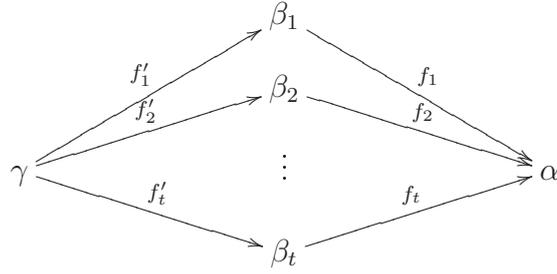
(a'') Les quatre diagonales d_A, d_B, d_C et d_D sont de type 1. Selon le lemme 4.10 il n'y a pas de morphismes non nuls entre les composantes S^d et S^{d+1} . Par conséquent les quatre diagonales doivent être dans la même composante S^d et alors dans le rayon d_A^{ur} ou le rayon d_A^{dr} . Le même argument appliqué aux diagonales $d_A, d_{B'}, d_{C'}$ et d_D nous donne que ces quatre diagonales doivent être dans le rayon d_A^{ur} ou le rayon d_A^{dr} . Alors, D doit être le dernier objet des deux rayons A^{ur} et A^{dr} et nous pouvons supposer que $A = P_p$ et $D = P_0$. Cependant, si c'est le cas on ne peut pas avoir la relation de commutativité (*).

(b'') d_A, d_B et d_C sont de type 1 en S^0 et d_D est de type 2 dans T^0 . Le même argument utilisé dans (b') nous permet de voir que les diagonales d_B et d_C sont aussi de type 1 en S^0 . Ensuite, nous pouvons y penser comme étant dans le cas $m = 1$ et puisque les algèbres inclinées 1-amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables, nous obtenons qu'il n'est pas possible d'avoir la relation (*).

(c'') Les deux derniers sous-cas du cas (c'). Comme la composition $A \rightarrow D$ ne peut pas être nulle, nous n'avons pas ces sous-cas.

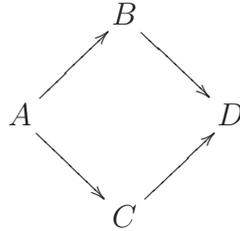
(e'') d_A, d_B et d_C sont dans le tube T^0 et d_D est dans le tube T^1 . Supposons que A, B et C sont dans le rayon A^{ur} . Alors, B' et C' doivent être dans le rayon A^{dr} . Ensuite, le calcul fait dans la partie (e').² nous dit que la composition $B \rightarrow D$ est nulle. Ce qui est une absurdité. En conséquence on ne peut pas avoir la relation (*).

Finalement il nous reste à voir que nous ne pouvons pas avoir de relations de la forme



où la somme des compositions $f_i f'_i$ est 0 et $t \geq 2$.

L'idée est de montrer qu'une des compositions $f_i f'_i$ doit être nulle. Alors on peut supposer que $t = 2$ et soit



une relation de commutativité.

D'abord nous observons que si les quatre facteurs A, B, C et D de $F(\Delta)$ sont dans la même composante \mathcal{S}^i le calcul fait dans (a'') montre qu'il n'y a pas une relation de commutativité.

Observons que si $A \in \mathcal{S}^0$ et $B, C, D \in \mathcal{T}_p^0$ les trois objets B, C, D doivent être dans le même rayon et alors quand on regarde l'algèbre d'endomorphismes de $F(\Delta)$ on n'aurait pas la relation de commutativité désirée. Comme en plus il n'y a pas de morphismes non nuls entre \mathcal{S}^0 et \mathcal{S}^1 , l'unique cas possible est le suivant :

$A, B, C \in \mathcal{S}^0$ et $D \in \mathcal{T}_p^0$. Nous pouvons penser à ce cas comme étant dans $m = 1$ et comme les algèbres inclinées 1-amassées sont aimables on sait qu'il n'y a pas une telle relation de commutativité.

Pour conclure nous avons vu que les uniques relations possibles dans l'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathfrak{e}_m}(F(\Delta))$ sont les relations données par l'idéal I_Δ .

□

Exemples 4.33.

1. La figure suivante montre une 4-angulation Δ de $P_{12,1,2}$ et son carquois correspondant Q_{Δ}^0 .

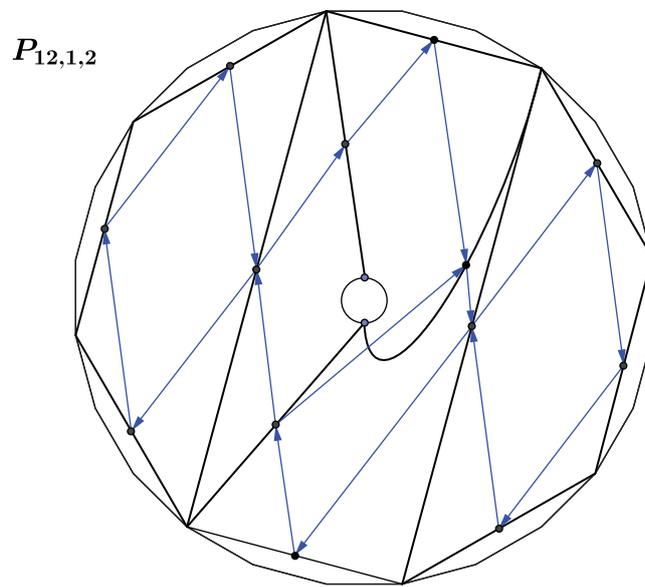


FIGURE 4.7 – Le carquois Q_{Δ}^0 associé à la 4-angulation Δ de $P_{12,1,2}$.

Selon la définition 4.31 on peut associer aussi un idéal I_{Δ} à la 4-angulation Δ . Alors, le carquois lié qu'on obtient est le suivant :

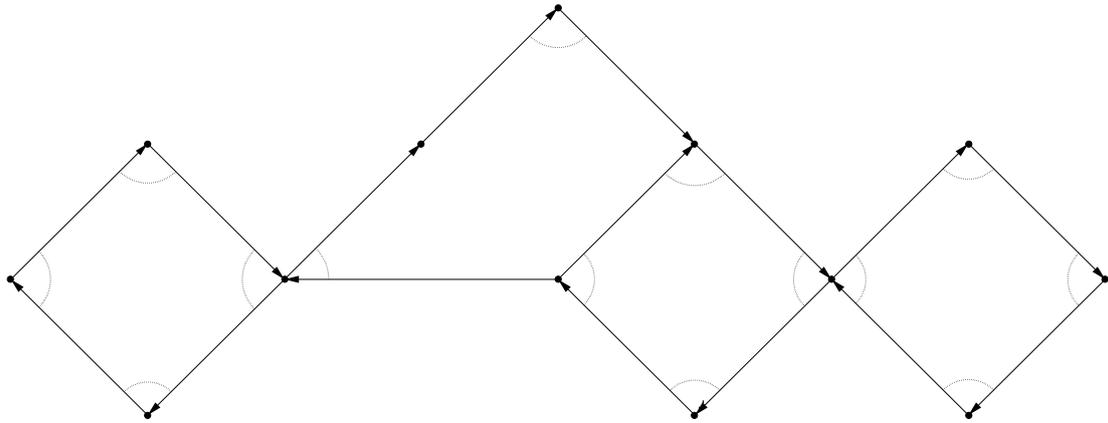


FIGURE 4.8 – Le carquois lié associé à la 4-angulation Δ de $P_{12,1,2}$.

2. La figure suivante montre une 4-angulation Δ' de $P_{8,1,2}$ et son carquois correspondant $Q_{\Delta'}^0$.

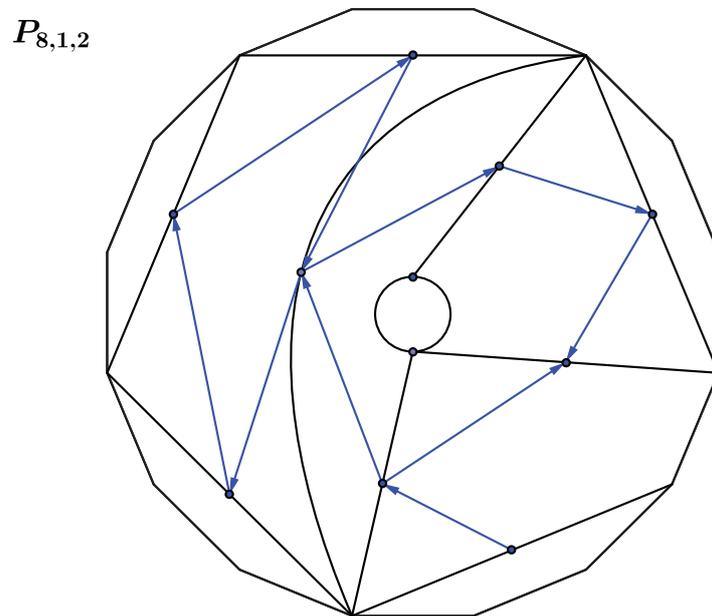


FIGURE 4.9 – Le carquois $Q_{\Delta'}^0$ associé à la 4-angulation Δ' de $P_{8,1,2}$.

Et le carquois lié qu'on obtient est le suivant :

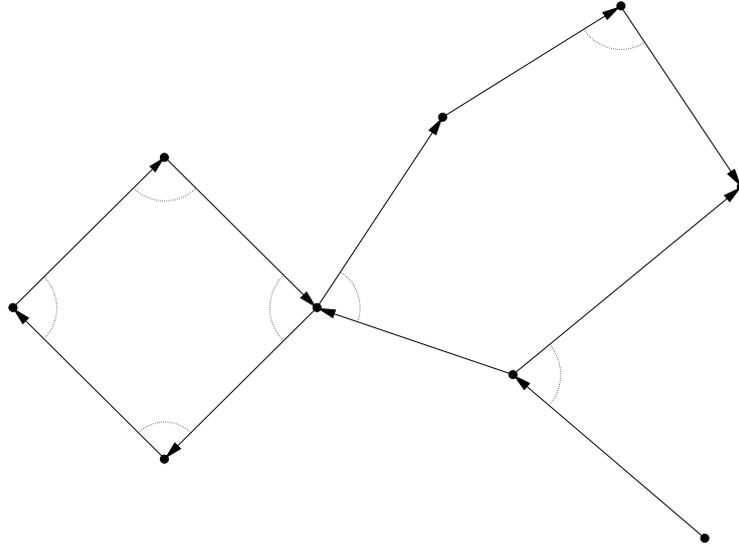


FIGURE 4.10 – Le carquois lié associé à la 4-angulation Δ' de $P_{8,1,2}$.

4.7 Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$

Le but de cette section est de montrer que les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables et en plus trouver une caractérisation de son carquois lié.

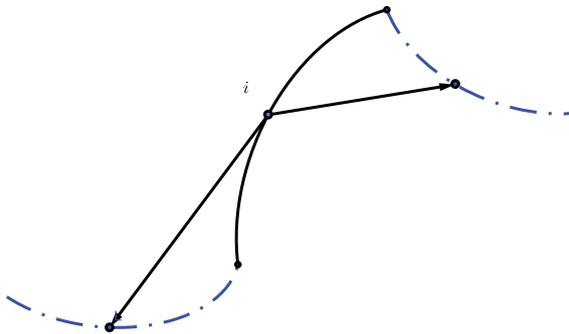
4.7.1 Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables

Murphy dans son article [24] a prouvé que les algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} sont aimables pour tout $m \geq 1$. Nous voulons montrer le même résultat pour le type $\tilde{\mathbb{A}}$. Pour $m = 1$ le résultat est montré dans [2]. D'après la proposition 4.32 nous sommes en mesure de montrer facilement le résultat pour tout $m \geq 2$:

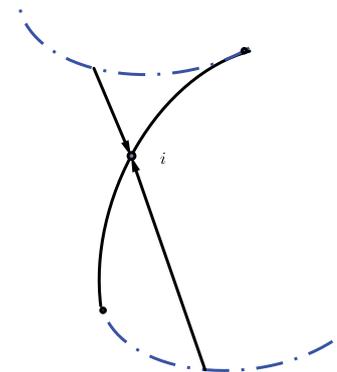
Proposition 4.34. *Les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont aimables pour tout $m \geq 2$.*

Démonstration. Le résultat découle des subdivisions possibles de $P_{p,q,m}$. Les figures suivantes nous montrent clairement les propriétés requises.

La première figure montre que pour chaque sommet i de Q_{Δ}^0 il y a au plus deux flèches de source i et au plus deux flèches de but i .

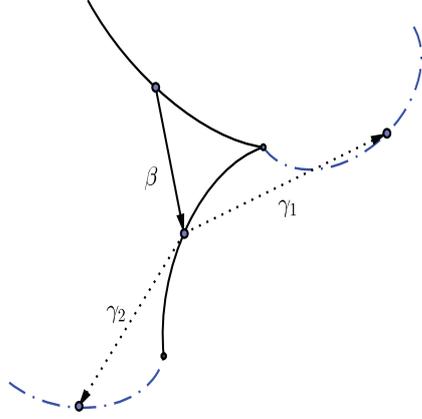


Il y a au plus deux flèches de source i .

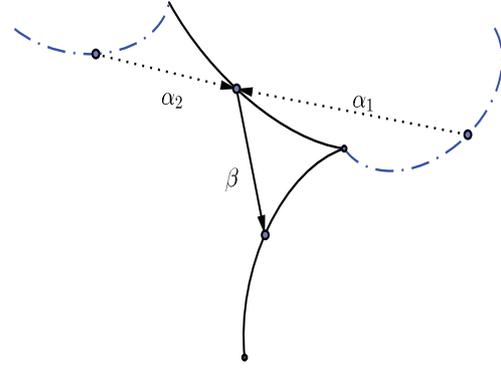


Il y a au plus deux flèches de but i .

La deuxième figure montre que pour chaque flèche β de Q_{Δ}^0 les propriétés 2 et 3 de la définition de carquois aimable sont satisfaites.



Il y a au plus une flèche γ_1 telle que $\gamma_1\beta \notin I$ et une flèche γ_2 telle que $\gamma_2\beta \in I$.



Il y a au plus une flèche α_1 telle que $\beta\alpha_1 \notin I$ et une flèche α_2 telle que $\beta\alpha_2 \in I$.

Finalement la propriété 4 suit directement de la définition de l'idéal I_Δ .

□

4.7.2 Le carquois lié des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$

Dans cette sous-section nous verrons une caractérisation du carquois lié d'une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Rappelons qu'un *cycle m -saturé* est un cycle orienté de longueur $m + 2$ où la composition de deux flèches consécutives quelconques dans le cycle est zéro. Aussi rappelons que deux relations r et r' dans le carquois lié (Q, I) sont dites *consécutives* s'il existe une marche $v = wr = r'w'$ dans (Q, I) telle que r et r' pointent dans la même direction et partagent une flèche.

Pour la définition suivante nous fixons un naturel $m \geq 2$.

Définition 4.35. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ un cycle sans relations (qui peut être orientée ou pas) et fixons

une orientation à ses flèches. Nous dirons qu'une algèbre $A \cong kQ/I$ est une **algèbre avec racine** $\tilde{\mathcal{C}}$ si son carquois lié peut être construit comme suit :

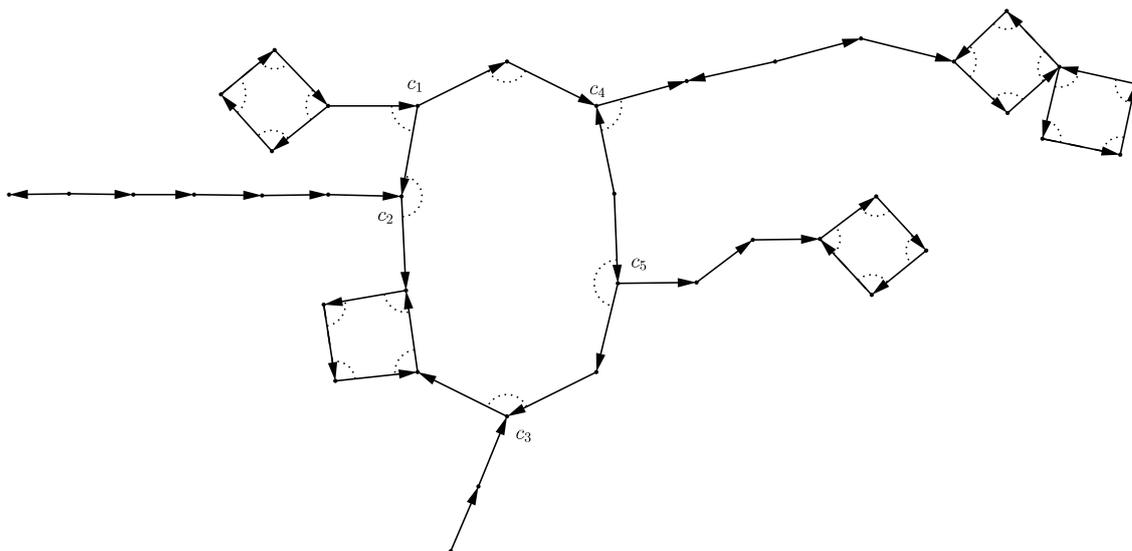
1. Nous ajoutons au cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ des carquois aimables de façon que le carquois résultant reste aimable et soit connexe. Ces carquois aimables que nous avons ajouté les seuls cycles qui peuvent avoir sont des cycles m -saturés. Nous appellerons ces carquois **rayons**.
2. Nous pouvons ajouter de relations dans le cycle $\tilde{\mathcal{C}}$. Si le cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ est orienté il doit avoir au moins une relation.

Aussi, nous nous référerons au cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ comme le **cycle racine**.

Dans ce qui suit soit $\tilde{\mathcal{C}}$ un cycle non saturé et $A \cong kQ/I$ une algèbre avec racine $\tilde{\mathcal{C}}$.

Définition 4.36. Soit c un sommet dans Q (qui n'est pas dans un cycle m -saturé) dans un rayon. On dira que c est le **sommet d'union** du rayon, si c appartient aussi au cycle racine.

Exemple 4.37. Soit A l'algèbre donnée par le carquois lié suivant.



Alors, il existe deux cycles dans le carquois de A de sorte que A est une algèbre avec racine. Les sommets c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 sont sommets d'union.

Remarques 4.38. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ un cycle et A une algèbre avec racine $\tilde{\mathcal{C}}$.

1. Chaque rayon de A peut partager avec le cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ un sommet ou au plus $m+2$ sommets. Si partage seulement un sommet, ce sommet est le sommet d'union du rayon. Si partage plus de un sommet est parce que le rayon et le cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ sont connectés par l'intermédiaire d'un cycle m -saturé.
2. Dans chaque sommet d'union doit avoir au moins une relation impliquant au moins une flèche de \mathcal{C} .

Définition 4.39. Soit a un sommet d'union et ρ la relation dans le cycle racine l'impliquant. La relation ρ est dite :

- a) **relation d'union interne** du rayon si les deux flèches de la relation appartiennent au cycle racine.
- b) **relation d'union externe** du rayon si une seule flèche de la relation appartient au cycle racine.

Exemple 4.40. Soit A l'algèbre de l'exemple antérieur. Les relations impliquant les sommets c_1 et c_4 sont des relations d'union externes et les relations impliquant les sommets c_2, c_3 et c_5 sont des relations d'union internes.

Maintenant nous allons assigner un sens à chaque relation d'union.

Définition 4.41. Soit ρ une relation d'union. Nous dirons que ρ est **horaire (anti-horaire)** si la ou les flèches l'impliquant qui appartiennent au cycle racine sont orientées dans le sens horaire (anti-horaire).

Exemple 4.42. Dans l'exemple antérieur les relations impliquant les sommets c_1, c_2 et c_4 sont des relations d'union anti-horaires et les relations impliquant les sommets c_3 et c_5 sont des relations d'union horaires.

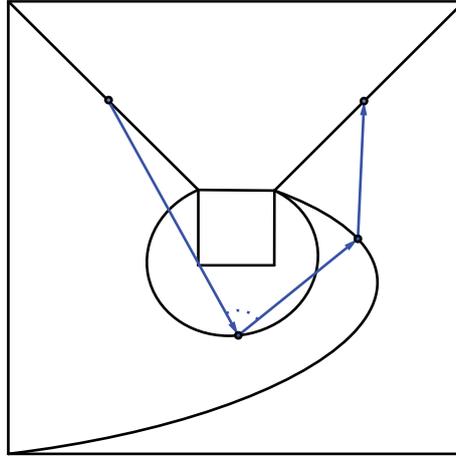
La proposition 4.32 nous permet de faire les remarques suivantes.

Remarques 4.43. Soit $A \cong kQ/I$ une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ connexe.

1. Elle ne contient pas de cycles non saturés ou il existe un cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ non saturé dans Q de façon que A est une algèbre avec racine $\tilde{\mathcal{C}}$.
2. Dans le premier cas les uniques cycles possibles sont des cycles m -saturés.
3. Si $m \neq 1$, il peut y avoir des relations en dehors des cycles m -saturés, mais avec la restriction suivante : il peut exister au plus $m - 1$ relations consécutives en dehors d'un cycle m -saturé.

En particulier la remarque précédente nous dit qu'il n'y a pas d'unicité de type dans le cas des algèbres inclinées m -amassées puisque toutes les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ qui n'ont pas un cycle non saturé sont à la même fois algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} . L'exemple suivant illustre cette remarque.

Exemple 4.44. Soit (Q, I) le carquois lié associé à la 4-angulation Δ de $P_{2,2,2}$ suivante.



Alors l'algèbre kQ/I est une algèbre inclinée 2-amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{2,2}$ et aussi de type \mathbb{A}_4 .

Par la suite nous considérons le cas où l'algèbre inclinée m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ contient au moins un cycle non saturé et par conséquent il y a au moins un cycle racine. Nous allons choisir un et le fixer.

La remarque suivante prend en compte les relations dans le cycle racine.

Définition 4.45. Soit ρ une relation dans le cycle racine. La relation ρ est dite **relation strictement interne** si les deux flèches de la relation appartiennent au cycle racine, mais elles n'appartiennent pas à aucun cycle m -saturé. En plus, on dira que la relation strictement interne est **horaire (anti-horaire)** si les deux flèches l'impliquant sont orientées dans le sens horaire (anti-horaire).

Soit α_h le nombre de relations strictement internes dans le sens horaire et α_a le nombre dans le sens anti-horaire.

Remarque 4.46. Soit \mathcal{C} un cycle m -saturé qui partage au moins deux sommets i et j avec le cycle racine. Alors, l'orientation du cycle racine induit une orientation dans les flèches du cycle \mathcal{C} . C'est à dire qu'il y a k flèches entre les sommets i et j orientées dans le sens horaire et $m + 2 - k$ flèches orientées dans le sens anti-horaire.

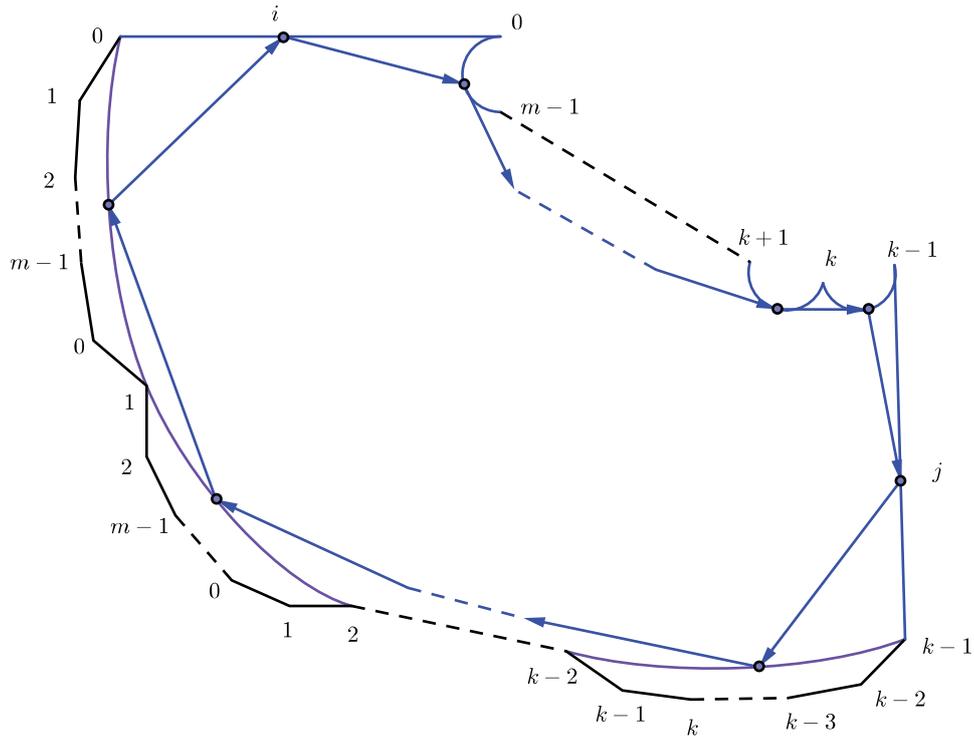
Définition 4.47. Étant donné un cycle m -saturé \mathcal{C} ayant au moins deux sommets en commun avec le cycle racine nous noterons $\beta_a(\mathcal{C})$ le nombre de flèches de \mathcal{C} qui ont l'orientation induite anti-horaire moins un et $\beta_h(\mathcal{C})$ le nombre de flèches de \mathcal{C} qui ont l'orientation induite horaire moins un.

Observer que pour tout tel cycle \mathcal{C} , $\beta_a(\mathcal{C}) + \beta_h(\mathcal{C}) = m$.

Remarque 4.48. Soit \mathcal{C} un cycle m -saturé comme dans la remarque précédente. Alors au moins une des conditions suivantes est satisfaite.

1. il existe au moins $k - 1 = \beta_h(\mathcal{C})$ relations strictement internes anti-horaires dans le cycle racine.
2. il existe au moins $m - k + 1 = \beta_a(\mathcal{C})$ relations strictement internes horaires dans le cycle racine.
3. il existe un autre cycle m -saturé \mathcal{C}' avec $\beta_h(\mathcal{C}') = \beta_a(\mathcal{C})$ et $\beta_a(\mathcal{C}') = \beta_h(\mathcal{C})$.

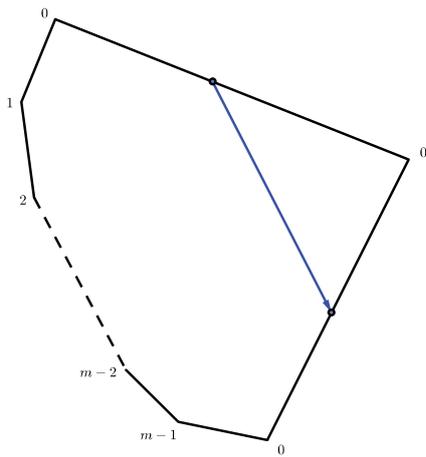
Démonstration. Supposons que nous avons un tel cycle \mathcal{C} avec k flèches entre les sommets i et j orientées dans le sens horaire et $m + 2 - k$ flèches orientées dans le sens anti-horaire. Alors, dans la $(m + 2)$ -angulation correspondant nous avons la situation suivante.



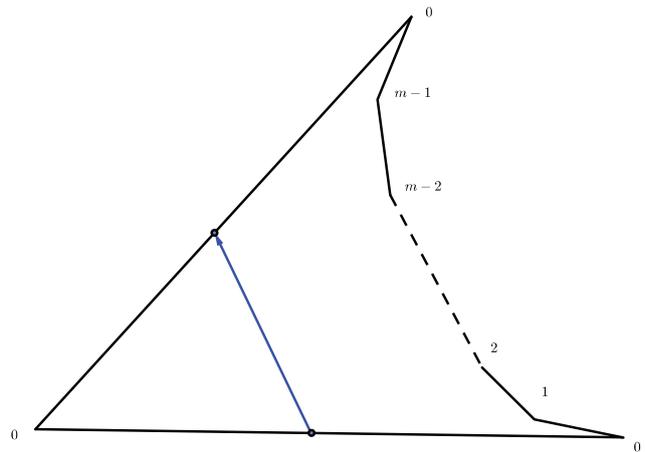
(Pour simplifier la notation nous regardons les sommets des polygones extérieur et intérieur modulo m).

Si nous voulons avoir un cycle non saturé impliquant les sommets i et j , nous devons trouver une partition de la région de $P_{p,q,m}$ délimitée par la diagonale i , le bord du polygone extérieur qui se trouve entre les sommets 0 et $k - 1$ dans le sens horaire, la diagonale j et le bord du polygone intérieur qui se trouve entre les sommets $k - 1$ et 0 dans le sens anti-horaire.

Ajouter un flèche au cycle non saturé dans n'importe quel sens correspond avec les sous-angulations suivantes.



flèche anti-horaire



flèche horaire

Alors, quand on ajoute des flèches les nombres des sommets modulo m du polygone extérieur et intérieur ne changent pas.

On a la même situation quand on ajoute un cycle m -saturé qui partage seulement un flèche avec le cycle racine (la flèche entre les sommets a et b). Voir la figure au-dessous.

On a le cas dual si on ajoute une relation dans le sens anti-horaire. C'est à dire qu'on soustrait un à la valeur du sommet du polygone extérieur et on ajoute un à la valeur du sommet du polygone intérieur.

Alors, si on ajoute $m - k + 1$ relations horaires le sommet du polygone extérieur va prendre la valeur $k - 1 + m - k + 1 = m \equiv 0$ (modulo m), et le sommet du polygone intérieur va prendre la valeur $k - 1 - (m - k + 1) \equiv k - 1 - (k - 1) \equiv 0$ (modulo m).

D'après ces considérations on peut voir que les uniques façons "de fermer" le cycle non saturé (racine) qui contient les sommets i et j est de ajouter $m - k + 1$ relations internes dans le sens horaire où $k - 1$ relations dans le sens anti-horaire où un autre cycle m -saturé avec k flèches dans le sens anti-horaire et $m - k + 2$ flèches dans le sens horaire.

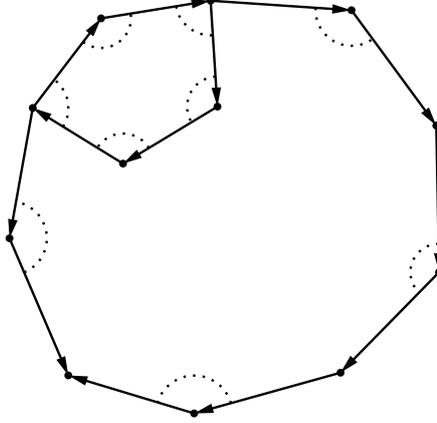
□

Cette remarque nous permet de faire la définition suivante.

Définition 4.49. Soit \mathcal{C} un cycle m -saturé qui partage au moins deux sommets avec le cycle racine. Nous dirons que le cycle \mathcal{C} est **horaire** (**anti-horaire**) si la condition 1 (2) est satisfaite. Si 3 est satisfaite ou 1 et 2 sont satisfaites simultanément, nous dirons que \mathcal{C} est horaire si $\beta_h(\mathcal{C}) \leq \beta_a(\mathcal{C})$ ou anti-horaire sinon.

Nous fixons la notation suivante, soient \mathcal{C}_h l'ensemble de tous les cycles m -saturés horaires et \mathcal{C}_a l'ensemble de tous les cycles m -saturés anti-horaires.

Exemple 4.50. Soit \mathcal{C} le cycle 3-saturé du carquois lié suivant et fixons comme cycle racine le cycle de longueur 10.



Alors, $\beta_h(\mathcal{C}) = 1$ et $\beta_a(\mathcal{C}) = 2$. Comme $\alpha_h = 3 > \beta_a(\mathcal{C})$, $\alpha_a = 1 = \beta_h(\mathcal{C})$ et $\beta_h(\mathcal{C}) \leq \beta_a(\mathcal{C})$; le cycle \mathcal{C} est anti-horaire.

Définition 4.51. Nous définissons le **nombre de relations internes horaires** r_h comme

$$r_h = \alpha_h + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_h} \beta_h(\mathcal{C})$$

De façon analogue on peut définir le nombre de relations internes anti-horaires r_a . Alors,

$$r_a = \alpha_a + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_a} \beta_a(\mathcal{C})$$

Exemple 4.52. Dans l'exemple antérieur le nombre de relations internes horaires est $r_h = 3$ et le nombre de relations internes anti-horaires est $r_a = 1 + 2 = 3$. Alors $r_h \equiv r_a$ modulo $m = 3$.

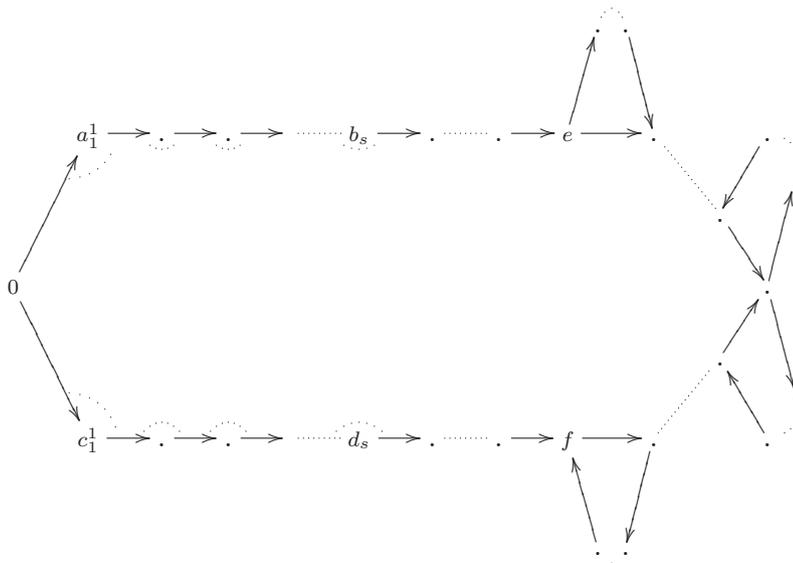
En général, nous avons la propriété suivante.

Proposition 4.53. *Soit A une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ connexe avec un cycle racine. S'il y a de relations internes dans le cycle racine, alors il y a le même nombre modulo m de relations internes horaires que de relations internes anti-horaires. C'est à dire que $r_h \equiv r_a$ modulo m .*

Démonstration. D'abord, supposons que l'ensemble $\mathfrak{C}_a \cup \mathfrak{C}_h$ est vide. Alors, la discussion faite dans la remarque 4.48 nous dit que chaque fois qu'on ajoute une relation horaire on doit, pour pouvoir fermer le cycle racine, ajouter aussi une relation anti-horaire. De la même remarque on déduit que si on ajoute un multiple de m relations dans n'importe quel sens la valeur des sommets des polygones extérieur et intérieur ne change pas. Maintenant supposons qu'il y a un cycle \mathcal{C} dans \mathfrak{C}_a . Alors, il existent $\beta_h(\mathcal{C})$ relations strictement internes anti-horaires. Ensuite, $\alpha_a = \alpha'_a + \beta_h(\mathcal{C})$ avec $\alpha'_a \equiv \alpha_h$ modulo m . Par conséquent, $r_a = \alpha'_a + \beta_h(\mathcal{C})$ et $r_h = \alpha_h + \beta_h(\mathcal{C})$. Clairement $r_h \equiv r_a$ modulo m . La même idée se généralise si on a un nombre arbitraire de cycles m -saturés horaires et anti-horaires.

□

Exemple 4.54. *L'algèbre associée au carquois lié suivant est une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.*



où il y a $r = t(m - 1) + s$ (avec $s < m - 1$) relations situées comme suit :

$$0 \rightarrow a_1^1 \rightarrow a_{m-1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow a_1^2 \rightarrow a_{m-1}^2 \rightarrow \dots \rightarrow a_1^t \rightarrow a_{m-1}^t \rightarrow \dots \rightarrow b_1 \rightarrow b_s \rightarrow \dots$$

dans le sens horaire et $r' = t'(m-1) + s'$ (avec $s' < m-1$ et $r' \equiv r \pmod{m}$) relations situées comme suit :

$$0 \rightarrow c_1^1 \rightarrow c_{m-1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow c_1^2 \rightarrow c_{m-1}^2 \rightarrow \dots \rightarrow c_1^t \rightarrow c_{m-1}^t \rightarrow \dots \rightarrow d_1 \rightarrow d_{s'} \rightarrow \dots$$

dans le sens anti-horaire. C'est à dire qu'il y a $t \geq 0$ ($t' \geq 0$) groupes avec $m-1$ relations consécutives et au plus un groupe avec $s < m-1$ ($s' < m-1$) relations consécutives dans le sens horaire (anti-horaire).

Le nombre des flèches entre le sommet b_s et le sommet e et entre le sommet d_s et le sommet f peut être différent. De même pour le nombre de $(m+2)$ -cycles dans chaque sens.

Pour finir ce chapitre nous résumons dans le corollaire suivant les résultats obtenus sur le carquois lié d'une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Corollaire 4.55. Soit (Q, I) le carquois lié d'une composante connexe d'une algèbre inclinée m -amassée A de type $\tilde{\mathbb{A}}$. Alors (Q, I) satisfait les conditions suivantes :

- (a) il est aimable.
- (b) il existe un cycle non saturé $\tilde{\mathcal{C}}$ de façon que A est une algèbre avec racine $\tilde{\mathcal{C}}$.
- (c) s'il y a d'autres cycles, alors ils sont tous des cycles m -saturés.
- (d) il peut exister au plus $m-1$ relations consécutives en dehors d'un cycle m -saturé.
- (e) s'il y a des relations internes dans le cycle racine, alors il y a le même nombre total modulo m de relations dans le sens horaire que dans le sens anti-horaire.

□

Exemple 4.56. L'algèbre donné par le carquois lié suivant est une algèbre inclinée 2-amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{6,1}$.

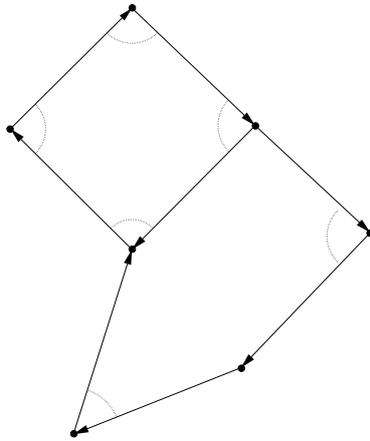


FIGURE 4.13 – Le carquois lié (Q, I) d'une algèbre inclinée 2-amassée de type $\tilde{A}_{6,1}$.

En fait, elle vient de la 4-angulation Δ de $P_{6,1,2}$ suivante :

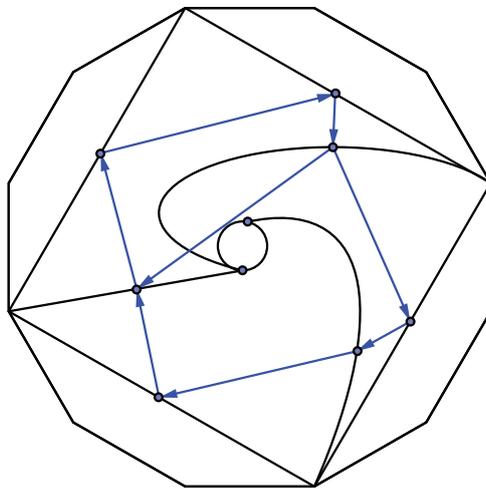


FIGURE 4.14 – La 4-angulation Δ de $P_{6,1,2}$.

Chapitre 5

Algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$

Comme dans le cas des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} , la classe des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ n'est pas stable sous l'équivalence dérivée : il est possible qu'une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$ soit dérivée équivalente à une algèbre qui n'est pas inclinée m -amassée de ce type. Nous verrons des exemples plus tard.

Également les algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ peuvent ne pas être connexes. Désormais nous travaillerons avec la composante connexe qui contient le cycle non saturé. Toutes les autres composantes ont la même forme que les algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} , et par conséquent nous connaissons bien la classe d'équivalence dérivée de chacune (Voir chapitre 2).

Notre objectif est de classifier toutes les algèbres qui sont dérivées équivalentes à une algèbre inclinée m -amassée A de type $\tilde{\mathbb{A}}$. Donc, ce qui nous reste à faire est de trouver toutes les algèbres connexes qui sont dérivées équivalentes à la composante connexe qui contient le cycle non saturé.

5.1 Algèbres $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées

Rappelons qu'un *cycle m -saturé* est un cycle orienté de longueur $m + 2$ où la composition de deux flèches consécutives quelconques dans le cycle est zéro.

Dans ce qui suit nous devons fixer un plongement dans le plan. Ainsi, nous pouvons parler de flèches orientées dans le sens horaire ou anti-horaire. Mais nous devons considérer que cette notation est unique seulement au plongement près, c'est à dire à l'échange des rôles des flèches dans le sens horaire et anti-horaire.

Maintenant nous sommes prêts à définir le nombre de flèches horaires ou anti-horaires.

Soit \mathcal{S} l'ensemble de toutes les flèches du carquois d'une algèbre avec racine qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés.

Définition 5.1. *Le nombre de **flèches libres horaires** dans \mathcal{S} est égal au nombre de flèches horaires dans le cycle racine qui ne sont pas impliquées dans une relation d'union interne plus le nombre de relations d'union internes horaires plus le nombre de flèches qui sont dans les rayons associés aux relations d'union (internes ou externes) horaires.*

Dualement on définit le nombre de flèches libres anti-horaires.

Nous conjecturons que les algèbres qui satisfont à la définition suivante sont les algèbres que nous cherchons.

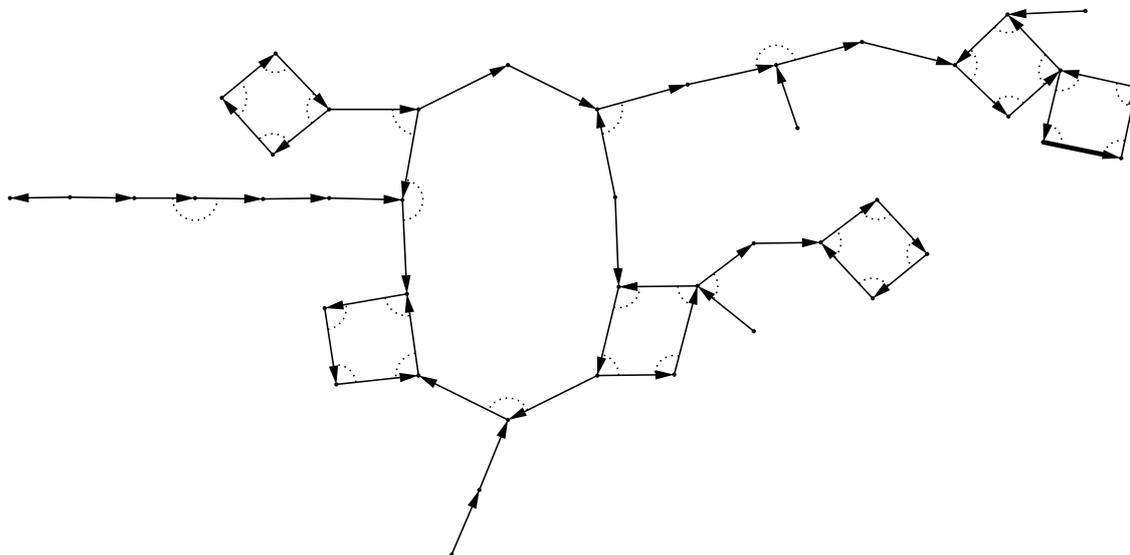
Définition 5.2. *On dit qu'une algèbre connexe $B = kQ/I$ est $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée si B satisfait les conditions suivantes :*

- (a) *il existe un cycle $\tilde{\mathcal{C}}$ dans Q de sorte que B est une algèbre avec racine $\tilde{\mathcal{C}}$.*
- (b) *dans le cycle racine le nombre total de relations dans le sens horaire r_h est le même modulo m que le nombre total de relations dans le sens anti-horaire r_a .*
- (c) *si $|r_h - r_a| = r = \alpha(m - 1) + \beta$ (avec $\beta < m - 1$), alors il doivent exister $r + 1 + \varepsilon$ flèches libres qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés dans le sens horaire si $r_h > r_a$ ou dans le sens anti-horaire sinon, où*

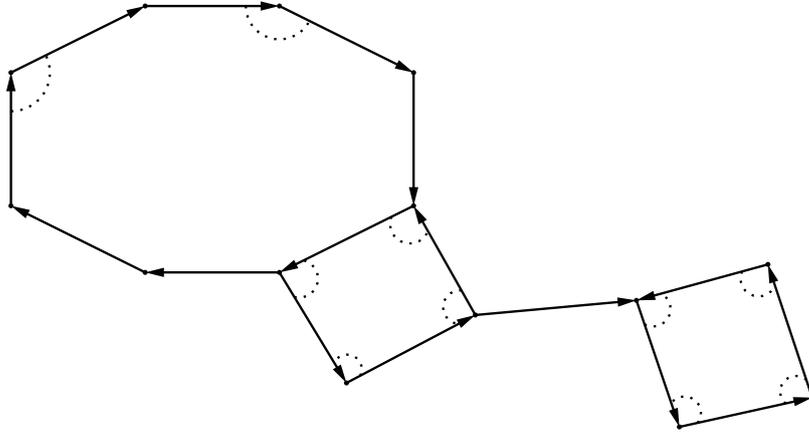
$$\varepsilon = \begin{cases} \alpha - 1, & \text{si } \beta = 0; \\ \alpha, & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Dans les exemples suivants on considère $m = 2$.

Exemple 5.3. *L'algèbre suivante est $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée.*



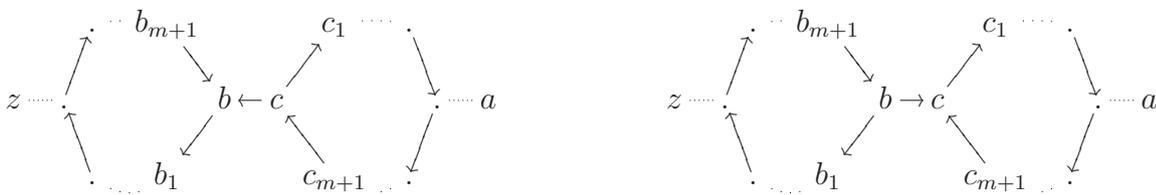
Exemple 5.4. *De même, l'algèbre suivante est $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée.*



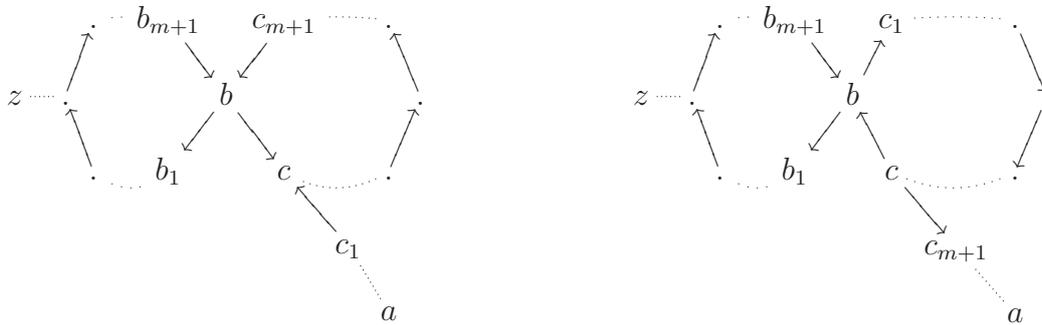
La remarque suivante suit de la proposition 2.35.

Remarque 5.5. Soit \mathcal{R} un rayon du carquois lié associé à une algèbre \mathbb{A} -branchée. Alors, l'algèbre associée à chaque rayon est une algèbre dérivée équivalente à une algèbre \mathbb{A} -branchée. En effet elles sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons.

Lemme 5.6. *Les carquois liés aimables*



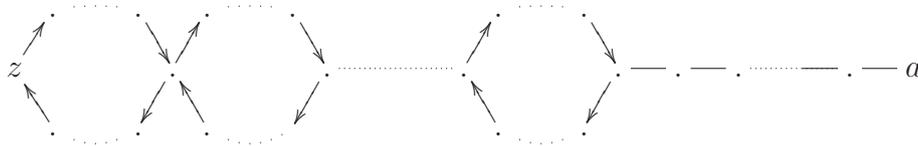
sont équivalents pour les inclinaisons et les co-inclinaisons, respectivement aux carquois liés aimables



où tous les cycles sont m -saturés, le sommet z est le sommet libre du rayon et le sommet a est le sommet d'union.

Démonstration. On applique à chaque carquois la transformation V'_c . □

Remarque 5.7. Le lemme précédent nous permet de supposer que tous les cycles m -saturés d'un rayon (quand ils existent) se trouvent à l'extrémité opposée au sommet d'union. Donc, chaque rayon à la forme suivante :



où le sommet a est le sommet d'union.

Observons qu'ici l'orientation de la partie linéaire n'est pas fixée comme dans la forme normale des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} .

5.1.1 Algèbres solaires

Comme dans ce qui suit nous allons travailler avec les algèbres qui satisfont aux caractéristiques décrites dans la remarque précédente, nous introduisons la sous-classe suivante d'algèbres $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées.

Définition 5.8. On dit qu'une algèbre $B = kQ/I$ est **solaire** si B est une algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée dans laquelle chaque rayon du carquois lié associé est \mathbb{A} -branché de la forme de la remarque 5.7.

Remarque 5.9. Il suit des remarques précédentes que toute algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre solaire.

Exemple 5.10. L'algèbre suivante est solaire.

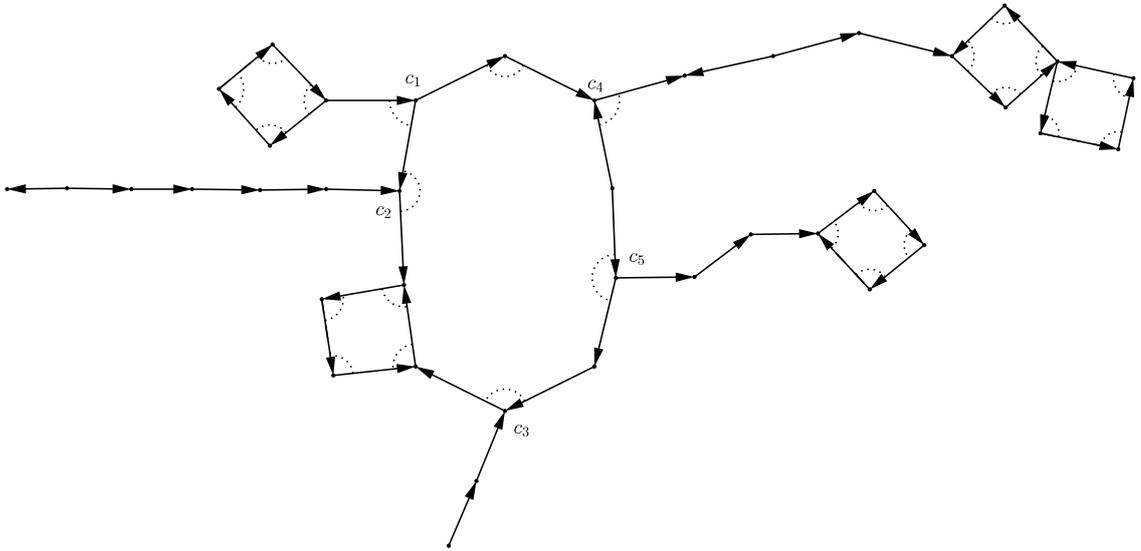


FIGURE 5.1 – Algèbre solaire

Définition 5.11. On considère un rayon \mathcal{R} dans une algèbre solaire. Soit a son sommet d'union et α la flèche qui lui est adjacente. On dira que le rayon \mathcal{R} est :

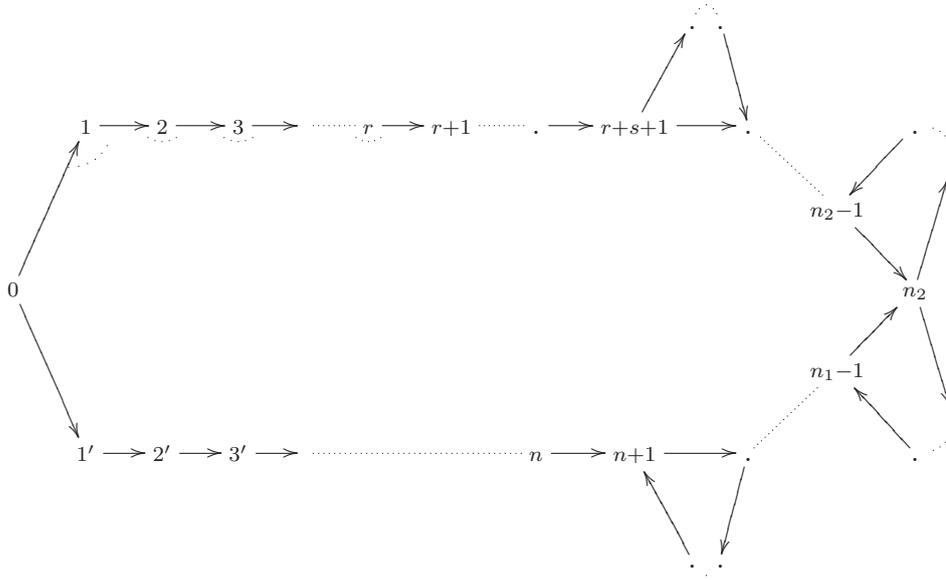
- a) **entrant** dans le cycle racine si $t(\alpha) = a$.
- b) **sortant** du cycle racine si $s(\alpha) = a$.

Exemple 5.12. Soit A l'algèbre de l'exemple antérieur. Les rayons contenant les sommets c_1, c_2 et c_3 sont entrants et les rayons contenant les sommets c_5 et c_4 sont sortants.

5.2 Relations d'union

Rappelons que nous avons fixé un plongement dans le plan. Ainsi, nous pouvons parler de flèches orientées dans le sens horaire ou anti-horaire.

Définition 5.13. Dans ce qui suit on dira qu'une algèbre dont le carquois lié associé a la forme $\tilde{N}_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$ suivante



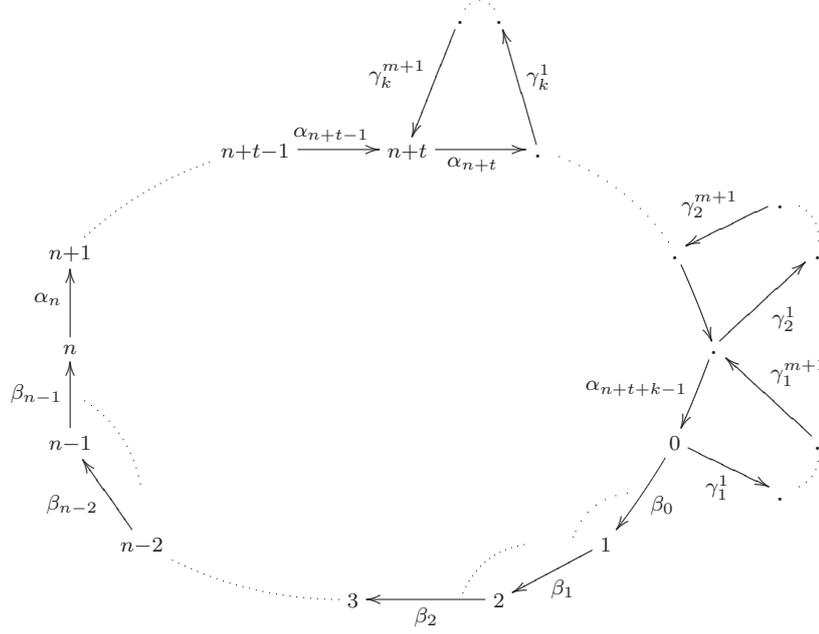
(où tous les cycles orientés sont m -saturés)

avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$ a la **forme normale non orienté**.

- n_1 est le nombre des flèches dans le sens anti-horaire.
- k_1 est le nombre des cycles m -saturés dans le sens anti-horaire.
- n_2 est le nombre des flèches dans le sens horaire.
- k_2 est le nombre des cycles m -saturés dans le sens horaire.
- r est le nombre des relations dans le sens horaire si $r \geq 0$ ou dans le sens anti-horaire si $r < 0$.
- $|r| \equiv 0 \text{ modulo } m$.

Selon la notation du dessin $n_2 = r + s + 1 + k_2$ et $n_1 = n + 1 + k_1$.

Définition 5.14. On dira qu'une algèbre dont le carquois lié associé a la forme $B_{k,n,t}$ suivante



avec $k, n, t \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 1$ a la **forme normale orienté**.

$B_{k,n,t}$ a k cycles m -saturés, $n - 1$ relations $\beta_i \beta_{i-1}$ ($i \in \{1, \dots, n - 1\}$) consécutives et $n + t$ flèches qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés.

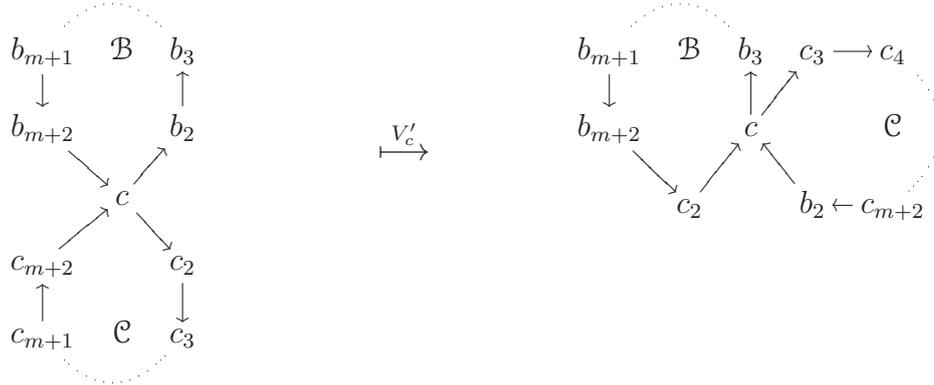
L' idée est de construire une suite d'équivalences dérivées permettant d'effacer successivement les relations (quand c'est possible) des algèbres solaires qui sont en dehors des cycles m -saturés, nous amenant ainsi à une algèbre de la forme normale (orienté ou non orienté).

Comme nous verrons dans cette section, toutes les relations d'union externes peuvent être éliminées mais les relations d'union internes ne peuvent être éliminées que par paires, une dans le sens horaire et l'autre dans le sens anti-horaire, comme pour les algèbres inclinées itérés de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Le lemme suivant sera utile par la suite et nous permet de supposer que deux cycles m -saturés quelconques peuvent être collés au sommet que nous choisissons.

Lemme 5.15. Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux cycles m -saturés. Supposons qu'ils sont collés au sommet c . En appliquant la transformation V'_c on déplace le sommet où le cycle \mathcal{B} est collé avec le cycle \mathcal{C} un cran dans le sens du cycle \mathcal{B} .

Démonstration. On applique la transformation V'_c .



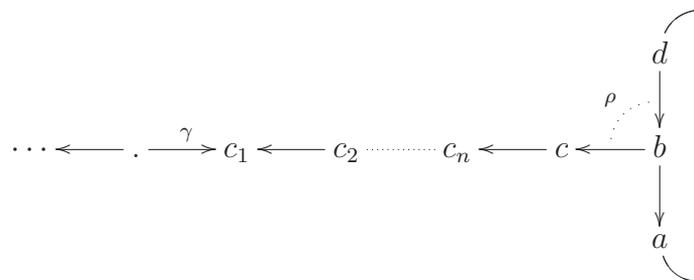
□

5.2.1 Relations d'union externes

Soit ρ une relation d'union externe et \mathcal{R} le rayon correspondant. La proposition suivante (et sa duale) nous permettent de supposer que la partie linéaire du rayon est orientée dans le même sens que la flèche qui est adjacente au cycle racine.

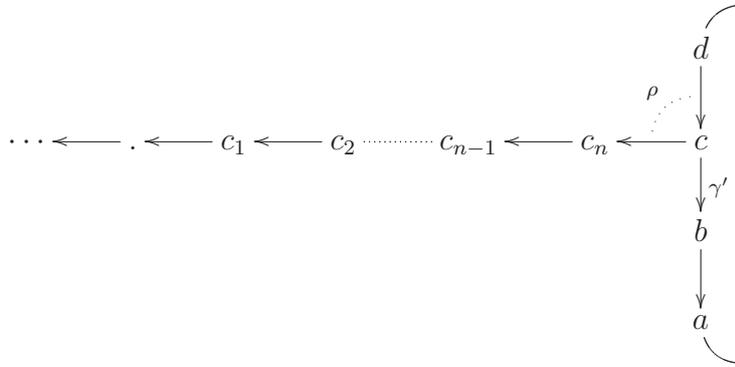
Supposons que le rayon sort du cycle. Alors nous sommes dans le cas suivant :

Lemme 5.16. Soit γ la première flèche du rayon orienté dans le sens contraire à la flèche adjacente au cycle racine. Alors, le carquois lié aimable



(où les sommets d, b et a appartiennent au cycle racine)

est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{c_n} \cdots V_{c_1}$ pour déplacer de n crans à droite la flèche γ . Finalement on applique la transformation V_c pour faire rentrer la flèche γ dans le cycle racine.

□

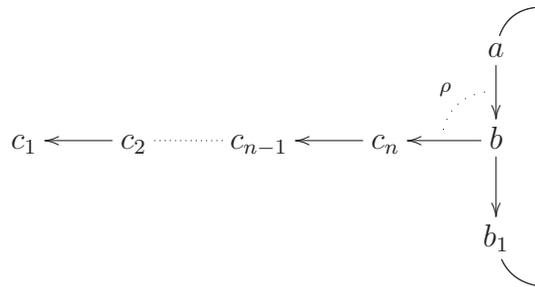
Dualement, si le rayon est entrant au cycle nous pouvons appliquer la composition de transformations $V'_c V'_{c_n} \cdots V'_{c_1}$ pour déplacer la flèche dans le sens inverse à l'intérieur du cycle racine.

Donc, on peut supposer que toutes les flèches du rayon sont orientées dans le sens de la flèche adjacente au cycle racine.

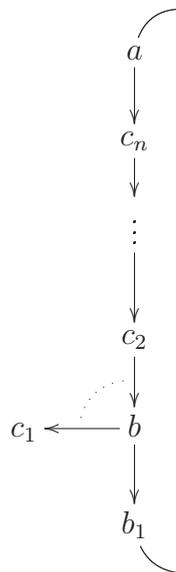
5.2.2 Comment éliminer les relations d'union externes

Maintenant, nous sommes prêts à voir comment éliminer les relations d'union externes. Commençons par une relation d'union externe dont le rayon correspondant est sortant. Si le rayon est entrant le processus est dual.

Lemme 5.17. *Le carquois lié aimable*



est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable

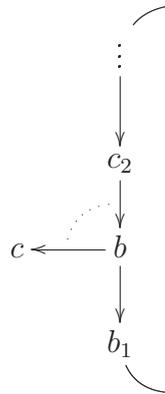


Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{c_2} \cdots V_{c_n}$ pour déplacer les flèches à l'intérieur du cycle racine.

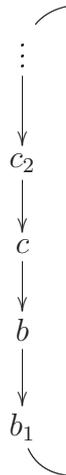
□

Enfin pour éliminer la relation d'union externe on applique le lemme suivant.

Lemme 5.18. *Le carquois lié aimable*



est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable

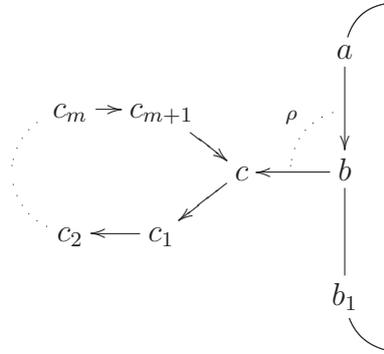


Démonstration. On applique la transformation V_c pour éliminer la relation en même temps qu'on déplace la flèche impliquée à l'intérieur du cycle racine.

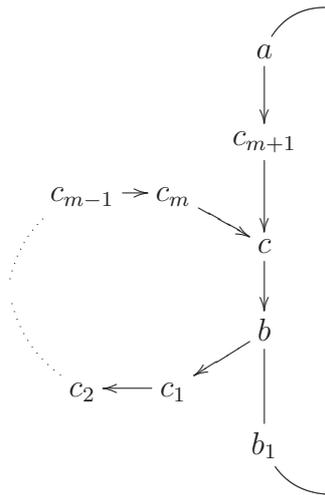
□

Par conséquent, si on a une relation d'union externe ρ dont le rayon correspondant n'a pas de cycles m -saturés, une application des lemmes 5.17 et 5.18 donne une nouvelle algèbre qui est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à la forme originale d'où nous avons éliminé la relation ρ et déplacé le rayon à l'intérieur du cycle racine. Il reste à montrer comment éliminer une relation d'union externe quand il y a des cycles m -saturés dans le rayon correspondant.

Lemme 5.19. *Le carquois lié aimable*



est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



où les cycles orientés sont m -saturés.

Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{c_{m+1}} V_c$. □

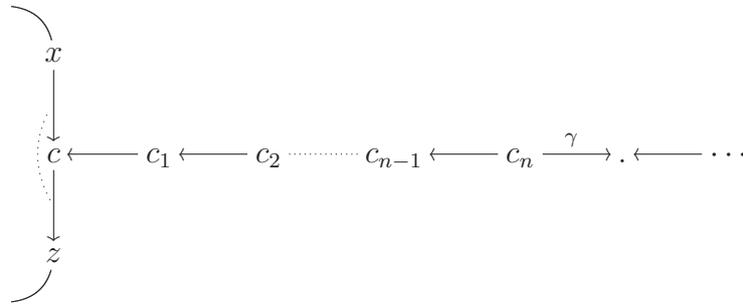
Jusqu'ici nous avons vu que toute algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre solaire sans relations d'union internes. Pour arriver à une algèbre avec la forme normale (orienté ou non orienté) nous avons besoin de déplacer tous les rayons correspondant aux relations d'union internes sur le cycle racine.

5.2.3 Relations d'union internes

Maintenant on cherche à voir que pour les relations d'union internes on peut supposer que la partie linéaire du rayon est orientée dans le même sens que la flèche qui est incidente au cycle racine.

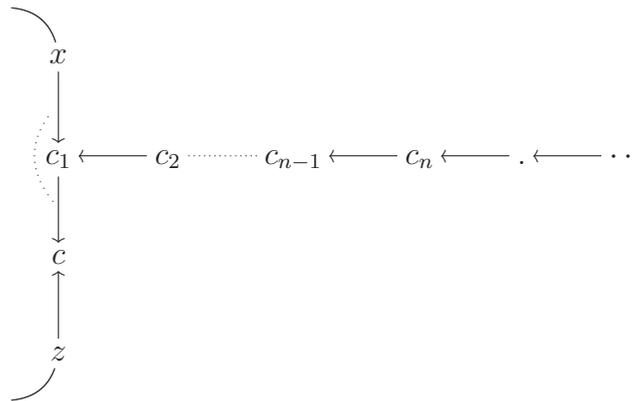
Soit ρ une relation d'union interne et \mathcal{R} le rayon correspondant. Supposons que le rayon est entrant au cycle. Donc nous sommes dans le cas suivant :

Lemme 5.20. *Soit γ la première flèche du rayon orienté dans le sens contraire à la flèche adjacente au cycle racine. Alors, le carquois lié aimable*



(où les sommets x, c et z appartiennent au cycle racine)

est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



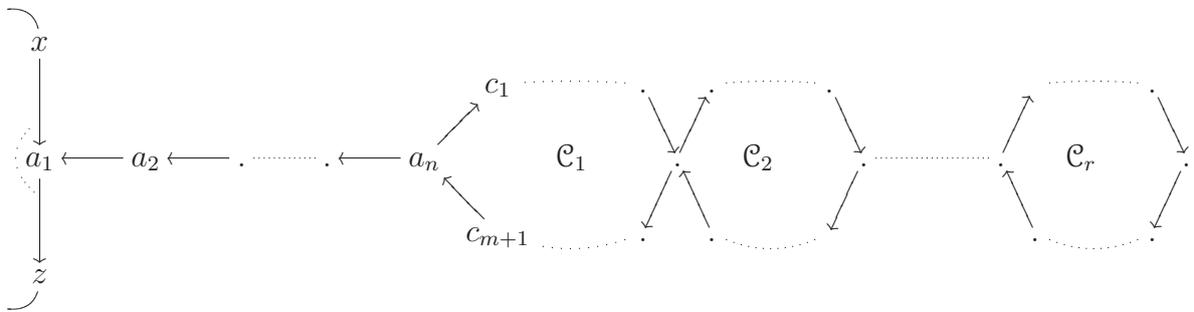
Démonstration. On applique la composition de transformations $V'_{c_1} \cdots V'_{c_n}$ pour déplacer la flèche γ de n crans vers la gauche. Finalement on applique la tranformation V'_c pour déplacer la flèche γ à l'intérieur du cycle racine.

□

Maintenant, nous sommes prêts à voir comment déplacer le rayon \mathcal{R} à l'intérieur du cycle racine.

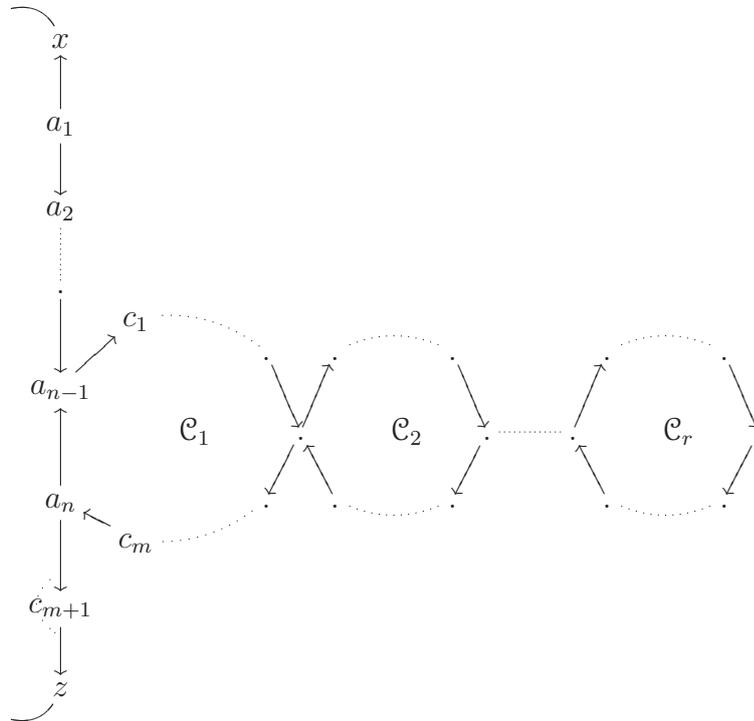
On commence avec le cas où le rayon \mathcal{R} a une partie linéaire non vide (d'après le lemme précédent on peut supposer qu'elle est toute orientée dans le même sens).

Lemme 5.21. *Le carquois lié aimable*



(où les cycles \mathcal{C}_i sont m -saturés pour tout $i \in [1, \dots, r]$ et les sommets x, a_1 et z appartiennent au cycle racine)

est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



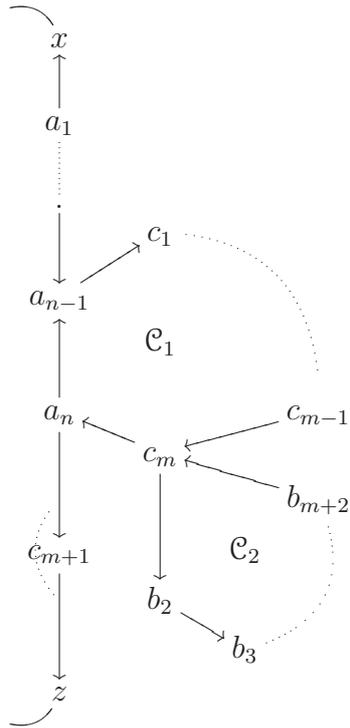
Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{a_{n-1}} \cdots V_{a_1}$ pour déplacer à l'intérieur du cycle racine la partie linéaire du rayon. Finalement on applique la transformation V_{a_n} pour déplacer le cycle m -saturé \mathcal{C}_1 à l'intérieur du cycle racine.

□

Une itération du lemme suivant nous permet de déplacer aussi les cycles $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r$ à l'intérieur du cycle racine.

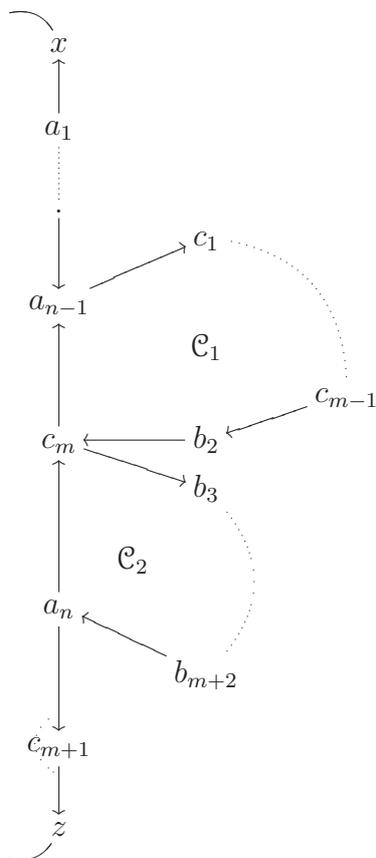
Observons auparavant qu'en vertu du lemme 5.15 on peut supposer que les cycles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont collés au sommet c_m .

Lemme 5.22. *Le carquois lié aimable*



(où les cycles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont m -saturés et les sommets x et z appartiennent au cycle racine)

est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



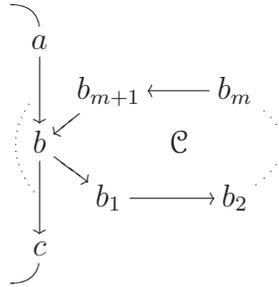
Démonstration. On applique la transformation V'_{c_m} pour déplacer le cycle m -saturé \mathcal{C}_2 à l'intérieur du cycle racine.

□

Remarque 5.23. Observons que d'après le lemme précédent quand on déplace les cycles m -saturés à l'intérieur du cycle racine tous les cycles m -saturés partagent seulement une flèche avec le cycle racine.

Il nous reste à voir le cas particulier où le rayon \mathcal{R} n'a pas une partie linéaire, c'est à dire quand le rayon a seulement des cycles m -saturés.

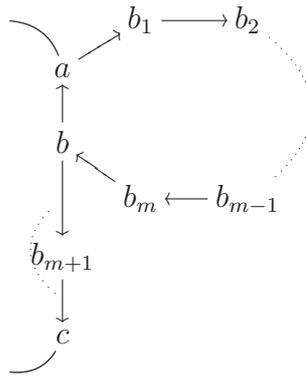
Lemme 5.24. *Le carquois lié aimable*



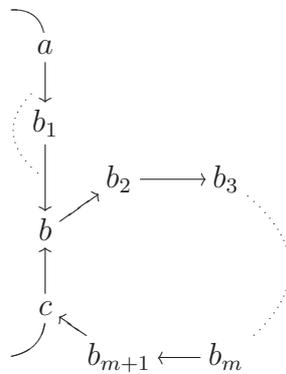
est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à un carquois lié aimable où le cycle \mathcal{C} partage une flèche avec le cycle racine.

Démonstration. Il faut discuter les différents cas.

1. S'il n'y a pas de relation (interne) impliquant le sommet a : on applique la transformation V_b pour obtenir le carquois lié



2. S'il n'y a pas de relation (interne) impliquant le sommet c : on applique la transformation V'_b pour obtenir le carquois lié

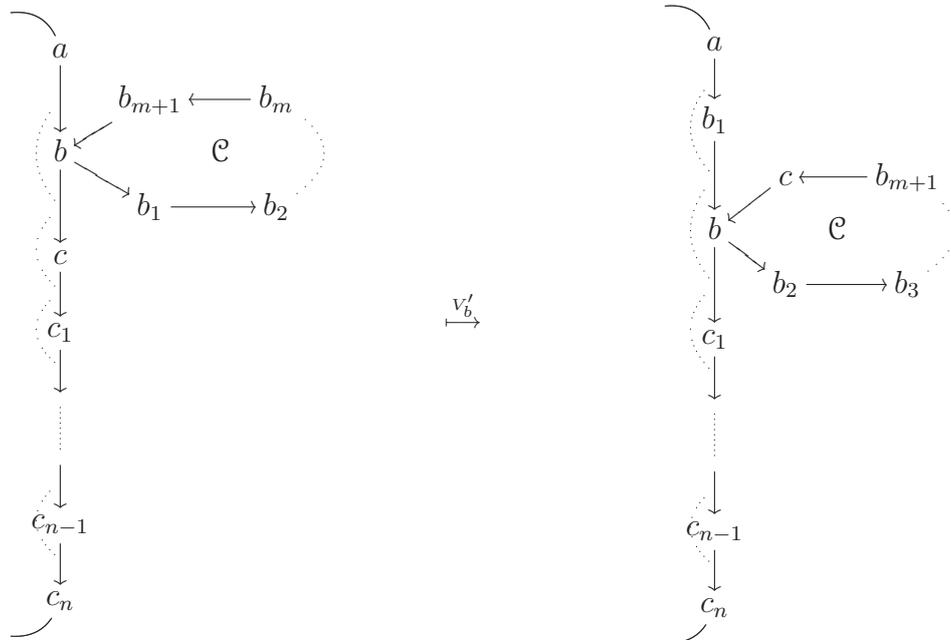


3. S'il y a des relations impliquant les sommets a et c : pour commencer, nous supposons qu'au sommet c il n'y a pas un autre cycle m -saturé \mathcal{C}' collé en c . Si c'est le cas on travaille avec le cycle \mathcal{C}' à la place du cycle \mathcal{C} .

Puisque le cycle contenant les sommets a, b et c est non orienté et non saturé, il ne peut pas y avoir de chemin orienté de c jusqu'au sommet a avec relations internes impliquant chaque sommet. Donc, il existe un sommet c_n où le chemin qui commence en c arrête d'avoir des relations internes. C'est à dire :

$$c \xrightarrow{\text{---}} c_1 \xrightarrow{\text{---}} \cdots \xrightarrow{\text{---}} c_{n-2} \xrightarrow{\text{---}} c_{n-1} \xrightarrow{\text{---}} c_n \text{ ---}$$

Maintenant on déplace le cycle \mathcal{C} jusqu'au sommet c_n en appliquant n fois la transformation V'_b :



et on arrive à une situation comme dans le cas 2.

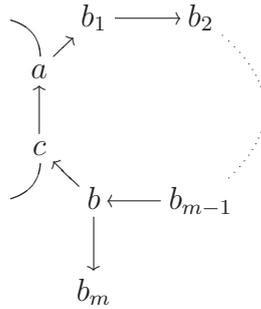
□

5.2.4 Rayons sans relations d'union

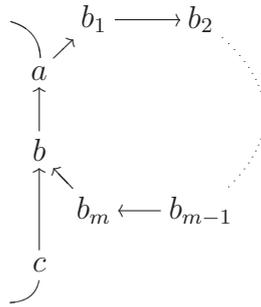
Maintenant voyons le cas où les rayons sont collés au cycle racine sans une relation d'union. C'est à dire au moyen d'un cycle m -saturé.

Une itération du lemme suivant (et son dual) et du lemme 5.22 nous permet de déplacer un tel rayon dedans le cycle racine.

Lemme 5.25. *Le carquois lié aimable*



(où le cycle est m -saturé et les sommets c et a appartiennent au cycle racine)
est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



Démonstration. On applique la transformation V'_b pour déplacer la flèche $b \rightarrow b_m$ à l'intérieur du cycle racine.

□

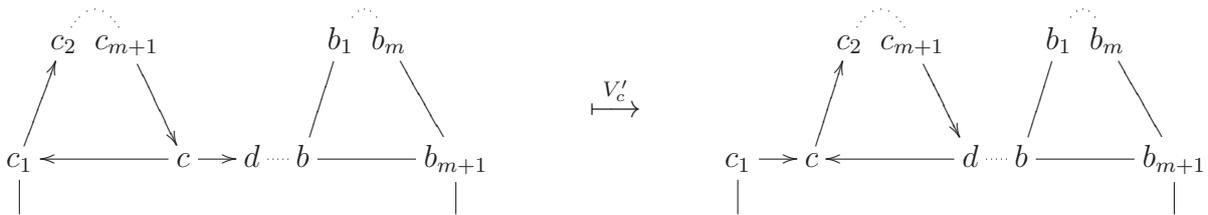
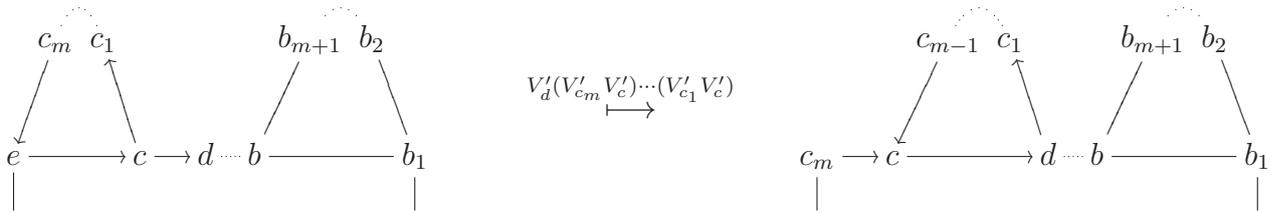
Observer que la même preuve marche si les sommets b_1, \dots, b_i ($1 \leq i \leq m-1$) appartiennent au cycle racine.

5.2.5 Comment rassembler les cycles saturés

Lemme 5.26. *Soit (Q, I) un carquois lié solaire sans rayons et avec des cycles m -saturés de sorte que chaque cycle m -saturé partage seulement une flèche avec le cycle racine. Alors*

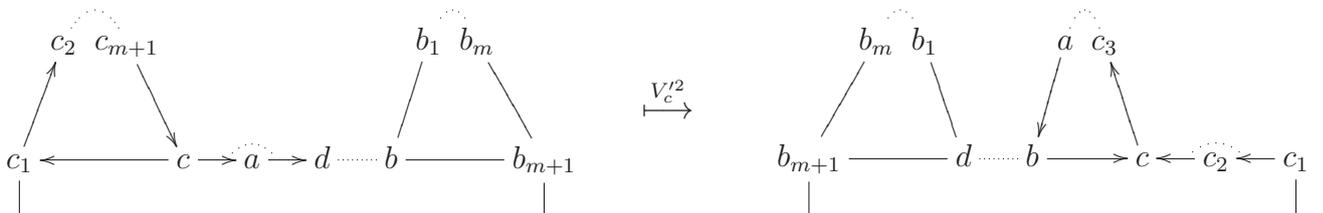
(Q, I) est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à un carquois lié où tous les cycles m -saturés sont collés deux à deux.

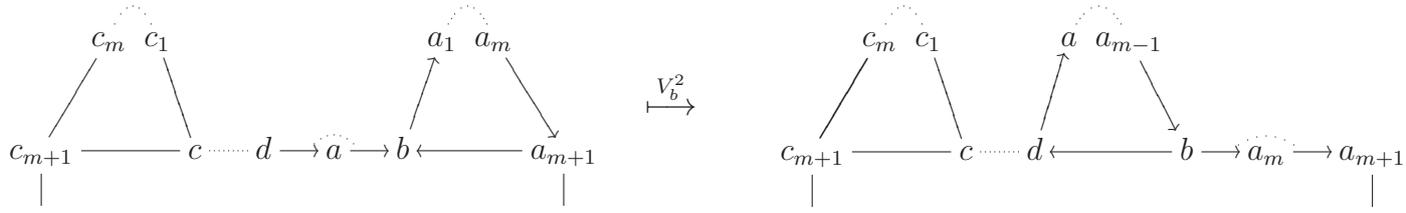
Démonstration. Supposons que nous avons deux cycles m -saturés \mathcal{C} et \mathcal{B} séparés par une partie linéaire. Si dans la partie linéaire il n'y a pas de relation impliquant la première flèche alors nous sommes dans un des cas qui se trouvent à gauche et la suite de transformations les transforment dans les carquois à droite :



(les cycles qui sont dessinés sans orientation peuvent être orientés arbitrairement).

Si par contre, dans la partie linéaire il y a une relation impliquant la première flèche alors nous sommes dans un des cas qui se trouvent à gauche et la suite de transformations les transforment dans les carquois à droite :





(les cycles qui sont dessinés sans orientation peuvent être orientés arbitrairement).

Si c'est nécessaire on peut déplacer les relations de la partie linéaire en utilisant :

$$a_{j-2} \longrightarrow a_{j-1} \xrightarrow{\quad} a_j \longrightarrow a_{j+1} \longrightarrow \xrightarrow{V_{a_{j-1}}} a_{j-2} \longrightarrow a_j \xrightarrow{\quad} a_{j-1} \longrightarrow a_{j+1} \longrightarrow$$

Alors, une itération de la procédure décrite pour chaque cas (et ses duals) nous donne l'énoncé.

□

5.2.6 Comment faire que tous les cycles saturés partagent seulement une flèche avec le cycle racine

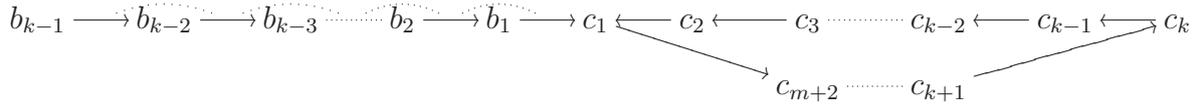
Comme nous avons vu jusqu'ici, si les cycles m -saturés se trouvent dans un rayon quand on déplace le rayon dedans le cycle racine on le fait de telle sorte que les cycles m -saturés partagent seulement une flèche avec le cycle racine. Il nous reste à voir le cas particulier où il y a des cycles m -saturés qui sont collés directement au cycle racine mais qui partagent avec lui plus d'une flèche.

Selon la remarque 4.48 nous savons que si un cycle m -saturé partage avec le cycle racine $k - 1$ flèches orientées dans le sens anti-horaire et $m + 2 - k + 1$ flèches orientées dans le sens horaire, alors on est dans un des cas suivants.

- (a) il existe au moins $k - 2$ relations strictement internes dans le sens horaire ou au moins $m + 2 - k$ relations strictement internes dans le sens anti-horaire.

(b) il existe un autre cycle m -saturé qui partage avec le cycle racine $k - 1$ flèches orientées dans le sens horaire et $m + 2 - k + 1$ flèches orientées dans le sens anti-horaire.

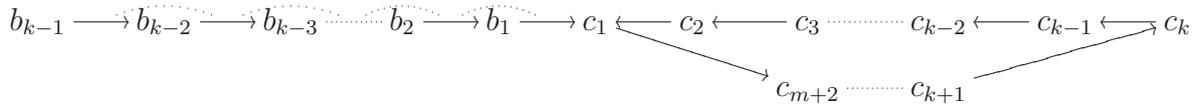
Si c'est la condition (a) qui est satisfaite, après avoir déplacé certaines flèches et certaines relations, comme on a vu précédemment, on peut supposer qu'on a la situation suivante :



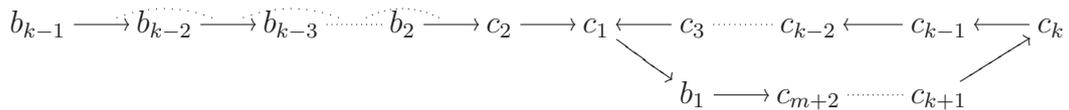
où les sommets b_{k-1} et c_k appartiennent au cycle racine.

Alors, une itération du lemme suivant nous donne le résultat cherché.

Lemme 5.27. *Le carquois lié aimable*



où le cycle est m -saturé, est équivalent pour les inclinaisons et les co-inclinaisons au carquois lié aimable



où le cycle est m -saturé.

Démonstration. On applique la composition de transformations $V_{c_2} V_{c_1}$.

□

En vertu de (l'itération de) ce lemme on peut toujours supposer que tous les cycles m -saturés, qui sont collés au cycle racine, et qui satisfont à la condition (a) partagent avec lui seulement une flèche.

Pour le cas (b) on peut supposer que les deux cycles m -saturés partagent un sommet. Alors une itération du lemme 5.15 nous donne le résultat cherché.

5.3 Algorithme pour arriver à la forme normale

Proposition 5.28. *Si A est une algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée, alors elle est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de la forme $N_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$.*

Démonstration. Le résultat suit de l'exécution de l'algorithme suivant :

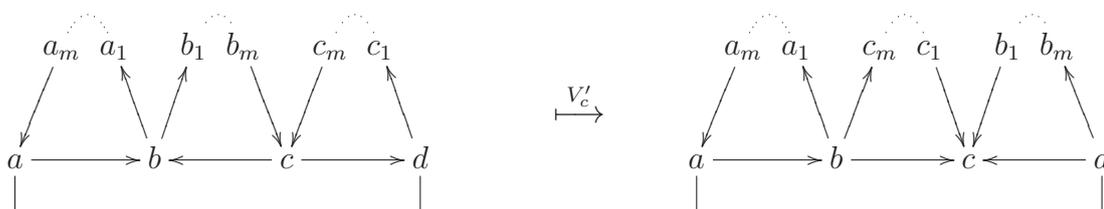
1ère étape Pour chaque relation d'union externe déplacer le rayon correspondant à l'intérieur du cycle racine au même temps qu'on élimine la relation au moyen des lemmes 5.16, 5.17, 5.18 et 5.19.

2ème étape Pour chaque relation d'union interne déplacer le rayon correspondant à l'intérieur du cycle racine au moyen des lemmes 5.20, 5.21 et 5.22.

3ème étape Pour chaque rayon sans relation d'union déplacer le rayon à l'intérieur du cycle racine au moyen des lemmes 5.25 et 5.22.

4ème étape Rassembler tous les cycles m -saturés au moyen du lemme 5.26. Cela nous donne aussi un rassemblement de la partie linéaire.

5ème étape Rassembler tous les cycles m -saturés horaires. Cela nous donne aussi un rassemblement des cycles anti-horaires :



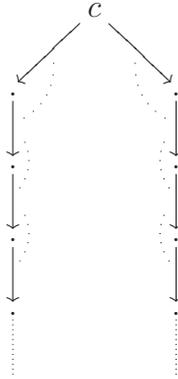
6ème étape Rassembler toutes les flèches dans le sens horaire :

$$a \longrightarrow b \longleftarrow c \longrightarrow d \xrightarrow{V'_b} a \longleftarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d$$

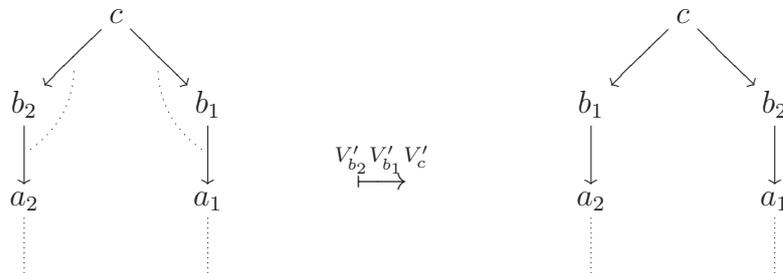
7ème étape Déplacer les relations :

$$a_{j-2} \longrightarrow a_{j-1} \longrightarrow a_j \longrightarrow a_{j+1} \longrightarrow \xrightarrow{V_{a_{j-1}}} a_{j-2} \longrightarrow a_j \longrightarrow a_{j-1} \longrightarrow a_{j+1} \longrightarrow$$

8ème étape Après avoir itéré les étapes 6ème et 7ème autant de fois que nécessaire, on peut supposer que la partie linéaire a la forme suivante

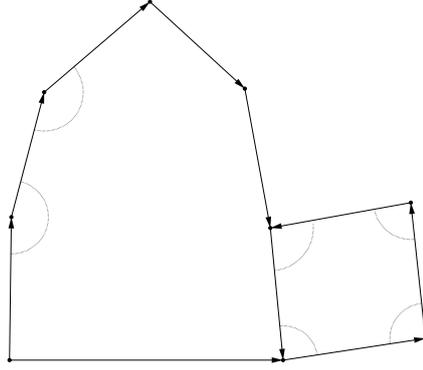


et éliminer les relations internes par paires (une dans le sens horaire avec une dans le sens anti-horaire) :



Observons qu'il n'est pas nécessaire qu'on ait le même nombre de relations dans le sens horaire que dans le sens anti-horaire. Donc, si α_h est le nombre de relations internes dans le sens horaire et α_a le nombre de relations dans le sens anti-horaire on aura finalement $|\alpha_h - \alpha_a|$ relations dans le sens où le nombre est le plus élevé.

Exemple 5.29. Soit A l'algèbre inclinée m -amassée de l'exemple 4.33-2. Alors si on applique l'algorithme vu ci-haut à A avec le cycle de longueur plus petite comme le cycle racine on obtient l'algèbre B donnée par le carquois lié suivant :



qui a deux relations dans le sens horaire et aucune relation dans le sens anti-horaire.

□

Le corollaire suivant justifie pourquoi notre algorithme finit quand on arrive à une algèbre de la forme $\tilde{N}_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$ ou $B_{k, n, t}$.

Corollaire 5.30. *Si A est une algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée, alors elle est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.*

Démonstration. Nous savons que A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre N avec la forme normale (orienté ou non orienté). Soit r le nombre de relations consécutives que l'algèbre N contient. On peut écrire $r = \alpha(m - 1) + \beta$ avec $\beta < m - 1$. La condition (c) de la définition de $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée nous dit que il y a $r + 1 + \varepsilon$ flèches qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés où

$$\varepsilon = \begin{cases} \alpha - 1, & \text{si } \beta = 0; \\ \alpha, & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Alors en utilisant la procédure décrite dans la 7ème étape de l'algorithme antérieur on peut déplacer les relations de façon à former α groupes avec $m - 1$ relations consécutives et un dernier groupe avec β relations consécutives. En plus on peut séparer chacun de ces groupes par seulement un sommet sans relations l'impliquant. Ces algèbres sont toujours inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$. □

Remarque 5.31. Nous avons vu dans la démonstration antérieure que les algèbres de la forme $\tilde{N}_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$ et $B_{k, n, t}$ sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons aux algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Un des principaux objectifs de ce chapitre est de montrer que la réciproque du corollaire 5.30 est également vraie. Ceci signifie que les algèbres qui sont dérivées équivalentes à la composante connexe des algèbres inclinées m -amassées qui contiennent le cycle non saturé sont précisément les algèbres $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées. Pour les autres composantes nous savons déjà que sont les algèbres branchées (ou plus précisément \mathbb{A} -branchées).

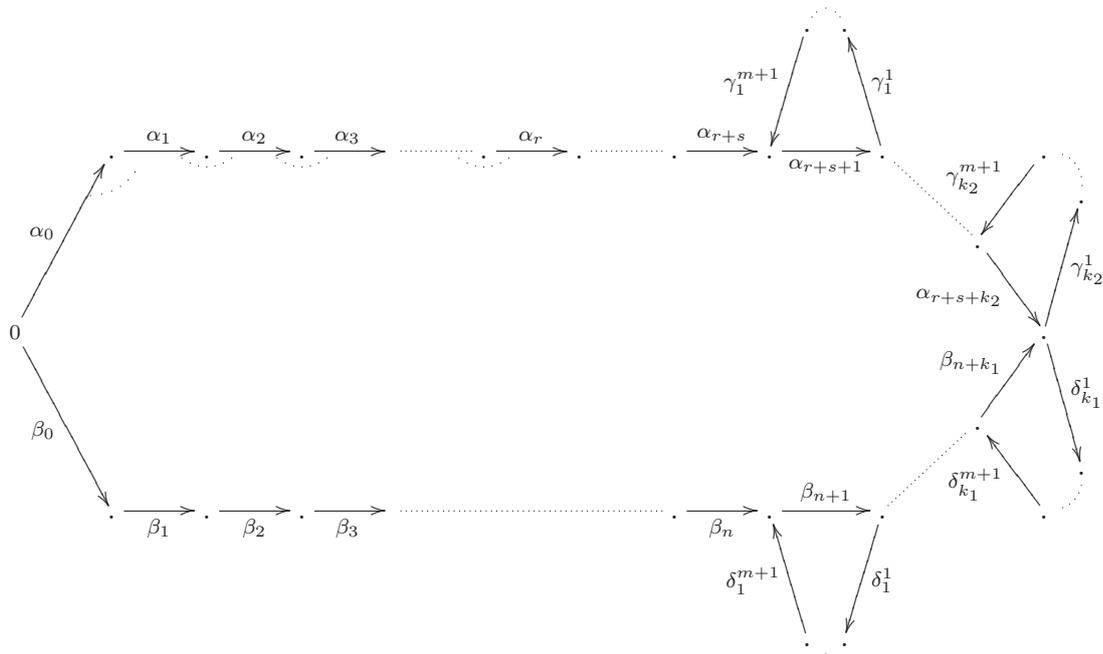
Rappelons qu'étant donné une paire $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on note $(a, b)^*$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(a, b)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Proposition 5.32. Soit $\tilde{N} = N_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$ la forme normale non orienté définie dans la section 5.2. Alors, si ϕ_N est la fonction d'Avella-Alaminos et Geiss, nous avons :

$$\phi_N = ((m-1)k_1 + n_1 + r, n_1 - k_1)^* + ((m-1)k_2 + n_2 - r, n_2 - k_2)^* + (k_1 + k_2).(0, m+2)^*$$

Démonstration. Soit (Q, I) le carquois lié associé à la forme normale non orienté. Nous allons étiqueter les flèches de Q comme suit.

Soient $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+k_1}$ les flèches du cycle non orienté irréductible dans le sens anti-horaire, où la source de β_0 est 0, l'unique source du carquois, et $\beta_{n+k_1} \dots \beta_1 \beta_0$ n'appartient pas à I . En outre, soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r+s+k_2}$ les flèches dans le sens horaire, où la source de α_0 est aussi 0, $\alpha_{r+s+k_2} \dots \alpha_{r+1} \alpha_r$ n'appartient pas à I et par contre $\alpha_i \alpha_{i-1}$ appartient à I pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ soient $\gamma_j^1, \gamma_j^2, \dots, \gamma_j^{m+1}, \alpha_j^{r+s+j}$ les $m+2$ flèches du $j^{\text{ème}}$ cycle orienté dans le sens horaire et pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, k_1\}$, soient $\delta_j^1, \delta_j^2, \dots, \delta_j^{m+1}, \beta_j^{n+j}$ les $m+2$ flèches du $j^{\text{ème}}$ cycle orienté dans le sens anti-horaire. Voir ci-dessous.



Le terme $(k_1 + k_2) \cdot (0, m + 2)^*$ suit de l'étape (3) de l'algorithme 1.13. Avant de poursuivre, rappelons que le nombre total des flèches dans le sens horaire est

$$n_2 = r + s + 1 + k_2$$

et le nombre total de flèches dans le sens anti-horaire est

$$n_1 = n + 1 + k_1$$

On commence l'algorithme avec le fil permis $H_0 = h_{s(\beta_0)}$, alors $\Pi_0 = \beta_0$ et le fil permis qui commence où le fil interdit Π_0 commence est $H_1 = \alpha_0$. On peut résumer l'algorithme dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
H_0 = h_{t(\beta_0)} & \Pi_0 = \beta_0 \\
H_1 = \alpha_0 & \Pi_1 = p_{t(\alpha_0)} \\
H_2 = \alpha_1 & \Pi_2 = p_{t(\alpha_1)} \\
\vdots & \vdots \\
H_r = \alpha_{r-1} & \Pi_r = p_{t(\alpha_{r-1})} \\
H_{r+1} = \delta_{k_1}^1 \cdot \alpha_{r+s+k_2} \cdots \alpha_r & \Pi_{r+1} = p_{t(\delta_{k_1}^1)} \\
H_{r+2} = \delta_{k_1}^2 & \Pi_{r+2} = p_{t(\delta_{k_1}^2)} \\
\vdots & \vdots \\
H_{r+m} = \delta_{k_1}^m & \Pi_{r+m} = p_{t(\delta_{k_1}^m)} \\
H_{r+m+1} = \delta_{k_1-1}^1 \cdot \delta_1^{m+1} & \Pi_{r+m+1} = p_{t(\delta_{k_1-1}^1)} \\
H_{r+m+2} = \delta_{k_1-1}^2 & \Pi_{r+m+2} = p_{t(\delta_{k_1-1}^2)} \\
\vdots & \vdots \\
H_{r+2m} = \delta_{k_1-1}^m & \Pi_{r+2m} = p_{t(\delta_{k_1-1}^m)} \\
\vdots & \vdots \\
H_{r+(k_1-1)m+1} = \delta_1^1 \cdot \delta_2^{m+1} & \Pi_{r+(k_1-1)m+1} = p_{t(\delta_1^1)} \\
H_{r+(k_1-1)m+2} = \delta_1^2 & \Pi_{r+(k_1-1)m+2} = p_{t(\delta_1^2)} \\
\vdots & \vdots \\
H_{r+k_1m} = \delta_1^m & \Pi_{r+k_1m} = p_{t(\delta_1^m)} \\
H_{r+k_1m+1} = \delta_1^{m+1} & \Pi_{r+k_1m+1} = \beta_n \\
H_{r+k_1m+2} = h_{s(\beta_n)} & \Pi_{r+k_1m+2} = \beta_{n-1} \\
\vdots & \vdots \\
H_{r+k_1m+n} = h_{s(\beta_2)} & \Pi_{r+k_1m+n} = \beta_1 \\
H_{r+k_1m+n+1} = h_{s(\beta_1)} = H_0 &
\end{array}$$

Les uniques fils interdits de longueur différente de zéro sont les flèches β . Puis, nous avons la paire $(r + k_1m + n + 1, n + 1)$, et comme $n + 1 = n_1 - k_1$, nous obtenons la paire $(r + (m - 1)k_1 + n_1, n_1 - k_1)$.

Puisque tous les fils permis n'ont pas été utilisés, nous continuons l'algorithme avec le fil permis $H_0 = \gamma_{k_2}^1 \beta_{n+k_1} \cdots \beta_0$. Le tableau suivant résume cette partie de l'algorithme.

$$\begin{array}{ll}
H_0 = \gamma_{k_2}^1 \beta_{n+k_1} \cdots \beta_0 & \Pi_0 = p_t(\gamma_{k_2}^1) \\
H_1 = \gamma_{k_2}^2 & \Pi_1 = p_t(\gamma_{k_2}^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_{m-1} = \gamma_{k_2}^m & \Pi_{m-1} = p_t(\gamma_{k_2}^m) \\
H_m = \gamma_{k_2-1}^1 \cdot \gamma_{k_2}^{m+1} & \Pi_m = p_t(\gamma_{k_2-1}^1) \\
H_{m+1} = \gamma_{k_2-1}^2 & \Pi_{m+1} = p_t(\gamma_{k_2-1}^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_{m+(m-1)} = \gamma_{k_2-1}^m & \Pi_{m+m-1} = p_t(\delta_{k_1}^m) \\
H_{2m} = \gamma_{k_1-1}^1 \cdot \gamma_1^{m+1} & \Pi_{2m} = p_t(\gamma_{k_1-1}^1) \\
\vdots & \vdots \\
H_{(k_2-1)m} = \gamma_1^1 \cdot \gamma_2^{m+1} & \Pi_{(k_2-1)m} = p_t(\gamma_1^1) \\
H_{(k_2-1)m+1} = \gamma_1^2 & \Pi_{(k_2-1)m+1} = p_t(\gamma_1^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_{(k_2-1)m+(m-1)} = \gamma_1^m & \Pi_{k_2m-1} = \alpha_{r+s} \\
H_{k_2m} = h_{s(\alpha_{r+s})} & \Pi_{k_2m} = \alpha_{r+s-1} \\
\vdots & \vdots \\
H_{k_2m+s-1} = h_{s(\alpha_{r+2})} & \Pi_{k_2m+s-1} = \alpha_{r+1} \\
H_{k_2m+s} = h_{s(\alpha_{r+1})} & \Pi_{k_2m+s} = \alpha_r \cdots \alpha_0 \\
H_{k_2m+s+1} = H_0 &
\end{array}$$

Les uniques fils interdits de longueur différente de zéro sont les s flèches α_{r+i} avec $i \in \{1, \dots, s\}$ de longueur 1 et le chemin $\alpha_r \cdots \alpha_0$ de longueur $r+1$. Alors on obtient la paire $(mk_2 + s + 1, s + r + 1)$. En utilisant l'équation $s + r + 1 = n_2 - k_2$ on peut réécrire la paire comme $((m-1)k_2 + n_2 - r, n_2 - k_2)$.

Puisque chaque fil permis a été utilisé, l'algorithme est fini. □

Corollaire 5.33. Soient $N = \tilde{N}_{n_1, k_1, n_2, k_2, r}$ et $N' = \tilde{N}_{n'_1, k'_1, n'_2, k'_2, r'}$ deux formes normales qui sont dérivées équivalentes. Alors $|r| \equiv |r'| \pmod{m}$.

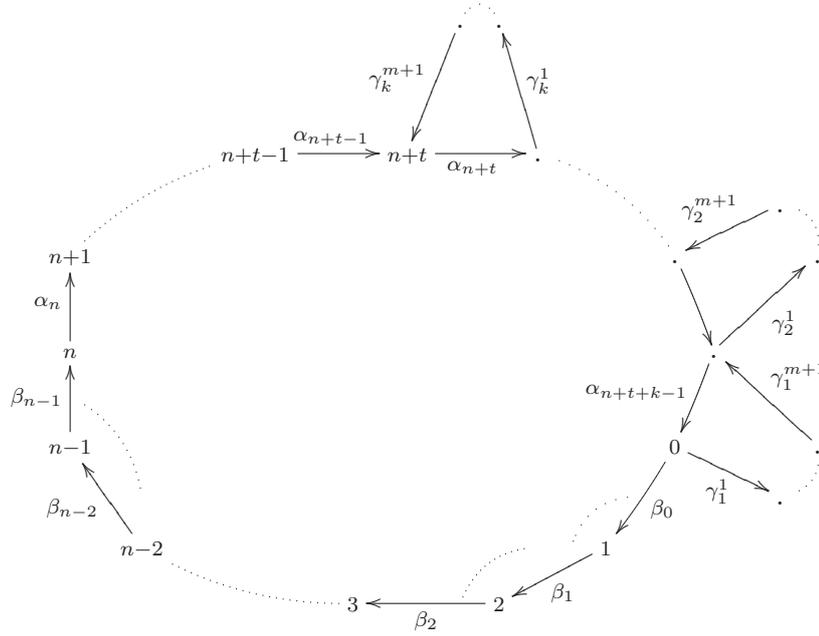
Démonstration. Comme N et N' sont dérivées équivalentes on a que $\phi_N = \phi_{N'}$. De ϕ_N on obtient, en particulier, les paires $((m-1)k_1 + n_1 + r, n_1 - k_1) = (mk_1 + r + n + 1, n + 1)$ et $((m-1)k_2 + n_2 - r, n_2 - k_2) = (mk_2 + s + 1, r + s + 1)$ et par conséquent, les nombres

$mk_1 + r + n + 1 - (n + 1) = mk_1 + r$ et $mk_2 + s + 1 - (r + s + 1) = mk_2 - r$. En faisant le même avec $\phi_{N'}$ on obtient les nombres $mk'_1 + r'$ et $mk'_2 - r'$. Si on regarde ces nombres modulo m on obtient l'ensemble $\{r, -r\}$ pour N et l'ensemble $\{r', -r'\}$ pour N' . En conséquence, $|r| \equiv |r'| \pmod{m}$ comme on voulait. \square

Proposition 5.34. *Soit $B_{k,n,t}$ la forme normale orienté définie dans la section 5.2. Alors,*

$$\phi_{B_{k,n,t}} = (n - 1, 0)^* + (t + mk + 1, n + t)^* + k \cdot (0, m + 2)^*$$

Démonstration. Soit (Q, I) le carquois lié associé à la forme normale orienté.



Alors (Q, I) a k cycles m -saturés, $n - 1$ relations $\beta_i \beta_{i-1}$ ($i \in \{1, \dots, n - 1\}$) consécutives et $n + t$ flèches qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés.

On commence l'algorithme avec le fil permis $H_0 = \beta_0 \alpha_{n+t+k-1} \cdots \alpha_n \beta_{n-1}$. Alors,

$$\begin{array}{ll} H_0 = \beta_0 \alpha_{n+t+k-1} \cdots \alpha_n \beta_{n-1} & \Pi_0 = p_1 \\ H_1 = \beta_1 & \Pi_1 = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ H_{n-2} = \beta_{n-2} & \Pi_{n-2} = p_{n-1} \\ H_{n-1} = H_0 & \end{array}$$

et on obtient la paire $(n - 1, 0)$.

On continue l'algorithme avec le fil permis $H_0 = h_n$. Donc,

$$\begin{array}{ll}
H_0 = h_n & \Pi_0 = \beta_{n-1} \cdots \beta_0 \\
H_1 = \gamma_1^1 & \Pi_1 = p_t(\gamma_1^1) \\
H_2 = \gamma_1^2 & \Pi_2 = p_t(\gamma_1^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_m = \gamma_1^m & \Pi_r = p_t(\gamma_1^m) \\
H_{m+1} = \gamma_2^1 \cdot \gamma_1^{m+1} \cdots \alpha_r & \Pi_{m+1} = p_t(\gamma_2^1) \\
H_{m+2} = \gamma_2^2 & \Pi_{m+2} = p_t(\gamma_2^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_{2m} = \gamma_2^m & \Pi_{2m} = p_t(\gamma_2^m) \\
H_{2m+1} = \gamma_3^1 \cdot \gamma_2^{m+1} & \Pi_{2m+1} = p_t(\gamma_3^1) \\
\vdots & \vdots \\
H_{(k-1)m+1} = \gamma_k^1 \cdot \gamma_{k-1}^{m+1} & \Pi_{(k-1)m+1} = p_t(\gamma_k^1) \\
H_{(k-1)m+2} = \gamma_k^2 & \Pi_{(k-1)m+2} = p_t(\gamma_k^2) \\
\vdots & \vdots \\
H_{km} = \gamma_k^m & \Pi_{km} = p_t(\gamma_k^m) \\
H_{km+1} = \gamma_k^{m+1} & \Pi_{km+1} = \alpha_{n+t-1} \\
H_{km+2} = h_{n+t-1} & \Pi_{km+2} = \alpha_{n+t-2} \\
\vdots & \vdots \\
H_{km+t} = h_{n+1} & \Pi_{km+t} = \alpha_n \\
H_{km+t+1} = h_n = H_0 &
\end{array}$$

Les uniques fils interdits de longueur différente de zéro sont les t flèches α_{n+i} avec $i \in \{0, \dots, t-1\}$ de longueur 1 et le chemin $\beta_{n-1} \cdots \beta_0$ de longueur n . Alors on obtient la paire $(t + mk + 1, n + t)$.

Puisque chaque fil permis a été utilisé, cette partie de l'algorithme est finie.

Le terme $k \cdot (0, m + 2)^*$ suit de l'étape (3) de l'algorithme.

□

Corollaire 5.35. *Les algèbres correspondants aux formes normales $B_{k,n,t}$ et $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ne sont pas dérivées équivalentes.*

Démonstration. Si $B_{k,n,t}$ est dérivée équivalente à $N = \tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ les fonctions ϕ_N et $\phi_{B_{k,n,t}}$ doivent être identiques. On verra que cela est impossible. Supposons que

$$\begin{aligned} ((m-1)k_1 + n_1 + r, n_1 - k_1) &= (t + mk + 1, n + t) \\ ((m-1)k_2 + n_2 - r, n_2 - k_2) &= (n - 1, 0) \\ k \cdot (0, m + 2) &= (k_1 + k_2) \cdot (0, m + 2) \end{aligned}$$

En outre, comme le nombre des flèches est aussi un invariant dérivé, on a l'équation

$$n_1 + n_2 = n + t + k(m + 2)$$

Alors, on a $(m-1)k_1 + n_1 + r = t + mk + 1 = n_1 + n_2 - n - 2k + 1$ et $r = n_2 - n + 1 - 2k_2 - (m+1)k_1$ d'où on obtient $n - 1 = (m-1)k_2 + n_2 - r = (m+1)(k_1 + k_2) + n - 1$ et $(m+1)(k_1 + k_2)$ doit être zéro. Donc, $k_1 = k_2 = k = 0$ et comme $n_2 - k_2 = 0$ nous obtenons $n_2 = 0$, ce qui est absurde.

Si par contre nous supposons que

$$\begin{aligned} ((m-1)k_1 + n_1 + r, n_1 - k_1) &= (n - 1, 0) \\ ((m-1)k_2 + n_2 - r, n_2 - k_2) &= (t + mk + 1, n + t) \\ k \cdot (0, m + 2) &= (k_1 + k_2) \cdot (0, m + 2) \end{aligned}$$

un calcul analogue nous donne l'absurdité $n_1 = 0$. □

Proposition 5.36. *Soit B une algèbre connexe avec un cycle racine qui est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$, alors B est $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée.*

Démonstration. Comme B est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$, nous savons que B est aimable et dérivée équivalente à une algèbre $N = \tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ou $B_{k,n,t}$ où $|r| \equiv 0$ modulo m dans le premier cas et $n - 1 \equiv 0$ modulo m (mais $n - 1 \neq 0$) dans le deuxième cas.

Supposons que la différence entre le nombre de relations internes horaires et anti-horaires pour B est r' . Alors, si on applique l'algorithme de la proposition 5.28 on obtient que B est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $\tilde{N}_{n'_1,k'_1,n'_2,k'_2,r'}$ si le cycle racine est non orienté ou à une algèbre de la forme $B_{k',r'+1,t'}$ s'il est orienté. Ensuite, si B est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $\tilde{N}_{n'_1,k'_1,n'_2,k'_2,r'}$, le corollaire 5.33 nous donne que $|r'| \equiv |r|$ modulo

m et comme N est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$, nous savons que $|r'| \equiv |r| \equiv 0$ modulo m . Maintenant supposons que B est dérivée équivalente à $B_{k',r'+1,t'}$. Il nous reste à voir que le cycle racine de B contient au moins une relation. Cela suit directement de l'égalité $\phi_B = \phi_{B_{k,n,t}}$.

Finalement, soit $r' = \alpha(m - 1) + \beta$ (avec $\beta < m - 1$) et

$$\varepsilon = \begin{cases} \alpha - 1, & \text{si } \beta = 0; \\ \alpha, & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases}$$

et supposons que $r' > 0$ (Alors, les relations se trouvent dans le sens horaire). Si on n'a pas au moins $r' + 1 + \varepsilon$ flèches qui n'appartiennent pas aux cycles m -saturés dans le sens horaire du cycle racine, alors les r' relations ne peuvent pas être séparées dans groupes avec au plus $m - 1$ relations consécutives. En conséquence, B ne peut pas être dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$. □

Finalement nous arrivons au résultat principal de ce chapitre lequel classifie toutes les algèbres connexes qui sont dérivées équivalentes à la composante connexe qui contient le cycle racine, des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Théorème 5.37. *Soit A une algèbre connexe avec un cycle racine dans son carquois, les conditions suivantes sont équivalentes*

- (a) A est une algèbre $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée .
- (b) A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre de type $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ou $B_{k,n,t}$.
- (c) A est dérivée équivalente à une algèbre de la forme $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ou $B_{k,n,t}$.
- (d) A est dérivée équivalente à une algèbre inclinée m -amassée de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Démonstration. (a) implique (b) Cela suit du corollaire 5.30.

(b) implique (c) Il a été prouvé par Happel dans [21] que, si A et B sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons, alors elles sont dérivées équivalentes.

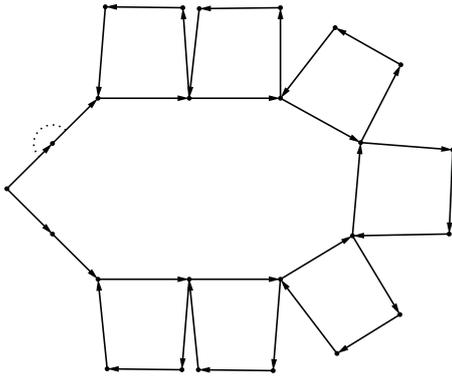
(c) implique (d) En vertu de la remarque 5.31, on sait que les algèbres de type $\tilde{N}_{n_1,k_1,n_2,k_2,r}$ ou $B_{k,n,t}$ sont équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

(d) implique (a) Suit du corollaire 5.36.

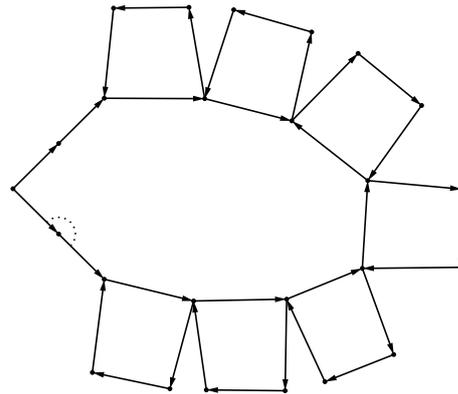
□

Maintenant voyons un exemple qui montre que l'invariant ϕ d'Avella-Alaminos et Geiss n'est pas un invariant complet dans l'ensemble des algèbres $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées. Rappelons que dans le théorème 2.41 du chapitre 2 nous avons montré que pour les algèbres branchées c'était le cas.

Exemple 5.38. Soit $m = 2$ et soient A et B des algèbres $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées qui ont la forme normale $\tilde{N}_{6,4,5,3,1}$ et $\tilde{N}_{7,5,4,2,-1}$ respectivement. Alors $\phi_A = \phi_B$ mais clairement A et B ne sont pas dérivées équivalentes.



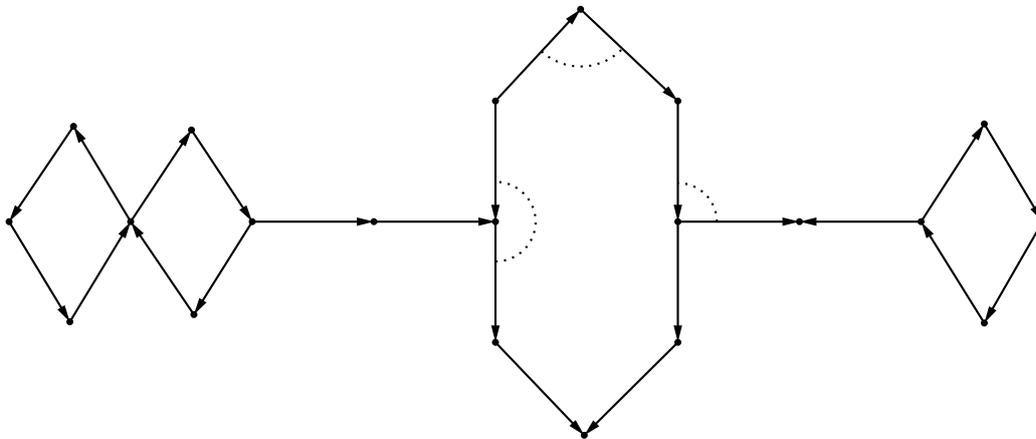
$\tilde{N}_{6,4,5,3,1}$



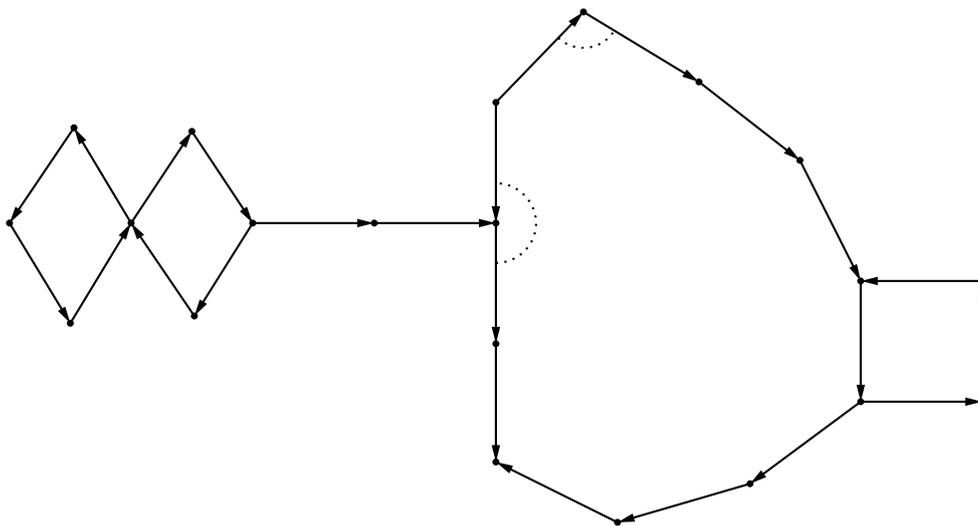
$\tilde{N}_{7,5,4,2,-1}$

Finalement voyons l'exemple suivant.

Exemple 5.39. Soit A l'algèbre solaire (en particulier $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchée) donnée par le carquois lié suivant.

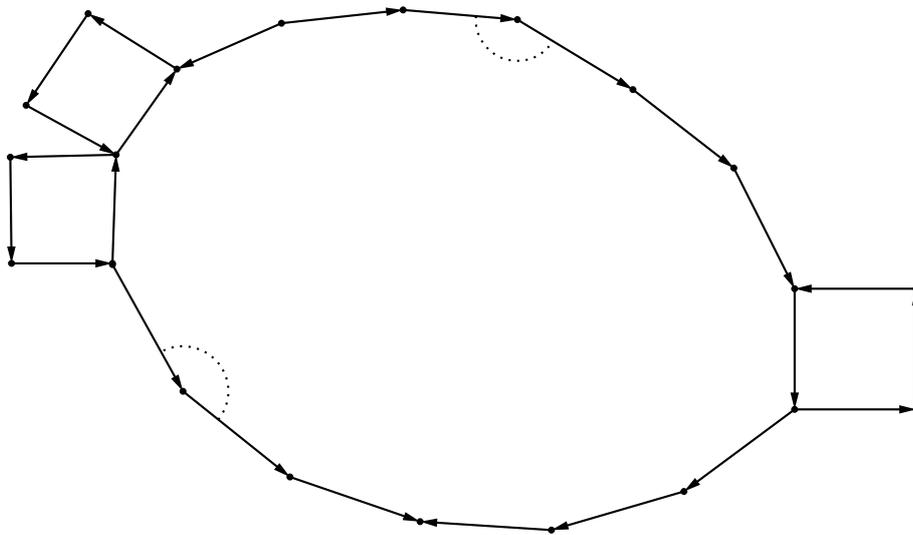


On peut éliminer la relation d'union externe en appliquant l'étape 1 de l'algorithme 5.28. Alors nous obtenons l'algèbre A' donnée par le carquois lié suivant.

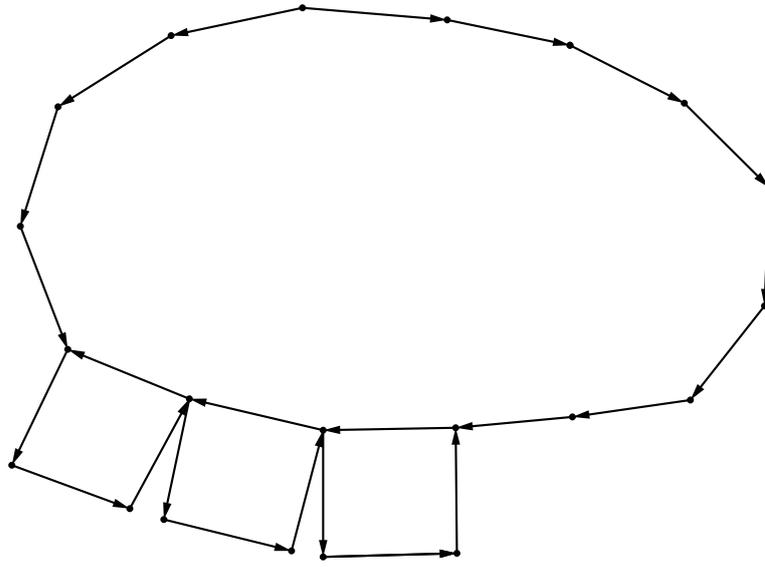


Deuxièmement on peut déplacer le rayon correspondant à la relation d'union interne en appli-

quant l'étape 2 de l'algorithme 5.28. Alors, nous obtenons l'algèbre A'' donnée par le carquois lié suivant.



Après nous rassemblons toutes les flèches dans le sens horaire et anti-horaire et les trois cycles. Finalement, nous déplaçons les relations internes (il y a une dans chaque sens) jusqu'aux sommets qui sont les buts des deux flèches qui sortent de l'unique source du carquois. Pour conclure, nous éliminons les relations internes pour obtenir l'algèbre A''' donnée par le carquois lié suivant.



Clairement A''' est une algèbre inclinée 2-amassée de type \tilde{A} .

Conclusion

Les théorèmes principaux de cette thèse donnent une caractérisation des carquois liés des algèbres de dimension finie qui sont dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées des types \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{A}}$. Notamment, nous avons vu que tous ces carquois liés sont aimables. Il serait intéressant de montrer que, comme dans le cas $m = 1$, ces types sont les uniques types pour lesquels les algèbres inclinées m -amassées sont aimables.

Dans [16] nous avons étudié la cohomologie de Hochschild de la classe des algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type \mathbb{A} . D'une façon semblable on pourra calculer la cohomologie de Hochschild pour la classe des algèbres dérivées équivalentes à des algèbres inclinées m -amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$.

Aussi, avec la caractérisation en termes de carquois liés que nous avons trouvé il semble facile d'étudier la τ -complexité des algèbres branchées et $\tilde{\mathbb{A}}$ -branchées dans le but de généraliser les résultats de Purin [25] pour les algèbres inclinées amassées.

Finalement, il reste encore le problème ouvert de trouver les algèbres inclinées m -amassées des types \mathbb{D} , $\tilde{\mathbb{D}}$, \mathbb{E} , et $\tilde{\mathbb{E}}$ et la classe des algèbres qui sont dérivées équivalentes à elles. L'approche doit être différente de celle que nous sommes utilisée ici parce que, comme les exemples le montrent, ces algèbres ne sont généralement pas aimables. En particulier on doit utiliser des invariants dérivés comme le déterminant de la matrice de Cartan qui rendent les calculs plus compliqués que l'invariant ϕ que nous avons utilisé.

Bibliographie

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras 1 : Techniques of representation theory*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] Ibrahim Assem, Thomas Brüstle, Gabrielle Charbonneau-Jodoin, and Pierre-Guy Plamondon. Gentle algebras arising from surface triangulations. *Algebra Number Theory*, 4(2) :201–229, 2010.
- [3] Ibrahim Assem and Andrzej Skowroński. Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n . *Math. Z.*, 195(2) :269–290, 1987.
- [4] Diana Avella-Alaminos and Christof Geiss. Combinatorial derived invariants for gentle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212(1) :228–243, January 2008.
- [5] Janine Bastian. Mutation classes of \tilde{A}_n quivers and derived equivalence classification of cluster tilted algebras of type \tilde{A}_n . <http://arxiv.org/abs/0901.1515>.
- [6] Karin Baur and Robert J. Marsh. A geometric description of m -cluster categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(11) :5789–5803, 2008.
- [7] Karin Baur and Robert J Marsh. A geometric description of the m -cluster categories of type D_n . *International Mathematics Research Notices*, 2007, July 2010.
- [8] Grzegorz Bobiński and Aslak Bakke Buan. The algebras derived equivalent to gentle cluster tilted algebras. *J. Algebra Appl.*, 11(1) :1250012, 26, 2012.
- [9] K. Bongartz. Tilted Algebras. In M. Auslander and E. Lluís, editors, *Representations of Algebras*, number 903 in *Lecture Notes in Mathematics*, pages 26–38, Puebla, México, 1980. Springer-Verlag.
- [10] S. Brenner and M.C.R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev Reflection Functors. *Springer Lecture Notes*, 832 :103–169, 1980.

- [11] T. Brüstle and J. Zhang. On the cluster category of a marked surface. *Algebra and Number Theory*, 5(4), 2011.
- [12] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in Mathematics*, 204(2) :572–618, August 2006.
- [13] Aslak Bakke Buan, Robert J. Marsh, and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1) :323–332 (electronic), 2007.
- [14] Aslak Bakke Buan and Hugh Thomas. Coloured quiver mutation for higher cluster categories. *Advances in Mathematics*, 222(3) :971–995, October 2009.
- [15] Aslak Bakke Buan and Dagfinn F. Vatne. Derived equivalence classification for cluster-tilted algebras of type A_n . *Journal of Algebra*, 319(7) :2723–2738, April 2008.
- [16] Juan Carlos Bustamante and Viviana Gubitosi. Hochschild cohomology and the derived class of m -cluster tilted algebras of Type \mathbb{A} . *Algebras and Representation Theory*, February 2013.
- [17] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3) :1347–1364, 2006.
- [18] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002.
- [19] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008.
- [20] S.I. Gelfand and Yu I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer, 1996.
- [21] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [22] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274 :399–443, 1982.
- [23] Bernhard Keller. On triangulated orbit categories. *Doc. Math.*, 10 :551–581, 2005.
- [24] Graham J. Murphy. Derived equivalence classification of m -cluster tilted algebras of type A_n . *Journal of Algebra*, 323(4) :920–965, February 2010.
- [25] Marju Purin. τ -Complexity of cluster tilted Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 216(4) :897–904, April 2012.

- [26] Ralf Schiffler. A geometric model for cluster categories of type \mathbb{D}_n . *Journal of Algebraic Combinatorics*, 27(1) :1–21, April 2007.
- [27] Jan Schröer and Alexander Zimmermann. Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras. *Math. Z.*, 244(3) :515–530, 2003.
- [28] Hugh Thomas. Defining an m -cluster category. *Journal of Algebra*, 318(1) :37–46, December 2007.
- [29] Hermund André Torkildsen. A geometric realization of the m -cluster category of type \tilde{A} . <http://arxiv.org/abs/1208.2138>, August 2012.
- [30] J.L. Verdier. *Catégories Dérivées*. Springer, 1977.
- [31] Bin Zhu. Generalized cluster complexes via quiver representations. *J. Algebraic Combin.*, 27(1) :35–54, 2008.